Calcul intégral

et théorie de la mesure

(Notes de cours)

Gérald Tenenbaum
Université Henri Poincaré–Nancy 1
Licence et maîtrise de Mathématiques 1994/95

(12/12/2012, 1h44)

Table des matières

Université de Lorraine
Faculté des sciences et technologies
Licence de mathématiques 1994/95
Calcul intégral et théorie de la mesure
Gérald Tenenbaum

I

Intégrale de Cauchy et intégrale de Riemann (résumé)

1. Notion d'intégrale

Pour les Grecs, la notion d'aire d'un domaine plan résulte d'un passage à la limite à partir de l'aire des domaines polygonaux, elle-même obtenue par triangulation.

Les propriétés géométriques évidentes souhaitées pour l'aire $A(D)$ d'un domaine D du plan sont :

(i) la croissance, soit $D_1 \subset D_2 \Rightarrow A(D_1) \leqslant A(D_2)$,

(ii) l'additivité disjointe, soit $D_1 \cap D_2 = \varnothing \Rightarrow A(D_1 \cup D_2) = A(D_1) + A(D_2)$.

Cela implique en particulier que l'aire est toujours positive ou nulle, et que, pour des domaines bornés, l'on peut se ramener systématiquement à l'étude de domaines limités par l'axe $y = 0$, une courbe $y = f(x)$, et des droites verticales $x = a$, $x = b$. Supposant le problème de l'existence résolu, et désignant par $F(x)$ l'aire du type précédent limitée par les droites d'abscisses a et x, les propriétés (i) et (ii) impliquent facilement par comparaison avec des aires de rectangles que l'on a pour $h \neq 0$

$$m \leqslant \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \leqslant M,$$

où l'on a posé $m = \inf_{x \leqslant t \leqslant x+h} f(t)$, $M = \sup_{x \leqslant t \leqslant x+h} f(t)$. En particulier, si f est continue, on voit en faisant tendre h vers 0 que F est nécessairement dérivable au point x et satisfait à

$$F'(x) = f(x).$$

On obtient ainsi un lien entre le calcul intégral et la recherche des primitives. Il a été montré en DEUG que l'aire $F(x)$ peut être rigoureusement définie dans le cas des fonctions continues. Cela établit, grâce au calcul précédent, que *toute fonction continue sur un intervalle possède des primitives.*

Le procédé utilisé en DEUG reposait sur l'étude des sommes de Darboux supérieures et inférieures relatives à des subdivisions $\sigma = \{x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ de $[a, b]$, soit

$$s_\sigma(f) := \sum_{j=0}^{n-1} m_j (x_{j+1} - x_j), \quad S_\sigma(f) := \sum_{j=0}^{n-1} M_j (x_{j+1} - x_j),$$

avec $m_j = \inf_{x_j \leqslant t \leqslant x_{j+1}} f(t)$, $M_j = \sup_{x_j \leqslant t \leqslant x_{j+1}} f(t) \quad (0 \leqslant j < n)$. La quantité

$$F(b) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

était alors définie, *dans le cas d'une fonction f continue*, comme la valeur commune (c'est là le théorème !) des deux nombres

$$s(f) = \sup_\sigma s_\sigma(f) \quad \text{et} \quad S(f) = \inf_\sigma S_\sigma(f).$$

La démonstration repose sur le fait qu'une fonction continue sur un intervalle fermé borné est en fait uniformément continue. Une conséquence pratique importante de cette étude est que l'aire $F(b)$ est égale à $G(b) - G(a)$ pour toute primitive G de f sur $[a, b]$.

L'un des buts de ce cours est d'étendre la notion d'intégrale à des classes de fonctions plus générales que les fonctions continues. L'intégrale des fonctions continues, telle qu'elle est définie ci-dessus, satisfait à certaines propriétés essentielles que l'on aimerait conserver pour les généralisations envisagées :

1. *Linéarité* : L'application $f \mapsto \int_a^b f\,\mathrm{d}t$ est une forme linéaire sur $\mathcal{C}[a, b]$.

2. *Positivité* : $f \geqslant 0 \Rightarrow \int_a^b f\,\mathrm{d}t \geqslant 0$. (Attention à la signification de $f \geqslant 0$.)

Ces deux propriétés ont des conséquences très importantes, notamment la croissance $f \geqslant g \Rightarrow \int_a^b f\,\mathrm{d}t \geqslant \int_a^b g\,\mathrm{d}t$, dont les cas particuliers f ou g constante sont rassemblés dans les *inégalités de la moyenne*

$$m \leqslant f \leqslant M \Rightarrow m \leqslant \frac{1}{b-a} \int_a^b f\,\mathrm{d}t \leqslant M.$$

Lorsque f est continue, on en déduit, par le théorème des valeurs intermédiaires, la *formule de la moyenne*

$$\exists \xi \in [a, b] : \frac{1}{b-a} \int_a^b f\,\mathrm{d}t = f(\xi).$$

Une autre conséquence, très utile en pratique, des deux points précédents est l'inégalité

$$\Big| \int_a^b f\,\mathrm{d}t \Big| \leqslant \int_a^b |f|\,\mathrm{d}t.$$

3. *Continuité.* La forme linéaire $f \mapsto \int_a^b f\,\mathrm{d}t$ est continue lorsque $\mathcal{C}[a, b]$ est muni de la norme de la convergence uniforme

$$\|f\|_\infty = \sup_{a \leqslant t \leqslant b} |f(t)|.$$

On a en fait $|\int_a^b f\,\mathrm{d}t| \leqslant (b-a)\|f\|_\infty$, d'après les inégalités de la moyenne.

4. *Relation de Chasles.* $\int_a^b f\,\mathrm{d}t = \int_a^c f\,\mathrm{d}t + \int_c^b f\,\mathrm{d}t$, avec la convention habituelle de signes lorsque la borne inférieure dépasse la borne supérieure.

2. Intégrale de Cauchy

Une fonction en escalier est une fonction qui est constante sur chacun des intervalles *ouverts* associés à une subdivision convenable de $[a, b]$, soit

$$f(x) = y_j \qquad (x_j < x < x_{j+1}),$$

avec $x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b$ fixés. L'intégrale des fonctions en escalier est intuitivement évidente : c'est la somme des aires des rectangles délimités par la fonction, autrement dit

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}t = \sum_{0 \leqslant j < n} y_j (x_{j+1} - x_j).$$

On peut aussi vérifier sans peine que cette somme est égale à $s(f)$ et à $S(f)$.

Proposition 2.1. *L'ensemble* $Esc[a,b]$ *des fonctions en escalier sur* $[a,b]$ *est une sous algèbre de l'ensemble* $B[a,b]$ *des fonctions bornées sur* $[a,b]$.

Corollaire. *L'application* $f \mapsto \int_a^b f\,\mathrm{d}t$ *est une forme linéaire continue positive sur* $Esc[a,b]$ *muni de la norme de la convergence uniforme.*

L'extension de Cauchy de la notion d'intégrale repose sur le résultat suivant.

