Unité de synthèse

Gérald Tenenbaum
Université de Lorraine
Faculté des sciences et technologies
Licence de Mathématiques (UFD64)
2014/2015

(19/1/2015, 16h12)
Diffusion étudiants

Table des matières

Université de Lorraine
Faculté des sciences et technologies
Licence de mathématiques 2013/2014
Unité de synthèse (UFD64)
Gérald Tenenbaum

I. Inégalités

1. Soit $\{a_j\}_{j=1}^n \in \mathbb{R}^n$. On pose $A_k := \sum_{1\leqslant j\leqslant k} a_j - \sum_{k<j\leqslant n} a_j$ $(0 \leqslant k \leqslant n)$. Calculer $A_k - A_{k-1}$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$. Montrer que

$$\min_{0\leqslant k\leqslant n} |A_k| \leqslant \max_{1\leqslant j\leqslant n} |a_j|.$$

On rappelle qu'une somme vide est nulle par convention.

2. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction convexe telle que $f(a) = f(b)$. Que peut-on dire de $f(x)$ pour $a \leqslant x \leqslant b$?

3. Soient m, M des nombres réels tels que $0 < m \leqslant M$, $n \in \mathbb{N}^*$, et $\{a_j\}_{j=1}^n \in [m, M]^n$. Montrer que

$$2n\sqrt{\frac{m}{M}} \leqslant \sum_{1\leqslant j\leqslant n} \frac{a_j}{M} + \sum_{1\leqslant j\leqslant n} \frac{m}{a_j} \leqslant n\Big(1 + \frac{m}{M}\Big), \tag{1}$$

$$n^2 \leqslant \sum_{1\leqslant j\leqslant n} a_j \sum_{1\leqslant j\leqslant n} \frac{1}{a_j} \leqslant \frac{n^2(m^2 + M^2)}{2mM}\cdot \tag{2}$$

4. En employant l'inégalité $ab \leqslant \frac{1}{4}(a + b)^2$ $(a \geqslant 0,\ b \geqslant 0)$, et l'inégalité de droite de (1), montrer que, dans les hypothèses de l'Exercice 3, nous avons

$$\sum_{1\leqslant j\leqslant n} a_j \sum_{1\leqslant j\leqslant n} \frac{1}{a_j} \leqslant \frac{n^2(M + m)^2}{4mM}\cdot$$

Est-ce une amélioration de l'inégalité de droite de (2) ?

5. Étant donnée une suite réelle finie $\{a_j\}_{j=1}^n$, on note $\{\widehat{a}_j\}_{j=1}^n$ son réarrangement croissant, de sorte que $\{\widehat{a}_{n+1-j}\}_{j=1}^n$ est son réarrangement décroissant. Montrer que, pour toutes suites finies $\{a_j\}_{j=1}^n$, $\{b_j\}_{j=1}^n$, nous avons

$$\sum_{1\leqslant j\leqslant n} \widehat{a}_j\widehat{b}_{n+1-j} \leqslant \sum_{1\leqslant j\leqslant n} a_jb_j \leqslant \sum_{1\leqslant j\leqslant n} \widehat{a}_j\widehat{b}_j.$$

On pourra observer d'abord que l'inégalité de gauche résulte de celle de droite en changeant la suite b en son opposée. Ensuite, un changement de numérotation permet de supposer la suite b croissante. Enfin, on pourra montrer que si $i < j$ et $a_i > a_j$, l'interversion des termes a_i et a_j fait croître la somme $\sum_{1\leqslant j\leqslant n} a_jb_j$.

Les exercices qui suivent font appel à la transformation d'Abel :

$$\sum_{1\leqslant j\leqslant n} a_jb_j = A_nb_n + \sum_{1\leqslant j<n} A_j(b_j - b_{j+1}) \tag{3}$$

où l'on a posé $A_j := \sum_{1\leqslant i\leqslant j} a_i$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$. Cette inégalité est particulièrement utile quand la suite b est monotone.

6. Si $\{b_j\}_{j=1}^n$ est positive et décroissante, alors :

$$b_1 \min A_j \leqslant \sum_{1\leqslant j\leqslant n} a_j b_j \leqslant b_1 \max A_j, \tag{4}$$

$$\Big|\sum_{1\leqslant j\leqslant n} a_j b_j\Big| \leqslant b_1 \max_{1\leqslant j\leqslant n} |A_j|, \tag{5}$$

$$mB_n \leqslant \sum_{1\leqslant j\leqslant n} a_j b_j \leqslant MB_n, \tag{6}$$

où l'on a posé $m := \min A_j/j$, $M := \max A_j/j$ et $B_n := \sum_{1\leqslant j\leqslant n} b_j$.

7. Soit $1 \leqslant k \leqslant n$. En considérant la suite $\{b_j\}_{j=1}^n := \{\mathbf{1}_{[1,k]}(j)\}_{j=1}^n$, montrer que dans (6) l'inégalité de droite est optimale. Établir similairement l'optimalité de l'inégalité de gauche.

8. Soit $\{a_j\}_{j=1}^n \in \mathbb{R}^n$. On pose $\Delta := \max_{1\leqslant j<n} |a_{j+1} - a_j|$, $\delta := \min_{1\leqslant j<n} |a_{j+1} - a_j|$, $A_n := \sum_{1\leqslant j\leqslant n} a_j$, $Q_n := \sum_{1\leqslant j\leqslant n} a_j^2$.

