Méthodes analytiques

Exercices et sujets d'examen

Gérald Tenenbaum
Université Henri Poincaré–Nancy 1
Master de Mathématiques (M2) 2016/2017

(23/9/2016, 1h05)
Diffusion étudiants

Table des matières

Université de Lorraine
Faculté des sciences et technologies
Master de Mathématiques (M2) 2016/2017
Analyse asymptotique et applications

Exercices d'analyse asymptotique générale

1. La formule
$$\frac{k^2}{1+kx^2} \ll \frac{1}{x}$$
est-elle valable pour chaque $k > 0$ fixé lorsque $x > 1$? Est-elle valable uniformément pour $k > 0$ et $x > 1$? Si non, déterminer un domaine de validité de la forme $k > 0$, $x > x_0(k)$.

2. Montrer que
$$\int_1^x (1+1/t)^t \,\mathrm{d}t = \mathrm{e}x - \tfrac{1}{2}\mathrm{e}\ln x + O(1) \qquad (x > 1).$$

3. Montrer que
$$\big\{x + 1 + O(1/x)\big\}^x = \mathrm{e}x^x + O\big(x^{x-1}\big) \qquad (x \to \infty).$$

4. Montrer que si l'on a
$$f(t) \approx \sum_{n\geqslant 0} a_n t^n \qquad (t \to 0),$$
et si f est intégrable sur $[0, x]$ pour x assez petit, alors
$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \approx \sum_{n\geqslant 0} \frac{a_n x^{n+1}}{n+1} \quad (x \to 0).$$

5. (a) Montrer que, pour chaque entier naturel n fixé, on a
$$\int_0^y (\ln t)^n \,\mathrm{d}t \ll y(\ln y)^n \qquad (y \to 0+).$$

(b) Déterminer la suite $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ telle que
$$x\int_2^\infty \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{\ln t}\,\mathrm{d}t \approx \sum_{n\geqslant 0} \frac{c_n}{(\ln x)^{n+1}} \qquad (x > 0,\ x \to 0).$$

6. Montrer que l'on a
$$(x\mathrm{e}^{2x-2n})^n \ll \mathrm{e}^{x^2+x} \qquad (x > 0,\ n \in \mathbb{N}^*).$$

7. Montrer que l'on a

$$\sum_{1\leqslant n\leqslant x}\left|\int_0^u \mathrm{e}^{i(n-v)t}\,\mathrm{d}t\right| \ll \ln(1+ux)+u \qquad (x\geqslant 1,\ u>0,\ v\in\mathbb{R}).$$

8. *Nombres logarithmiques.*[1] On définit la suite $\{L_n\}_{n=0}^{\infty}$ des nombres logarithmiques par le développement de Taylor

$$\frac{x}{\ln(1+x)}=\sum_{n\geqslant 0}L_n x^n \qquad (0<x<1).$$

(a) Montrer que

$$L_n=\int_0^1\binom{s}{n}\mathrm{d}s=\frac{1}{n!}\int_0^1\frac{\Gamma(s+1)}{\Gamma(s-n+1)}\,\mathrm{d}s=\frac{(-1)^{n+1}}{n!}\int_0^1\frac{s\Gamma(n-s)}{\Gamma(1-s)}\,\mathrm{d}s \qquad (n\geqslant 0).$$

(b) En utilisant la formule de Stirling réelle, en déduire que

$$L_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n}\Big\{1+O\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big\}\int_0^1\frac{s}{\Gamma(1-s)n^s}\,\mathrm{d}s=\frac{(-1)^{n+1}}{n(\ln n)^2}\Big\{1+O\Big(\frac{1}{\ln n}\Big)\Big\}.$$

9. Soit $a_0\in\mathbb{R}$ et $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ la suite définie par $a_{n+1}=a_n+\mathrm{e}^{-a_n}-1$. Montrer que $a_n\geqslant 0$ pour tout $n\geqslant 1$, que $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ est décroissante, et qu'il existe $K>0$ et $C>0$ telle que $a_n\leqslant K2^{-2^n/C}$ pour $n\geqslant 0$.

1. La résolution de cet exercice nécessite des connaissances sur la fonction Γ d'Euler qui sont disponibles dans le chapitre I.

Université de Lorraine
Faculté des sciences et technologies
Master de Mathématiques (M2) 2016/2017
Analyse asymptotique et applications

Exercices sur la fonction Gamma d'Euler

10. *Le théorème de Bohr–Mollerup.* Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe telle que $\varphi(1) = 0$, $\varphi(x+1) = \varphi(x) + \ln x$ $(x > 0)$.

(a) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, la fonction

$$\psi_n(x) := \{\varphi(n+1+x) - \varphi(n+1)\}/x$$

est croissante sur $[-1, 0[\cup]0, 1]$.

(b) En déduire que

$$0 \leqslant \varphi(x) - \ln\big(n!\, n^x / \prod_{j=0}^{n}(j+x)\big) \leqslant 1/n \qquad (0 < x \leqslant 1,\ n \geqslant 1).$$

(c) Montrer que φ est uniquement déterminée et satisfait la formule de Gauss

$$\mathrm{e}^{\varphi(x)} = \lim_{n\to\infty} n!\, n^x \prod_{j=0}^{n}(j+x)^{-1} \qquad (x > 0).$$

11. *Une autre caractérisation de* Γ.

(a) Montrer que $\Gamma'(x)/\Gamma(x) < \ln x$ $(x > 0)$. En déduire que $x \mapsto \mathrm{e}^x x^{-x}\Gamma(x)$ est décroissante pour $x > 0$.

(b) Montrer que Γ est uniquement déterminée par la propriété de décroissance de (a) et les conditions $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

12. *Preuve de Gauss de la formule d'Euler.*

(a) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 0$ et tout nombre complexe s tel que $\sigma > 0$,

$$\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} = -\sum_{0\leqslant j<n} \frac{1}{(s+j)} + \frac{\Gamma'(s+n)}{\Gamma(s+n)}.$$

(b) Montrer que $\Gamma'(s)/\Gamma(s) = \ln s + O(1/s)$ pour $s \in \mathbb{R}$, $s > 1$.

(c) En déduire la formule d'Euler $\Gamma(s) = \lim_{n\to\infty} n^s\, n! \prod_{0\leqslant j\leqslant n} 1/(s+j)$.

13. Soient $\{a_j\}_{j=1}^k$ et $\{b_j\}_{j=1}^k$ deux suites finies de nombres complexes telles que

$$b_j \notin \mathbb{Z}\ (1 \leqslant j \leqslant k), \qquad \sum_{1\leqslant j\leqslant k} a_j = \sum_{1\leqslant j\leqslant k} b_j.$$

Montrer que

$$\prod_{n\geqslant 1}\prod_{1\leqslant j\leqslant k} \frac{n-a_j}{n-b_j} = \prod_{1\leqslant j\leqslant k} \frac{\Gamma(1-b_j)}{\Gamma(1-a_j)}.$$

14. Soient $k \geqslant 2$ et $\varepsilon_k = \mathrm{e}^{2\pi i/k}$. Montrer, en utilisant le résultat de l'Exercice 13, que

$$\prod_{n\geqslant 1}\Big(1-\frac{x}{n^k}\Big) = \prod_{j=0}^{k-1}\Gamma\big(1-\varepsilon_k^j x^{1/k}\big)^{-1} \quad (x>0).$$

15. Montrer que $\displaystyle\int_{-1}^{1}(1+t)^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t = 2^{x+y-1}\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ $(x>0,\, y>0)$.

16. *L'intégrale de Dirichlet.*
Montrer que pour $f\in\mathcal{C}[0,1]$, $\alpha_j>0$ $(1\leqslant j\leqslant n)$, $\beta=\sum_{j=1}^n\alpha_j$, on a

$$\int_{\sum_{j=1}^n t_j\leqslant 1} f\Big(\sum_{1\leqslant j\leqslant n}t_j\Big)\prod_{1\leqslant j\leqslant n}\frac{\mathrm{d}t_j}{t_j^{1-\alpha_j}} = \frac{\prod_{j=1}^n\Gamma(\alpha_j)}{\Gamma(\beta)}\int_0^1 f(u)u^{\beta-1}\,\mathrm{d}u.$$

17. Calculer l'intégrale double $\int_\Delta x^\alpha y^\beta\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, où α, β sont des paramètres positifs et Δ est le domaine $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $x^\mu+y^\nu\leqslant 1$ $(\mu>0,\ \nu>0)$.