Lemme 2.2. *Soit* $f \in B[a,b]$ *telle qu'il existe une suite* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *de fonctions de* $Esc[a,b]$ *convergeant uniformément vers* f. *Alors la suite* $\{\int_a^b f_n\,\mathrm{d}t\}_{n=1}^{\infty}$ *converge et sa limite ne dépend pas de la suite* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *choisie.*

On *définit* alors l'intégrale de Cauchy de f par la formule

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}t := \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n\,\mathrm{d}t.$$

3. Fonctions réglées

Définition. *Une fonction* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *est dite réglée si elle possède une limite à droite en* a, *à gauche en* b, *et à la fois une limite à droite et une limite à gauche en tout point de* $]a,b[$. *On note* $Rég[a,b]$ *l'ensemble des fonctions réglées sur* $[a,b]$.

Les fonctions continues et les fonctions en escalier sont réglées. La fonction définie sur $[-1,1]$ par $f(x) = \sin(1/x)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ n'est pas réglée. Une fonction réglée est nécessairement bornée : sinon, soit $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite de points de $[a,b]$ satisfaisant à $|f(x_n)| > n$. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer, grâce au théorème de Bolzano-Weierstrass, que $x_n \to x \in [a,b]$. Il est clair que f ne peut avoir de limites à gauche et à droite en x.

Proposition 3.1. $Rég[a,b]$ *est une sous-algèbre de* $B[a,b]$.

Le résultat fondamental suivant permet de caractériser les fonctions réglées parmi les fonctions bornées.

Théorème 3.2. *Soit* $f \in B[a,b]$. *Les deux propositions suivantes sont équivalentes.*

(i) $f \in Rég[a,b]$.

(ii) f *est limite uniforme sur* $[a,b]$ *d'une suite de fonctions en escalier.*

La démonstration fait appel, pour le sens (i)⇒(ii), au théorème de Heine-Borel-Lebesgue. Établissons cette implication. Soit $f \in Rég[a,b]$. Nous allons montrer que pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe une fonction $g = g_\varepsilon \in Esc[a,b]$ telle que $\|f-g\|_\infty \leqslant \varepsilon$.

Pour chaque $x \in [a,b]$, les limites

$$f(x-) = \lim_{y\to x,\, y<x} f(x), \qquad f(x+) = \lim_{y\to x,\, y>x} f(x)$$

existent. Cela implique l'existence d'un nombre réel positif δ_x (dépendant aussi de ε) tel que

$$\Big(0 < |y-x| < \delta_x \quad \text{et} \quad y \in [a,b]\Big) \Rightarrow \begin{cases} |f(x-) - f(y)| < \varepsilon & \text{si } y < x, \\ |f(x+) - f(y)| < \varepsilon & \text{si } y > x. \end{cases}$$

Maintenant, on a trivialement $[a,b] \subset \cup_{x\in[a,b]}]x-\delta_x, x+\delta_x[$. Le théorème de Borel-Lebesgue implique donc l'existence d'un ensemble fini $\{x_1,\ldots,x_n\}$ de points de $[a,b]$ tel que $[a,b] \subset \cup_{1\leqslant j\leqslant n}]x_j - \delta_{x_j}, x_j + \delta_{x_j}[$. Désignons par $\{z_h\}_{h=1}^p$ la suite croissante des nombres $x_j \pm \delta_{x_j}$. On a $p \leqslant 2n$. Choisissons un entier R assez grand pour que l'on ait

$$(b-a)/R < \min_{0\leqslant h<p} (z_{h+1} - z_h),$$

et posons $a_r = a + r(b-a)/R \quad (0 \leqslant r \leqslant R)$.

Nous allons établir que

$$\forall r \in [0, R[\quad \exists \ell \in [1, n] : [a_r, a_{r+1}] \subset]x_\ell - \delta_{x_\ell}, x_\ell + \delta_{x_\ell}[.$$

Pour chaque indice r il existe un m tel que $x_m - \delta_{x_m} < a_r < x_m + \delta_{x_m}$. Si l'intervalle $]x_m - \delta_{x_m}, x_m + \delta_{x_m}[$ ne contient aucun $x_k - \delta_{x_k}$, la propriété de recouvrement des intervalles $]x_j - \delta_{x_j}, x_j + \delta_{x_j}[$ implique $[a_r, a_{r+1}] \subset [a_r, b] \subset]x_m - \delta_{x_m}, x_m + \delta_{x_m}[$, et la conclusion attendue est bien réalisée avec $\ell = m$. Sinon, on peut supposer $x_k + \delta_{x_k} > x_m + \delta_{x_m}$ (faute de quoi l'intervalle $]x_k - \delta_{x_k}, x_k + \delta_{x_k}[$ serait superflu) et l'on a soit $x_m - \delta_{x_m} < a_r \leqslant x_k - \delta_{x_k} < x_m + \delta_{x_m}$, soit $x_m - \delta_{x_m} < x_k - \delta_{x_k} < a_r < x_m + \delta_{x_m}$. Dans le premier cas, on peut choisir $\ell = m$, puisque $a_{r+1} < a_r + (x_m + \delta_{x_m}) - (x_k - \delta_{x_k}) \leqslant x_m + \delta_{x_m}$. Dans le second cas, on peut choisir $\ell = k$, puisque $a_{r+1} < a_r + (x_k + \delta_{x_k}) - (x_m + \delta_{x_m}) < x_k + \delta_{x_k}$.

Nous sommes donc en mesure d'associer à chaque indice r de $[0, R[$ un indice $\ell = \ell(r)$ (par exemple le plus petit possible) tel que $1 \leqslant \ell \leqslant n$ et $[a_r, a_{r+1}] \subset]x_\ell - \delta_{x_\ell}, x_\ell + \delta_{x_\ell}[$. Définissons alors une fonction en escalier g sur $[a,b]$ en posant pour $a_r \leqslant x < a_{r+1}$ $(0 \leqslant r < R)$

$$g(x) = \begin{cases} f(x_{\ell(r)}-) & \text{si } a_r \leqslant x < x_{\ell(r)}, \\ f(x_{\ell(r)}) & \text{si } x = x_{\ell(r)}, \\ f(x_{\ell(r)}+) & \text{si } a_r \leqslant x_{\ell(r)} < x < a_{r+1}, \end{cases}$$

et $g(b) = f(b)$. La définition des δ_x implique immédiatement $\|f - g\|_\infty < \varepsilon$. Cela achève la démonstration de l'implication (i)$\Rightarrow$(ii).

Corollaire 3.3. *Toute fonction continue sur $[a,b]$ est limite uniforme de fonctions en escalier.*

Corollaire 3.4. *Toute fonction monotone sur $[a,b]$ est limite uniforme de fonctions en escalier.*

Ce dernier énoncé découle du fait qu'une fonction monotone bornée est réglée, ce que l'on peut établir facilement.

Le Théorème 3.2 montre donc que l'intégrale de Cauchy est définie sur *Rég*$[a,b]$. Il est important de noter que ce n'est pas le nombre des discontinuités d'une fonction qui régit son appartenance à *Rég*$[a,b]$, mais leur nature. Cependant, le théorème suivant, qui peut être prouvé facilement grâce au Théorème 3.2 (et moins facilement sans — cf.l'exercice no. 30) montre qu'une fonction réglée ne peut avoir “trop” de discontinuités.