(a) Établir l'identité

$$nQ_n - A_n^2 = \tfrac{1}{2} \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} (a_i - a_j)^2.$$

(b) Montrer que

$$0 \leqslant \frac{Q_n}{n} - \frac{A_n^2}{n^2} \leqslant \tfrac{1}{12}\Delta^2(n^2 - 1). \tag{7}$$

(c) Montrer que, si la suite $\{a_j\}_{j=1}^n$ est monotone, alors

$$\frac{Q_n}{n} - \frac{A_n^2}{n^2} \geqslant \tfrac{1}{12}\delta^2(n^2 - 1). \tag{8}$$

9. *Inégalité arithmético-géométrique.* Soit $\{a_j\}_{j=1}^n \in {\mathbb{R}^+}^n$. Montrer que

$$\sqrt[n]{\textstyle\prod_{1\leqslant j\leqslant n} a_j} \leqslant \frac{1}{n} \sum_{1\leqslant j\leqslant n} a_j.$$

On pourra poser $b_j := \ln a_j$, $S := \sum_j b_j$, exprimer $\big(\sum_j a_j\big)/\sqrt[n]{\prod_{1\leqslant j\leqslant n} a_j}$ en fonction des b_j et de S et faire appel à l'inégalité $\mathrm{e}^x \geqslant 1 + x$ $(x \in \mathbb{R})$ après l'avoir démontrée.

10. Soient $\{a_j\}_{j=1}^n$, $\{b_j\}_{j=1}^n \in {\mathbb{R}^+}^n$ telles que $\min_{1\leqslant j\leqslant n}(b_j - a_j) = \delta \geqslant 0$. Montrer que

$$\sqrt[n]{\textstyle\prod_{1\leqslant j\leqslant n} b_j} \geqslant \sqrt[n]{\textstyle\prod_{1\leqslant j\leqslant n} a_j} + \delta, \tag{9}$$

On pourra étudier, grâce à l'inégalité arithmético-géométrique les variations de la fonction $\varphi(x) := \prod_{1\leqslant j\leqslant n} (a_j + x)^{1/n}$.

11. Soient $\{a_j\}_{j=1}^n$, $\{b_j\}_{j=1}^n \in \mathbb{R}^{+n}$. Montrer que

$$\sqrt[n]{\textstyle\prod_{1\leqslant j\leqslant n}(a_j+b_j)} \geqslant \sqrt[n]{\textstyle\prod_{1\leqslant j\leqslant n} a_j} + \sqrt[n]{\textstyle\prod_{1\leqslant j\leqslant n} b_j}. \tag{10}$$

On pourra montrer qu'il suffit de considérer le cas $\min_j a_j > 0$, traiter le cas $a_j = 1$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$ en faisant appel aux résultats établis à l'Exercice 10, et s'y ramener pour le cas général en posant $b_j := a_j c_j$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$.

12. Montrer que l'on a pour tout $x \in [0,1]$

$$2 \leqslant (1+x)^p + (1-x)^p \leqslant 2^p \qquad (p \geqslant 1) \tag{11}$$

$$(1+x)^p + (1-x)^p \leqslant 2^{p-1}(1+x^p) \qquad (p \geqslant 2). \tag{12}$$

13. Soient $n \in \mathbb{N}$. Établir les inégalités

$$0 \leqslant \mathrm{e}^{-t} - (1-t/n)^n \leqslant t^2\mathrm{e}^{-t}/n \qquad (n \geqslant 1,\ 0 \leqslant t \leqslant n), \tag{13}$$

$$t^2\mathrm{e}^{-t}/n^2 \leqslant \mathrm{e}^{-t} - (1-t/n)^n \qquad (n \geqslant 2,\ 0 \leqslant t \leqslant n), \tag{14}$$

$$0 \leqslant (1+t/n)^{-n} - \mathrm{e}^{-t} \leqslant t^2\mathrm{e}^{-t}/n \qquad (n \geqslant 1,\ 0 \leqslant t \leqslant \sqrt{n}). \tag{15}$$

Indications : Pour (13), on pourra montrer que $\varphi(y) := ny^2 + \mathrm{e}^{ny}(1-y)^n \geqslant 1$ sur $[0,1]$ en vérifiant que $\varphi'(y) = 0$ implique $\varphi(y) \geqslant 1$. Un raisonnement de même type pourra être employé pour établir (14). Pour montrer (15), on pourra utiliser la majoration $\sqrt{\mathrm{e}} < 2$.

14. En s'inspirant de la démonstration de l'inégalité arithmético-géométrique établie à l'Exercice 9, montrer que pour toute fonction $f \in L^1([0,1],\mathbb{R})$ nous avons

$$\mathrm{e}^{\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x} \leqslant \int_0^1 \mathrm{e}^{f(x)}\,\mathrm{d}x. \tag{16}$$

15. *Inégalité de Jensen.* On rappelle qu'une fonction convexe φ sur un intervalle fermé $[a,b]$ admet en tout point de $]a,b[$ une dérivée à droite et une dérivée à gauche et satisfait à

$$\varphi'_g(x) \leqslant \varphi'_d(x) \leqslant \frac{\varphi(y)-\varphi(x)}{y-x} \leqslant \varphi'_g(y) \leqslant \varphi'_d(y) \qquad (a < x < y < b). \tag{17}$$

Soient φ une fonction convexe sur $[a,b]$ et $f \in L^1([0,1],[a,b])$. On pose $I := \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

(a) Montrer que si $I = a$ ou $I = b$, alors f est constante presque partout sur $[0,1]$.

(b) Montrer que si $a < I < b$, alors

$$\varphi(y) - \varphi(I) \geqslant \varphi'_g(I)(y-I) \qquad (a \leqslant y \leqslant b). \tag{18}$$

(c) En spécialisant $y = f(x)$ dans (18), montrer l'inégalité de Jensen

$$\int_0^1 \varphi(f(x))\,\mathrm{d}x \geqslant \varphi(I)$$

et retrouver ainsi (16) comme cas particulier.

16. *Inégalités de Minkowski.* (i) Soit $\alpha \in]0,1]$. Montrer que, pour tous nombres positifs ou nuls a_1, a_2, ... , a_n, on a

$$\Big(\sum_{1\leqslant j\leqslant n} a_j\Big)^\alpha \leqslant \sum_{1\leqslant j\leqslant n} a_j^\alpha.$$

(ii) Montrer que, si $\alpha > 1$, l'inégalité inverse a lieu.