18. Calculer $\int_z^{z+1}\log\Gamma(w)\,\mathrm{d}w$ pour tout $z\in\mathbb{C}\smallsetminus\mathbb{R}^-$.

19. *La formule de Legendre–Gauss.*
(a) En utilisant la formule de Legendre, montrer que $\int_0^1\ln\Gamma(x)\,\mathrm{d}x=\frac12\ln(2\pi)$.
(b) Montrer que pour tout entier $n\geqslant 2$ on a

$$\prod_{0\leqslant j<n}\Gamma\Big(\frac{x+j}{n}\Big) = (2\pi)^{\frac12(n-1)}n^{\frac12-x}\Gamma(x) \qquad (x>0).$$

20. (a) En utilisant directement la définition de $\Gamma(s)$ sous forme intégrale, montrer que

$$-\Gamma'(1) = \ln x - \frac{1}{x}\int_0^\infty(\ln t)\mathrm{e}^{-t/x}\,\mathrm{d}t \qquad (x>1).$$

(b) En utilisant l'approximation $\ln t = \sum_{n\leqslant t}1/n - \gamma + O(1/t)$ $(t>1)$, retrouver la formule

$$\Gamma'(1) = -\gamma.$$

21. *Formules de Gauss et Dirichlet.*
(a) Montrer que $\displaystyle\gamma = \int_0^1\frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t - \int_1^\infty\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$ puis que

$$\gamma = \int_0^\infty\Big(\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-t}}-\frac{1}{t}\Big)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

(b) Montrer que pour $\Re e\, z>0$ on a $\displaystyle\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = -\gamma-\frac1z+\sum_{n\geqslant 1}\frac{z}{n(z+n)}$. En utilisant (a) et en écrivant $1/(z+n)=\int_0^\infty\mathrm{e}^{-t(z+n)}\,\mathrm{d}t$ $(\Re e\, z>0)$, montrer la formule de Gauss

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \int_0^\infty\Big(\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}-\frac{\mathrm{e}^{-zt}}{1-\mathrm{e}^{-t}}\Big)\,\mathrm{d}t \qquad (\Re e\, z>0).$$

(c) Montrer que $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^\infty\Big(\frac{1}{(1+x)^2\ln(1+x)}-\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\Big)\,\mathrm{d}x = 0$. En déduire grâce au résultat de (b) la formule de Dirichlet

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \int_0^\infty\Big(\mathrm{e}^{-x}-(1+x)^{-z}\Big)\frac{\mathrm{d}x}{x} \qquad (\Re e\, z>0).$$

22. *Une autre démonstration de la formule des compléments.*

(a) Pour $\alpha \in]0,1[$, montrer l'existence de l'intégrale $I(\alpha) := \int_0^\infty t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t/(1+t)$ et calculer sa valeur. On pourra soit utiliser la méthode des résidus, soit traiter d'abord le cas $\alpha = p/q \in \mathbb{Q}$ par le changement de variable $t = u^q$ et conclure par un argument de continuité.

(b) Déduire de (a) que la formule des compléments $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \pi/\sin(\pi z)$ est valide pour $z \in \mathbb{C} \smallsetminus \mathbb{Z}$.

23. (a) Soit $T_N(\xi)$ le polynôme déterminé par la relation

$$T_N(\sin x) = \sin\{(2N+1)x\}.$$

Montrer que

$$T_N(\xi) = (2N+1)\xi \prod_{1\leqslant k\leqslant N} \Big(1 - \xi^2/\sin^2\frac{\pi k}{2N+1}\Big).$$

(b) Choisir $\xi = \sin\{\pi x/(2N+1)\}$ et faire tendre N vers l'infini en justifiant soigneusement le passage à la limite pour obtenir la formule d'Euler

$$\sin(\pi x) = \pi x \prod_{k\geqslant 1} \big(1 - x^2/k^2\big).$$

(c) En déduire, grâce à la formule du produit de Weierstrass, la formule des compléments pour $\Gamma(x)$.

24. (a) Montrer les formules

$$\int_0^\infty t^{z-1}\cos t\,\mathrm{d}t = \Gamma(z)\cos\big(\tfrac{1}{2}\pi z\big) \qquad (0 < \Re e\, z < 1),$$
$$\int_0^\infty t^{z-1}\sin t\,\mathrm{d}t = \Gamma(z)\sin\big(\tfrac{1}{2}\pi z\big) \qquad (-1 < \Re e\, z < 1).$$

(b) Calculer la valeur des intégrales de Fresnel

$$I = \int_0^\infty \cos(t^2)\,\mathrm{d}t, \quad J = \int_0^\infty \sin(t^2)\,\mathrm{d}t.$$

25. *Sur le volume de la boule unité de $\mathbb{R}^n$ et les fonctions sphériques.*

On dit que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est sphérique s'il existe une fonction $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ telle que $f(\mathbf{x}) = g(\|\mathbf{x}\|)$, où $\|\mathbf{x}\|$ désigne la norme euclidienne de $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. On désigne par μ la mesure sur $\mathbb{R}^+$ image de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$ par l'application $\mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{x}\|$, de sorte que $\int_0^\infty g(t)\,\mathrm{d}\mu(t) = \int_{\mathbb{R}^n} g(\|\mathbf{x}\|)\,\mathrm{d}\mathbf{x}$ pour toute fonction $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ telle que le second membre ait un sens.

(a) Montrer que, pour tout $y \in \mathbb{R}^+$, on a $\mu([0,y]) = y^n V_n$ avec $V_n = \mu([0,1])$. En déduire que $\mathrm{d}\mu(y) = nV_n y^{n-1}\,\mathrm{d}y$ sur $[0,\infty[$.

(b) En choisissant une fonction sphérique f convenable, montrer que

$$V_n = \pi^{n/2}/\Gamma(1+n/2).$$

(c) Montrer que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \big(1+\|\mathbf{x}\|^2\big)^{-\frac{1}{2}(n+1)}\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \pi^{\frac{1}{2}(n+1)}/\Gamma\big(\tfrac{1}{2}(n+1)\big)$.

26. (a) Montrer que, pour tout $\sigma \geqslant \frac{1}{2}$, il existe une constante $M_0(\sigma)$ telle que l'on ait

$$|\Gamma(x+iy)| \leqslant M_0(\sigma)\mathrm{e}^{-|y|} \qquad (\tfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant \sigma,\ y \in \mathbb{R}).$$

(b) Montrer que pour $z = \frac{1}{2} + iy$, $s = \sigma + i\tau$, $\sigma \geqslant 1$, on a

$$\Gamma(z-k)\Gamma(s-z+k) = (-1)^k \Gamma(z)\Gamma(s-z) \prod_{1 \leqslant j \leqslant k} \Big(1 + \frac{s-1}{j-z}\Big).$$

En utilisant l'estimation $|1+w| \leqslant \exp\big\{\Re e\, w + O(|w|^2)\big\}$ $(w \in \mathbb{C})$, en déduire que, pour chaque s vérifiant $\sigma = \Re e\, s \geqslant 1$, il existe une constante $M(s) > 0$ telle que

$$|\Gamma(z-k)\Gamma(s-z+k)| \leqslant M(s) k^{\sigma-1} \mathrm{e}^{-|y|} \qquad (k \geqslant 1,\ z = \tfrac{1}{2} + iy,\ y \in \mathbb{R}).$$

(c) On pose pour $s \in \mathbb{C}$, $\Re e\, s \geqslant 1$, $u \in]0,1[$, $k \geqslant 0$,

$$I_k(s,u) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2}-k-i\infty}^{\frac{1}{2}-k+i\infty} \Gamma(z)\Gamma(s-z) u^{-z} \,\mathrm{d}z.$$

Montrer que cette intégrale est absolument convergente et tend vers 0 lorsque k tend vers l'infini.

(d) Montrer que l'on a pour $v \in \mathbb{C}$, $|v| < 1$,

$$\Gamma(s)(1+v)^{-s} = \sum_{k \geqslant 0} (-1)^k \frac{\Gamma(s+k)}{k!} v^k.$$

(e) Montrer que $I_0(s,u) = (1+u)^{-s}\Gamma(s)$ pour $\Re e\, s \geqslant 1$, $u \in]0,1[$.

(f) Montrer que l'on a pour $a, b \in [1, \infty[$, $\Re e\, s \geqslant 1$,

$$\frac{\Gamma(s)}{(a+b)^s} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} \frac{\Gamma(z)\Gamma(s-z)}{a^z b^{s-z}} \,\mathrm{d}z.$$

[On distinguera les cas $a < b$, $a = b$ et $a > b$.]

(g) Montrer qu'il existe une constante σ_0 que l'on calculera (on ne demande pas la valeur optimale) telle que l'on ait pour $\sigma > \sigma_0$

$$\Gamma(s) \sum_{m \geqslant 1} \sum_{n \geqslant 1} (m^3 + n^2)^{-s} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} \zeta(3z)\zeta(2s-2z)\Gamma(z)\Gamma(s-z) \,\mathrm{d}z$$

où ζ désigne la fonction zêta de Riemann.

Université de Lorraine
Faculté des sciences et technologies
Master de Mathématiques (M2) 2016/2017
Analyse asymptotique et applications

Exercices sur l'analyse asymptotique des fonctions implicites

27. Montrer que, pour chaque entier $n \geqslant 1$, l'équation $\sin x = 1/\ln x$ possède une unique solution x_n dans l'intervalle $]2\pi n, 2\pi n + \frac{1}{2}\pi[$ et que l'on a

$$x_n = 2\pi n + \frac{1}{\ln 2\pi n} + O\Big(\frac{1}{(\ln 2\pi n)^3}\Big) \quad (n \to \infty).$$

28. (a) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, l'équation $(\sin x)^2 = 1/\ln x$ possède exactement deux solutions réelles, x_n et y_n, dans $]2\pi n - \frac{1}{2}\pi, 2\pi n + \frac{1}{2}\pi[$.

(b) On convient dans la suite que $x_n < y_n$. Donner un développement asymptotique pour $y_n - 2\pi n$ lorsque $n \to \infty$. On s'attachera essentiellement à donner la forme du développement et à préciser la nature de la convergence sans chercher à calculer explicitement les coefficients qui interviennent.

29. Soit $t \mapsto f(t)$ une fonction positive satisfaisant à

$$\mathrm{e}^{tf(t)} = f(t) + t + O(1) \qquad (0 < t < \infty).$$

Montrer que

$$f(t) = \frac{\ln t}{t} + O\Big(\frac{1}{t^2}\Big) \qquad (t \to \infty).$$

30. Montrer que la solution positive de l'équation $\mathrm{e}^y + \ln y = x$ peut être écrite, pour x assez grand, sous la forme

$$y = \ln x + \frac{\ln_2 x}{x} F\Big(\frac{\ln_2 x}{x \ln x}, \frac{1}{x \ln x}, \frac{\ln_2 x}{x}\Big)$$

où $F(\lambda, \mu, \nu)$ est une série entière de trois variables convergente dans un voisinage de l'origine.