Théorème 3.5. *L'ensemble des points de discontinuité d'une fonction réglée est dénombrable.*

Remarque. Cet ensemble peut effectivement être infini. La fonction définie sur $[0,1]$ par

$$f(0) = 0, \quad f(x) = y_n \quad \text{si} \quad 1/(n+1) < x \leqslant 1/n \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

est génériquement discontinue en tous les $1/n$ et est réglée si, et seulement si, la suite $\{y_n\}_{n=1}^\infty$ est convergente.

4. Propriétés fondamentales de l'intégrale de Cauchy

La définition de l'intégrale de Cauchy et le corollaire à la proposition 2.1 impliquent facilement, par passage à la limite, le résultat suivant.

Théorème 4.1. *L'application* $f \mapsto \int_a^b f \, \mathrm{d}t$ *est une forme linéaire continue positive sur* $Rég[a,b]$ *muni de la norme de la convergence uniforme. De plus, cette application satisfait à la relation de Chasles.*

Les propriétés 1 à 4 du §1 sont encore satisfaites pour les fonctions réglées. Cependant, il faut noter deux différences importantes avec le cas des fonctions continues : d'une part, on peut avoir $f \geqslant 0$, $\int_a^b f \, \mathrm{d}t = 0$ et f non identiquement nulle ; d'autre part, la *formule* de la moyenne n'est plus valable. (Trouver des contre-exemples !)

Théorème 4.2. *Soit* $f \in Rég[a,b]$. *L'intégrale indéfinie* $F(x) = \int_a^x f(t) \, \mathrm{d}t$ *est continue sur* $[a,b]$ *et est dérivable en tout point de continuité de* f. *En un tel point, on a* $F'(x) = f(x)$.

Il faut surtout retenir que $F(x)$ n'est pas nécessairement dérivable partout (exemple : $f(x) = \mathrm{sgn}(x)$) mais noter aussi que F *peut*, dans certains cas, être dérivable en un point de discontinuité de f. Construire des exemples.

Le résultat suivant est très important en pratique pour majorer des intégrales dont l'intégrande comporte un facteur oscillant.

Théorème 4.3 (Seconde formule de la moyenne). *Soient* f, g *deux fonctions réglées sur* $[a,b]$. *Si* f *est décroissante et satisfait à* $f(b) \geqslant 0$, *alors il existe* $\xi \in [a,b]$ *tel que*

$$\int_a^b f(t)g(t) \, \mathrm{d}t = f(a) \int_a^\xi g(t) \, \mathrm{d}t.$$

Corollaire 4.4. *Soit* f *une fonction monotone sur* $[a,b]$, *bornée par* M *en valeur absolue. Alors on a*

$$\Big| \int_a^b f(t) e^{ixt} \, \mathrm{d}t \Big| \leqslant \frac{4M}{|x|} \qquad (x \neq 0).$$

Corollaire 4.5. *Soient* f, g *deux fonctions réelles définies sur* $[a, \infty[$ *et réglées sur tout intervalle* $[a,b]$ $(b > a)$. *On suppose que* $f(x)$ *tend vers 0 en décroissant lorsque* $x \to \infty$ *et que* $A := \sup_{b \geqslant a} |\int_a^b g(t) \, \mathrm{d}t| < \infty$. *Alors l'intégrale* $\int_a^\infty f(t)g(t) \, \mathrm{d}t$ *est convergente et l'on a*

$$\Big| \int_a^\infty f(t)g(t) \, \mathrm{d}t - \int_a^b f(t)g(t) \, \mathrm{d}t \Big| \leqslant 2Af(b) \qquad (b > a).$$

5. Retour sur l'intégrale de Riemann

Le procédé des sommes de Darboux peut converger bien que la fonction ne soit pas continue, ou même réglée. Riemann introduit *a priori* l'espace des fonctions pour lesquelles le procédé est convergent.

Définition. *On appelle subdivision d'un intervalle* $[a,b]$ *une suite finie* $\sigma = \{x_0, \ldots, x_n\}$ *telle que* $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. *Le pas d'une subdivision* σ *est la quantité* $\|\sigma\| = \max_{0 \leqslant j < n}(x_{j+1} - x_j)$. *Étant données* $f \in B[a,b]$ *et* σ *subdivision de* $[a,b]$, *on appelle somme de Darboux inférieure, resp. somme de Darboux supérieure, de* f *relative à* σ *la quantité*

$$s_\sigma(f) := \sum_{j=0}^{n-1} m_j(x_{j+1} - x_j), \quad \textit{resp.} \quad S_\sigma(f) := \sum_{j=0}^{n-1} M_j(x_{j+1} - x_j),$$

où l'on a posé $m_j = \inf_{x_j \leqslant t \leqslant x_{j+1}} f(t)$, $M_j = \sup_{x_j \leqslant t \leqslant x_{j+1}} f(t) \quad (0 \leqslant j < n)$. *On définit l'intégrale de Riemann inférieure, resp. supérieure, de* f *par*

$$s(f) = \underline{\int_a^b} f(t)\,\mathrm{d}t = \sup_\sigma s_\sigma(f), \quad \textit{resp.} \quad S(f) = \overline{\int_a^b} f(t)\,\mathrm{d}t = \inf_\sigma S_\sigma(f).$$

On dit que f *est intégrable au sens de Riemann si on a* $s(f) = S(f)$. *La valeur commune de ces deux nombres est alors appelée intégrale de Riemann de* f *et notée* $\int_a^b f\,\mathrm{d}t$. *Enfin, on désigne par* $\mathcal{R}[a,b]$ *l'ensemble des fonctions Riemann-intégrables sur* $[a,b]$.

Si σ, τ sont deux subdivisions de $[a,b]$, on désigne par $\sigma \cup \tau$ la subdivision constituée de la réunion de tous les points de σ et de ceux de τ. On a alors

$$(1) \qquad s_\sigma(f) \leqslant s_{\sigma\cup\tau}(f) \leqslant S_{\sigma\cup\tau}(f) \leqslant S_\sigma(f).$$

En effet, posons $\sigma = \{x_0, \ldots, x_n\}$ et $\sigma \cup \tau = \{y_0, \ldots, y_p\}$; alors tous les x_j sont des y_h et l'on a pour tout couple $\{x_j, x_{j+1}\}$ de points consécutifs de σ, $x_j = y_m$, $x_{j+1} = y_{m+k}$, avec m, k convenables. Il suit

$$\begin{aligned}\inf_{x_j \leqslant t \leqslant x_{j+1}} f(t)(x_{j+1} - x_j) &= \sum_{i=0}^{k-1} \inf_{x_j \leqslant t \leqslant x_{j+1}} f(t)(y_{m+i+1} - y_{m+i}) \\ &\leqslant \sum_{i=0}^{k-1} \inf_{y_{m+i} \leqslant t \leqslant y_{m+i+1}} f(t)(y_{m+i+1} - y_{m+i}).\end{aligned}$$

En sommant cette inégalité pour $0 \leqslant j < n$, on obtient $s_\sigma(f) \leqslant s_{\sigma\cup\tau}(f)$. L'inégalité opposée pour les sommes de Darboux supérieures s'obtient de façon analogue. Enfin, l'inégalité centrale $s_{\sigma\cup\tau}(f) \leqslant S_{\sigma\cup\tau}(f)$ est évidente. Il découle en particulier de (1) que

$$(2) \qquad s(f) \leqslant S(f),$$

donc *il est équivalent de dire que* $f \in \mathcal{R}[a,b]$ *et que* $S(f) \leqslant s(f)$.

