# Méthodes analytiques

# Exercices et sujets d'examen

Gérald Tenenbaum
Université Henri Poincaré–Nancy 1
Master de Mathématiques (M2) 2016/2017

(14/12/2016, 16h35)
Diffusion étudiants

# Table des matières

Université de Lorraine
Faculté des sciences et technologies
Master de Mathématiques (M2) 2016/2017
Analyse asymptotique et applications

# Exercices d'analyse asymptotique générale

**1.** La formule

$$\frac{k^2}{1+kx^2} \ll \frac{1}{x}$$

est-elle valable pour chaque $k > 0$ fixé lorsque $x > 1$ ? Est-elle valable uniformément pour $k > 0$ et $x > 1$ ? Si non, déterminer un domaine de validité de la forme $k > 0$, $x > x_0(k)$.

**2.** Montrer que

$$\int_1^x (1+1/t)^t \,\mathrm{d}t = \mathrm{e}x - \tfrac{1}{2}\mathrm{e}\ln x + O(1) \qquad (x > 1).$$

**3.** Montrer que

$$\big\{x + 1 + O(1/x)\big\}^x = \mathrm{e}x^x + O\big(x^{x-1}\big) \qquad (x \to \infty).$$

**4.** Montrer que si l'on a

$$f(t) \approx \sum_{n\geqslant 0} a_n t^n \qquad (t \to 0),$$

et si $f$ est intégrable sur $[0, x]$ pour $x$ assez petit, alors

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \approx \sum_{n\geqslant 0} \frac{a_n x^{n+1}}{n+1} \quad (x \to 0).$$

**5.** (a) Montrer que, pour chaque entier naturel $n$ fixé, on a

$$\int_0^y (\ln t)^n \,\mathrm{d}t \ll y(\ln y)^n \qquad (y \to 0+).$$

(b) Déterminer la suite $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ telle que

$$x\int_2^\infty \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{\ln t}\,\mathrm{d}t \approx \sum_{n\geqslant 0} \frac{c_n}{(\ln x)^{n+1}} \qquad (x > 0,\ x \to 0).$$

**6.** Montrer que l'on a

$$(x\mathrm{e}^{2x-2n})^n \ll \mathrm{e}^{x^2+x} \qquad (x > 0,\ n \in \mathbb{N}^*).$$

**7.** Montrer que l'on a

$$\sum_{1\leqslant n\leqslant x}\left|\int_0^u \mathrm{e}^{i(n-v)t}\,\mathrm{d}t\right| \ll \ln(1+ux)+u \qquad (x\geqslant 1,\ u>0,\ v\in\mathbb{R}).$$

**8.** *Nombres logarithmiques.*[1] On définit la suite $\{L_n\}_{n=0}^{\infty}$ des nombres logarithmiques par le développement de Taylor

$$\frac{x}{\ln(1+x)}=\sum_{n\geqslant 0}L_n x^n \qquad (0<x<1).$$

(a) Montrer que

$$L_n=\int_0^1\binom{s}{n}\mathrm{d}s=\frac{1}{n!}\int_0^1\frac{\Gamma(s+1)}{\Gamma(s-n+1)}\,\mathrm{d}s=\frac{(-1)^{n+1}}{n!}\int_0^1\frac{s\Gamma(n-s)}{\Gamma(1-s)}\,\mathrm{d}s \qquad (n\geqslant 0).$$

(b) En utilisant la formule de Stirling réelle, en déduire que

$$L_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n}\Big\{1+O\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big\}\int_0^1\frac{s}{\Gamma(1-s)n^s}\,\mathrm{d}s=\frac{(-1)^{n+1}}{n(\ln n)^2}\Big\{1+O\Big(\frac{1}{\ln n}\Big)\Big\}.$$

**9.** Soit $a_0\in\mathbb{R}$ et $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ la suite définie par $a_{n+1}=a_n+\mathrm{e}^{-a_n}-1$. Montrer que $a_n\geqslant 0$ pour tout $n\geqslant 1$, que $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ est décroissante, et qu'il existe $K>0$ et $C>0$ telle que $a_n\leqslant K2^{-2^n/C}$ pour $n\geqslant 0$.

---

1. La résolution de cet exercice nécessite des connaissances sur la fonction $\Gamma$ d'Euler qui sont disponibles dans le chapitre I.

Université de Lorraine
Faculté des sciences et technologies
Master de Mathématiques (M2) 2016/2017
Analyse asymptotique et applications

# Exercices sur la fonction Gamma d'Euler

**10.** *Le théorème de Bohr–Mollerup.* Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe telle que $\varphi(1) = 0$, $\varphi(x+1) = \varphi(x) + \ln x$ $(x > 0)$.

(a) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, la fonction

$$\psi_n(x) := \{\varphi(n+1+x) - \varphi(n+1)\}/x$$

est croissante sur $[-1, 0[\cup]0, 1]$.

(b) En déduire que

$$0 \leqslant \varphi(x) - \ln\big(n!\, n^x / \prod_{j=0}^{n}(j+x)\big) \leqslant 1/n \qquad (0 < x \leqslant 1,\ n \geqslant 1).$$

(c) Montrer que $\varphi$ est uniquement déterminée et satisfait la formule de Gauss

$$\mathrm{e}^{\varphi(x)} = \lim_{n\to\infty} n!\, n^x \prod_{j=0}^{n}(j+x)^{-1} \qquad (x > 0).$$

**11.** *Une autre caractérisation de* $\Gamma$.

(a) Montrer que $\Gamma'(x)/\Gamma(x) < \ln x$ $(x > 0)$. En déduire que $x \mapsto \mathrm{e}^x x^{-x}\Gamma(x)$ est décroissante pour $x > 0$.

(b) Montrer que $\Gamma$ est uniquement déterminée par la propriété de décroissance de (a) et les conditions $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

**12.** *Preuve de Gauss de la formule d'Euler.*

(a) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 0$ et tout nombre complexe $s$ tel que $\sigma > 0$,

$$\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} = -\sum_{0\leqslant j<n} \frac{1}{(s+j)} + \frac{\Gamma'(s+n)}{\Gamma(s+n)}.$$

(b) Montrer que $\Gamma'(s)/\Gamma(s) = \ln s + O(1/s)$ pour $s \in \mathbb{R}$, $s > 1$.

(c) En déduire la formule d'Euler $\Gamma(s) = \lim_{n\to\infty} n^s\, n! \prod_{0\leqslant j\leqslant n} 1/(s+j)$.

**13.** Soient $\{a_j\}_{j=1}^k$ et $\{b_j\}_{j=1}^k$ deux suites finies de nombres complexes telles que

$$b_j \notin \mathbb{Z}\ (1 \leqslant j \leqslant k), \qquad \sum_{1\leqslant j\leqslant k} a_j = \sum_{1\leqslant j\leqslant k} b_j.$$

Montrer que

$$\prod_{n\geqslant 1}\prod_{1\leqslant j\leqslant k} \frac{n-a_j}{n-b_j} = \prod_{1\leqslant j\leqslant k} \frac{\Gamma(1-b_j)}{\Gamma(1-a_j)}.$$

**14.** Soient $k \geqslant 2$ et $\varepsilon_k = \mathrm{e}^{2\pi i/k}$. Montrer, en utilisant le résultat de l'Exercice 13, que

$$\prod_{n\geqslant 1}\Big(1-\frac{x}{n^k}\Big) = \prod_{j=0}^{k-1}\Gamma\big(1-\varepsilon_k^j x^{1/k}\big)^{-1} \qquad (x>0).$$

**15.** Montrer que $\displaystyle\int_{-1}^{1}(1+t)^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t = 2^{x+y-1}\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ $(x>0,\ y>0)$.

**16.** *L'intégrale de Dirichlet.*
Montrer que pour $f\in\mathcal{C}[0,1]$, $\alpha_j>0$ $(1\leqslant j\leqslant n)$, $\beta=\sum_{j=1}^n\alpha_j$, on a

$$\int_{\sum_{j=1}^n t_j\leqslant 1} f\Big(\sum_{1\leqslant j\leqslant n} t_j\Big)\prod_{1\leqslant j\leqslant n}\frac{\mathrm{d}t_j}{t_j^{1-\alpha_j}} = \frac{\prod_{j=1}^n\Gamma(\alpha_j)}{\Gamma(\beta)}\int_0^1 f(u)u^{\beta-1}\,\mathrm{d}u.$$

**17.** Calculer l'intégrale double $\int_\Delta x^\alpha y^\beta\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, où $\alpha$, $\beta$ sont des paramètres positifs et $\Delta$ est le domaine $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $x^\mu+y^\nu\leqslant 1$ $(\mu>0,\ \nu>0)$.