31. Soit $E : [1, \infty[\to \mathbb{R}^+$ la fonction définie par

$$E(t) := \int_1^t \frac{\mathrm{e}^v}{v} \,\mathrm{d}v.$$

(a) Montrer que E est bijective.

(b) Pour $x \geqslant \mathrm{e}$, on note $y = y(x)$ la solution de $E(y) = \mathrm{e}^x$ et l'on pose

$$\lambda := \frac{1}{x}, \quad \mu := \frac{\ln x}{x}, \quad \nu := \frac{\mathrm{e}^x - E(x + \ln x)}{x\mathrm{e}^x}.$$

Montrer que

$$\nu \approx \frac{\lambda\mu}{1+\mu} - \sum_{j \geqslant 2} (j-1)! \Big(\frac{\lambda}{1+\mu}\Big)^j \qquad (x \to \infty).$$

(c) On pose

$$G_x(Z) := \int_0^Z \frac{\mathrm{e}^v}{1+\mu+\lambda v}\,\mathrm{d}v \qquad (x \geqslant \mathrm{e},\ Z \in \mathbb{C},\ |Z| < 1).$$

Montrer que G_x est holomorphe sur le disque unité et que, pour x assez grand, l'équation

$$G_x(Z) = \nu/\lambda$$

possède dans ce disque une solution unique, que l'on notera $z = z(x)$.

(d) Montrer que, pour x assez grand, on a $y(x) = x + \ln x + z(x)$.

(e) Montrer qu'il existe une suite réelle $\{d_{kh}\}_{h\geqslant 0,\,k\geqslant 0}$ telle que, pour x assez grand, l'on ait

$$z = \sum_{k\geqslant 1,\,h\geqslant 0} d_{kh}\Big(\frac{\nu}{\lambda}\Big)^k (1+\mu)^k \Big(\frac{\lambda}{1+\mu}\Big)^h.$$

(f) Montrer qu'il existe une suite $\{P_h\}_{h=1}^{\infty}$ de polynômes à coefficients réels tels que $\deg P_h \leqslant h$ $(h \geqslant 1)$ et

$$y - x - \ln x \approx \sum_{h\geqslant 1} \frac{P_h(\ln x)}{x^h} \qquad (x \to \infty).$$

Université de Lorraine
Faculté des sciences et technologies
Master de Mathématiques (M2) 2016/2017
Analyse asymptotique et applications

Exercices sur les sommes et séries

32. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer la nature de la série

$$\sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{n^{1+i\alpha} \ln_2 n}.$$

33. Soit $\beta \in]0,1[$. On pose $f_\beta(t) := \mathrm{e}^{it^\beta}$.

(a) Montrer qu'il existe un entier naturel k tel que $f_\beta^{(k)} \in L^1([1,\infty[)$.

(b) Donner un équivalent asymptotique de la quantité

$$S_N(\beta) := \sum_{1 \leqslant n \leqslant N} \mathrm{e}^{in^\beta} \qquad (N \to \infty).$$

34. Soient $k \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathcal{C}^{2k+1}\big([1,\infty[,\mathbb{R}\big)$. On suppose de plus que $f^{(2k+1)} \in L^1[1,\infty[$. Montrer qu'il existe une constante $C_k(f)$, que l'on explicitera, telle que l'on ait, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\sum_{1 \leqslant m \leqslant n} f(m) = \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x + \tfrac{1}{2} f(n) + \sum_{1 \leqslant j \leqslant k} \frac{B_{2j}}{(2j)!} f^{(2j-1)}(n) + C_k(f) + R_{k,n}(f) \tag{1}$$

où $R_{k,n}(f) \to 0$ lorsque $n \to \infty$.

En déduire que si $f^{(2j+1)} \in L^1(\mathbb{R})$ pour $j \geqslant m$ alors $C_k(f)$ est indépendant de k lorsque $k \geqslant m$.

35. *Variations des $B_r(x)$.* Posons, pour $m \geqslant 1$, $\varepsilon \in \{0,1\}$, $x \in \mathbb{R}$,

$$\varphi_{2m+\varepsilon}(x) := (-1)^m \{B_{2m+\varepsilon}(x) - B_{2m+\varepsilon}\}.$$

(a) Montrer que, pour $0 \leqslant x \leqslant 1$, on a $\varphi_2(x) = x(1-x)$, $\varphi_3(x) = x(x-\frac{1}{2})(1-x)$.

(b) Calculer $\sum_{r \geqslant 0} b_r(\frac{1}{2}) y^r / r!$. En déduire que $\varphi_{2m+1}(\frac{1}{2}) = 0$ pour $m \geqslant 1$.

(c) Montrer que, pour $m \geqslant 1$, on a $\varphi'_{2m+1}(x) = (2m+1)\{\varphi_{2m}(x) - |B_{2m}|\}$, et $\varphi'_{2m+2}(x) = -(2m+2)\varphi_{2m+1}(x)$.

(d) Établir par récurrence sur $m \geqslant 1$ que $\varphi_{2m}(x) > 0$ et $(x-\frac{1}{2})\varphi_{2m+1}(x) > 0$ pour $0 < x < 1$, $x \neq \frac{1}{2}$.

36. *Majoration du terme d'erreur.* Soient $k \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathcal{C}^{2k+2}\big([1,\infty[,\mathbb{R}\big)$ telle que $f^{(2k+2)} \in L^1[1,\infty[$. On pose

$$S_{h,n}(f) := \tfrac{1}{2}f(n) + \sum_{1\leqslant j\leqslant h} \frac{B_{2j}}{(2j)!} f^{(2j-1)}(n) \qquad (0 \leqslant h \leqslant k+1,\, n \in \mathbb{N}^*).$$

(a) Montrer que l'on a, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\sum_{1\leqslant m\leqslant n} f(m) = \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x + S_{k,n}(f) + C_k^*(f) + R_{k,n}^*(f) \tag{2}$$

où $C_k^*(f)$ est une constante que l'on précisera et où l'on a posé, avec la notation φ_r de l'exercice 35

$$R_{k,n}^*(f) := \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+2)!} \int_n^\infty f^{(2k+2)}(x)\varphi_{2k+2}(x)\,\mathrm{d}x. \tag{3}$$

(b) On effectue désormais l'hypothèse supplémentaire que $f^{(2k)} \in L^1([1,\infty[)$ et donc $\lim_{x\to\infty} f^{(2k-1)}(x) = 0$. Montrer que

$$C_{k-1}^*(f) = C_k^*(f), \qquad R_{k-1,n}^*(f) - R_{k,n}^*(f) = \frac{B_{2k}}{(2k)!} f^{(2k-1)}(n).$$

(c) Montrer que, si $f^{(2k+2)}$ et $f^{(2k)}$ sont de signe constant et de même signe sur $[1,\infty[$, alors $R_{k-1,n}^*(f)$ et $R_{k,n}^*(f)$ ont des signes opposés. En déduire que

$$|R_{k,n}^*(f)| \leqslant \left|\frac{B_{2k}}{(2k)!} f^{(2k-1)}(n)\right|,$$

autrement dit, que *la valeur absolue du terme d'erreur de la formule d'Euler-Maclaurin* (2) *n'excède pas celle du dernier terme retenu.*

37. Montrer que pour tous entiers $n \geqslant 1$, $k \geqslant 1$, on a

$$\gamma = \sum_{1\leqslant m\leqslant n} \frac{1}{m} - \log n - \frac{1}{2n} + \sum_{1\leqslant j\leqslant k} \frac{B_{2j}}{2jn^{2j}} + \varepsilon_n$$

où γ désigne la constante d'Euler et où $|\varepsilon_n| \leqslant B_{2k}/\{2kn^{2k}\}$. Montrer que le choix $n = 50$, $k = 7$, permet de calculer γ avec 24 décimales exactes.

Remarque. Sommation au plus petit terme. On sait que $|B_{2j}| \sim 2(2j)!/(2\pi)^{2j}$. Lorsque n est fixé, le rapport de deux termes consécutifs dans la somme en j est donc voisin de $(j/\pi n)^2$. Il s'ensuit que le meilleur terme d'erreur obtenu par cette méthode correspond au choix de k voisin de πn. La taille de ε_{kn} est alors de l'ordre de $\mathrm{e}^{-2\pi n}$. Pour $n = 10$, on obtient déjà 27 décimales exactes à condition de connaître les valeurs de B_{2k} pour $k \leqslant 32$.

38. Montrer que pour tous entiers $n \geqslant 1$, $k \geqslant 1$, on a

$$\tfrac{1}{6}\pi^2 = \sum_{1\leqslant m\leqslant n} \frac{1}{m^2} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \sum_{1\leqslant j\leqslant k} \frac{B_{2j}}{n^{2j+1}} + \varepsilon_n$$

avec $|\varepsilon_n| \leqslant B_{2k}/n^{2k+1}$. Montrer que le choix $k = 8$, $n = 100$ permet de calculer $\pi^2/6$ avec 33 décimales exactes.

39. Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{C}^3([0,1],\mathbb{R})$. On pose

$$f_N(x) := \frac{f(x/N)}{x} \qquad (1 \leqslant x \leqslant N).$$

(a) Montrer que l'on a uniformément pour $1 \leqslant x \leqslant N$

$$\begin{aligned} f_N(x) &= \frac{f(0)}{x} + \frac{f'(0)}{N} + O\Big(\frac{x}{N^2}\Big), \\ f_N'(x) &= \frac{-f(0)}{x^2} + O\Big(\frac{1}{N^2}\Big), \\ f_N''(x) &= \frac{2f(0)}{x^3} + O\Big(\frac{1}{N^3}\Big). \end{aligned}$$

(b) Établir la formule asymptotique

$$\sum_{1 \leqslant n \leqslant N} \frac{f(n/N)}{n} = \int_{1/N}^1 \frac{f(y)}{y}\,\mathrm{d}y + \gamma f(0) + \frac{f'(0)+f(1)}{2N} + O\Big(\frac{1}{N^2}\Big)$$

où γ désigne la constante d'Euler.

(c) Application. Donner une formule asymptotique pour

$$\sum_{1 \leqslant n \leqslant N} \frac{\cos(\pi n/2N)}{n}$$

lorsque $N \to \infty$.

40. Soit f une application continue et dérivable de $[1,+\infty[$ dans $\mathbb{R}^+$ telle que $f'(x)$ décroît, $f'(x) \to 0 \quad (x \to \infty)$, et $xf'(x) \to \infty \quad (x \to \infty)$.

(a) En utilisant la formule d'Euler–Maclaurin à l'ordre 0 et la seconde formule de la moyenne, montrer que

$$\sum_{1 \leqslant n \leqslant N} \mathrm{e}^{if(n)} = o(N) \qquad (x \to \infty). \tag{4}$$

(b) En intégrant par parties $\int_1^N \mathrm{e}^{if(t)}\,\mathrm{d}t$, montrer que (4) n'a pas lieu si $xf'(x)$ tend vers une limite finie.

41. Pour $x \in \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N}$, on pose $\varphi_j(x) := \mathrm{e}^{-x}x^j/j!$, et l'on note

$$S_n(x) := \sum_{0 \leqslant j \leqslant n} \varphi_j(x) \qquad (n \in \mathbb{N},\, x \in \mathbb{R}).$$

Le but de ce problème est d'évaluer $S_n(x)$ uniformément par rapport à x lorsque $n \to \infty$, une question initialement posée et partiellement résolue par Ramanujan.

(a) Soit $Q : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ la fonction définie par $Q(y) := y\ln y - y + 1 = \int_1^y \ln t\,\mathrm{d}t$. Établir les formules

$$\begin{aligned} Q(1-v) &= v^2 \int_0^1 \frac{1-s}{1-sv}\,\mathrm{d}s \geqslant \tfrac12 v^2 \qquad (0 \leqslant v < 1), \\ Q(1-v) &= \tfrac12 v^2 + O(v^3) \qquad (0 \leqslant v \leqslant \tfrac12). \end{aligned}$$

(b) Montrer que l'on a

$$n! = n^n \mathrm{e}^{-n}\sqrt{2\pi n}\Big\{1 + O\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big\} \quad (n \geqslant 1),^{(1)}$$

et

$$\varphi_j(n) = \frac{\mathrm{e}^{-nQ(j/n)}}{\sqrt{2\pi j}}\Big\{1 + O\Big(\frac{1}{j}\Big)\Big\} \qquad (1 \leqslant j \leqslant n)$$

(c) Soit $p := [n/2]$, $b := Q(\frac{1}{2}) > 0$. Montrer que

$$\sum_{0\leqslant j\leqslant p} \varphi_j(n) \ll \mathrm{e}^{-bn}\sqrt{n} \qquad (n \geqslant 1).$$

(d) Soit $F_n(u) := \mathrm{e}^{-nQ(1-u/n)}/\sqrt{2\pi(n-u)}$ $(n \geqslant 1,\ 0 \leqslant u < n)$. On pose

$$T_n := \sum_{0\leqslant k\leqslant p} F_n(k) \qquad (n \in \mathbb{N}^*).$$

Montrer que, pour toute constante c vérifiant $0 < c < b$, on a

$$S_n(n) = \Big\{1 + O\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big\}T_n + O\big(\mathrm{e}^{-cn}\big)$$

(e) Montrer que

$$T_n = \int_0^p F_n(u)\,\mathrm{d}u + \tfrac{1}{2}F_n(0) + I_n + O\big(\mathrm{e}^{-cn}\big)$$

avec $I_n := \int_0^p B_1(u)F_n'(u)\,\mathrm{d}u$.

(f) Calculer la dérivée logarithmique de $F_n(u)$ et en déduire que

$$|F_n'(u)| \ll \frac{u+1}{n^{3/2}}\mathrm{e}^{-u^2/(2n)} \qquad (0 \leqslant u \leqslant p).$$

En déduire que

$$T_n = \int_0^p F_n(u)\,\mathrm{d}u + O\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big)\cdot$$

(g) Montrer que

$$F_n\big(v\sqrt{n}\big) \ll \frac{\mathrm{e}^{-v^2/2}}{\sqrt{n}} \quad (0 \leqslant v \leqslant \tfrac{1}{2}\sqrt{n})$$

et que

$$F_n\big(v\sqrt{n}\big) = \frac{\mathrm{e}^{-v^2/2}}{\sqrt{2\pi n}}\Big\{1 + O\Big(\frac{v(1+v^2)}{\sqrt{n}}\Big)\Big\} \qquad (0 \leqslant v \leqslant \tfrac{1}{2}n^{1/6}).$$

En déduire que

$$T_n = \tfrac{1}{2} + O\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big) \qquad (n \geqslant 1)$$

et que la même évaluation est valable pour $S_n(n)$.

(h) Montrer que $S_n'(x) = -\varphi_n(x)$. En déduire que, pour $x := n + z\sqrt{n}$, $|z| \leqslant n^{1/6}$, on a

$$(*) \qquad S_n(x) = \Phi(z) + O\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big),$$

où l'on a posé $\Phi(z) := \int_z^\infty \mathrm{e}^{-v^2/2}\,\mathrm{d}v/\sqrt{2\pi}$.

(i) Montrer que la formule asymptotique $(*)$ est en fait valable uniformément pour $x \in \mathbb{R}$, $n \geqslant 1$.

---

1. On ne demande pas de redémontrer que la constante d'Euler–Maclaurin de la fonction $t \mapsto \ln t$ est $\frac{1}{2}\ln(2\pi)$.

42. Soit $\alpha \in]0,1[$. On pose

$$f(t) := \prod_{n\geqslant 1}\Big(\frac{1}{1-\alpha \mathrm{e}^{-nt}}\Big).$$

Déterminer un développement asymptotique de $\ln f(t)$ lorsque $t \to 0+$.

43. *Un exercice qui nécessite des prises d'initiatives.* En appliquant la formule d'Euler-Maclaurin sur l'intervalle $[1, N]$ à la fonction

$$f(x) := \ln\Big(\frac{x\vartheta}{1-\mathrm{e}^{-x\vartheta}}\Big),$$

et en faisant tendre N vers l'infini, montrer que, pour tout entier $k \geqslant 2$ fixé on a, lorsque ϑ tend vers 0 par valeurs positives,

$$\prod_{n\geqslant 1}\Big(\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-n\vartheta}}\Big) = \{1+O(\vartheta^k)\}\mathrm{e}^{\pi^2/6\vartheta-\vartheta/24}\sqrt{\frac{\vartheta}{2\pi}}.$$

44. Montrer que $|B_{2k+1}(x)| \leqslant (k+\frac{1}{2})|B_{2k}|$ pour tous $x \in \mathbb{R}$, $k \geqslant 1$. En déduire que, pour $\Re e\, s = \sigma > 0$, $n \geqslant 1$, $k \geqslant 1$, on a

$$\zeta(s) = \sum_{1\leqslant m\leqslant n}\frac{1}{m^s} - \frac{n^{1-s}}{1-s} - \frac{1}{2n^s} - \sum_{1\leqslant j\leqslant k}\frac{B_{2j}}{2jn^{s+2j-1}}\binom{s+2j-2}{2j-1} + \varepsilon_{k,n}(s)$$

avec $|\varepsilon_{k,n}(s)| \leqslant \dfrac{k+1/2}{(\sigma+2k)n^{\sigma+2k}}\left|B_{2k}\dbinom{s+2k}{2k+1}\right|.$

45. Pour $|\tau| \leqslant (1-\delta)2\pi x$ et $y \geqslant x$, montrer que

$$\sum_{x<n\leqslant y} n^{-i\tau} = \int_x^y t^{-i\tau}\,\mathrm{d}t + O(1). \tag{5}$$

en adoptant la stratégie suivante : appliquer la formule d'Euler–Maclaurin à l'ordre 0 à $f(t) := t^{-i\tau}$, développer $B_1(t)$ en série de Fourier, intégrer terme à terme et majorer chacune des intégrales obtenues par la seconde formule de la moyenne.

46. Montrer que, pour tous $\sigma_0 > 0$, $0 < \delta < 1$, et uniformément pour $\sigma \geqslant \sigma_0$, $x \geqslant 1$, $0 < |\tau| \leqslant (1-\delta)2\pi x$, on a

$$\zeta(s) = \sum_{n\leqslant x} n^{-s} - \frac{x^{1-s}}{1-s} + O(x^{-\sigma}). \tag{6}$$

On pourra commencer par établir, en effectuant une sommation d'Abel reposant sur la formule

$$m^{-\sigma-i\tau} = m^{-i\tau}\int_m^\infty \frac{\sigma\,\mathrm{d}t}{t^{1+\sigma}}$$

et en faisant appel au résultat démontré à l'Exercice 45, que l'on a, dans les conditions indiquées,

$$\sum_{x<m\leqslant n} m^{-s} = \frac{x^{1-s}-n^{1-s}}{1-s} + O(1).$$

On pourra ensuite appliquer la formule de l'Exercice 44.