Étant donnée une fonction $\sigma \mapsto \varphi(\sigma)$ définie sur l'ensemble des subdivisions, on dit que $\varphi(\sigma)$ tend vers ℓ lorsque $\|\sigma\|$ tend vers 0, et on note $\lim_{\|\sigma\|\to 0} \varphi(\sigma) = \ell$, si l'on a

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 : \|\sigma\| \leqslant \eta \Rightarrow |\varphi(\sigma) - \ell| < \varepsilon.$$

Théorème 5.1 (Critère de Riemann). *Soit* $f \in B[a,b]$. *Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) $f \in \mathcal{R}[a,b]$

(ii) $\lim_{\|\sigma\|\to 0} S_\sigma(f) - s_\sigma(f) = 0$.

Démonstration. Montrons d'abord l'implication (ii)⇒(i). Sous l'hypothèse (ii), on a pour tout $\varepsilon > 0$ l'existence d'un $\delta > 0$ tel que

$$\|\sigma\| < \delta \Rightarrow S(f) \leqslant S_\sigma(f) \leqslant s_\sigma(f) + \varepsilon \leqslant S(f) + \varepsilon,$$

où l'on a tenu compte de (1). Cela implique $\lim_{\|\sigma\|\to 0} s_\sigma(f) = \lim_{\|\sigma\|\to 0} S_\sigma(f) = S(f)$. Similairement, on obtient $\lim_{\|\sigma\|\to 0} s_\sigma(f) = \lim_{\|\sigma\|\to 0} S_\sigma(f) = s(f)$, donc $s(f) = S(f)$, et $f \in \mathcal{R}[a,b]$.

Montrons maintenant l'implication (i)⇒(ii). Posons, pour chaque subdivision $\sigma = \{x_0, \ldots, x_n\}$ de $[a,b]$,

$$D_\sigma(f) = S_\sigma(f) - s_\sigma(f) = \sum_{0 \leqslant j < n} (M_j - m_j)\delta_j \qquad (\delta_j = x_{j+1} - x_j).$$

Soit $\varepsilon > 0$. Nous devons montrer que, pour un nombre réel $\eta > 0$ convenable, on a $|D_\sigma(f)| < \varepsilon$ dès que $\|\sigma\| < \eta$. Par définition de la borne supérieure, il existe une subdivision $\sigma_1 = \sigma_1(\varepsilon)$ telle que $s(f) - \varepsilon/4 \leqslant s_{\sigma_1}(f) \leqslant s(f)$. De même, il existe $\sigma_2 = \sigma_2(\varepsilon)$ telle que $S(f) \leqslant S_{\sigma_2}(f) \leqslant S(f) + \varepsilon/4$. Or, l'hypothèse $f \in \mathcal{R}[a,b]$ équivaut à $s(f) = S(f)$. En posant $\sigma_3 = \sigma_1 \cup \sigma_2$, on déduit donc de (1) que $D_{\sigma_3}(f) \leqslant \varepsilon/2$.

Posons $\sigma_3 = \{y_0, \ldots, y_N\}$. Bien entendu, $N = N(\varepsilon)$. Nous choisissons

$$\eta = \varepsilon/(8(N+1)\|f\|_\infty).$$

Considérons alors une subdivision σ telle que $\|\sigma\| < \eta$. On décompose la somme $D_\sigma(f)$ sous la forme $D_\sigma(f) = D_\sigma^{(1)}(f) + D_\sigma^{(2)}(f)$, où $D_\sigma^{(1)}(f)$ porte sur les indices j tels que $[x_j, x_{j+1}]$ ne contient aucun y_h, et $D_\sigma^{(2)}(f)$ porte sur tous les autres indices. On peut écrire

$$\begin{aligned}
D_\sigma^{(1)}(f) &= \sum_{h=0}^{N-1} \sum_{y_h < x_j < x_{j+1} < y_{h+1}} (M_j - m_j)\delta_j \\
&\leqslant \sum_{h=0}^{N-1} \sum_{y_h < x_j < x_{j+1} < y_{h+1}} \Big(\sup_{y_h \leqslant t \leqslant y_{h+1}} f(t) - \inf_{y_h \leqslant t \leqslant y_{h+1}} f(t) \Big) \delta_j \\
&\leqslant \sum_{h=0}^{N-1} \Big(\sup_{y_h \leqslant t \leqslant y_{h+1}} f(t) - \inf_{y_h \leqslant t \leqslant y_{h+1}} f(t) \Big) (y_{h+1} - y_h) = D_{\sigma_3}(f).
\end{aligned}$$

Donc $D_\sigma^{(1)}(f) \leqslant \varepsilon/2$. Maintenant, observons qu'un même point y_h appartient au plus à deux intervalles $[x_j, x_{j+1}]$ tels que l'indice j apparaisse dans $D_\sigma^{(2)}(f)$. Cette somme comporte donc au plus $2N+2$ termes, et chacun d'entre eux est trivialement majoré par $2\eta\|f\|_\infty$. D'où

$$D_\sigma^{(2)}(f) \leqslant (2N+2)2\eta\|f\|_\infty = \varepsilon/2,$$

d'après le choix de η. Finalement, on obtient $D_\sigma(f) \leqslant \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$, ce qui termine la démonstration.

On peut aussi caractériser les fonctions de $\mathcal{R}[a,b]$ en termes d'encadrement par des fonctions en escalier ou des fonctions continues.

Théorème 5.2. *Pour toute fonction bornée sur* $[a,b]$, *on a*

$$\begin{aligned}
s(f) &= \underline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}t = \sup_{g \leqslant f,\, g \in Esc[a,b]} \int_a^b g \,\mathrm{d}t = \sup_{g \leqslant f,\, g \in \mathcal{C}[a,b]} \int_a^b g \,\mathrm{d}t \\
S(f) &= \overline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}t = \inf_{G \geqslant f,\, g \in Esc[a,b]} \int_a^b G \,\mathrm{d}t = \inf_{G \geqslant f,\, g \in \mathcal{C}[a,b]} \int_a^b G \,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Démonstration. Les formules relatives aux fonctions en escalier sont presqu'immédiates. Si $\sigma = \{x_0, \ldots, x_n\}$ est une subdivision de $[a,b]$ on a $s_\sigma(f) = \int_a^b g \,\mathrm{d}t$ avec

$$g(x) = \sum_{0 \leqslant j < n} m_j \mathbf{1}_{[x_j, x_{j+1}[}(x) \leqslant f(x) \qquad (a \leqslant x \leqslant b).$$

Cela implique

$$s(f) \leqslant \sup_{g \leqslant f,\, g \in Esc[a,b]} \int_a^b g \,\mathrm{d}t. \tag{3}$$

Pour montrer l'inégalité opposée, considérons $g \in Esc[a,b]$ telle que $g \leqslant f$. On désigne par $\{x_j\}_{j=0}^n$ la suite finie obtenue en posant $x_0 = a$, $x_n = b$ et où les x_j $(1 \leqslant j < n)$ sont les discontinuités de g sur $]a,b[$. On a clairement $g(x) \leqslant \inf_{x_j<x<x_{j+1}} f(x)$ pour $x_j < x < x_{j+1}$. Si σ est la subdivision de $[a,b]$ dont les points intérieurs sont les $x_j \pm \varepsilon$ $(1 \leqslant j < n)$ avec $0 < \varepsilon < \min(x_{j+1} - x_j)$, un calcul facile montre que $s_\sigma(f) \geqslant \int_a^b g\,\mathrm{d}t - 2n\varepsilon\|f\|_\infty$. On en déduit $s(f) \geqslant \int_a^b g\,\mathrm{d}t$. Cela montre bien que (3) est en fait une égalité. La formule relative à $S(f)$ peut être établie de manière analogue.