**18.** Calculer $\int_z^{z+1}\log\Gamma(w)\,\mathrm{d}w$ pour tout $z\in\mathbb{C}\smallsetminus\mathbb{R}^-$.

**19.** *La formule de Legendre–Gauss.*
(a) En utilisant la formule de Legendre, montrer que $\int_0^1\ln\Gamma(x)\,\mathrm{d}x=\frac12\ln(2\pi)$.
(b) Montrer que pour tout entier $n\geqslant 2$ on a

$$\prod_{0\leqslant j<n}\Gamma\Big(\frac{x+j}{n}\Big) = (2\pi)^{\frac12(n-1)}n^{\frac12-x}\Gamma(x) \qquad (x>0).$$

**20.** (a) En utilisant directement la définition de $\Gamma(s)$ sous forme intégrale, montrer que

$$-\Gamma'(1) = \ln x - \frac1x\int_0^\infty(\ln t)\mathrm{e}^{-t/x}\,\mathrm{d}t \qquad (x>1).$$

(b) En utilisant l'approximation $\ln t=\sum_{n\leqslant t}1/n-\gamma+O(1/t)$ $(t>1)$, retrouver la formule

$$\Gamma'(1)=-\gamma.$$

**21.** *Formules de Gauss et Dirichlet.*
(a) Montrer que $\displaystyle\gamma=\int_0^1\frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t-\int_1^\infty\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$ puis que

$$\gamma=\int_0^\infty\Big(\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-t}}-\frac1t\Big)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

(b) Montrer que pour $\Re e\, z>0$ on a $\displaystyle\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}=-\gamma-\frac1z+\sum_{n\geqslant1}\frac{z}{n(z+n)}$. En utilisant (a) et en écrivant $1/(z+n)=\int_0^\infty\mathrm{e}^{-t(z+n)}\,\mathrm{d}t$ $(\Re e\, z>0)$, montrer la formule de Gauss

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}=\int_0^\infty\Big(\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}-\frac{\mathrm{e}^{-zt}}{1-\mathrm{e}^{-t}}\Big)\,\mathrm{d}t \qquad (\Re e\, z>0).$$

(c) Montrer que $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to0}\int_\varepsilon^\infty\Big(\frac{1}{(1+x)^2\ln(1+x)}-\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\Big)\,\mathrm{d}x=0$. En déduire grâce au résultat de (b) la formule de Dirichlet

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}=\int_0^\infty\Big(\mathrm{e}^{-x}-(1+x)^{-z}\Big)\frac{\mathrm{d}x}{x} \qquad (\Re e\, z>0).$$

**22.** *Une autre démonstration de la formule des compléments.*

(a) Pour $\alpha \in ]0,1[$, montrer l'existence de l'intégrale $I(\alpha) := \int_0^\infty t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t/(1+t)$ et calculer sa valeur. On pourra soit utiliser la méthode des résidus, soit traiter d'abord le cas $\alpha = p/q \in \mathbb{Q}$ par le changement de variable $t = u^q$ et conclure par un argument de continuité.

(b) Déduire de (a) que la formule des compléments $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \pi/\sin(\pi z)$ est valide pour $z \in \mathbb{C} \smallsetminus \mathbb{Z}$.

**23.** (a) Soit $T_N(\xi)$ le polynôme déterminé par la relation

$$T_N(\sin x) = \sin\{(2N+1)x\}.$$

Montrer que

$$T_N(\xi) = (2N+1)\xi \prod_{1\leqslant k\leqslant N} \Big(1 - \xi^2/\sin^2 \frac{\pi k}{2N+1}\Big).$$

(b) Choisir $\xi = \sin\{\pi x/(2N+1)\}$ et faire tendre $N$ vers l'infini en justifiant soigneusement le passage à la limite pour obtenir la formule d'Euler

$$\sin(\pi x) = \pi x \prod_{k\geqslant 1} \big(1 - x^2/k^2\big).$$

(c) En déduire, grâce à la formule du produit de Weierstrass, la formule des compléments pour $\Gamma(x)$.

**24.** (a) Montrer les formules

$$\int_0^\infty t^{z-1}\cos t\,\mathrm{d}t = \Gamma(z)\cos\big(\tfrac12\pi z\big) \qquad (0 < \Re e\, z < 1),$$
$$\int_0^\infty t^{z-1}\sin t\,\mathrm{d}t = \Gamma(z)\sin\big(\tfrac12\pi z\big) \qquad (-1 < \Re e\, z < 1).$$

(b) Calculer la valeur des intégrales de Fresnel

$$I = \int_0^\infty \cos(t^2)\,\mathrm{d}t, \quad J = \int_0^\infty \sin(t^2)\,\mathrm{d}t.$$

**25.** *Sur le volume de la boule unité de $\mathbb{R}^n$ et les fonctions sphériques.*

On dit que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est sphérique s'il existe une fonction $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ telle que $f(\mathbf{x}) = g(\|\mathbf{x}\|)$, où $\|\mathbf{x}\|$ désigne la norme euclidienne de $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. On désigne par $\mu$ la mesure sur $\mathbb{R}^+$ image de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$ par l'application $\mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{x}\|$, de sorte que $\int_0^\infty g(t)\,\mathrm{d}\mu(t) = \int_{\mathbb{R}^n} g(\|\mathbf{x}\|)\,\mathrm{d}\mathbf{x}$ pour toute fonction $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ telle que le second membre ait un sens.

(a) Montrer que, pour tout $y \in \mathbb{R}^+$, on a $\mu([0,y]) = y^n V_n$ avec $V_n = \mu([0,1])$. En déduire que $\mathrm{d}\mu(y) = nV_n y^{n-1}\,\mathrm{d}y$ sur $[0,\infty[$.

(b) En choisissant une fonction sphérique $f$ convenable, montrer que

$$V_n = \pi^{n/2}/\Gamma(1+n/2).$$

(c) Montrer que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \big(1+\|\mathbf{x}\|^2\big)^{-\frac12(n+1)}\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \pi^{\frac12(n+1)}/\Gamma\big(\tfrac12(n+1)\big)$.

**26.** (a) Montrer que, pour tout $\sigma \geqslant \frac{1}{2}$, il existe une constante $M_0(\sigma)$ telle que l'on ait

$$|\Gamma(x+iy)| \leqslant M_0(\sigma)\mathrm{e}^{-|y|} \qquad (\tfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant \sigma,\ y \in \mathbb{R}).$$

(b) Montrer que pour $z = \frac{1}{2} + iy$, $s = \sigma + i\tau$, $\sigma \geqslant 1$, on a

$$\Gamma(z-k)\Gamma(s-z+k) = (-1)^k \Gamma(z)\Gamma(s-z) \prod_{1 \leqslant j \leqslant k} \Big(1 + \frac{s-1}{j-z}\Big).$$

En utilisant l'estimation $|1+w| \leqslant \exp\big\{\Re e\, w + O(|w|^2)\big\}$ $(w \in \mathbb{C})$, en déduire que, pour chaque $s$ vérifiant $\sigma = \Re e\, s \geqslant 1$, il existe une constante $M(s) > 0$ telle que

$$|\Gamma(z-k)\Gamma(s-z+k)| \leqslant M(s)k^{\sigma-1}\mathrm{e}^{-|y|} \qquad (k \geqslant 1,\ z = \tfrac{1}{2} + iy,\ y \in \mathbb{R}).$$

(c) On pose pour $s \in \mathbb{C}$, $\Re e\, s \geqslant 1$, $u \in ]0,1[$, $k \geqslant 0$,

$$I_k(s,u) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2}-k-i\infty}^{\frac{1}{2}-k+i\infty} \Gamma(z)\Gamma(s-z)u^{-z}\,\mathrm{d}z.$$

Montrer que cette intégrale est absolument convergente et tend vers 0 lorsque $k$ tend vers l'infini.

(d) Montrer que l'on a pour $v \in \mathbb{C}$, $|v| < 1$,

$$\Gamma(s)(1+v)^{-s} = \sum_{k \geqslant 0} (-1)^k \frac{\Gamma(s+k)}{k!} v^k.$$

(e) Montrer que $I_0(s,u) = (1+u)^{-s}\Gamma(s)$ pour $\Re e\, s \geqslant 1$, $u \in ]0,1[$.

(f) Montrer que l'on a pour $a, b \in [1,\infty[$, $\Re e\, s \geqslant 1$,

$$\frac{\Gamma(s)}{(a+b)^s} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} \frac{\Gamma(z)\Gamma(s-z)}{a^z b^{s-z}}\,\mathrm{d}z.$$

[On distinguera les cas $a < b$, $a = b$ et $a > b$.]

(g) Montrer qu'il existe une constante $\sigma_0$ que l'on calculera (on ne demande pas la valeur optimale) telle que l'on ait pour $\sigma > \sigma_0$

$$\Gamma(s) \sum_{m \geqslant 1} \sum_{n \geqslant 1} (m^3 + n^2)^{-s} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} \zeta(3z)\zeta(2s-2z)\Gamma(z)\Gamma(s-z)\,\mathrm{d}z$$

où $\zeta$ désigne la fonction zêta de Riemann.

Université de Lorraine
Faculté des sciences et technologies
Master de Mathématiques (M2) 2016/2017
Méthodes analytiques

# Exercices sur l'analyse asymptotique des fonctions implicites

**27.** Montrer que, pour chaque entier $n \geqslant 1$, l'équation $\sin x = 1/\ln x$ possède une unique solution $x_n$ dans l'intervalle $]2\pi n, 2\pi n + \frac{1}{2}\pi[$ et que l'on a

$$x_n = 2\pi n + \frac{1}{\ln 2\pi n} + O\Big(\frac{1}{(\ln 2\pi n)^3}\Big) \quad (n \to \infty).$$

**28.** (a) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, l'équation $(\sin x)^2 = 1/\ln x$ possède exactement deux solutions réelles, $x_n$ et $y_n$, dans $]2\pi n - \frac{1}{2}\pi, 2\pi n + \frac{1}{2}\pi[$.