47. *Formule sommatoire de Cauchy–Poisson : un cas simple de validité.*

Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. On suppose que la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |f(x+n)|$ est uniformément convergente sur $[0,1]$, autrement dit que

$$\varepsilon_N := \sup_{0\leqslant x\leqslant 1} \sum_{|n|>N} |f(x+n)| \to 0 \qquad (N \to \infty).$$

(a) Montrer que, pour tous entiers $N \geqslant 0$, $M \geqslant 0$, on a

$$\int_N^{N+M} |f(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \varepsilon_N.$$

En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x$ est absolument convergente et en particulier que les intégrales

$$\widehat{f}(p) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-2\pi ipx}\,\mathrm{d}x$$

sont convergentes pour chaque entier $p \in \mathbb{Z}$.

(b) Montrer que la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n)$ est 1-périodique, continue et vérifie

$$c_p(\varphi) = \widehat{f}(p) \qquad (p \in \mathbb{Z}).$$

(c) On suppose que la série $\sum_p \widehat{f}(p)$ est absolument convergente. Montrer que φ est en tout point somme de sa série de Fourier et, en particulier, que l'on a

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \sum_{p\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(p).$$

48. *Fonction thêta de Jacobi.*

On définit la fonction thêta de Jacobi par la formule

$$\vartheta(z) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{-\pi n^2 z} \qquad (\Re e\, z > 0).$$

(a) Montrer que $\vartheta(1/z) = \vartheta(z)\sqrt{z}$ où la racine carrée est prise en détermination principale.

(b) Montrer que, lorsque $z \to 0$ dans le secteur $|\Im m\, z| \leqslant c|\Re e\, z|$, on a

$$\vartheta(z) = \frac{1}{\sqrt{z}} + O\Big(\frac{\mathrm{e}^{-\pi/d|z|}}{\sqrt{|z|}}\Big)$$

avec $d = \sqrt{1+c^2}$.

49. *Une série de Fourier très petite au voisinage de l'origine.*

Soit $T > 0$ et

$$f(t) = \sum_{n\geqslant 0} a_n \mathrm{e}^{2\pi in^2 t} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n \mathrm{e}^{-\pi n^2(T-2it)}.$$

(a) Montrer que

$$f(t) = \frac{1}{2\sqrt{z}}\Big\{\vartheta\Big(\frac{1}{4z}\Big) - \vartheta\Big(\frac{1}{z}\Big)\Big\} \qquad (z = T - 2it).$$

(b) En déduire que

$$f(t) \ll \frac{\mathrm{e}^{-\pi/8T}}{T} \quad (-\tfrac12 T \leqslant t \leqslant \tfrac12 T).$$

50. *Sommes de Riemann.*
Pour $T > 0$, désignons par $\mathcal{H}_T$ l'espace des fonctions T-périodiques Riemann-intégrables sur une période. On munit $\mathcal{H}_T$ de la norme de la convergence en moyenne quadratique, notée $\|\cdot\|_2$. Soit $f \in \mathcal{H}_T$, de moyenne $M(f)$. On pose

$$f_k(x) := \frac{1}{k} \sum_{0 \leqslant j < k} f\Big(x + \frac{jT}{k}\Big) \qquad (k \in \mathbb{N}^*).$$

(a) Montrer que $c_n(f_k) := \begin{cases} c_n(f) & \text{si } n \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, k), \\ 0 & \text{si } n \not\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, k). \end{cases}$

(b) En déduire que $\lim_{k\to\infty} \|f_k - M(f)\|_2 = 0$, autrement dit que f_k converge vers $M(f)$ dans $\mathcal{H}_T$.

51. Montrer que l'on a

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{\mathrm{e}^{-n^2 t}}{n} = \tfrac{1}{2}\ln(1/t) + \tfrac{1}{2}\gamma + O\big(\sqrt{t}\big) \qquad (0 < t \leqslant 1)$$

où $\gamma = -\Gamma'(1)$ est la constante d'Euler.

52. En admettant le théorème des nombres premiers sous la forme forte

$$\vartheta(x) := \sum_{\substack{p\leqslant x\\ p\in\mathbb{P}}} \ln p = x + O_m\big(x/\{\ln x\}^m\big) \qquad (x > 1,\, m \geqslant 1),$$

où $\mathbb{P}$ désigne l'ensemble des nombres premiers, montrer que

$$\sum_{p\in\mathbb{P}} \mathrm{e}^{-py} \approx \sum_{n\geqslant 0} \frac{c_n}{y\{\ln y\}^{n+1}} \qquad (y \to 0+)$$

où l'on a posé $c_n := -\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}(\ln t)^n \,\mathrm{d}t$.

53. On pose $\sigma(n) := \sum_{d\mid n} d$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.
(a) Montrer que

$$S(x) := \sum_{n\leqslant x} \sigma(n) = \tfrac{1}{12}\pi^2 x^2 + O(x \ln x) \qquad (x \geqslant 2).$$

(b) Pour $y \in [0, 1[$, transformer l'expression

$$T(y) := \sum_{n\geqslant 1} \frac{n y^n}{1 - y^n}$$

en faisant intervenir $\sigma(n)$ puis $S(n)$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.
(c) Déterminer $a \in \mathbb{R}$ tel que

$$T(y) \sim \frac{a}{(1-y)^2} \qquad (y \to 1-).$$

Université de Lorraine
Faculté des sciences et technologies
Master de Mathématiques (M2) 2016/2017
Analyse asymptotique et applications

Exercices sur la méthode de Laplace et la méthode du col

54. Montrer que
$$\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x x^n}{(1+x^2)^n}\,\mathrm{d}x \sim \frac{\sqrt{\pi}\mathrm{e}}{2^n\sqrt{2n}} \qquad (n\to\infty).$$

55. Déterminer un développement asymptotique pour l'intégrale
$$I_n := \int_0^\pi x^n \sin x\,\mathrm{d}x \quad (n\to\infty).$$

56. Évaluer asymptotiquement
$$S_n := \sum_{0\leqslant k\leqslant n} \binom{n}{k}\frac{k!}{n^k}\cdot$$
On pourra utiliser la formule $n\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-nx}x^k\,\mathrm{d}x = k!/n^k$.

57. Soient f et g deux fonctions analytiques réelles, définies sur $[-1,1]$. On suppose que f est à valeurs positives et possède un unique zéro à l'origine.

(a) Montrer le plus petit indice k tel que $f^{(k)}(0)\neq 0$ est nécessairement pair. On posera $k=2m$.

(b) Montrer qu'il existe un nombre réel $\delta>0$ et une fonction analytique $h:[-\delta,\delta]\to\mathbb{R}$ injective tels que $f(t)=h(t)^{2m}$ pour tout $t\in[-\delta,\delta]$.

(c) Déterminer un développement asymptotique de l'intégrale
$$F(x) := \int_{-1}^1 g(t)\mathrm{e}^{-xf(t)}\,\mathrm{d}t \qquad (x\to+\infty).$$
On pourra établir la formule
$$\int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{-xy^{2m}}y^{2j}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{m\,x^{(2j+1)/2m}}\Gamma\Big(\frac{2j+1}{2m}\Big) \qquad (j\in\mathbb{N},\ m\in\mathbb{N}^*,\ x>0).$$

58. Déterminer un développement asymptotique selon les puissances de $1/n$ pour l'intégrale double
$$J(n) := \int_0^\infty\int_0^\infty \mathrm{e}^{-n(x^2+y^2)}(1-x-y)^n\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$
Calculer les deux premiers coefficients non nuls.

59. Montrer que

$$\int_{-1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{ix}}{(x^3+3x-2i)^n}\,\mathrm{d}x \sim \frac{2\mathrm{e}\,i^n\sqrt{\pi}}{4^n\sqrt{3n}} \qquad (n\to\infty).$$

60. Déterminer un équivalent asymptotique pour l'intégrale

$$J(t) := \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{e}^{itx}}{(1+x^2)^t}\,\mathrm{d}x$$

lorsque le paramètre réel t tend vers $+\infty$.

61. Soit $\alpha \in]0,\infty[$. Déterminer un développement asymptotique pour

$$F_\alpha(t) := \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{e}^{z-tz^2}}{1+t^\alpha z^2}\,\mathrm{d}z.$$

On distinguera les cas $\alpha < 1$, $\alpha = 1$ et $\alpha > 1$.

62. Montrer que

$$\int_{i-\infty}^{i+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-z^2}}{(1+z)^n}\,\mathrm{d}z \sim \frac{\sqrt{\pi}(2\mathrm{e})^{n/2}\mathrm{e}^{i\sqrt{2n}}}{i^n\sqrt{2\mathrm{e}}\,n^{n/2}} \qquad (n\to\infty).$$

Université de Lorraine
Faculté des sciences et technologies
Master de Mathématiques (M2) 2016/2017
Analyse asymptotique et applications

Exercices sur les théorèmes taubériens

63. Soient $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $b \in \mathbb{R}$. On pose $s_n := \sum_{0\leqslant m\leqslant n} a_m \quad (n \geqslant 0)$.

(a) Calculer $b_N := (1/N)\sum_{0\leqslant n\leqslant N} s_n$ en fonction de $a_0, \ldots, a_N$. En déduire que, sous l'hypothèse

$$\lim_{N\to\infty} b_N = b, \tag{8·7}$$

une condition nécessaire et suffisante pour que la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ converge vers b est que l'on ait $\sum_{0\leqslant n\leqslant N} na_n = o(N)$ $(N \to \infty)$.