Établissons maintenant les formules concernant les fonctions continues. Soit g une fonction en escalier telle que $g \leqslant f$. On peut construire une fonction g_1, affine par morceaux, telle que $g_1 \leqslant g$ et

$$\int_a^b (g - g_1)\,\mathrm{d}t \leqslant \varepsilon. \tag{4}$$

Considérons, en effet, la suite $\{x_j\}_{j=1}^{n-1}$ des points de discontinuité de g, posons $x_0 = a$, $x_n = b$ et choisissons η tel que $0 < \eta < \min(x_{j+1} - x_j)$. Posons encore $y_j^- = g(x_j-)$, $y_j^+ = g(x_j+)$. Si, par exemple, $g(x_j) = y_j^+$ et $y_j^- \geqslant y_j^+$, on définit g_1 sur $[x_j - \eta, x_j]$ comme l'unique fonction affine telle que $g_1(x_j - \eta) = y_j^-$, $g_1(x_j) = y_j^+$. Procédons semblablement dans les autres cas. La relation (4) est alors satisfaite dès que η est assez petit. Cela montre que

$$\sup_{g\leqslant f,\, g\in Esc[a,b]} \int_a^b g\,\mathrm{d}t \leqslant \sup_{g\leqslant f,\, g\in \mathcal{C}[a,b]} \int_a^b g\,\mathrm{d}t.$$

Pour prouver l'inégalité opposée, il suffit de remarquer que, si g est continue, le Théorème 3.2 implique l'existence, pour tout $\varepsilon > 0$, d'une fonction $g_0 \in Esc[a,b]$ telle que $\|g - g_0\|_\infty \leqslant \varepsilon/(b-a)$. La fonction en escalier $g_1 = g_0 - \varepsilon/(b-a)$ satisfait alors $g_1 \leqslant g$ et $\int_a^b g_1\,\mathrm{d}t \geqslant \int_a^b g\,\mathrm{d}t - \varepsilon$.

Corollaire 5.3. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Les trois assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) $f \in \mathcal{R}[a,b]$,

(ii) $\forall\varepsilon > 0\ \exists\, g, G \in Esc[a,b] : g \leqslant f \leqslant G,\ \int_a^b (G - g)\,\mathrm{d}t \leqslant \varepsilon$,

(iii) $\forall\varepsilon > 0\ \exists\, g, G \in \mathcal{C}[a,b] : g \leqslant f \leqslant G,\ \int_a^b (G - g)\,\mathrm{d}t \leqslant \varepsilon$.

Parallèlement au Théorème 4.1, on peut établir le résultat suivant, dont la démonstration est facile à partir du critère de Riemann.

Théorème 5.4. *$\mathcal{R}[a,b]$ est une sous-algèbre de $B[a,b]$. L'application $f \mapsto \int_a^b f\,\mathrm{d}t$ est une forme linéaire continue positive sur $\mathcal{R}[a,b]$ muni de la norme de la convergence uniforme. De plus, cette application satisfait à la relation de Chasles.*

De même, le Théorème 4.2 reste valable en remplaçant $Rég[a,b]$ par $\mathcal{R}[a,b]$, avec une démonstration inchangée.

Le Corollaire 5.3 permet d'établir facilement le résultat suivant, qui fait le lien entre l'intégrale de Cauchy et celle de Riemann.

Théorème 5.5. *On a $Rég[a,b] \subset \mathcal{R}[a,b]$. De plus, l'intégrale de Riemann de toute fonction réglée coïncide avec son intégrale de Cauchy.*

La seconde formule de la moyenne et son corollaire 4.4 sont également valables pour les fonctions Riemann-intégrables. La démonstration n'est pas tout-à-fait la même, et il est conseillé d'en pourvoir les détails.

Nous avons déjà noté que la fonction f définie sur $[0,1]$ par $f(0) = 0$ et $f(x) = \sin(1/x)$ pour $x \neq 0$ n'est pas réglée. Le critère de Riemann implique immédiatement qu'elle est dans $\mathcal{R}[a,b]$. En effet, pour $\sigma = \{x_0, \ldots, x_n\}$, $\|\sigma\| \leqslant \delta$, $1 \leqslant k \leqslant n$, on a

$$\begin{aligned} D_\sigma(f) &\leqslant 2(x_k - x_0) + \sum_{k \leqslant j < n} (\sup_{x_j \leqslant t \leqslant x_{j+1}} \sin(1/t) - \inf_{x_j \leqslant t \leqslant x_{j+1}} \sin(1/t))(x_{j+1} - x_j) \\ &\leqslant 2x_k + \sum_{k \leqslant j < n} (x_{j+1} - x_j)^2 / x_j^2 \leqslant 2x_k + \delta / x_k^2. \end{aligned}$$

En choisissant k maximal sous la contrainte $x_k > \sqrt{\delta}$, on a $x_k \leqslant \sqrt{\delta} + \delta$, d'où

$$D_\sigma(f) \leqslant 3\sqrt{\delta} + \delta.$$

Donc $\lim_{\|\sigma\| \to 0} D_\sigma(f) = 0$, et on a bien $f \in \mathcal{R}[a,b]$.

Lebesgue a obtenu une caractérisation très simple des fonctions Riemann-intégrables parmi les fonctions bornées. Elle repose sur la notion féconde d'ensemble négligeable. Désignons la longueur d'un intervalle ouvert $I =]a,b[$ par $\lambda(I) = b - a$.

Définition. *Un ensemble $N \subset \mathbb{R}$ est dit négligeable si, pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe une famille dénombrable d'intervalles ouverts $\{I_j\}_{j \in J}$ telle que $N \subset \cup_{j \in J} I_j$ et $\sum_{j \in J} \lambda(I_j) < \varepsilon$.*

Un ensemble fini, et plus généralement un ensemble ayant un nombre fini de points d'accumulation, est négligeable. La propriété suivante est capitale.

Théorème 5.6. *Une réunion dénombrable d'ensembles négligeables est négligeable.*

Définition. *Lorsqu'une propriété est satisfaite pour tous les nombres réels d'un ensemble de référence sauf ceux d'un ensemble négligeable, on dit qu'elle est satisfaite presque partout* (pp)*.*

Théorème 5.7 (Lebesgue-Vitali). *Soit $f \in B[a,b]$. Alors $f \in \mathcal{R}[a,b]$ si, et seulement si, f est continue* pp.