(iii) Montrer que, pour tout $\alpha > 1$ et pour toutes suites finies $\{a_n\}_{n=1}^N$, $\{b_n\}_{n=1}^N$ de nombres réels positifs ou nuls on a

$$\Big\{\sum (a_n+b_n)^\alpha\Big\}^{1/\alpha} \leqslant \Big\{\sum a_n^\alpha\Big\}^{1/\alpha} + \Big\{\sum b_n^\alpha\Big\}^{1/\alpha}.$$

On pourra écrire $(a_n+b_n)^\alpha \leqslant (a_n+b_n)^{\alpha-1}\{a_n+b_n\}$ $(n \geqslant 0)$ et utiliser l'inégalité de Hölder sous la forme

$$\sum_n u_n v_n \leqslant \Big\{\sum_n u_n^\alpha\Big\}^{1/\alpha}\Big\{\sum_n v_n^{\alpha/(\alpha-1)}\Big\}^{(\alpha-1)/\alpha}.$$

17. Soit $p \in [1,\infty[$. On désigne par $\ell^p(\mathbb{N})$ l'ensemble de toutes les suites complexes $x = \{x_n\}_{n=0}^\infty$ telles que $\sum_{n\geqslant 0} |x_n|^p < \infty$.

(a) Montrer que l'application $x \mapsto \|x\|_p := \big\{\sum_{n\geqslant 0} |x_n|^p\big\}^{1/p}$ est une norme sur $\ell^p(\mathbb{N})$.

(b) Montrer que $\ell^p(\mathbb{N})$ est complet pour la distance associée à cette norme.

Université de Lorraine
Faculté des sciences et technologies
Licence de mathématiques 2013/2014
Unité de synthèse (UFD64)
Gérald Tenenbaum

II. Localisation de racines

Nous nous intéressons ici à des fonctions réelles d'une variable réelle. Sauf mention contraire, ces fonctions sont supposées analytiques dans leurs intervalles respectifs de définition, c'est-à-dire qu'elles sont développables en série entière au voisinage de chaque point. Les résultats établis sont toutefois susceptibles d'être valables sous des hypothèses plus générales, comme l'existence de dérivées jusqu'à un certain ordre. Les zéros des fonctions sont systématiquement comptés avec multiplicité.

Nous considérons aussi les changements de signes de suites réelles. Nous dirons qu'un indice m est un *indice de changement* pour la suite réelle $\{a_j\}_{j=0}^{\infty}$ si l'on a soit $a_{m-1}a_m < 0$, soit $a_{m-k+1} = \ldots = a_{m-1} = 0$ et $a_{m-k}a_m < 0$ avec $m \geqslant k \geqslant 2$. Dans le premier cas le couple (a_{m-1}, a_m), et dans le second cas, le couple (a_{m-k}, a_m) constituent des *changements de signe*. Le nombre des changements de signes d'une suite finie est invariant lorsque les termes nuls sont ignorés les autres termes étant conservés dans l'ordre initial. Le cas d'une suite identiquement nulle sera tacitement exclus : une telle suite n'a aucun changement de signe.

On observera que les suites finies $\{a_j\}_{j=0}^{n}$ et $\{a_{n-j}\}_{j=0}^{n}$ ont le même nombre d'indices de changement.

18. (a) Montrer que le nombre de changements de signes d'une suite extraite d'une suite finie ne peut dépasser celui de la suite initiale. On pourra raisonner par récurrence en observant l'effet de la suppression d'un seul terme.

(b) Montrer que le nombre de changements de signes n'est pas modifié lorsque l'on insère dans la suite un terme de même signe que celui qui le précède ou celui qui le suit.

(c) Soit $\{a_j\}_{j=0}^{n}$ une suite réelle. On définit $a_{-1} = a_{n+1} = 0$ et l'on pose $b_j := a_{j-1} + a_j$ $(0 \leqslant j \leqslant n+1)$. Montrer que le nombre de changements de signes de la suite b ne dépasse pas celui de la suite a. On pourra observer que $a_{j-1}b_j + a_jb_j \geqslant 0$.

19. Soit $\{a_j\}_{j=0}^{n} \in \mathbb{R}^{n+1}$ une suite non identiquement nulle. Montrer que, si $h+1$ et $k+1$ sont deux indices de changement successifs, alors la suite des différences $\{a_{j+1} - a_j\}_{j=h}^{k}$ possède un nombre impair de changements de signes.

20. Soit $\{a_j\}_{j=0}^{n} \in \mathbb{R}^{n+1}$ une suite non identiquement nulle ayant C changements de signes. Montrer que la suite $\{a_0, a_1 - a_0, a_2 - a_1, \ldots, a_n - a_{n-1}, -a_n\} = \{a_j - a_{j-1}\}_{j=0}^{n+1}$ avec la convention $a_{-1} = a_{n+1} = 0$ possède au moins $C + 1$ changements de signes.

21. *La règle des signes de Descartes.*

(a) Montrer que, pour tous $p_j > 0$ $(0 \leqslant j \leqslant n)$, les suites réelles $\{a_j\}_{j=0}^{n}$ et $\{p_ja_j\}_{j=0}^{n}$ ont le même nombre de changements de signes.

(b) Soient P un polynôme non nul, à coefficients réels, et $\alpha > 0$. Montrer que la suite des coefficients de P et la suite des coefficients de $Q(x) := P(\alpha x)$ ont le même nombre de changements de signe.

(c) Soient $P \in \mathbb{R}[x]$, $P \neq 0$, $\alpha > 0$. Montrer que, lorsque l'on passe de $P(x)$ à $(\alpha - x)P(x)$, le nombre des changements de signe de la suite des coefficients croît strictement.

(d) Soit P un polynôme réel non nul ayant Z zéros strictement positifs et dont la suite des coefficients possède C changements de signes. Montrer que $Z \leqslant C$.

(e) Montrer que si toutes les racines de P sont réelles positives alors $C = n$.