(b) On convient dans la suite que $x_n < y_n$. Donner un développement asymptotique pour $y_n - 2\pi n$ lorsque $n \to \infty$. On s'attachera essentiellement à donner la forme du développement et à préciser la nature de la convergence sans chercher à calculer explicitement les coefficients qui interviennent.

**29.** Soit $t \mapsto f(t)$ une fonction positive satisfaisant à

$$\mathrm{e}^{tf(t)} = f(t) + t + O(1) \qquad (0 < t < \infty).$$

Montrer que

$$f(t) = \frac{\ln t}{t} + O\Big(\frac{1}{t^2}\Big) \qquad (t \to \infty).$$

**30.** Montrer que la solution positive de l'équation $\mathrm{e}^y + \ln y = x$ peut être écrite, pour $x$ assez grand, sous la forme

$$y = \ln x + \frac{\ln_2 x}{x} F\Big(\frac{\ln_2 x}{x \ln x}, \frac{1}{x \ln x}, \frac{\ln_2 x}{x}\Big)$$

où $F(\lambda, \mu, \nu)$ est une série entière de trois variables convergente dans un voisinage de l'origine.

**31.** Soit $E : [1, \infty[ \to \mathbb{R}^+$ la fonction définie par

$$E(t) := \int_1^t \frac{\mathrm{e}^v}{v}\,\mathrm{d}v.$$

(a) Montrer que $E$ est bijective.

(b) Pour $x \geqslant \mathrm{e}$, on note $y = y(x)$ la solution de $E(y) = \mathrm{e}^x$ et l'on pose

$$\lambda := \frac{1}{x}, \quad \mu := \frac{\ln x}{x}, \quad \nu := \frac{\mathrm{e}^x - E(x + \ln x)}{x\mathrm{e}^x}.$$

Montrer que

$$\nu \approx \frac{\lambda\mu}{1+\mu} - \sum_{j \geqslant 2} (j-1)! \Big(\frac{\lambda}{1+\mu}\Big)^j \qquad (x \to \infty).$$

(c) On pose

$$G_x(Z) := \int_0^Z \frac{\mathrm{e}^v}{1+\mu+\lambda v}\,\mathrm{d}v \qquad (x \geqslant \mathrm{e},\ Z \in \mathbb{C},\ |Z| < 1).$$

Montrer que $G_x$ est holomorphe sur le disque unité et que, pour $x$ assez grand, l'équation

$$G_x(Z) = \nu/\lambda$$

possède dans ce disque une solution unique, que l'on notera $z = z(x)$.

(d) Montrer que, pour $x$ assez grand, on a $y(x) = x + \ln x + z(x)$.

(e) Montrer qu'il existe une suite réelle $\{d_{kh}\}_{h\geqslant 0,\, k\geqslant 0}$ telle que, pour $x$ assez grand, l'on ait

$$z = \sum_{k\geqslant 1,\, h\geqslant 0} d_{kh} \Big(\frac{\nu}{\lambda}\Big)^k (1+\mu)^k \Big(\frac{\lambda}{1+\mu}\Big)^h.$$

(f) Montrer qu'il existe une suite $\{P_h\}_{h=1}^{\infty}$ de polynômes à coefficients réels tels que $\deg P_h \leqslant h$ $(h \geqslant 1)$ et

$$y - x - \ln x \approx \sum_{h\geqslant 1} \frac{P_h(\ln x)}{x^h} \qquad (x \to \infty).$$

Université de Lorraine
Faculté des sciences et technologies
Master de Mathématiques (M2) 2016/2017
Méthodes analytiques

# Exercices sur les sommes et séries

**32.** Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer la nature de la série

$$\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^{1+i\alpha}\ln_2 n}.$$

**33.** Soit $\beta \in ]0,1[$. On pose $f_\beta(t) := \mathrm{e}^{it^\beta}$.

(a) Montrer qu'il existe un entier naturel $k$ tel que $f_\beta^{(k)} \in L^1([1,\infty[)$.

(b) Donner un équivalent asymptotique de la quantité

$$S_N(\beta) := \sum_{1\leqslant n\leqslant N} \mathrm{e}^{in^\beta} \qquad (N \to \infty).$$

**34.** Soient $k \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathcal{C}^{2k+1}\big([1,\infty[,\mathbb{R}\big)$. On suppose de plus que $f^{(2k+1)} \in L^1[1,\infty[$. Montrer qu'il existe une constante $C_k(f)$, que l'on explicitera, telle que l'on ait, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$(1) \qquad \sum_{1\leqslant m\leqslant n} f(m) = \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x + \tfrac{1}{2}f(n) + \sum_{1\leqslant j\leqslant k} \frac{B_{2j}}{(2j)!} f^{(2j-1)}(n) + C_k(f) + R_{k,n}(f)$$

où $R_{k,n}(f) \to 0$ lorsque $n \to \infty$.

En déduire que si $f^{(2j+1)} \in L^1(\mathbb{R})$ pour $j \geqslant m$ alors $C_k(f)$ est indépendant de $k$ lorsque $k \geqslant m$.

**35.** *Variations des $B_r(x)$.* Posons, pour $m \geqslant 1$, $\varepsilon \in \{0,1\}$, $x \in \mathbb{R}$,

$$\varphi_{2m+\varepsilon}(x) := (-1)^m\{B_{2m+\varepsilon}(x) - B_{2m+\varepsilon}\}.$$

(a) Montrer que, pour $0 \leqslant x \leqslant 1$, on a $\varphi_2(x) = x(1-x)$, $\varphi_3(x) = x(x-\frac{1}{2})(1-x)$.

(b) Calculer $\sum_{r\geqslant 0} b_r(\frac{1}{2})y^r/r!$. En déduire que $\varphi_{2m+1}(\frac{1}{2}) = 0$ pour $m \geqslant 1$.

(c) Montrer que, pour $m \geqslant 1$, on a $\varphi'_{2m+1}(x) = (2m+1)\{\varphi_{2m}(x) - |B_{2m}|\}$, et $\varphi'_{2m+2}(x) = -(2m+2)\varphi_{2m+1}(x)$.

(d) Établir par récurrence sur $m \geqslant 1$ que $\varphi_{2m}(x) > 0$ et $(x-\frac{1}{2})\varphi_{2m+1}(x) > 0$ pour $0 < x < 1$, $x \neq \frac{1}{2}$.

**36.** *Majoration du terme d'erreur.* Soient $k \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathcal{C}^{2k+2}\big([1,\infty[,\mathbb{R}\big)$ telle que $f^{(2k+2)} \in L^1[1,\infty[$. On pose

$$S_{h,n}(f) := \tfrac{1}{2}f(n) + \sum_{1\leqslant j\leqslant h} \frac{B_{2j}}{(2j)!} f^{(2j-1)}(n) \qquad (0 \leqslant h \leqslant k+1,\, n \in \mathbb{N}^*).$$

(a) Montrer que l'on a, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\sum_{1\leqslant m\leqslant n} f(m) = \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x + S_{k,n}(f) + C_k^*(f) + R_{k,n}^*(f) \tag{2}$$

où $C_k^*(f)$ est une constante que l'on précisera et où l'on a posé, avec la notation $\varphi_r$ de l'exercice 35

$$R_{k,n}^*(f) := \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+2)!} \int_n^\infty f^{(2k+2)}(x)\varphi_{2k+2}(x)\,\mathrm{d}x. \tag{3}$$

(b) On effectue désormais l'hypothèse supplémentaire que $f^{(2k)} \in L^1([1,\infty[)$ et donc $\lim_{x\to\infty} f^{(2k-1)}(x) = 0$. Montrer que

$$C_{k-1}^*(f) = C_k^*(f), \qquad R_{k-1,n}^*(f) - R_{k,n}^*(f) = \frac{B_{2k}}{(2k)!} f^{(2k-1)}(n).$$

(c) Montrer que, si $f^{(2k+2)}$ et $f^{(2k)}$ sont de signe constant et de même signe sur $[1,\infty[$, alors $R_{k-1,n}^*(f)$ et $R_{k,n}^*(f)$ ont des signes opposés. En déduire que

$$|R_{k,n}^*(f)| \leqslant \left| \frac{B_{2k}}{(2k)!} f^{(2k-1)}(n) \right|,$$

autrement dit, que *la valeur absolue du terme d'erreur de la formule d'Euler-Maclaurin* (2) *n'excède pas celle du dernier terme retenu.*

**37.** Montrer que pour tous entiers $n \geqslant 1$, $k \geqslant 1$, on a

$$\gamma = \sum_{1\leqslant m\leqslant n} \frac{1}{m} - \log n - \frac{1}{2n} + \sum_{1\leqslant j\leqslant k} \frac{B_{2j}}{2jn^{2j}} + \varepsilon_n$$

où $\gamma$ désigne la constante d'Euler et où $|\varepsilon_n| \leqslant B_{2k}/\{2kn^{2k}\}$. Montrer que le choix $n = 50$, $k = 7$, permet de calculer $\gamma$ avec 24 décimales exactes.