(b) On suppose la condition (8·7) réalisée.

(i) Calculer s_n en fonction de b_n et b_{n-1}. Montrer que les séries $S(z) := \sum_{n\geqslant 0} s_n z^n$ et $A(z) := \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ convergent dans le disque unité ouvert.

(ii) Montrer que $S(x) = (1-x)\sum_{n\geqslant 0} nb_n x^n$ pour $0 < x < 1$. En déduire que $\lim_{x\to 1-}(1-x)S(x) = b$. On pourra poser $b_n = b + \varepsilon_n$ $(n \geqslant 0)$ où ε_n tend vers 0 et majorer $E(x) := |\sum_{n\geqslant 0} \varepsilon_n n x^n|$.

(iii) Pour $0 < x < 1$, écrire $(1-x)S(x)$ en fonction de $A(x)$.

(c) Soit $K \in \mathbb{R}$. La condition $\inf_{n\in\mathbb{N}} na_n > -K$ est-elle une condition taubérienne suffisante pour que l'hypothèse (8·7) implique la convergence vers b de la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n$?

64. Déduire du Théorème 4.1 l'estimation[1]

$$\sum_{n\leqslant x} \frac{\mu(n)}{n} \ll \frac{\ln x}{\ln_2 x} \qquad (x \to \infty).$$

65. Soit $\{a_p\}$ une suite bornée indexée par les nombres premiers. Montrer que si $\sum a_p\, p^{-\sigma}$ tend vers une limite lorsque $\sigma \to 1+$ alors la série $\sum a_p/p$ converge. Montrer que le résultat est faux pour une suite indexée par les entiers.

66. Soit A une constante positive et $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite complexe satisfaisant à $|b_n| \leqslant A\tau(n)$ pour tout entier $n \geqslant 1$ et à

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{b_n}{n^\sigma} = o\Big(\frac{1}{(\sigma-1)^2}\Big) \qquad (\sigma \to 1+). \tag{8·8}$$

(a) Est-il vrai que l'on a nécessairement $\sum_{n\leqslant x} b_n/n = o\big((\ln x)^2\big)$ $(x \to \infty)$?

(b) Même question pour la relation asymptotique $\sum_{n\leqslant x} b_n = o(x \ln x)$ lorsque $x \to \infty$.

(c) Soit $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite complexe bornée telle que

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{a_n}{n^\sigma} = o\Big(\frac{1}{\sigma-1}\Big) \qquad (\sigma \to 1+).$$

On suppose maintenant que $b_n := \sum_{d|n} a_d$. Montrer que l'on a (8·8). L'hypothèse supplémentaire concernant la structure de la suite $n \mapsto b_n$ implique-t-elle une modification de vos conclusions quant à la validité des relations considérées en (a) et (b) ?

---

1. Cette estimation non triviale est bien entendu beaucoup plus faible que l'assertion $\sum_n \mu(n)/n$, équivelente au théorème des nombres premiers, mais elle n'utilise qu'une information très fragmentaire sur la série de Dirichlet $1/\zeta(s)$ associée à la fonction de Möbius.

67. *Théorème de Berry–Esseen.* Soit X une variable aléatoire réelle, de moyenne nulle, de variance égale à 1, et de moment absolu d'ordre 3 fini ϱ. On pose $F(x) := \mathrm{Prob}\,(X \leqslant x)$ $(x \in \mathbb{R})$ et

$$\varphi(\tau) := \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{i\tau x}\,\mathrm{d}F(x) \qquad (\tau \in \mathbb{R}).$$

Enfin, on désigne par $F_n(x)$ la fonction de répartition de $(1/\sqrt{n})\sum_{j=1}^n X_j$, où les X_j sont des variables indépendantes de même loi que X.

(a) Montrer que $\varrho \geqslant 1$.

(b) En utilisant les inégalités

$$\Big|\mathrm{e}^{iy} - \sum_{0\leqslant j\leqslant m} \frac{1}{j!}(iy)^j\Big| \leqslant \frac{1}{(m+1)!}|y|^{m+1} \qquad (y \in \mathbb{R},\ m \geqslant 0)$$

et $|\log(1-y)+y| \leqslant |y|^2$ $(y \in \mathbb{C},\ |y| \leqslant \frac12)$, montrer que

$$|\varphi(\tau)-1| \leqslant \tfrac12\tau^2, \quad |\varphi(\tau)-1+\tfrac12\tau^2| \leqslant \tfrac16\varrho|\tau|^3 \quad (\tau \in \mathbb{R}),$$
$$\Big|\log\varphi(\tau)+\tfrac12\tau^2\Big| \leqslant \tfrac14\tau^4+\tfrac16\varrho|\tau|^3 \quad (|\tau| \leqslant 1).$$

(c) Montrer que l'on a pour tout $n \geqslant 1$

$$\Big|\varphi\Big(\frac{\tau}{\sqrt{n}}\Big)^n - \mathrm{e}^{-\tau^2/2}\Big| \ll \mathrm{e}^{-\tau^2/4}\Big\{\varrho\frac{|\tau|^3}{\sqrt{n}}+\frac{\tau^4}{n}\Big\} \quad (\varrho|\tau| \leqslant \sqrt{n}).$$

(d) Déduire de ce qui précède que l'on a

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\Big|F_n(x) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t\Big| \leqslant C\frac{\varrho}{\sqrt{n}}$$

où C est une constante absolue convenable.[(2)]

68. *Sur une idée de Wirsing (1956).* Soient $\mathcal{P}$ un ensemble de nombres premiers, et ϑ la fonction indicatrice de l'ensemble des entiers dont tous les facteurs premiers sont dans $\mathcal{P}$. On pose $T(x) := \sum_{n\leqslant x}\vartheta(n)$. On suppose l'existence de constantes $\delta > 0$ et $K > 0$ telles que, lorsque $x \to \infty$,

$$\text{(i)}\quad \sum_{p\leqslant x}\vartheta(p) \sim \frac{\delta x}{\ln x}, \qquad \text{(ii)}\quad \prod_{p\leqslant x}\Big(1+\frac{\vartheta(p)}{p-1}\Big) \sim K(\ln x)^\delta.$$

(a) Montrer que, pour $x \to \infty$, on a

$$\text{(iii)}\quad \sum_{n\leqslant x}\vartheta(n)\ln n \sim \delta x\sum_{m\leqslant x}\frac{\vartheta(m)}{m}, \qquad \text{(iv)}\quad T(x) \sim \frac{\delta x}{\ln x}\sum_{m\leqslant x}\frac{\vartheta(m)}{m}.$$

(b) Montrer que la relation (i) seule implique, lorsque $\sigma \to 0+$,

$$\sum_{p\leqslant\exp(1/\sigma)}\frac{\vartheta(p)}{p}(1-p^{-\sigma}) - \sum_{p>\exp(1/\sigma)}\frac{\vartheta(p)}{p^{1+\sigma}} = \gamma\delta + o(1).$$

En déduire que $\displaystyle\sum_{m\geqslant1}\frac{\vartheta(m)}{m^{1+\sigma}} \sim \mathrm{e}^{-\gamma\delta}\prod_{p\leqslant\exp(1/\sigma)}\Big(1-\frac{\vartheta(p)}{p}\Big)^{-1}$ $\quad(\sigma \to 0+)$.

(c) Montrer que sous les hypothèses (i) et (ii), on a

$$T(x) \sim \frac{\delta K\mathrm{e}^{-\gamma\delta}}{\Gamma(\delta+1)}x(\ln x)^{\delta-1} \qquad (x \to \infty).$$

2. Feller (1970) montre que la valeur $C = 3$ est admissible.

69. *Une réciproque d'un théorème d'Ingham (Corollaire 7.3).* Soit $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ une suite complexe bornée telle que $\sum_{n\geqslant 1} a_n/n = a$.

(a) Montrer que, pour tout $y > 1$ fixé, on a

$$\sum_{N/y<n\leqslant N} a_n \left\lfloor \frac{N}{n} \right\rfloor = \sum_{m\leqslant y} \int_0^{N/m} \sum_{\max(t,N/y)<n\leqslant N/m} \frac{a_n}{n} \, \mathrm{d}t = o(N).$$

(b) En déduire que

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{1\leqslant n\leqslant N} a_n \left\lfloor \frac{N}{n} \right\rfloor = a. \tag{8·9}$$

(c) Application. Soit $\vartheta \in \mathbb{R}\smallsetminus\mathbb{Z}$. On pose $\tau^*(n,\vartheta) := \sum_{d|n} \mathrm{e}(d\vartheta)$. Montrer que la quantité

$$\frac{1}{N} \sum_{n\leqslant N} \tau^*(n,\vartheta)$$

tend vers une limite finie lorsque N tend vers l'infini et la calculer.

70. (a) Montrer que $\sum_{n\geqslant 0} n\mathrm{e}^{-n^2\sigma} \sim 1/(2\sigma)$ lorsque $\sigma \to 0+$.

(b) En déduire la variante suivante du théorème de Hardy–Littlewood : *soient $K \in \mathbb{R}$ et $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ une suite réelle vérifiant $na_n \geqslant -K$ $(n \geqslant 1)$ et*

$$F(\sigma) := \sum_{n\geqslant 0} a_n \mathrm{e}^{-\sigma n^2} = s + o(1) \qquad (\sigma \to 0+);$$

alors la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ converge et est de somme s.

(c) Montrer que $\lim_{\sigma\to 0+} \sum_{n\geqslant 0} (-1)^n \mathrm{e}^{-\sigma n^2} = \frac{1}{2}$. Qu'en déduisez-vous ?