22. *Complément à la règle des signes de Descartes.*

Soit $P(x) := \sum_{0 \leqslant j \leqslant n} a_j x^j \in \mathbb{R}[x]$. On note C le nombre des changements de signe de la suite $\{a_j\}_{j=0}^{n}$ et D celui de la suite des coefficients de $P(-x)$.

(a) Soient a_h et a_k deux coefficients non nuls consécutifs. Montrer que, si $k-h$ est impair, alors le couple (a_h, a_k) contribue d'une unité à C ou à D et que, si $k-h$ est pair, il contribue soit aux deux soit à aucun de ces nombres.

(b) En déduire que

$$C + D = \sum\nolimits^{*} 1 + \sum\nolimits^{**} \{1 - \operatorname{sgn}(a_h a_k)\}$$

où la première somme somme porte sur les couples (h, k) tels que $k-h$ est impair et la seconde sur les couples (h, k) tels que $k-h$ est pair.

(c) Montrer que, si v désigne la valuation de P (i.e. le plus petit exposant d'un monôme non nul) alors

$$n - v = \sum\nolimits^{*} (k-h) + \sum\nolimits^{**} (k-h).$$

En déduire que

$$n - v - (C + D) = \sum\nolimits^{*} (k-h-1) + \sum\nolimits^{**} \{k-h-1+\operatorname{sgn}(a_h a_k)\}$$

et donc que $C + D \leqslant n$.

(d) Supposons que P n'a que des zéros réels et notons Z^+ le nombre des zéros strictement positifs, Z^- le nombre des zéros strictement négatifs.

(i) Montrer que $n = v + Z^+ + Z^-$.

(ii) Montrer que $Z^+ - C + Z^- - D \geqslant 0$.

(iii) Montrer que $Z^- \leqslant D$ et que $Z^+ \leqslant C$.

(iv) En déduire que $Z^+ = C$.

23. Montrer que si la fonction f de variable réelle vérifie $f(x) = \sum_{n \geqslant 0} a_n (x-\alpha)^n$ pour $|x - \alpha| < \varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$, alors f est indéfiniment dérivable en $x = \alpha$ et l'on a $a_n = f^{(n)}(\alpha)/n!$ $(n \geqslant 0)$.

24. Soit f une fonction analytique réelle sur un intervalle ouvert I. On note E l'ensemble des points x de I tels que $f^{(n)}(x) = 0$ pour tout $n \geqslant 0$.

(a) Montrer que E est fermé dans I.

(b) Montrer que E est ouvert dans I.

(c) Qu'en déduisez-vous ?

25. On dit qu'une fonction f est analytique sur le segment réel $[a, b]$ s'il existe un intervalle ouvert $I \supset [a, b]$ sur lequel f est analytique.

(a) Montrer que, si f est analytique et non identiquement nulle sur le segment réel $[a, b]$, alors on peut associer à tout élément x de $[a, b]$ un nombre réel $r_x > 0$ tel que f ait au plus un zéro sur $]x - r_x, x + r_x[$.

(b) En déduire qu'une fonction analytique non identiquement nulle sur un segment réel y a un nombre fini de zéros.

26. Soit f une fonction analytique sur le segment réel $[a,b]$. On suppose $f(a)f(b) \neq 0$. Montrer que le nombre de zéros de f sur $]a,b[$ est pair ou impair selon que $f(a)f(b) > 0$ ou $f(a)f(b) < 0$.

27. *Théorème de Rolle analytique.* Si f est une fonction analytique sur le segment réel $[a,b]$, si f est de signe constant sur $]a,b[$ et si $f(a) = f(b) = 0$, alors f' possède un nombre impair de zéros sur $]a,b[$ — et donc au moins un zéro. On pourra appliquer le théorème des accroissements finis aux voisinages de a et b.

Université de Lorraine
Faculté des sciences et technologies
Licence de mathématiques 2013/2014
Unité de synthèse (UFD64)
Gérald Tenenbaum

III. Polynômes

On désigne par polynôme trigonométrique une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de la forme

$$f(\vartheta) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \mathrm{e}^{2\pi ik\vartheta}$$

où les termes de la suite $\{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ sont nuls pour k assez grand.

28. Soit f un polynôme trigonométrique.

(a) Montrer que $c_m = \displaystyle\int_0^1 f(\vartheta)\mathrm{e}^{-2\pi im\vartheta}\,\mathrm{d}\vartheta$ $(m \in \mathbb{Z})$.

(b) Montrer que deux polynômes trigonométriques sont égaux si, et seulement si, les suites de leurs coefficients coïncident.

(c) Montrer que tout polynôme trigonométrique non nul possède une représentation sous la forme $f(\vartheta) = \mathrm{e}^{-2\pi iN\vartheta}G(\mathrm{e}^{2\pi i\vartheta})$ où $G \in \mathbb{C}[X]$ vérifie $G(0) \neq 0$ et $N \in \mathbb{Z}$.

(d) Montrer que, pour tout entier naturel n, l'application $\vartheta \mapsto (\cos 2\pi\vartheta)^n$ est un polynôme trigonométrique et déterminer la fonction G correspondante.

29. *Polynômes trigonométriques à valeurs réelles.* Soit f un polynôme trigonométrique non nul, à valeurs réelles. On note G le polynôme introduit à l'Exercice 28 et N l'entier relatif associé.

(a) Montrer que $c_{-k} = \overline{c_k}$ $(k \in \mathbb{Z})$. En déduire que $N \geqslant 0$ et que

$$f(\vartheta) = \sum_{|k|\leqslant N} c_k \mathrm{e}^{2\pi ik\vartheta} \qquad (\vartheta \in \mathbb{R}).$$

(b) Montrer que $N \geqslant 0$, $\deg G = 2N$ et qu'il existe deux suites réelles $\{a_k\}_{k=0}^N$, $\{b_k\}_{k=1}^N$ telles que

$$f(\vartheta) = a_0 + \sum_{1\leqslant k\leqslant N} \{a_k \cos(2\pi k\vartheta) + b_k \sin(2\pi k\vartheta)\} \qquad (\vartheta \in \mathbb{R}).$$

Exprimer a_k et b_k en fonction de c_k pour tout $k \in [0, N]$.