Ainsi, contrairement à la notion de fonction réglée, la notion de fonction Riemann-intégrable est indépendante de la nature des discontinuités : elle ne repose que sur la “mesure” de leur ensemble.

Le critère de Lebesgue-Vitali implique immédiatement le Théorème 5.5, au vu du Théorème 3.5 qui assure que l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction réglée est dénombrable. Il permet aussi d'exhiber des fonctions bornées non Riemann-intégrables, comme la fonction caractéristique des nombres rationnels, notée $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$.

6. Limites

Il s'agit de trouver des conditions suffisantes sur une suite simplement convergente $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ de fonctions de *Rég*$[a,b]$ ou de $\mathcal{R}[a,b]$ pour que l'on ait

$$(*) \qquad \lim_{n \to +\infty} \int_a^b f_n \, \mathrm{d}t = \int_a^b \lim_{n \to +\infty} f_n \, \mathrm{d}t.$$

Commençons par un résultat très simple.

Théorème 6.1. *Si $f_n \in$ Rég$[a,b]$ et si $\|f_n - f\|_\infty \to 0$, alors $f \in$ Rég$[a,b]$ et la relation $(*)$ est vérifiée.*

Les hypothèses de ce théorème sont trop fortes. Il est cependant à noter que, sauf exception, un affaiblissement des hypothèses sur la convergence nécessite d'imposer que la fonction limite est réglée.

Définition. *Soit K un sous ensemble fini de $[a,b]$. On dit qu'une suite $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ de fonctions définies sur $[a,b]$ converge vers f uniformément sauf au voisinage de K si, pour tout ensemble V de la forme*

$$V = \cup_{x\in K}]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\qquad (\varepsilon > 0),$$

on a $\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[a,b]\smallsetminus V} |f_n(x) - f(x)| = 0$.

La convergence uniforme sauf au voisinage d'un ensemble fini d'une suite de fonctions réglées n'implique pas en général que la fonction limite soit réglée. Construire des contre-exemples.

Théorème 6.2. *Soit $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite bornée de fonctions de $\mathcal{R}[a,b]$. On suppose qu'il existe une fonction f et un ensemble fini $K \subset [a,b]$ tels que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge vers f uniformément sauf au voisinage de K. Alors $f \in \mathcal{R}[a,b]$ et la relation $(*)$ est satisfaite.*

L'hypothèse de bornitude de la suite $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ est essentielle : si $f_n(x) = n^2x^n(1-x)$, on a, sur $[0,1]$, convergence uniforme vers 0 sauf au voisinage de $\{0\}$, mais $(*)$ n'a pas lieu.

La démonstration du Théorème 6.2 est esquissée à l'exercice 29. On peut affaiblir les conditions sur K, en le supposant seulement compact et négligeable. La version Cauchy de ce théorème est de moins bonne qualité, en ce sens que la fonction limite n'est plus alors automatiquement intégrable.

Lorsqu'on impose *a priori* l'intégrabilité de la limite simple, l'interversion du passage à la limite et de l'intégration nécessite seulement l'hypothèse que la suite est bornée. Il faudra attendre la théorie de Lebesgue pour que l'intégrabilité de la fonction limite découle automatiquement de l'hypothèse de bornitude. En pratique, il est assez difficile de trouver des conditions générales permettant d'affirmer qu'une limite de fonctions Riemann-intégrables est Riemann-intégrable.

Théorème 6.3 (Arzelà, 1885). *Soit $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite bornée de fonctions de $\mathcal{R}[a,b]$. On suppose qu'il existe une fonction $f \in \mathcal{R}[a,b]$ telle que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge simplement vers f. Alors la relation $(*)$ est satisfaite.*

La démonstration que nous indiquons ici est due à Varouchas (1986). Elle repose sur le résultat auxiliaire suivant.

Lemme 6.4. *Soit $\{f_j\}_{j=1}^{n}$ une suite finie décroissante de fonctions définies sur $[a,b]$. On suppose que f_1 est bornée et on se donne une suite $\{g_j\}_{j=1}^{n}$ de fonctions de $\mathcal{R}[a,b]$ telle que $g_j \leqslant f_j$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$. On pose $G_j := \min_{1\leqslant i\leqslant j} g_i$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$. Alors on a*

$$\int_a^b G_n \,\mathrm{d}t \geqslant \sum_{1\leqslant j\leqslant n} \int_a^b g_j \,\mathrm{d}t - \sum_{1\leqslant j\leqslant n-1} \underline{\int_a^b} f_j \,\mathrm{d}t = \int_a^b f_n \,\mathrm{d}t - \sum_{1\leqslant j\leqslant n} \Big(\underline{\int_a^b} f_j \,\mathrm{d}t - \int_a^b g_j \,\mathrm{d}t \Big).$$

Démonstration du lemme. On procède par récurrence sur n, le cas $n = 1$ étant immédiat puisque $G_1 = g_1$ et que la seconde somme en j est vide. Supposons donc le résultat acquis au rang $n-1$ avec $n \geqslant 2$. On a alors $G_{n-1} \leqslant f_{n-1}$ et $g_n \leqslant f_n \leqslant f_{n-1}$ d'où

$$G_n = \min(G_{n-1}, g_n) = G_{n-1} + g_n - \max(G_{n-1}, g_n) \geqslant G_{n-1} + g_n - f_{n-1}.$$

En appliquant l'hypothèse de récurrence, il suit

$$\int_a^b G_n \,\mathrm{d}t \geqslant \sum_{1\leqslant j\leqslant n-1} \int_a^b g_j \,\mathrm{d}t - \sum_{1\leqslant j\leqslant n-2} \underline{\int_a^b} f_j \,\mathrm{d}t + \int_a^b g_n \,\mathrm{d}t - \underline{\int_a^b} f_{n-1} \,\mathrm{d}t,$$

d'où l'inégalité souhaitée en regroupant les termes.

Nous déduisons du lemme 6.4 la proposition suivante.

Proposition 6.5. *Soit $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite de fonctions définies sur $[a,b]$ et à valeurs dans $[0,M]$. On suppose que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ tend simplement vers 0. Alors on a*

$$\lim_{n\to\infty} \underline{\int_a^b} f_n \,\mathrm{d}t = 0.$$

Démonstration. Nous pouvons supposer sans perte de généralité que la suite $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ est décroissante : dans le cas contraire, il suffit de considérer $f_n^* := \sup_{j\geqslant n} f_j$.

Soit $\varepsilon > 0$. D'après le Théorème 5.2, il existe pour chaque n une fonction g_n de $Esc[a,b]$ telle que $g_n \leqslant f_n$ et $\int_a^b g_n \,\mathrm{d}t \geqslant \underline{\int_a^b} f_n \,\mathrm{d}t - \varepsilon/2^n$. Soit $G_n := \min_{1\leqslant j\leqslant n} g_j$. Alors G_n est continue et tend simplement vers 0. Comme la suite $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ est décroissante, le théorème de Dini (cf.exercice no. 4) implique alors que $\|G_n\|_\infty \to 0$. Par le Théorème 6.1, il suit que $\int_a^b G_n \,\mathrm{d}t \to 0$. En appliquant alors le Lemme 6.4, on obtient

$$\limsup_{n\to\infty} \underline{\int_a^b} f_n \,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon/2^j = \varepsilon.$$

Cela achève la démonstration de la proposition.