71. Soit $g(n) := \sum_{d|n} \mu(d)\mathrm{e}^{in/d}$ $(n \geqslant 1)$. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} g(n)/n$ converge et calculer sa somme.

Université Henri Poincaré–Nancy 1 | Lundi 17 octobre 2005
Master de Mathématiques (M2) 2005/06 | Durée : 2h
Analyse asymptotique et applications

Sujet d'examen

Les documents manuscrits ou distribués en cours sont autorisés, à l'exclusion de tout autre document. Il sera tenu le plus grand compte de la rédaction et de la présentation.

I. Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{C}^3([0,1],\mathbb{R})$. On pose

$$f_N(x) := \frac{f(x/N)}{x} \qquad (1 \leqslant x \leqslant N).$$

(a) Montrer que l'on a uniformément pour $1 \leqslant x \leqslant N$

$$\begin{aligned} f_N(x) &= \frac{f(0)}{x} + \frac{f'(0)}{N} + O\Big(\frac{x}{N^2}\Big), \\ f_N'(x) &= \frac{-f(0)}{x^2} + O\Big(\frac{1}{N^2}\Big), \\ f_N''(x) &= \frac{2f(0)}{x^3} + O\Big(\frac{1}{N^3}\Big). \end{aligned}$$

(b) Établir la formule asymptotique

$$\sum_{1 \leqslant n \leqslant N} \frac{f(n/N)}{n} = \int_{1/N}^{1} \frac{f(y)}{y}\,\mathrm{d}y + \gamma f(0) + \frac{f'(0)+f(1)}{2N} + O\Big(\frac{1}{N^2}\Big)$$

où γ désigne la constante d'Euler.

(c) Application. Donner une formule asymptotique pour

$$\sum_{1 \leqslant n \leqslant N} \frac{\cos(\pi n/2N)}{n}$$

lorsque $N \to \infty$.

II. (a) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, l'équation $(\sin x)^2 = 1/\ln x$ possède exactement deux solutions réelles, x_n et y_n, dans $]2\pi n - \pi/2, 2\pi n + \pi/2[$.

(b) On convient dans la suite que $x_n < y_n$. Donner un développement asymptotique pour $y_n - 2\pi n$ lorsque $n \to \infty$. On s'attachera essentiellement à donner la forme du développement et à préciser la nature de la convergence sans chercher à calculer explicitement les coefficients qui interviennent.

Université Henri Poincaré–Nancy 1 — Mercredi 15 novembre 2006
Master de Mathématiques (M2) 2006/07 — Durée : 2h
Analyse asymptotique et applications

Sujet d'examen

Les documents manuscrits ou distribués en cours sont autorisés, à l'exclusion de tout autre document. Les notations sont celles du cours. Il sera tenu le plus grand compte de la rédaction et de la présentation.

Pour $x \in \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N}$, on pose $\varphi_j(x) := \mathrm{e}^{-x}x^j/j!$, et l'on note

$$S_n(x) := \sum_{0 \leqslant j \leqslant n} \varphi_j(x) \qquad (n \in \mathbb{N},\, x \in \mathbb{R}).$$

Le but de ce problème est d'évaluer $S_n(x)$ uniformément par rapport à x lorsque $n \to \infty$, une question initialement posée et partiellement résolue par Ramanujan.

(a) Soit $Q : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ la fonction définie par $Q(y) := y \ln y - y + 1 = \int_1^y \ln t \,\mathrm{d}t$. Établir les formules

$$Q(1-v) = v^2 \int_0^1 \frac{1-s}{1-sv}\,\mathrm{d}s \geqslant \tfrac{1}{2}v^2 \qquad (0 \leqslant v < 1),$$

$$Q(1-v) = \tfrac{1}{2}v^2 + O(v^3) \qquad (0 \leqslant v \leqslant \tfrac{1}{2}).$$

(b) Montrer que l'on a

$$n! = n^n \mathrm{e}^{-n}\sqrt{2\pi n}\Big\{1 + O\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big\} \quad (n \geqslant 1),\,^{(1)}$$

et

$$\varphi_j(n) = \frac{\mathrm{e}^{-nQ(j/n)}}{\sqrt{2\pi j}}\Big\{1 + O\Big(\frac{1}{j}\Big)\Big\} \qquad (1 \leqslant j \leqslant n)$$

(c) Soit $p := [n/2]$, $b := Q(\frac{1}{2}) > 0$. Montrer que

$$\sum_{0 \leqslant j \leqslant p} \varphi_j(n) \ll \mathrm{e}^{-bn}\sqrt{n} \qquad (n \geqslant 1).$$

(d) Soit $F_n(u) := \mathrm{e}^{-nQ(1-u/n)}/\sqrt{2\pi(n-u)}$ $(n \geqslant 1,\, 0 \leqslant u < n)$. On pose

$$T_n := \sum_{0 \leqslant k \leqslant p} F_n(k) \qquad (n \in \mathbb{N}^*).$$

Montrer que, pour toute constante c vérifiant $0 < c < b$, on a

$$S_n(n) = \Big\{1 + O\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big\}T_n + O\big(\mathrm{e}^{-cn}\big)$$

(e) Montrer que

$$T_n = \int_0^p F_n(u)\,\mathrm{d}u + \tfrac{1}{2}F_n(0) + I_n + O\big(\mathrm{e}^{-cn}\big)$$

avec $I_n := \int_0^p B_1(u)F_n'(u)\,\mathrm{d}u$.

1. On ne demande pas de redémontrer que la constante d'Euler–Maclaurin de la fonction $t \mapsto \ln t$ est $\frac{1}{2}\ln(2\pi)$.

(f) Calculer la dérivée logarithmique de $F_n(u)$ et en déduire que

$$|F_n'(u)| \ll \frac{u+1}{n^{3/2}}\mathrm{e}^{-u^2/(2n)} \qquad (0 \leqslant u \leqslant p).$$

En déduire que

$$T_n = \int_0^p F_n(u)\,\mathrm{d}u + O\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big)\cdot$$

(g) Montrer que

$$F_n\big(v\sqrt{n}\big) \ll \frac{\mathrm{e}^{-v^2/2}}{\sqrt{n}} \quad (0 \leqslant v \leqslant \tfrac{1}{2}\sqrt{n})$$

et que

$$F_n\big(v\sqrt{n}\big) = \frac{\mathrm{e}^{-v^2/2}}{\sqrt{2\pi n}}\Big\{1 + O\Big(\frac{v(1+v^2)}{\sqrt{n}}\Big)\Big\} \qquad (0 \leqslant v \leqslant \tfrac{1}{2}n^{1/6}).$$

En déduire que

$$T_n = \tfrac{1}{2} + O\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big) \qquad (n \geqslant 1)$$

et que la même évaluation est valable pour $S_n(n)$.

(h) Montrer que $S_n'(x) = -\varphi_n(x)$. En déduire que, pour $x := n + z\sqrt{n}$, $|z| \leqslant n^{1/6}$, on a

$$(*) \qquad S_n(x) = \Phi(z) + O\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big),$$

où l'on a posé $\Phi(z) := \int_z^\infty \mathrm{e}^{-v^2/2}\,\mathrm{d}v/\sqrt{2\pi}$.

(i) Montrer que la formule asymptotique $(*)$ est en fait valable uniformément pour $x \in \mathbb{R}$, $n \geqslant 1$.

Université Henri Poincaré–Nancy 1
Master de Mathématiques (M2) 2006/07
Analyse asymptotique et applications

Mercredi 31 janvier 2007
Durée : 2h

Sujet d'examen

Les documents manuscrits ou distribués en cours sont autorisés, à l'exclusion de tout autre document. Il sera tenu le plus grand compte de la rédaction et de la présentation.

I. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer la nature de la série

$$\sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{n^{1+i\alpha} \ln_2 n}.$$

II. Soit $\beta \in]0, 1[$. On pose $f_\beta(t) := \mathrm{e}^{it^\beta}$.

(a) Montrer qu'il existe un entier naturel k tel que $f_\beta^{(k)} \in L^1([1, \infty[)$.

(b) Donner un équivalent asymptotique de la quantité

$$S_N(\beta) := \sum_{1 \leqslant n \leqslant N} \mathrm{e}^{in^\beta} \qquad (N \to \infty).$$

III. Soient f et g deux fonctions analytiques réelles, définies sur $[-1, 1]$. On suppose que f est à valeurs positives et possède un unique zéro à l'origine.

(a) Montrer le plus petit indice k tel que $f^{(k)}(0) \neq 0$ est nécessairement pair. On posera $k = 2m$.

(b) Montrer qu'il existe un nombre réel $\delta > 0$ et une fonction analytique $h : [-\delta, \delta] \to \mathbb{R}$ injective tels que $f(t) = h(t)^{2m}$ pour tout $t \in [-\delta, \delta]$.

(c) Déterminer un développement asymptotique de l'intégrale

$$F(x) := \int_{-1}^{1} g(t)\mathrm{e}^{-xf(t)}\,\mathrm{d}t \qquad (x \to +\infty).$$

On pourra établir la formule

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-xy^{2m}} y^{2j}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{m\,x^{(2j+1)/2m}}\Gamma\Big(\frac{2j+1}{2m}\Big) \qquad (j \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{N}^*,\ x > 0).$$

Université Henri Poincaré–Nancy 1 16 décembre 2011
Master de Mathématiques (M2) 2011/12 Durée : 3h
Analyse asymptotique et applications

Sujet d'examen

Les documents manuscrits ou distribués en cours sont autorisés, à l'exclusion de tout autre document. Les notations sont celles du cours. Il sera tenu le plus grand compte de la rédaction et de la présentation.