(c) Montrer que $G(z) = z^{2N}\overline{G(1/\overline{z})}$ $(z \in \mathbb{C}^*)$.

(d) Montrer que $\mathrm{e}^{2\pi i\vartheta} - \mathrm{e}^{2\pi i\varphi} = 2i\mathrm{e}^{i\pi(\vartheta+\varphi)}\sin(\pi(\vartheta - \varphi))$ $(\vartheta, \varphi \in \mathbb{R})$ et en déduire que si $z = \mathrm{e}^{2\pi i\varphi}$ est une racine de G de module 1 et de multiplicité $m \geqslant 1$, alors f possède une représentation sous la forme

$$f(\vartheta) = \{\sin(\pi(\vartheta - \varphi))\}^m g(\vartheta)$$

où g est une fonction continue que l'on déterminera, satisfaisant à $g(\varphi) \neq 0$. Montrer que, si f est à valeurs positives ou nulles, alors m est un entier pair.

(e) Montrer que si w est une racine de G de multiplicité m et telle que $|w| \neq 1$, alors $w \neq 0$ et $1/\overline{w}$ est également une racine de f de même multiplicité m.

30. *Polynômes trigonométriques à valeurs réelles positives ou nulles.* Soit f un polynôme trigonométrique non nul, à valeurs réelles positives ou nulles. On conserve les notations G et N introduites à l'Exercice 28.

(a) Montrer que le polynôme G possède une décomposition sous la forme $G = \lambda UV$ où $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $U, V \in \mathbb{C}[X]$ et

$$U(X) = \prod_{1\leqslant j\leqslant r} (X - \mathrm{e}^{2\pi i\varphi_j})^{2m_j}, \quad r \in \mathbb{N}, \quad \{\varphi_j\}_{j=1}^r \in \mathbb{R}^r, \quad \varphi_i - \varphi_j \notin \mathbb{Z} \quad (i \neq j),$$

$$V(X) = \prod_{1\leqslant j\leqslant s} (X - w_j)^{n_j}(X - 1/\overline{w_j})^{n_j}, \ s \in \mathbb{N}, \quad \{w_j\}_{j=1}^s \in D(0,1)^s, \ w_i \neq w_j \ (i \neq j),$$

$$\sum_{1\leqslant j\leqslant r} m_j + \sum_{1\leqslant j\leqslant s} n_j = N.$$

(b) Établir l'identité

$$|(\mathrm{e}^{2\pi i\vartheta} - z)(\mathrm{e}^{2\pi i\vartheta} - 1/\overline{z})| = |\mathrm{e}^{2\pi i\vartheta} - z|^2/|z| \qquad (\vartheta \in \mathbb{R},\ z \in \mathbb{C}^*).$$

(c) Établir l'existence d'un polynôme trigonométrique h tel que $f(\vartheta) = |h(\vartheta)|^2$ $(\vartheta \in \mathbb{R})$.

31. *Polynômes trigonométriques à valeurs réelles positives ou nulles (complément).* Soit f un polynôme trigonométrique non constant, à valeurs réelles positives ou nulles. On conserve les notations introduites aux Exercices 28 et 30 et l'on pose $M := \sup_{0\leqslant\vartheta\leqslant 1} f(\vartheta)$.

(a) Montrer que $0 < M < \infty$.

(b) Notant $h(\vartheta) = Q(\mathrm{e}^{2\pi i\vartheta})$ le polynôme trigonométrique introduit à l'Exercice 30(c) avec $Q(X) := \sum_{0\leqslant j\leqslant N} \gamma_j X^j$, montrer que $c_0 = \sum_{0\leqslant j\leqslant N} |\gamma_j|^2$, $c_N = \overline{\gamma_0}\gamma_N$. En déduire que $c_0 \geqslant 2|\gamma_0\gamma_N|$.

(c) En appliquant le résultat précédent au polynôme trigonométrique $F(\vartheta) := M - f(\vartheta)$, montrer que $M \geqslant 4|c_N|$.

(d) Montrer que l'on a $M = 4|c_N|$ si, et seulement si, $|\gamma_0| = |\gamma_N|$ et $\gamma_j = 0$ $(1 \leqslant j < N)$.

32. *Polynômes de Tchébychev.* Définissons la suite $\{T_n\}_{n=0}^\infty$ des polynômes de Tchébychev par $T_n(\cos\vartheta) = \cos(n\vartheta)$ $(\vartheta \in \mathbb{R})$. Posons par ailleurs $f_\vartheta(r) := |1 - r\mathrm{e}^{i\vartheta}|^2$.

(a) En écrivant $f_\vartheta(r) = (1 - r\mathrm{e}^{i\vartheta})(1 - r\mathrm{e}^{-i\vartheta})$, montrer que

$$\frac{1}{f_\vartheta(r)} = \sum_{n\geqslant 0} \frac{\sin(n+1)\vartheta}{\sin\vartheta} r^n.$$

(b) En écrivant $f_\vartheta(r) = 1 - (2r\cos\vartheta - r^2)$, montrer que l'on a, pour $r > 0$ assez petit,

$$\frac{1}{f_\vartheta(r)} = \sum_{n\geqslant 0} r^n \sum_{0\leqslant \ell\leqslant n/2} (-1)^\ell \binom{n-\ell}{\ell} (2\cos\vartheta)^{n-2\ell}.$$

(c) Montrer que

$$2\cos n\vartheta = \frac{\sin(n+1)\vartheta}{\sin\vartheta} - \frac{\sin(n-1)\vartheta}{\sin\vartheta} \quad (n \geqslant 0).$$

(d) Établir la formule

$$T_n(x) = \tfrac{1}{2} \sum_{0\leqslant m\leqslant n/2} (-1)^m \frac{n}{n-m} \binom{n-m}{m} (2x)^{n-2m} \qquad (n \geqslant 0).$$

33. *Un problème extrémal.* Pour $n \geqslant 1$, soit E_n le sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}[X]$ constitué des polynômes degré au plus n et A_n le sous-ensemble de E_n constitué des polynômes unitaires. Posant $\|P\|_\infty := \sup_{-1 \leqslant x \leqslant 1} |P(x)|$ $(P \in E_n)$, on se propose ici de déterminer $\lambda_n := \inf_{P \in A_n} \|P\|_\infty$.