*Remarque. Sommation au plus petit terme.* On sait que $|B_{2j}| \sim 2(2j)!/(2\pi)^{2j}$. Lorsque $n$ est fixé, le rapport de deux termes consécutifs dans la somme en $j$ est donc voisin de $(j/\pi n)^2$. Il s'ensuit que le meilleur terme d'erreur obtenu par cette méthode correspond au choix de $k$ voisin de $\pi n$. La taille de $\varepsilon_{kn}$ est alors de l'ordre de $\mathrm{e}^{-2\pi n}$. Pour $n = 10$, on obtient déjà 27 décimales exactes à condition de connaître les valeurs de $B_{2k}$ pour $k \leqslant 32$.

**38.** Montrer que pour tous entiers $n \geqslant 1$, $k \geqslant 1$, on a

$$\tfrac{1}{6}\pi^2 = \sum_{1\leqslant m\leqslant n} \frac{1}{m^2} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \sum_{1\leqslant j\leqslant k} \frac{B_{2j}}{n^{2j+1}} + \varepsilon_n$$

avec $|\varepsilon_n| \leqslant B_{2k}/n^{2k+1}$. Montrer que le choix $k = 8$, $n = 100$ permet de calculer $\pi^2/6$ avec 33 décimales exactes.

**39.** Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{C}^3([0,1],\mathbb{R})$. On pose

$$f_N(x) := \frac{f(x/N)}{x} \qquad (1 \leqslant x \leqslant N).$$

(a) Montrer que l'on a uniformément pour $1 \leqslant x \leqslant N$

$$\begin{aligned} f_N(x) &= \frac{f(0)}{x} + \frac{f'(0)}{N} + O\Big(\frac{x}{N^2}\Big),\\ f_N'(x) &= \frac{-f(0)}{x^2} + O\Big(\frac{1}{N^2}\Big),\\ f_N''(x) &= \frac{2f(0)}{x^3} + O\Big(\frac{1}{N^3}\Big). \end{aligned}$$

(b) Établir la formule asymptotique

$$\sum_{1\leqslant n\leqslant N} \frac{f(n/N)}{n} = \int_{1/N}^1 \frac{f(y)}{y}\,\mathrm{d}y + \gamma f(0) + \frac{f'(0)+f(1)}{2N} + O\Big(\frac{1}{N^2}\Big)$$

où $\gamma$ désigne la constante d'Euler.

(c) Application. Donner une formule asymptotique pour

$$\sum_{1\leqslant n\leqslant N} \frac{\cos(\pi n/2N)}{n}$$

lorsque $N \to \infty$.

**40.** Soit $f$ une application continue et dérivable de $[1,+\infty[$ dans $\mathbb{R}^+$ telle que $f'(x)$ décroît, $f'(x) \to 0 \quad (x \to \infty)$, et $xf'(x) \to \infty \quad (x \to \infty)$.

(a) En utilisant la formule d'Euler–Maclaurin à l'ordre 0 et la seconde formule de la moyenne, montrer que

$$\sum_{1\leqslant n\leqslant N} \mathrm{e}^{if(n)} = o(N) \qquad (x \to \infty). \tag{4}$$

(b) En intégrant par parties $\int_1^N \mathrm{e}^{if(t)}\,\mathrm{d}t$, montrer que (4) n'a pas lieu si $xf'(x)$ tend vers une limite finie.

**41.** Pour $x \in \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N}$, on pose $\varphi_j(x) := \mathrm{e}^{-x}x^j/j!$, et l'on note

$$S_n(x) := \sum_{0\leqslant j\leqslant n} \varphi_j(x) \qquad (n \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}).$$

Le but de ce problème est d'évaluer $S_n(x)$ uniformément par rapport à $x$ lorsque $n \to \infty$, une question initialement posée et partiellement résolue par Ramanujan.

(a) Soit $Q : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ la fonction définie par $Q(y) := y\ln y - y + 1 = \int_1^y \ln t\,\mathrm{d}t$. Établir les formules

$$\begin{aligned} Q(1-v) &= v^2\int_0^1 \frac{1-s}{1-sv}\,\mathrm{d}s \geqslant \tfrac12 v^2 \qquad (0 \leqslant v < 1),\\ Q(1-v) &= \tfrac12 v^2 + O(v^3) \qquad (0 \leqslant v \leqslant \tfrac12). \end{aligned}$$

(b) Montrer que l'on a

$$n! = n^n \mathrm{e}^{-n}\sqrt{2\pi n}\Big\{1 + O\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big\} \quad (n \geqslant 1),^{(1)}$$

et

$$\varphi_j(n) = \frac{\mathrm{e}^{-nQ(j/n)}}{\sqrt{2\pi j}}\Big\{1 + O\Big(\frac{1}{j}\Big)\Big\} \qquad (1 \leqslant j \leqslant n)$$

(c) Soit $p := [n/2]$, $b := Q(\frac{1}{2}) > 0$. Montrer que

$$\sum_{0 \leqslant j \leqslant p} \varphi_j(n) \ll \mathrm{e}^{-bn}\sqrt{n} \qquad (n \geqslant 1).$$

(d) Soit $F_n(u) := \mathrm{e}^{-nQ(1-u/n)}/\sqrt{2\pi(n-u)}$ $(n \geqslant 1,\ 0 \leqslant u < n)$. On pose

$$T_n := \sum_{0 \leqslant k \leqslant p} F_n(k) \qquad (n \in \mathbb{N}^*).$$

Montrer que, pour toute constante $c$ vérifiant $0 < c < b$, on a

$$S_n(n) = \Big\{1 + O\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big\}T_n + O\big(\mathrm{e}^{-cn}\big)$$

(e) Montrer que

$$T_n = \int_0^p F_n(u)\,\mathrm{d}u + \tfrac{1}{2}F_n(0) + I_n + O\big(\mathrm{e}^{-cn}\big)$$

avec $I_n := \int_0^p B_1(u)F_n'(u)\,\mathrm{d}u$.

(f) Calculer la dérivée logarithmique de $F_n(u)$ et en déduire que

$$|F_n'(u)| \ll \frac{u+1}{n^{3/2}}\mathrm{e}^{-u^2/(2n)} \qquad (0 \leqslant u \leqslant p).$$

En déduire que

$$T_n = \int_0^p F_n(u)\,\mathrm{d}u + O\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big)\cdot$$

(g) Montrer que

$$F_n\big(v\sqrt{n}\big) \ll \frac{\mathrm{e}^{-v^2/2}}{\sqrt{n}} \quad (0 \leqslant v \leqslant \tfrac{1}{2}\sqrt{n})$$

et que

$$F_n\big(v\sqrt{n}\big) = \frac{\mathrm{e}^{-v^2/2}}{\sqrt{2\pi n}}\Big\{1 + O\Big(\frac{v(1+v^2)}{\sqrt{n}}\Big)\Big\} \qquad (0 \leqslant v \leqslant \tfrac{1}{2}n^{1/6}).$$

En déduire que

$$T_n = \tfrac{1}{2} + O\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big) \qquad (n \geqslant 1)$$

et que la même évaluation est valable pour $S_n(n)$.

(h) Montrer que $S_n'(x) = -\varphi_n(x)$. En déduire que, pour $x := n + z\sqrt{n}$, $|z| \leqslant n^{1/6}$, on a

$$(*) \qquad S_n(x) = \Phi(z) + O\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big),$$

où l'on a posé $\Phi(z) := \int_z^\infty \mathrm{e}^{-v^2/2}\,\mathrm{d}v/\sqrt{2\pi}$.

(i) Montrer que la formule asymptotique $(*)$ est en fait valable uniformément pour $x \in \mathbb{R}$, $n \geqslant 1$.

1. On ne demande pas de redémontrer que la constante d'Euler–Maclaurin de la fonction $t \mapsto \ln t$ est $\frac{1}{2}\ln(2\pi)$.

**42.** Soit $\alpha \in ]0,1[$. On pose

$$f(t) := \prod_{n\geqslant 1}\Big(\frac{1}{1-\alpha \mathrm{e}^{-nt}}\Big).$$

Déterminer un développement asymptotique de $\ln f(t)$ lorsque $t \to 0+$.