I. Déterminer un développement asymptotique pour l'intégrale

$$I_n := \int_0^\pi x^n \sin x \, \mathrm{d}x \quad (n \to \infty).$$

On pourra effectuer le changement de variable $x = \pi \mathrm{e}^{-y}$.

II. Soient f et g deux fonctions analytiques réelles, définies sur $[-1, 1]$. On suppose que f est à valeurs positives et possède un unique zéro à l'origine.

(a) Montrer le plus petit indice k tel que $f^{(k)}(0) \neq 0$ est nécessairement pair. On posera $k = 2m$.

(b) Montrer qu'il existe un nombre réel $\delta > 0$ et une fonction analytique $h : [-\delta, \delta] \to \mathbb{R}$ injective tels que $f(t) = h(t)^{2m}$ pour tout $t \in [-\delta, \delta]$.

(c) Déterminer un développement asymptotique de l'intégrale

$$F(x) := \int_{-1}^1 g(t) \mathrm{e}^{-xf(t)} \, \mathrm{d}t \qquad (x \to +\infty).$$

On pourra établir la formule

$$\int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{-xy^{2m}} y^{2j} \, \mathrm{d}y = \frac{1}{m \, x^{(2j+1)/2m}} \Gamma\Big(\frac{2j+1}{2m}\Big) \qquad (j \in \mathbb{N}, \ m \in \mathbb{N}^*, \ x > 0).$$

III. Déterminer un équivalent asymptotique pour l'intégrale

$$J(t) := \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{e}^{itx}}{(1+x^2)^t} \, \mathrm{d}x$$

lorsque le paramètre réel t tend vers $+\infty$. On pourra poser $c := \sqrt{2} - 1$, noter que $1 + c^2 = 2(1-c)$, $1 - c^2 = 2c$, $c\sqrt{2} = 1 - c$, et écrire le développement de Taylor à l'origine du polynôme $P(y) := (1 + y - c^2)^2 + 4c^2 y$.

Université Henri Poincaré–Nancy 1 — 11 avril 2012
Master de Mathématiques (M2) 2011/12 — Durée : 3h
Analyse asymptotique et applications

Sujet d'examen

Les documents manuscrits ou distribués en cours sont autorisés, à l'exclusion de tout autre document. Les notations sont celles du cours. Il sera tenu le plus grand compte de la rédaction et de la présentation.

I. Évaluer asymptotiquement

$$S_n := \sum_{0\leqslant k\leqslant n} \binom{n}{k}\frac{k!}{n^k}$$

lorsque l'entier n tend vers l'infini. On pourra utiliser la formule $n\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-nx}x^k\,\mathrm{d}x = \frac{k!}{n^k}\cdot$

II. (a) Montrer que pour chaque entier $n \geqslant 1$ l'équation $x\sin\pi x = 1$ possède une solution unique x_n dans l'intervalle $]2n, 2n+\frac{1}{2}[$.

(b) On pose $x_n = 2n + y_n$. Montrer que $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$, et en déduire un équivalent asymptotique de y_n.

(c) Déterminer une fonction g_n holomorphe dans le disque unité telle que, pour $n \geqslant 1$, y_n soit l'unique solution de l'équation

$$\frac{g_n(z)}{2n} = z$$

dans le disque $D(0;\frac{1}{2}) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < \frac{1}{2}\}$. On pourra utiliser, après l'avoir démontrée, l'inégalité $|\sin\pi z| \geqslant 2|z|$ $(|z| \leqslant \frac{1}{2})$.

(d) Montrer l'existence d'une suite complexe double $\{c_{jk}\}_{k\geqslant 0,\, 0\leqslant j<k}$ telle que, pour tous entiers $k \geqslant 0$, $n \geqslant 1$, on ait

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1/2} \frac{\mathrm{d}z}{(\sin\pi z)^k(1+z/2n)^k} = \sum_{0\leqslant j\leqslant k-1}\frac{c_{jk}}{(2n)^j}\cdot$$

Montrer que

$$|c_{jk}| \leqslant 2^{k-2} \qquad (0 \leqslant j \leqslant k-1).$$

(e) Montrer que pour $n \geqslant 2$, on peut écrire

$$y_n = \sum_{m\geqslant 1}\frac{b_m}{(2n)^m},$$

où la série est absolument convergente. Vérifier que la valeur de b_1 est compatible avec le résultat obtenu en (a).

III. Déterminer un équivalent asymptotique pour l'intégrale

$$J(t) := \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{e}^{itx}}{(1+x^2)^t}\,\mathrm{d}x$$

lorsque le paramètre réel t tend vers $+\infty$. On pourra poser $c := \sqrt{2}-1$, noter que $1+c^2 = 2(1-c)$, $1-c^2 = 2c$, $c\sqrt{2} = 1-c$, et écrire le développement de Taylor à l'origine du polynôme $P(y) := (1+y-c^2)^2 + 4c^2y$.

Université Henri Poincaré–Nancy 1 — 31 janvier 2014
Master de Mathématiques (M2) 2013/14 — Durée : 3h
Méthodes analytiques

Sujet d'examen

Les documents manuscrits ou distribués en cours sont autorisés, à l'exclusion de tout autre document. Les notations sont celles du cours. Il sera tenu le plus grand compte de la rédaction et de la présentation.

I. (a) Déterminer $x_0 > 0$ tel que l'équation $\mathrm{e}^y = xy$ possède une solution réelle unique $y = y(x) \geqslant 1$ pour $x \geqslant x_0$.

(b) Montrer que pour x assez grand on a

$$y(x) = \ln x + \ln_2 x + \sum_{n \geqslant 1} \frac{P_n(\ln_2 x)}{(\ln x)^n}$$

où P_n est un polynôme réel sans terme constant et de degré $\leqslant n$. Notant $g(z) := z/(\mathrm{e}^z - 1)$, expliciter les coefficients de P_n en fonctions des dérivées à l'origine des fonctions $g(z)^k$ et $\mathrm{e}^z g(z)^k$ $(k \geqslant 1)$. Donner l'expression de $P_1(X)$ et $P_2(X)$.

II. (a) Montrer que, si $z = x + iy$, $x > 0$, et si $u + iv$ désigne la détermination principale de $\sqrt{z}$, alors

$$u = \sqrt{\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

(b) Établir l'évaluation asymptotique

$$F(t) := \frac{1}{2\pi i} \int_{1-i\infty}^{1+i\infty} \mathrm{e}^{t(z-\sqrt{z})} \frac{\mathrm{d}z}{z} \sim \frac{2\mathrm{e}^{-t/4}}{\sqrt{\pi t}} \qquad (t \to \infty),$$

où la racine carrée complexe est définie en détermination principale. On pourra utiliser sans la redémontrer l'inégalité

$$\sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{1+v}} \geqslant 1 + \tfrac{1}{16}\min(v, v^{1/4}) \qquad (v \geqslant 0).$$

Université Henri Poincaré–Nancy 1 vendredi 5 février 2016
Master de Mathématiques (M2) 2015/16 Durée : 3h
Méthodes analytiques

Sujet d'examen

Les documents manuscrits ou distribués en cours sont autorisés, à l'exclusion de tout autre document. Les notations sont celles du cours. Il sera tenu le plus grand compte de la rédaction et de la présentation.

I. I. Soit k un entier supérieur ou égal à 2.

(a) Montrer qu'il existe un nombre réel $r > 0$ tel que, pour tout $w \in]0, r[$, l'équation $z = 1 + wz^k$ possède une unique solution réelle $z(w)$ dans l'intervalle $[1, 2]$.

(b) Montrer que, si r est choisi assez petit, cette solution $z(w)$ admet un développement en série entière convergent

$$z(w) = 1 + \sum_{n \geqslant 1} a_{k,n} w^n,$$

où $\{a_{k,n}\}_{n \geqslant 1}$ est une suite d'entiers que l'on déterminera. On vérifiera que le rayon de convergence de la série est en fait égal à $(k-1)^{k-1}/k^k$.

Remarque. Pour $k = 2$ on obtient ainsi les nombres de Catalan.

II. Déterminer deux polynômes de degré 2 à coefficients rationnels $P(X)$ et $Q(X)$ tels que l'on ait, pour une constante convenable $C > 0$,

$$\prod_{1 \leqslant n \leqslant N} n^n = CN^{P(N)} \mathrm{e}^{-Q(N)} \Big\{ 1 + O\Big(\frac{1}{N^2}\Big) \Big\} \qquad (N \geqslant 1).$$

III. Le but de ce problème est de déterminer le comportement asymptotique lorsque $x \to \infty$ de la fonction de Bessel

$$J_0(x) := \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin t)\, \mathrm{d}t.$$

(a) On pose $J(x) = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathrm{e}^{ix \cos t}\, \mathrm{d}t$. Montrer que $J_0(x) = \Re e\, J(x)$.

(b) Déterminer l'axe principal du col correspondant à l'intégrale $J(x)$. Montrer que

$$J(x) = \frac{1}{\pi} \int_L \mathrm{e}^{ix \cos z}\, \mathrm{d}z + O\Big(\frac{1}{x}\Big) \qquad (x \geqslant 1)$$

où L est un segment oblique du plan complexe que l'on explicitera.

(c) Montrer que, dans l'intégrale précédente, on peut remplacer L par un sous-segment de longueur $\leqslant 2x^{-5/12}$, quitte à induire une erreur de l'ordre de $\mathrm{e}^{-cx^{1/6}}$ où c est une constante absolue strictement positive.

(d) Déterminer une formule asymptotique pour $J(x)$ puis pour $J_0(x)$.