(a) Montrer que $P \mapsto \|P\|_\infty$ est une norme sur E_n. En déduire que $\lambda_n > 0$. On pourra utiliser le fait que dans un espace de dimension finie toutes les normes sont équivalentes et considérer la norme $\|P\| := \sup_{0 \leqslant j \leqslant n} |a_j|$ où $P(x) := \sum_{0 \leqslant j \leqslant n} a_j x^j$.

(b) Soit $S_n(x) := T_n(x)/2^{n-1}$. Montrer que $S_n \in A_n$ et $\|S_n\|_\infty = 1/2^{n-1}$.

(c) On pose $x_k := \cos(k\pi/n)$ $(0 \leqslant k \leqslant n)$. Calculer $T_n(x_k)$ pour $0 \leqslant k \leqslant n$.

(d) Soit $P \in A_n \cap \mathbb{R}[X]$ montrer que $\|P\|_\infty \geqslant 1/2^{n-1}$. On pourra raisonner par l'absurde, considérer $Q := S_n - P$ et montrer que $\operatorname{sgn}\big(Q(x_k)\big) = (-1)^k$ $(0 \leqslant k \leqslant n)$.

(e) Soit $P \in A_n$. Montrer que $\|P\|_\infty \geqslant 1/2^{n-1}$. On pourra considérer le polynôme dont les coefficients sont les parties réelles de ceux de P.

34. *Un problème extrémal (complément).* On conserve les notations de l'Exercice 33. On cherche ici à résoudre dans A_n l'équation $\|P\|_\infty = \lambda_n$. Étant donnée une solution $P \in A_n$, $P(x) = \sum_{0 \leqslant j \leqslant n} a_j x^j$, on définit $R(x) := 2^n x^n P\Big(\dfrac{x + 1/x}{2}\Big)$.

(a) Montrer que $\deg R = 2n$ et que, notant $R(x) = \sum_{0 \leqslant j \leqslant 2n} b_j x^j$, on a $b_{2n} = b_0 = 1$.

(b) Montrer que $R(\mathrm{e}^{2\pi i\vartheta}) = 2^n \mathrm{e}^{2\pi i n\vartheta} P(\cos(2\pi\vartheta))$ $(\vartheta \in \mathbb{R})$ et que $\sup_{\vartheta \in \mathbb{R}} |R(\mathrm{e}^{2\pi i\vartheta})| = 2$.

(c) En faisant appel au résultat établi à l'Exercice 31(d), montrer que $R(X) = X^{2n} + 1$.

(d) Montrer que $P = S_n$.

35. *Une autre propriété des polynômes trigonométriques positifs ou nuls.* Conservant les notations des Exercices 28 et 29, montrer que, si f est un polynôme trigonométrique à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ alors $c_0 \geqslant 2|c_N|$ et établir que le seul cas d'égalité est $f(\vartheta) = c_0\{1 + \cos(2\pi N(\vartheta - \varphi))\}$ avec $\varphi \in \mathbb{R}$. On pourra utiliser le résultat établi à l'Exercice 31(b).

36. Soit $P(z) = \sum_{0 \leqslant j < n} a_j z^j + z^n$ un polynôme unitaire à coefficients complexes. On pose $\|P\|_\infty := \max_{|z|=1} |P(z)|$. En considérant le polynôme trigonométrique

$$f(\vartheta) := 1 + \Re e\,\{\mathrm{e}^{2\pi i\vartheta} P(\mathrm{e}^{2\pi i\vartheta})\}/\|P\|_\infty,$$

montrer que $\|P\|_\infty \geqslant 1$ et établir que le seul cas d'égalité est $P(z) = z^n$.

Université de Lorraine
Faculté des sciences et technologies
Licence de mathématiques 2013/2014
Unité de synthèse (UFD64)
Gérald Tenenbaum

IV. La méthode de Laplace

37. Soient $\{a_j\}_{j=1}^k$, $\{p_j\}_{j=1}^k$, deux suites de nombres réels strictement positifs. Établir les formules

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sum_{1\leqslant j\leqslant k} p_j a_j^n} = \max_{1\leqslant j\leqslant k} a_j, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{1\leqslant j\leqslant k} p_j a_j^{n+1}}{\sum_{1\leqslant j\leqslant k} p_j a_j^n} = \max_{1\leqslant j\leqslant k} a_j\,.$$

38. Soit $P(x)$ un polynôme à coefficients complexes et dont les zéros $\{a_j\}_{j=1}^k$ sont réels, strictement positifs. On définit une suite $\{c_n\}_{n=0}^\infty$ par la formule

$$\frac{-P'(x)}{P(x)} = \sum_{n\geqslant 0} c_n x^n,$$

où la série converge pour $|x|$ assez petit.

(a) Exprimer les c_n en fonction des a_j et montrer que la série converge effectivement dans un voisinage convenable de l'origine.

(b) On suppose ici que $a_1 := \min_{1\leqslant j\leqslant k} a_j$. Calculer $\lim_{n\to\infty} 1/\sqrt[n]{c_n}$ et $\lim_{n\to\infty} c_{n-1}/c_n$.