Démonstration du Théorème. Il suffit d'appliquer la Proposition 6.5 à la suite de fonctions intégrables $\{|f - f_n|\}_{n=1}^{\infty}$.

Le corollaire suivant constitue la version « intégrale de Riemann » du théorème fondamental de l'analyse.

Théorème 6.6. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable dont la dérivée f' est dans $\mathcal{R}[a,b]$. Alors*

$$\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t = f(b) - f(a).$$

Démonstration. Par continuité, il suffit de prouver le résultat pour toute intégrale sur $[\alpha,\beta]$ avec $a < \alpha \leqslant \beta < b$. D'après le théorème des accroissements finis, on a, pour $|h|$ assez petit,

$$f_h(t) := \frac{f(t+h) - f(t)}{h} = f'(t + \vartheta h) \qquad (t \in [\alpha,\beta],\ \vartheta = \vartheta(t,h) \in [0,1]).$$

On a donc $|f_h(t)| \leqslant M := \|f'\|_\infty$ uniformément en h et t. par le Théorème d'Arzelà, il suit

$$\lim_{h\to 0} \int_\alpha^\beta f_h(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta f_h(t)\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{h}\int_{\alpha+h}^{\beta+h} f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{h}\int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{h}\int_\beta^{\beta+h} f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{h}\int_\alpha^{\alpha+h} f(t)\,\mathrm{d}t \\ &\to f(\beta) - f(\alpha) \qquad (h \to 0).\end{aligned}$$

Cela achève la démonstration.

Remarque. Nous donnons à l'exercice 11 la version « dérivée continue » de ce théorème, qui est notablement plus simple à établir.

7. Intégrales généralisées

Définition. *Soit $f : [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction Riemann-intégrable sur tout intervalle $[a,b] \quad (b>a)$. On dit que f possède une intégrale de Riemann généralisée sur $[a,+\infty[$ si $\int_a^b f\,\mathrm{d}t$ tend vers une limite lorsque $b\to+\infty$. Cette limite est alors notée $\int_a^\infty f\,\mathrm{d}t$.*

De même, lorsque $f\in\mathcal{R}[a,c]$ pour tout c $(a<c<b)$, on dit que f possède une intégrale de Riemann généralisée sur $[a,b[$ si $\int_a^c f\,\mathrm{d}t$ tend vers une limite lorsque $c\to b-$. Cette limite est alors notée $\int_a^b f\,\mathrm{d}t$.

Il est facile de vérifier qu'une condition suffisante pour que f possède une intégrale généralisée de l'un des types précédents est que $|f|$ possède une intégrale généralisée — suppléer les détails. On dit alors que l'intégrale relative à f est *absolument convergente*. Une intégrale généralisée convergente mais non absolument convergente est dite *semi-convergente* — exemple : $\int_0^\infty (\sin x/x)\,\mathrm{d}x$.

On peut passer de l'un à l'autre des types de semi-convergence par changement de variables. Dans la suite, nous ne traiterons donc que du cas d'un intervalle non borné. Nous désignons par $\mathcal{R}[a,+\infty[$ l'ensemble des fonctions Riemann-intégrables sur tout intervalle $[a,b]$ avec $b>a$.

Théorème 7.1 (Convergence dominée). *Soit $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ une suite de fonctions de $\mathcal{R}[a,+\infty[$ converge simplement vers une fonction $f\in\mathcal{R}[a,+\infty[$. On suppose de plus l'existence d'une fonction fixe g possédant une intégrale de Riemann généralisée sur $[a,+\infty[$ et telle que $|f_n|\leqslant g$ pour tout $n\geqslant 1$. Alors, f_n $(n\geqslant 1)$, f possèdent des intégrales généralisées sur $[a,+\infty[$ et on a*

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^\infty f_n(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x.$$

L'hypothèse d'existence de la fonction g dans ce théorème est automatiquement réalisée lorsque la suite est croissante.

Théorème 7.2 (Convergence monotone). *Soit $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ une suite croissante de fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et possédant des intégrales de Riemann généralisées sur $[a,+\infty[$. Si $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ converge simplement vers une fonction f possédant une intégrale de Riemann généralisée sur $[a,+\infty[$, on a*

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^\infty f_n(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Université de Lorraine
Faculté des sciences et technologies
Licence de mathématiques 1994/95
Calcul intégral et théorie de la mesure
Gérald Tenenbaum

Exercices sur la continuité et la convergence

1. Soient f, g des fonctions réelles continues sur $\mathbb{R}$. Montrer que $h := \max(f, g)$ est également continue sur $\mathbb{R}$. On dit que f est majorée par 1 en moyenne si l'on a

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \Big| \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \Big| \leqslant 1.$$

Est-il vrai que si f et g sont toutes deux majorées par 1 en moyenne, alors il en va de même de h ? Donner un équivalent, lorsque x tend vers l'infini, de $\int_0^x \max(0, \sin t)\,\mathrm{d}t$.

2. 1) Soit G un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$. On pose $\alpha := \inf\{x \in G : x > 0\}$. Montrer que si $\alpha > 0$, alors on a $G := \alpha\mathbb{Z} = \{\alpha n : n \in \mathbb{Z}\}$. On dit alors que G est *discret.*

2) Montrer que si $\alpha = 0$, alors pour, tout nombre réel ξ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre x dans G tel que $|x - \xi| < \varepsilon$. On dit alors que G est *dense* dans $\mathbb{R}$. Donner un exemple de sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ qui est dense dans $\mathbb{R}$.

3) Soit $\varrho \in \mathbb{R}$. Montrer que $G(\varrho) := \{m\varrho + n : m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{Z}\}$ est un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$. Caractériser les nombres réels ϱ pour lesquels $G(\varrho)$ est discret.

4) Application : calculer $\limsup_{n\to\infty} \sin(2\pi nx)$. (Lorsque $x = p/q$ avec $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$ et $(p, q) = 1$, on introduira l'unique entier r tel que $r \leqslant q/4 < r + 1$, on montrera que $\max_{n\geqslant 1} \sin(2\pi nx) = \max\big(\sin(2\pi r/q), \sin(2\pi(r + 1)/q\big)$ et on montrera que l'application $\overline{n} \mapsto \overline{np}$ de $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ dans lui-même est injective et donc surjective.)

3. Une fonction numérique f définie sur un intervalle I est dite uniformément continue (sur I) si

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{\substack{x,y\in I\\ |x-y|\leqslant\varepsilon}} |f(x) - f(y)| = 0.$$

Donner des exemples de fonctions continues mais non uniformément continues sur $]0, 1]$. En raisonnant par l'absurde et en utilisant le théorème de Bolzano-Weierstrass, montrer que toute fonction continue sur un intervalle fermé $[a, b]$ est uniformément continue. La fonction $x \mapsto \sin x$ est-elle uniformément continue sur $\mathbb{R}$? Même question pour la fonction $x \mapsto \sin x^2$.