**43.** *Un exercice qui nécessite des prises d'initiatives.* En appliquant la formule d'Euler-Maclaurin sur l'intervalle $[1, N]$ à la fonction

$$f(x) := \ln\Big(\frac{x\vartheta}{1-\mathrm{e}^{-x\vartheta}}\Big),$$

et en faisant tendre $N$ vers l'infini, montrer que, pour tout entier $k \geqslant 2$ fixé on a, lorsque $\vartheta$ tend vers 0 par valeurs positives,

$$\prod_{n\geqslant 1}\Big(\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-n\vartheta}}\Big) = \big\{1+O(\vartheta^k)\big\}\mathrm{e}^{\pi^2/6\vartheta-\vartheta/24}\sqrt{\frac{\vartheta}{2\pi}}.$$

**44.** Montrer que $|B_{2k+1}(x)| \leqslant (k+\frac{1}{2})|B_{2k}|$ pour tous $x \in \mathbb{R}$, $k \geqslant 1$. En déduire que, pour $\Re e\, s = \sigma > 0$, $n \geqslant 1$, $k \geqslant 1$, on a

$$\zeta(s) = \sum_{1\leqslant m\leqslant n}\frac{1}{m^s} - \frac{n^{1-s}}{1-s} - \frac{1}{2n^s} - \sum_{1\leqslant j\leqslant k}\frac{B_{2j}}{2jn^{s+2j-1}}\binom{s+2j-2}{2j-1} + \varepsilon_{k,n}(s)$$

avec $|\varepsilon_{k,n}(s)| \leqslant \dfrac{k+1/2}{(\sigma+2k)n^{\sigma+2k}}\left|B_{2k}\dbinom{s+2k}{2k+1}\right|.$

**45.** Pour $|\tau| \leqslant (1-\delta)2\pi x$ et $y \geqslant x$, montrer que

$$\sum_{x<n\leqslant y} n^{-i\tau} = \int_x^y t^{-i\tau}\,\mathrm{d}t + O(1). \tag{5}$$

en adoptant la stratégie suivante : appliquer la formule d'Euler–Maclaurin à l'ordre 0 à $f(t) := t^{-i\tau}$, développer $B_1(t)$ en série de Fourier, intégrer terme à terme et majorer chacune des intégrales obtenues par la seconde formule de la moyenne.

**46.** Montrer que, pour tous $\sigma_0 > 0$, $0 < \delta < 1$, et uniformément pour $\sigma \geqslant \sigma_0$, $x \geqslant 1$, $0 < |\tau| \leqslant (1-\delta)2\pi x$, on a

$$\zeta(s) = \sum_{n\leqslant x} n^{-s} - \frac{x^{1-s}}{1-s} + O(x^{-\sigma}). \tag{6}$$

On pourra commencer par établir, en effectuant une sommation d'Abel reposant sur la formule

$$m^{-\sigma-i\tau} = m^{-i\tau}\int_m^\infty \frac{\sigma\,\mathrm{d}t}{t^{1+\sigma}}$$

et en faisant appel au résultat démontré à l'Exercice 45, que l'on a, dans les conditions indiquées,

$$\sum_{x<m\leqslant n} m^{-s} = \frac{x^{1-s}-n^{1-s}}{1-s} + O(1).$$

On pourra ensuite appliquer la formule de l'Exercice 44.

**47.** *Formule sommatoire de Cauchy–Poisson : un cas simple de validité.*

Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. On suppose que la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |f(x+n)|$ est uniformément convergente sur $[0,1]$, autrement dit que

$$\varepsilon_N := \sup_{0\leqslant x\leqslant 1} \sum_{|n|>N} |f(x+n)| \to 0 \qquad (N\to\infty).$$

(a) Montrer que, pour tous entiers $N \geqslant 0$, $M \geqslant 0$, on a

$$\int_N^{N+M} |f(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \varepsilon_N.$$

En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x$ est absolument convergente et en particulier que les intégrales

$$\widehat{f}(p) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-2\pi ipx}\,\mathrm{d}x$$

sont convergentes pour chaque entier $p \in \mathbb{Z}$.

(b) Montrer que la fonction $\varphi$ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n)$ est 1-périodique, continue et vérifie

$$c_p(\varphi) = \widehat{f}(p) \qquad (p\in\mathbb{Z}).$$

(c) On suppose que la série $\sum_p \widehat{f}(p)$ est absolument convergente. Montrer que $\varphi$ est en tout point somme de sa série de Fourier et, en particulier, que l'on a

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \sum_{p\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(p).$$

**48.** *Fonction thêta de Jacobi.*

On définit la fonction thêta de Jacobi par la formule

$$\vartheta(z) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{-\pi n^2 z} \qquad (\Re e\, z > 0).$$

(a) Montrer que $\vartheta(1/z) = \vartheta(z)\sqrt{z}$ où la racine carrée est prise en détermination principale.

(b) Montrer que, lorsque $z \to 0$ dans le secteur $|\Im m\, z| \leqslant c|\Re e\, z|$, on a

$$\vartheta(z) = \frac{1}{\sqrt{z}} + O\Big(\frac{\mathrm{e}^{-\pi/d|z|}}{\sqrt{|z|}}\Big)$$

avec $d = \sqrt{1+c^2}$.

**49.** *Une série de Fourier très petite au voisinage de l'origine.*

Soit $T > 0$ et

$$f(t) = \sum_{n\geqslant 0} a_n \mathrm{e}^{2\pi i n^2 t} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n \mathrm{e}^{-\pi n^2(T-2it)}.$$

(a) Montrer que

$$f(t) = \frac{1}{2\sqrt{z}}\Big\{\vartheta\Big(\frac{1}{4z}\Big) - \vartheta\Big(\frac{1}{z}\Big)\Big\} \qquad (z = T-2it).$$

(b) En déduire que

$$f(t) \ll \frac{\mathrm{e}^{-\pi/8T}}{T} \qquad (-\tfrac12 T \leqslant t \leqslant \tfrac12 T).$$

**50.** *Sommes de Riemann.*

Pour $T > 0$, désignons par $\mathcal{H}_T$ l'espace des fonctions $T$-périodiques Riemann-intégrables sur une période. On munit $\mathcal{H}_T$ de la norme de la convergence en moyenne quadratique, notée $\|\cdot\|_2$. Soit $f \in \mathcal{H}_T$, de moyenne $M(f)$. On pose

$$f_k(x) := \frac{1}{k} \sum_{0 \leqslant j < k} f\Big(x + \frac{jT}{k}\Big) \qquad (k \in \mathbb{N}^*).$$

(a) Montrer que $c_n(f_k) := \begin{cases} c_n(f) & \text{si } n \equiv 0 \,(\text{mod}\, k), \\ 0 & \text{si } n \not\equiv 0 \,(\text{mod}\, k). \end{cases}$

(b) En déduire que $\lim_{k\to\infty} \|f_k - M(f)\|_2 = 0$, autrement dit que $f_k$ converge vers $M(f)$ dans $\mathcal{H}_T$.

**51.** Montrer que l'on a

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{\mathrm{e}^{-n^2 t}}{n} = \tfrac{1}{2}\ln(1/t) + \tfrac{1}{2}\gamma + O\big(\sqrt{t}\big) \qquad (0 < t \leqslant 1)$$

où $\gamma = -\Gamma'(1)$ est la constante d'Euler.

**52.** En admettant le théorème des nombres premiers sous la forme forte

$$\vartheta(x) := \sum_{\substack{p \leqslant x \\ p \in \mathbb{P}}} \ln p = x + O_m\big(x/\{\ln x\}^m\big) \qquad (x > 1,\ m \geqslant 1),$$

où $\mathbb{P}$ désigne l'ensemble des nombres premiers, montrer que

$$\sum_{p \in \mathbb{P}} \mathrm{e}^{-py} \approx \sum_{n \geqslant 0} \frac{c_n}{y\{\ln y\}^{n+1}} \qquad (y \to 0+)$$

où l'on a posé $c_n := -\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}(\ln t)^n \,\mathrm{d}t$.

**53.** On pose $\sigma(n) := \sum_{d \mid n} d$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.

(a) Montrer que

$$S(x) := \sum_{n \leqslant x} \sigma(n) = \tfrac{1}{12}\pi^2 x^2 + O(x \ln x) \qquad (x \geqslant 2).$$

(b) Pour $y \in [0, 1[$, transformer l'expression

$$T(y) := \sum_{n \geqslant 1} \frac{n y^n}{1 - y^n}$$

en faisant intervenir $\sigma(n)$ puis $S(n)$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.

(c) Déterminer $a \in \mathbb{R}$ tel que

$$T(y) \sim \frac{a}{(1 - y)^2} \qquad (y \to 1-).$$

Université de Lorraine
Faculté des sciences et technologies
Master de Mathématiques (M2) 2016/2017
Méthodes analytiques

# Exercices sur la méthode de Laplace et la méthode du col

**54.** Montrer que

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x x^n}{(1+x^2)^n}\,\mathrm{d}x \sim \frac{\sqrt{\pi}\mathrm{e}}{2^n\sqrt{2n}} \qquad (n \to \infty).$$

**55.** Déterminer un développement asymptotique pour l'intégrale

$$I_n := \int_0^\pi x^n \sin x \,\mathrm{d}x \quad (n \to \infty).$$

**56.** Évaluer asymptotiquement

$$S_n := \sum_{0\leqslant k\leqslant n} \binom{n}{k}\frac{k!}{n^k}\cdot$$

On pourra utiliser la formule $n\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-nx}x^k\,\mathrm{d}x = k!/n^k$.

**57.** Soient $f$ et $g$ deux fonctions analytiques réelles, définies sur $[-1,1]$. On suppose que $f$ est à valeurs positives et possède un unique zéro à l'origine.

(a) Montrer le plus petit indice $k$ tel que $f^{(k)}(0) \neq 0$ est nécessairement pair. On posera $k = 2m$.