39. Soient φ, f deux fonctions définies continues, et strictement positives sur un intervalle réel $[a,b]$. Calculer

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\int_a^b \varphi(x) f(x)^n \,\mathrm{d}x}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\int_a^b \varphi(x) f(x)^{n+1}\,\mathrm{d}x}{\int_a^b \varphi(x) f(x)^n\,\mathrm{d}x}.$$

40. Soient $k>0$, $0<a<b$. Montrer que, pour tout $\xi \in]a,b[$ on a

$$\int_a^b \mathrm{e}^{-kn(x-\xi)^2}\,\mathrm{d}x \sim \sqrt{\frac{\pi}{kn}} \qquad (n\to\infty).$$

41. Soient φ et h des fonctions réelles définies sur un intervalle réel I fini ou non et satisfaisant aux conditions suivantes :

(i) $\int_I |\varphi(t)\mathrm{e}^{xh(t)}|\,\mathrm{d}t < \infty$ $(x \geqslant 1)$;

(ii) h atteint son maximum sur I en un unique point $\tau \in \mathring{I}$; de plus, pour tout $\delta>0$, il existe $b_\delta>0$ tel que $\sup_{t\in J_\delta} h(t) < h(\tau) - b_\delta$ pour $J_\delta := I \smallsetminus [\tau-\delta, \tau+\delta]$;

(iii) il existe un voisinage de τ où $h''(t)$ est définie et continue et vérifie $h''(\tau)<0$;

(iv) φ est continue en τ, $\varphi(\tau)\neq 0$.

Le but du problème consiste à établir la formule asymptotique

$$\int_I \varphi(t)\mathrm{e}^{xh(t)}\,\mathrm{d}t \sim \varphi(\tau)\mathrm{e}^{xh(\tau)}\sqrt{\frac{2\pi}{x|h''(\tau)|}} \qquad (x\to\infty). \tag{19}$$

(a) Soit $\delta > 0$. Montrer que

$$\int_{J_\delta} |\varphi(t)| \mathrm{e}^{xh(t)} \, \mathrm{d}t \leqslant \mathrm{e}^{(x-1)\{h(\tau)-b_\delta\}} \int_I |\varphi(t)| \mathrm{e}^{h(t)} \, \mathrm{d}t \quad (x \geqslant 1).$$

(b) Montrer que $h'(\tau) = 0$.
(c) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$(1+\varepsilon)\tfrac{1}{2}h''(\tau)(t-\tau)^2 \leqslant h(t) - h(\tau) \leqslant (1-\varepsilon)\tfrac{1}{2}h''(\tau)(t-\tau)^2 \qquad (|t-\tau| \leqslant \delta).$$

(d) Montrer que, pour tout $\delta > 0$, il existe $k_\delta > 0$ tel que

$$\int_{-\delta}^{\delta} \mathrm{e}^{(1\pm\varepsilon)xh''(\tau)u^2/2} \, \mathrm{d}u = \sqrt{\frac{2\pi}{(1\pm\varepsilon)x|h''(\tau)|}} + O\big(\mathrm{e}^{-k_\delta x}\big) \qquad (x \to \infty).$$

(e) Conclure

42. Une formule de Laplace permet d'exprimer le polynôme de Legendre d'indice n sous la forme intégrale

$$P_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \big(x + \sqrt{x^2-1}\cos t\big)^n \, \mathrm{d}t.$$

Montrer que, pour $x > 1$,

$$P_n(x) \sim \frac{\big(x+\sqrt{x^2-1}\big)^{n+1/2}}{\sqrt{2n\pi}\sqrt[4]{x^2-1}} \qquad (n \to \infty).$$

43. *Formule de Stirling.* Montrer que

$$n! = \Gamma(n+1) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-y} y^n \, \mathrm{d}y \sim n^n \mathrm{e}^{-n} \sqrt{2\pi n} \qquad (n \to \infty).$$

On pourra effectuer le changement de variables $y = nt$.

44. Soit $\alpha \in]0,1[$, $\beta := 1/(1-\alpha)$. Montrer que

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-y\xi + y^\alpha/\alpha} \, \mathrm{d}y \sim \sqrt{2\pi\beta}\,\xi^{-(\beta+1)/2} \mathrm{e}^{\xi^{1-\beta}/(\beta-1)} \qquad (\xi \to 0+).$$

On pourra effectuer le changement de variables défini par $y = (1+t)\xi^{-\beta}$.

45. Soit $\alpha > 0$. Montrer que

$$\int_0^\infty y^{-\alpha y} x^y \, \mathrm{d}y \sim \sqrt{\frac{2\pi}{\mathrm{e}\alpha}} x^{1/(2\alpha)} \exp\big\{\alpha x^{1/\alpha}/\mathrm{e}\big\} \qquad (x \to \infty).$$

On pourra effectuer le changement de variable défini par $y = (1+t)x^{1/\alpha}/\mathrm{e}$.

Université de Lorraine
Faculté des sciences et technologies
Licence 2013/2014
Unité de synthèse (UFD64) TD1

vendredi 4 avril 2014
Durée : 1h

Sujet d'examen partiel

Aucun document n'est autorisé. L'usage d'une calculatrice est interdit. Sauf mention contraire, les notations sont celles du cours.

Il sera tenu le plus grand compte de la rédaction et de la présentation. Seules les explications claires et précises seront prises en compte à la correction.

Soient a_1, $a_2, \dots, a_n$ des nombres réels strictement positifs.

(a) Montrer que, pour toute fonction convexe $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, on a

$$(*) \qquad h\Big(\frac{1}{n} \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} a_j\Big) \leqslant \frac{1}{n} \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} h(a_j).$$

On pourra raisonner par récurrence sur n.

(b) On pose

$$M_t := \frac{1}{n} \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} a_j^t \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Donner un développement limité à l'ordre 1 de M_t lorsque t tend vers 0.

(c) On pose

$$\psi(t) := M_t^{1/t} \qquad (t \neq 0).$$

Montrer que $t \mapsto \psi(t)$ peut être prolongée en une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

(d) En appliquant $(*)$ à une fonction h convenablement choisie et pour un choix judicieux des a_j, montrer que, si $t > 0$, $s > 1$, on a $\psi(t) \leqslant \psi(st)$. Montrer similairement que $\psi(-st) \leqslant \psi(-t)$.