(b) Montrer qu'il existe un nombre réel $\delta > 0$ et une fonction analytique $h : [-\delta,\delta] \to \mathbb{R}$ injective tels que $f(t) = h(t)^{2m}$ pour tout $t \in [-\delta,\delta]$.

(c) Déterminer un développement asymptotique de l'intégrale

$$F(x) := \int_{-1}^1 g(t)\mathrm{e}^{-xf(t)}\,\mathrm{d}t \qquad (x \to +\infty).$$

On pourra établir la formule

$$\int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{-xy^{2m}}y^{2j}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{m\,x^{(2j+1)/2m}}\Gamma\Big(\frac{2j+1}{2m}\Big) \qquad (j\in\mathbb{N},\ m\in\mathbb{N}^*,\ x>0).$$

**58.** Déterminer un développement asymptotique selon les puissances de $1/n$ pour l'intégrale double

$$J(n) := \int_0^\infty\int_0^\infty \mathrm{e}^{-n(x^2+y^2)}(1-x-y)^n\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Calculer les deux premiers coefficients non nuls.

**59.** Montrer que

$$\int_{-1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{ix}}{(x^3+3x-2i)^n}\,\mathrm{d}x \sim \frac{2\mathrm{e}\, i^n \sqrt{\pi}}{4^n\sqrt{3n}} \qquad (n \to \infty).$$

**60.** Déterminer un équivalent asymptotique pour l'intégrale

$$J(t) := \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{e}^{itx}}{(1+x^2)^t}\,\mathrm{d}x$$

lorsque le paramètre réel $t$ tend vers $+\infty$.

**61.** Soit $\alpha \in ]0,\infty[$. Déterminer un développement asymptotique pour

$$F_\alpha(t) := \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{e}^{z-tz^2}}{1+t^\alpha z^2}\,\mathrm{d}z.$$

On distinguera les cas $\alpha < 1$, $\alpha = 1$ et $\alpha > 1$.

**62.** Montrer que

$$\int_{i-\infty}^{i+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-z^2}}{(1+z)^n}\,\mathrm{d}z \sim \frac{\sqrt{\pi}(2\mathrm{e})^{n/2}\mathrm{e}^{i\sqrt{2n}}}{i^n\sqrt{2\mathrm{e}}\, n^{n/2}} \qquad (n \to \infty).$$

Université de Lorraine
Faculté des sciences et technologies
Master de Mathématiques (M2) 2016/2017
Méthodes analytiques

# Exercices sur les théorèmes taubériens

**63.** Soient $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $b \in \mathbb{R}$. On pose $s_n := \sum_{0\leqslant m\leqslant n} a_m \quad (n \geqslant 0)$.

(a) Calculer $b_N := (1/N)\sum_{0\leqslant n\leqslant N} s_n$ en fonction de $a_0, \dots, a_N$. En déduire que, sous l'hypothèse

$$\lim_{N\to\infty} b_N = b, \tag{8·7}$$

une condition nécessaire et suffisante pour que la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ converge vers $b$ est que l'on ait $\sum_{0\leqslant n\leqslant N} na_n = o(N)$ $(N \to \infty)$.

(b) On suppose la condition (8·7) réalisée.

(i) Calculer $s_n$ en fonction de $b_n$ et $b_{n-1}$. Montrer que les séries $S(z) := \sum_{n\geqslant 0} s_n z^n$ et $A(z) := \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ convergent dans le disque unité ouvert.

(ii) Montrer que $S(x) = (1-x)\sum_{n\geqslant 0} nb_n x^n$ pour $0 < x < 1$. En déduire que $\lim_{x\to 1-}(1-x)S(x) = b$. On pourra poser $b_n = b + \varepsilon_n$ $(n \geqslant 0)$ où $\varepsilon_n$ tend vers 0 et majorer $E(x) := |\sum_{n\geqslant 0}\varepsilon_n n x^n|$.

(iii) Pour $0 < x < 1$, écrire $(1-x)S(x)$ en fonction de $A(x)$.

(c) Soit $K \in \mathbb{R}$. La condition $\inf_{n\in\mathbb{N}} na_n > -K$ est-elle une condition taubérienne suffisante pour que l'hypothèse (8·7) implique la convergence vers $b$ de la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ ?

**64.** Déduire du Théorème 4.1 l'estimation[1]

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{\mu(n)}{n} \ll \frac{\ln x}{\ln_2 x} \qquad (x\to\infty).$$

**65.** Soit $\{a_p\}$ une suite bornée indexée par les nombres premiers. Montrer que si $\sum a_p\, p^{-\sigma}$ tend vers une limite lorsque $\sigma \to 1+$ alors la série $\sum a_p/p$ converge. Montrer que le résultat est faux pour une suite indexée par les entiers.

**66.** Soit $A$ une constante positive et $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite complexe satisfaisant à $|b_n| \leqslant A\tau(n)$ pour tout entier $n \geqslant 1$ et à

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{b_n}{n^\sigma} = o\Big(\frac{1}{(\sigma-1)^2}\Big) \qquad (\sigma\to 1+). \tag{8·8}$$

(a) Est-il vrai que l'on a nécessairement $\sum_{n\leqslant x} b_n/n = o\big((\ln x)^2\big)$ $(x\to\infty)$ ?

(b) Même question pour la relation asymptotique $\sum_{n\leqslant x} b_n = o(x\ln x)$ lorsque $x\to\infty$.

(c) Soit $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite complexe bornée telle que

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{a_n}{n^\sigma} = o\Big(\frac{1}{\sigma-1}\Big) \qquad (\sigma\to 1+).$$

On suppose maintenant que $b_n := \sum_{d|n} a_d$. Montrer que l'on a (8·8). L'hypothèse supplémentaire concernant la structure de la suite $n \mapsto b_n$ implique-t-elle une modification de vos conclusions quant à la validité des relations considérées en (a) et (b) ?

1. Cette estimation non triviale est bien entendu beaucoup plus faible que l'assertion $\sum_n \mu(n)/n$, équivelente au théorème des nombres premiers, mais elle n'utilise qu'une information très fragmentaire sur la série de Dirichlet $1/\zeta(s)$ associée à la fonction de Möbius.

**67.** *Théorème de Berry–Esseen.* Soit $X$ une variable aléatoire réelle, de moyenne nulle, de variance égale à 1, et de moment absolu d'ordre 3 fini $\varrho$. On pose $F(x) := \operatorname{Prob}(X \leqslant x)$ $(x \in \mathbb{R})$ et

$$\varphi(\tau) := \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{i\tau x}\,\mathrm{d}F(x) \qquad (\tau \in \mathbb{R}).$$

Enfin, on désigne par $F_n(x)$ la fonction de répartition de $(1/\sqrt{n})\sum_{j=1}^n X_j$, où les $X_j$ sont des variables indépendantes de même loi que $X$.

(a) Montrer que $\varrho \geqslant 1$.

(b) En utilisant les inégalités

$$\Big|\mathrm{e}^{iy} - \sum_{0\leqslant j\leqslant m} \frac{1}{j!}(iy)^j\Big| \leqslant \frac{1}{(m+1)!}|y|^{m+1} \qquad (y \in \mathbb{R},\ m \geqslant 0)$$

et $|\log(1-y)+y| \leqslant |y|^2$ $(y \in \mathbb{C},\ |y| \leqslant \frac12)$, montrer que

$$|\varphi(\tau)-1| \leqslant \tfrac12\tau^2, \quad |\varphi(\tau)-1+\tfrac12\tau^2| \leqslant \tfrac16\varrho|\tau|^3 \quad (\tau \in \mathbb{R}),$$
$$\Big|\log\varphi(\tau)+\tfrac12\tau^2\Big| \leqslant \tfrac14\tau^4+\tfrac16\varrho|\tau|^3 \quad (|\tau| \leqslant 1).$$

(c) Montrer que l'on a pour tout $n \geqslant 1$

$$\Big|\varphi\Big(\frac{\tau}{\sqrt{n}}\Big)^n - \mathrm{e}^{-\tau^2/2}\Big| \ll \mathrm{e}^{-\tau^2/4}\Big\{\varrho\frac{|\tau|^3}{\sqrt{n}} + \frac{\tau^4}{n}\Big\} \quad (\varrho|\tau| \leqslant \sqrt{n}).$$

(d) Déduire de ce qui précède que l'on a

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\Big|F_n(x) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^x \mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t\Big| \leqslant C\frac{\varrho}{\sqrt{n}}$$

où $C$ est une constante absolue convenable.(2)

**68.** *Sur une idée de Wirsing (1956).* Soient $\mathcal{P}$ un ensemble de nombres premiers, et $\vartheta$ la fonction indicatrice de l'ensemble des entiers dont tous les facteurs premiers sont dans $\mathcal{P}$. On pose $T(x) := \sum_{n\leqslant x}\vartheta(n)$. On suppose l'existence de constantes $\delta > 0$ et $K > 0$ telles que, lorsque $x \to \infty$,

$$\text{(i)} \quad \sum_{p\leqslant x}\vartheta(p) \sim \frac{\delta x}{\ln x}, \qquad \text{(ii)} \quad \prod_{p\leqslant x}\Big(1+\frac{\vartheta(p)}{p-1}\Big) \sim K(\ln x)^\delta.$$