(e) Montrer que ψ est croissante sur $\mathbb{R}$. Calculer $\psi(-\infty)$, $\psi(-1)$, $\psi(0)$, $\psi(1)$ et $\psi(+\infty)$.

Université de Lorraine
Faculté des sciences et technologies
Licence 2013/2014
Unité de synthèse (UFD64) TD2

mardi 8 avril 2014
Durée : 1h

Sujet d'examen partiel

Aucun document n'est autorisé. L'usage d'une calculatrice est interdit. Sauf mention contraire, les notations sont celles du cours.

Les trois parties sont indépendantes.

Il sera tenu le plus grand compte de la rédaction et de la présentation. Seules les explications claires et précises seront prises en compte à la correction.

I. Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des nombres réels strictement positifs. On désigne par M_n la moyenne arithmétique des a_j, par G_n leur moyenne géométrique, et par

$$H_n := \frac{n}{\sum_{1 \leqslant j \leqslant n} 1/a_j}$$

leur moyenne harmonique.

Montrer que $H_n \leqslant G_n \leqslant M_n$. On pourra rappeler la preuve vue en cours de l'inégalité $G_n \leqslant M_n$ et appliquer le résultat à une suite bien choisie pour établir l'inégalité $H_n \leqslant G_n$.

II. (a) Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe de classe $\mathcal{C}^2$. Montrer que la dérivée φ' est une fonction croissante.

(b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ la quantité $h_x(t) := \varphi(x-t) + \varphi(x+t)$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$. En déduire que $h_x(s) \leqslant h_x(t)$ si $|s| \leqslant |t|$.

(c) Soit $\{a_j\}_{j=1}^n$ une suite décroissante de nombres réels positifs. On pose

$$b_k := \sum_{1 \leqslant j \leqslant k} a_j \quad (0 \leqslant k \leqslant n).$$

Soit alors $k \in [1, n]$. On définit x, s, et t par les équations

$$x - s = ka_k, \quad x + s = b_{k-1}, \quad x - t = (k-1)a_k, \quad x + t = b_k.$$

Montrer que ces équations sont compatibles, puis que $|s| \leqslant t$ et en déduire que

$$\varphi(ka_k) - \varphi((k-1)a_k) \leqslant \varphi(b_k) - \varphi(b_{k-1}).$$

(d) Montrer que $\varphi(0) + \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \big\{\varphi(ka_k) - \varphi((k-1)a_k)\big\} \leqslant \varphi(b_n)$.

Université de Lorraine
Faculté des sciences et technologies
Licence 2013/2014
Unité de synthèse (UFD64)

mardi 2 juin 2014
Durée : 2h

Sujet d'examen

Aucun document n'est autorisé. L'usage d'une calculatrice est interdit. Sauf mention contraire, les notations sont celles du cours.

Il sera tenu le plus grand compte de la rédaction et de la présentation. Seules les explications claires et précises seront prises en compte à la correction.

I. (a) On pose

$$I_n := \int_0^2 \frac{\mathrm{e}^t t^n}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Évaluer $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{I_n}$ lorsque $n \to \infty$. On pourra soit donner une démonstration succincte, soit citer convenablement un résultat général établi en cours.

(b) Soient φ et h des fonctions réelles définies sur un intervalle réel I fini ou non. On suppose que h atteint son maximum sur I en un unique point τ de $\mathring{I}$. Énoncer les conditions suffisantes vues en cours pour la validité de la formule asymptotique

$$\int_I \varphi(t)\mathrm{e}^{xh(t)}\,\mathrm{d}t \sim \varphi(\tau)\mathrm{e}^{xh(\tau)}\sqrt{\frac{2\pi}{x|h''(\tau)|}} \qquad (x \to \infty). \tag{1}$$

(c) Déterminer des constantes réelles a et b telles que l'on ait, lorsque le paramètre entier n tend vers l'infini,

$$I_n \sim \frac{a}{2^n n^b}.$$

II. Soit $P(x)$ un polynôme réel dont toutes les racines sont réelles. On note C le nombre des changements de signe de la suite de ses coefficients et Z^+ le nombre de ses racines positives.

Énoncer sans démonstration la règle de Descartes donnant une relation entre C et Z^+.

III. On dit qu'une suite réelle finie $\{u_k\}_{k=1}^n$ est unimodale s'il existe $m \in [1, n]$ tel que $u_k \leqslant u_{k+1}$ pour $1 \leqslant k < m$ et $u_k \geqslant u_{k+1}$ pour $m \leqslant k < n$.

Étant donnée une suite réelle finie $\{a_j\}_{j=1}^n$, on note σ_k le k-ième polynôme symétrique des a_j, soit

$$\sigma_k := \sum_{1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_k\leqslant n} a_{j_1}a_{j_2}\cdots a_{j_k} \qquad (1 \leqslant k \leqslant n),$$

et l'on pose $\sigma_0 := 1$. On a donc

$$\prod_{1\leqslant j\leqslant n}(x+a_j) = \sum_{0\leqslant j\leqslant n}\sigma_{n-j}x^j.$$

(On ne demande pas de démontrer cette formule.)

(a) Soit y un paramètre positif. Calculer σ_k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ pour $n = 3$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = y$. La suite $\{\sigma_k\}_{k=1}^3$ est-elle unimodale ?

(b) Soit $\{a_j\}_{j=1}^n$ une suite de n nombres réels strictement positifs. On pose $Q(x) := (1-x)\prod_{1\leqslant j\leqslant n}(x+a_j)$. Montrer que

$$Q(x) = \sum_{0\leqslant j\leqslant n+1}(\sigma_{n-j} - \sigma_{n+1-j})x^j$$

où l'on a posé $\sigma_{-1} := 0$, $\sigma_{n+1} := 0$.

(c) Déduire de ce qui précède et de la la règle énoncée dans la partie II que la suite $\{\sigma_k\}_{k=1}^n$ est unimodale.