(a) Montrer que, pour $x \to \infty$, on a

$$\text{(iii)} \quad \sum_{n\leqslant x}\vartheta(n)\ln n \sim \delta x\sum_{m\leqslant x}\frac{\vartheta(m)}{m}, \qquad \text{(iv)} \quad T(x) \sim \frac{\delta x}{\ln x}\sum_{m\leqslant x}\frac{\vartheta(m)}{m}.$$

(b) Montrer que la relation (i) seule implique, lorsque $\sigma \to 0+$,

$$\sum_{p\leqslant\exp(1/\sigma)}\frac{\vartheta(p)}{p}(1-p^{-\sigma}) - \sum_{p>\exp(1/\sigma)}\frac{\vartheta(p)}{p^{1+\sigma}} = \gamma\delta + o(1).$$

En déduire que $\displaystyle\sum_{m\geqslant 1}\frac{\vartheta(m)}{m^{1+\sigma}} \sim \mathrm{e}^{-\gamma\delta}\prod_{p\leqslant\exp(1/\sigma)}\Big(1-\frac{\vartheta(p)}{p}\Big)^{-1} \qquad (\sigma \to 0+).$

(c) Montrer que sous les hypothèses (i) et (ii), on a

$$T(x) \sim \frac{\delta K\mathrm{e}^{-\gamma\delta}}{\Gamma(\delta+1)}x(\ln x)^{\delta-1} \qquad (x \to \infty).$$

2. Feller (1970) montre que la valeur $C = 3$ est admissible.

**69.** *Une réciproque d'un théorème d'Ingham (Corollaire 7.3).* Soit $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite complexe bornée telle que $\sum_{n\geqslant 1} a_n/n = a$.

(a) Montrer que, pour tout $y > 1$ fixé, on a

$$\sum_{N/y<n\leqslant N} a_n \left\lfloor \frac{N}{n} \right\rfloor = \sum_{m\leqslant y} \int_0^{N/m} \sum_{\max(t,N/y)<n\leqslant N/m} \frac{a_n}{n}\,\mathrm{d}t = o(N).$$

(b) En déduire que

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{1\leqslant n\leqslant N} a_n \left\lfloor \frac{N}{n} \right\rfloor = a. \tag{8·9}$$

(c) Application. Soit $\vartheta \in \mathbb{R}\smallsetminus\mathbb{Z}$. On pose $\tau^*(n,\vartheta) := \sum_{d|n} \mathrm{e}(d\vartheta)$. Montrer que la quantité

$$\frac{1}{N} \sum_{n\leqslant N} \tau^*(n,\vartheta)$$

tend vers une limite finie lorsque $N$ tend vers l'infini et la calculer.

**70.** (a) Montrer que $\sum_{n\geqslant 0} n\mathrm{e}^{-n^2\sigma} \sim 1/(2\sigma)$ lorsque $\sigma \to 0+$.

(b) En déduire la variante suivante du théorème de Hardy–Littlewood : *soient* $K \in \mathbb{R}$ *et* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *une suite réelle vérifiant* $na_n \geqslant -K$ $(n \geqslant 1)$ *et*

$$F(\sigma) := \sum_{n\geqslant 0} a_n \mathrm{e}^{-\sigma n^2} = s + o(1) \qquad (\sigma \to 0+);$$

*alors la série* $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ *converge et est de somme* $s$.

(c) Montrer que $\lim_{\sigma\to 0+} \sum_{n\geqslant 0} (-1)^n \mathrm{e}^{-\sigma n^2} = \frac{1}{2}$. Qu'en déduisez-vous ?

**71.** Soit $g(n) := \sum_{d|n} \mu(d)\mathrm{e}^{in/d}$ $(n \geqslant 1)$. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} g(n)/n$ converge et calculer sa somme.

Université Henri Poincaré–Nancy 1 — Lundi 17 octobre 2005
Master de Mathématiques (M2) 2005/06 — Durée : 2h
Analyse asymptotique et applications

# Sujet d'examen

*Les documents manuscrits ou distribués en cours sont autorisés, à l'exclusion de tout autre document. Il sera tenu le plus grand compte de la rédaction et de la présentation.*

**I.** Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{C}^3([0,1], \mathbb{R})$. On pose

$$f_N(x) := \frac{f(x/N)}{x} \qquad (1 \leqslant x \leqslant N).$$

(a) Montrer que l'on a uniformément pour $1 \leqslant x \leqslant N$

$$\begin{aligned} f_N(x) &= \frac{f(0)}{x} + \frac{f'(0)}{N} + O\Big(\frac{x}{N^2}\Big), \\ f'_N(x) &= \frac{-f(0)}{x^2} + O\Big(\frac{1}{N^2}\Big), \\ f''_N(x) &= \frac{2f(0)}{x^3} + O\Big(\frac{1}{N^3}\Big). \end{aligned}$$

(b) Établir la formule asymptotique

$$\sum_{1 \leqslant n \leqslant N} \frac{f(n/N)}{n} = \int_{1/N}^{1} \frac{f(y)}{y}\,\mathrm{d}y + \gamma f(0) + \frac{f'(0) + f(1)}{2N} + O\Big(\frac{1}{N^2}\Big)$$

où $\gamma$ désigne la constante d'Euler.

(c) Application. Donner une formule asymptotique pour

$$\sum_{1 \leqslant n \leqslant N} \frac{\cos(\pi n/2N)}{n}$$

lorsque $N \to \infty$.

**II.** (a) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, l'équation $(\sin x)^2 = 1/\ln x$ possède exactement deux solutions réelles, $x_n$ et $y_n$, dans $]2\pi n - \pi/2, 2\pi n + \pi/2[$.

(b) On convient dans la suite que $x_n < y_n$. Donner un développement asymptotique pour $y_n - 2\pi n$ lorsque $n \to \infty$. On s'attachera essentiellement à donner la forme du développement et à préciser la nature de la convergence sans chercher à calculer explicitement les coefficients qui interviennent.

Université Henri Poincaré–Nancy 1 | Mercredi 31 janvier 2007
Master de Mathématiques (M2) 2006/07 | Durée : 2h
Analyse asymptotique et applications

# Sujet d'examen

*Les documents manuscrits ou distribués en cours sont autorisés, à l'exclusion de tout autre document. Il sera tenu le plus grand compte de la rédaction et de la présentation.*

**I.** Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer la nature de la série

$$\sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{n^{1+i\alpha} \ln_2 n}.$$

**II.** Soit $\beta \in ]0,1[$. On pose $f_\beta(t) := \mathrm{e}^{it^\beta}$.

(a) Montrer qu'il existe un entier naturel $k$ tel que $f_\beta^{(k)} \in L^1([1,\infty[)$.

(b) Donner un équivalent asymptotique de la quantité

$$S_N(\beta) := \sum_{1 \leqslant n \leqslant N} \mathrm{e}^{in^\beta} \qquad (N \to \infty).$$

**III.** Soient $f$ et $g$ deux fonctions analytiques réelles, définies sur $[-1,1]$. On suppose que $f$ est à valeurs positives et possède un unique zéro à l'origine.

(a) Montrer le plus petit indice $k$ tel que $f^{(k)}(0) \neq 0$ est nécessairement pair. On posera $k = 2m$.

(b) Montrer qu'il existe un nombre réel $\delta > 0$ et une fonction analytique $h : [-\delta, \delta] \to \mathbb{R}$ injective tels que $f(t) = h(t)^{2m}$ pour tout $t \in [-\delta, \delta]$.

(c) Déterminer un développement asymptotique de l'intégrale

$$F(x) := \int_{-1}^{1} g(t)\mathrm{e}^{-xf(t)}\,\mathrm{d}t \qquad (x \to +\infty).$$

On pourra établir la formule

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-xy^{2m}} y^{2j}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{m\,x^{(2j+1)/2m}}\Gamma\Big(\frac{2j+1}{2m}\Big) \qquad (j \in \mathbb{N},\, m \in \mathbb{N}^*,\, x > 0).$$

Université Henri Poincaré–Nancy 1 16 décembre 2011
Master de Mathématiques (M2) 2011/12 Durée : 3h
Analyse asymptotique et applications

# Sujet d'examen

*Les documents manuscrits ou distribués en cours sont autorisés, à l'exclusion de tout autre document. Les notations sont celles du cours. Il sera tenu le plus grand compte de la rédaction et de la présentation.*

**I.** Déterminer un développement asymptotique pour l'intégrale

$$I_n := \int_0^\pi x^n \sin x \, \mathrm{d}x \quad (n \to \infty).$$

On pourra effectuer le changement de variable $x = \pi \mathrm{e}^{-y}$.

**II.** Soient $f$ et $g$ deux fonctions analytiques réelles, définies sur $[-1, 1]$. On suppose que $f$ est à valeurs positives et possède un unique zéro à l'origine.

(a) Montrer le plus petit indice $k$ tel que $f^{(k)}(0) \neq 0$ est nécessairement pair. On posera $k = 2m$.

(b) Montrer qu'il existe un nombre réel $\delta > 0$ et une fonction analytique $h : [-\delta, \delta] \to \mathbb{R}$ injective tels que $f(t) = h(t)^{2m}$ pour tout $t \in [-\delta, \delta]$.

(c) Déterminer un développement asymptotique de l'intégrale

$$F(x) := \int_{-1}^1 g(t)\mathrm{e}^{-xf(t)} \, \mathrm{d}t \qquad (x \to +\infty).$$

On pourra établir la formule

$$\int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{-xy^{2m}} y^{2j} \, \mathrm{d}y = \frac{1}{m\, x^{(2j+1)/2m}} \Gamma\Big(\frac{2j+1}{2m}\Big) \qquad (j \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{N}^*,\ x > 0).$$

**III.** Déterminer un équivalent asymptotique pour l'intégrale

$$J(t) := \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{e}^{itx}}{(1 + x^2)^t} \, \mathrm{d}x$$

lorsque le paramètre réel $t$ tend vers $+\infty$. On pourra poser $c := \sqrt{2} - 1$, noter que $1 + c^2 = 2(1 - c)$, $1 - c^2 = 2c$, $c\sqrt{2} = 1 - c$, et écrire le développement de Taylor à l'origine du polynôme $P(y) := (1 + y - c^2)^2 + 4c^2 y$.

Université Henri Poincaré–Nancy 1 — 11 avril 2012
Master de Mathématiques (M2) 2011/12 — Durée : 3h
Analyse asymptotique et applications

# Sujet d'examen

*Les documents manuscrits ou distribués en cours sont autorisés, à l'exclusion de tout autre document. Les notations sont celles du cours. Il sera tenu le plus grand compte de la rédaction et de la présentation.*

**I.** Évaluer asymptotiquement

$$S_n := \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} \binom{n}{k} \frac{k!}{n^k}$$

lorsque l'entier $n$ tend vers l'infini. On pourra utiliser la formule $n \int_0^\infty \mathrm{e}^{-nx} x^k \, \mathrm{d}x = \frac{k!}{n^k}\cdot$

**II.** (a) Montrer que pour chaque entier $n \geqslant 1$ l'équation $x \sin \pi x = 1$ possède une solution unique $x_n$ dans l'intervalle $]2n, 2n + \frac{1}{2}[$.

(b) On pose $x_n = 2n + y_n$. Montrer que $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$, et en déduire un équivalent asymptotique de $y_n$.

(c) Déterminer une fonction $g_n$ holomorphe dans le disque unité telle que, pour $n \geqslant 1$, $y_n$ soit l'unique solution de l'équation

$$\frac{g_n(z)}{2n} = z$$

dans le disque $D(0; \frac{1}{2}) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < \frac{1}{2}\}$. On pourra utiliser, après l'avoir démontrée, l'inégalité $|\sin \pi z| \geqslant 2|z|$ $(|z| \leqslant \frac{1}{2})$.

(d) Montrer l'existence d'une suite complexe double $\{c_{jk}\}_{k\geqslant 0,\, 0\leqslant j<k}$ telle que, pour tous entiers $k \geqslant 0$, $n \geqslant 1$, on ait

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1/2} \frac{\mathrm{d}z}{(\sin \pi z)^k (1 + z/2n)^k} = \sum_{0 \leqslant j \leqslant k-1} \frac{c_{jk}}{(2n)^j}\cdot$$

Montrer que

$$|c_{jk}| \leqslant 2^{k-2} \qquad (0 \leqslant j \leqslant k-1).$$

(e) Montrer que pour $n \geqslant 2$, on peut écrire

$$y_n = \sum_{m \geqslant 1} \frac{b_m}{(2n)^m},$$

où la série est absolument convergente. Vérifier que la valeur de $b_1$ est compatible avec le résultat obtenu en (a).

**III.** Déterminer un équivalent asymptotique pour l'intégrale

$$J(t) := \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{e}^{itx}}{(1 + x^2)^t} \, \mathrm{d}x$$

lorsque le paramètre réel $t$ tend vers $+\infty$. On pourra poser $c := \sqrt{2} - 1$, noter que $1 + c^2 = 2(1 - c)$, $1 - c^2 = 2c$, $c\sqrt{2} = 1 - c$, et écrire le développement de Taylor à l'origine du polynôme $P(y) := (1 + y - c^2)^2 + 4c^2 y$.

Université Henri Poincaré–Nancy 1 | 31 janvier 2014
Master de Mathématiques (M2) 2013/14 | Durée : 3h
Méthodes analytiques

# Sujet d'examen

*Les documents manuscrits ou distribués en cours sont autorisés, à l'exclusion de tout autre document. Les notations sont celles du cours. Il sera tenu le plus grand compte de la rédaction et de la présentation.*

**I.** (a) Déterminer $x_0 > 0$ tel que l'équation $\mathrm{e}^y = xy$ possède une solution réelle unique $y = y(x) \geqslant 1$ pour $x \geqslant x_0$.

(b) Montrer que pour $x$ assez grand on a

$$y(x) = \ln x + \ln_2 x + \sum_{n \geqslant 1} \frac{P_n(\ln_2 x)}{(\ln x)^n}$$

où $P_n$ est un polynôme réel sans terme constant et de degré $\leqslant n$. Notant $g(z) := z/(\mathrm{e}^z - 1)$, expliciter les coefficients de $P_n$ en fonctions des dérivées à l'origine des fonctions $g(z)^k$ et $\mathrm{e}^z g(z)^k$ ($k \geqslant 1$). Donner l'expression de $P_1(X)$ et $P_2(X)$.

**II.** (a) Montrer que, si $z = x + iy$, $x > 0$, et si $u + iv$ désigne la détermination principale de $\sqrt{z}$, alors

$$u = \sqrt{\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

(b) Établir l'évaluation asymptotique

$$F(t) := \frac{1}{2\pi i} \int_{1-i\infty}^{1+i\infty} \mathrm{e}^{t(z-\sqrt{z})} \frac{\mathrm{d}z}{z} \sim \frac{2\mathrm{e}^{-t/4}}{\sqrt{\pi t}} \qquad (t \to \infty),$$

où la racine carrée complexe est définie en détermination principale. On pourra utiliser sans la redémontrer l'inégalité

$$\sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{1+v}} \geqslant 1 + \tfrac{1}{16}\min(v, v^{1/4}) \qquad (v \geqslant 0).$$

Université Henri Poincaré–Nancy 1 — vendredi 5 février 2016
Master de Mathématiques (M2) 2015/16 — Durée : 3h
Méthodes analytiques

# Sujet d'examen

*Les documents manuscrits ou distribués en cours sont autorisés, à l'exclusion de tout autre document. Les notations sont celles du cours. Il sera tenu le plus grand compte de la rédaction et de la présentation.*

**I. I.** Soit $k$ un entier supérieur ou égal à 2.

(a) Montrer qu'il existe un nombre réel $r > 0$ tel que, pour tout $w \in ]0, r[$, l'équation $z = 1 + wz^k$ possède une unique solution réelle $z(w)$ dans l'intervalle $[1, 2]$.

(b) Montrer que, si $r$ est choisi assez petit, cette solution $z(w)$ admet un développement en série entière convergent

$$z(w) = 1 + \sum_{n \geqslant 1} a_{k,n} w^n,$$

où $\{a_{k,n}\}_{n \geqslant 1}$ est une suite d'entiers que l'on déterminera. On vérifiera que le rayon de convergence de la série est en fait égal à $(k-1)^{k-1}/k^k$.

*Remarque.* Pour $k = 2$ on obtient ainsi les nombres de Catalan.

**II.** Déterminer deux polynômes de degré 2 à coefficients rationnels $P(X)$ et $Q(X)$ tels que l'on ait, pour une constante convenable $C > 0$,

$$\prod_{1 \leqslant n \leqslant N} n^n = CN^{P(N)} \mathrm{e}^{-Q(N)} \Big\{ 1 + O\Big(\frac{1}{N^2}\Big) \Big\} \qquad (N \geqslant 1).$$

**III.** Le but de ce problème est de déterminer le comportement asymptotique lorsque $x \to \infty$ de la fonction de Bessel

$$J_0(x) := \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin t) \, \mathrm{d}t.$$

(a) On pose $J(x) = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathrm{e}^{ix \cos t} \, \mathrm{d}t$. Montrer que $J_0(x) = \Re e \, J(x)$.

(b) Déterminer l'axe principal du col correspondant à l'intégrale $J(x)$. Montrer que

$$J(x) = \frac{1}{\pi} \int_L \mathrm{e}^{ix \cos z} \, \mathrm{d}z + O\Big(\frac{1}{x}\Big) \qquad (x \geqslant 1)$$

où $L$ est un segment oblique du plan complexe que l'on explicitera.

(c) Montrer que, dans l'intégrale précédente, on peut remplacer $L$ par un sous-segment de longueur $\leqslant 2x^{-5/12}$ , quitte à induire une erreur de l'ordre de $\mathrm{e}^{-cx^{1/6}}$ où $c$ est une constante absolue strictement positive.

(d) Déterminer une formule asymptotique pour $J(x)$ puis pour $J_0(x)$.