4. 1) Soit $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite monotone de fonctions réelles et continues sur $[0, 1]$. On suppose que f_n converge simplement vers une fonction continue f. Montrer que la convergence est uniforme. (Ce résultat est connu sous le nom de théorème de Dini. On pourra raisonner par l'absurde et appliquer le théorème de Bolzano-Weierstrass.) Le théorème de Dini est-il valable pour des fonctions définies sur $[0, \infty[$? Peut-on se dispenser de l'hypothèse que f est continue ?

2) On abandonne maintenant l'hypothèse que la suite $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ est monotone et on la remplace par l'hypothèse que chaque f_n est monotone. On suppose toujours que la limite

simple f est continue. Montrer que la convergence de f_n vers f est encore uniforme. (On pourra introduire des 'points tests' $x_k := k/N$ $(0 \leqslant k \leqslant N)$ sur $[0,1]$ avec N suffisamment grand.) Montrer que l'hypothèse de la continuité de la fonction limite f est indispensable.

5. *Critère d'Abel.*

1) Soit $A > 0$, et $\{a_n\}_{n=1}^\infty$, $\{b_n\}_{n=1}^\infty$ deux suites réelles. On pose $A_n := \sum_{1 \leqslant m \leqslant n} a_m$. On suppose que

(i) $\sup_{n \geqslant 1} |A_n| \leqslant A$,

(ii) b_n décroît vers 0 lorsque $n \to \infty$.

Montrer que pour tous entiers $M \geqslant 1$, $N \geqslant 1$ on a

$$\sum_{N<n\leqslant N+M} a_n b_n = A_{N+M} b_{N+M} + \sum_{N<n\leqslant N+M-1} A_n(b_n - b_{n+1}) - A_N b_{N+1}.$$

En déduire que

$$\Big| \sum_{N<n\leqslant N+M} a_n b_n \Big| \leqslant 2Ab_{N+1},$$

et en particulier que la série $\sum_n a_n b_n$ converge.

2) Soit $A > 0$ et soient f, g deux fonctions continues sur $[0, \infty[$ telles que

(i) $\displaystyle\sup_{x\geqslant 0} \Big| \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \Big| \leqslant A$,

(ii) g est de classe C^1, décroissante et tend vers 0 lorsque $x \to \infty$.

Montrer que l'intégrale généralisée

$$\int_0^\infty f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

est convergente et estimer la vitesse de convergence.

3) Application. Montrer l'existence de l'intégrale généralisée $\int_0^\infty \sin x^2\,\mathrm{d}x$. Estimer la vitesse de convergence. Que faut-il penser de l'intégrale généralisée $\int_0^\infty |\sin x^2|\,\mathrm{d}x$?

6. 1) Soit $F(h) = \int_0^h (\sin u/u)\,\mathrm{d}u$ $(h \in \mathbb{R})$. Montrer que, pour tout $h > 0$, on a $0 < F(h) \leqslant F(\pi)$. Montrer l'existence de $L = \lim_{h\to+\infty} F(h)$.

2) Montrer que la série $f(x) = \sum_{m=1}^\infty (\sin mx)/m$ est uniformément convergente sur tout intervalle $\alpha \leqslant x \leqslant 2\pi - \alpha$ avec $0 < \alpha < \pi$. [On pourra utiliser le critère d'Abel.] Montrer que la n-ième somme partielle $f_n(x)$ de la série $f(x)$ est uniformément bornée.

3) Montrer que la fonction $t \mapsto h(t) = \big(2\sin(\tfrac{1}{2}t)\big)^{-1} - t^{-1}$ est prolongeable en une fonction dérivable sur $]-2\pi, 2\pi[$.

4) Établir l'identité $1+2\sum_{m=1}^n \cos(mt) = \sin\big((n+\tfrac{1}{2})t\big)/\sin(\tfrac{1}{2}t)$. En déduire une expression pour $f_n(x)$ et montrer directement que $f_n(x) - F\big((n+\tfrac{1}{2})x\big) + \tfrac{1}{2}x$ est uniformément bornée sur $[-2\pi, 2\pi]$.

5) Montrer que $f(x) = L - x/2$ $(0 < x < 2\pi)$ et calculer L en spécialisant $x = \pi$.

6) Application. Calculer $\sum_{n=1}^\infty \cos(nx)/n^2$ $\quad(0 \leqslant x \leqslant 2\pi)$.

7. Soient f, g des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et coïncidant sur l'ensemble des rationnels dyadiques. Montrer que $f = g$.

8. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application quelconque. Montrer que l'ensemble E des nombres réels en lesquels f possède un maximum local strict est fini ou dénombrable.

9. Existe-t-il une fonction numérique continue $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que $f(x)$ soit rationnel pour x irrationnel et irrationnel pour x rationnel ? [On pourra procéder de l'une des trois façons suivantes : (a) montrer que la propriété est conservée par toutes les fonctions $f_{a,b} : x \mapsto af(x) + b$ avec $a, b \in \mathbb{Q}$, puis établir que $f_{a,b}$ possède nécessairement un point fixe pour a, b convenables ; (b) montrer que $f([0,1])$ est dénombrable, et conclure en appliquant le théorème des valeurs intermédiaires ; (c) montrer que $f(x) \pm x$ est irrationnel pour tout $x \in [0,1]$ et en déduire que ces deux fonctions sont constantes.]

10. Montrer qu'une fonction dérivée satisfait au théorème des valeurs intermédiaires. [On pourra considérer une fonction f dérivable sur un intervalle $]a,b[$ et telle que f' prend des valeurs des deux signes. Il s'agit alors de montrer que f' s'annule sur $]a,b[$. Montrer que f n'est pas monotone et appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à f pour montrer l'existence de deux points u, v de $]a,b[$ tels que $f(u) = f(v)$. Conclure.]

11. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable dont la dérivée est continue. Montrer, en utilisant le théorème des accroissements finis et la continuité uniforme de f', que $f_h(t) := \{f(t+h) - f(t)\}/h$ tend uniformément vers $f'(t)$ sur tout intervalle fermé $[\alpha,\beta] \subset]a,b[$ lorsque $h \to 0$. En déduire que l'on a

$$\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t = f(b) - f(a).$$

Université de Lorraine
Faculté des sciences et technologies
Licence de mathématiques 1994/95
Calcul intégral et théorie de la mesure
Gérald Tenenbaum

Exercices sur l'intégrale de Cauchy et l'intégrale de Riemann

12. En s'inspirant de l'exercice 10, construire une fonction réglée f dont l'intégrale indéfinie $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est non dérivable en certains points. Que peut-on néanmoins dire de l'ensemble des valeurs de x où F n'est pas dérivable ? Est-il possible que F soit dérivable en x_0 mais que l'on ait $F'(x_0) \neq f(x_0)$?

13. Pour $0 \leqslant x \leqslant 1$, soit $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \{nx\}/n^2$, où $\{u\}$ désigne la partie fractionnaire du nombre réel u. Montrer que f est réglée. Déterminer l'ensemble E des points de discontinuité de f et calculer l'oscillation $\omega_x(f) := \limsup_{y\to x} f(y) - \liminf_{y\to x} f(y)$ de f en chaque point de E. Calculer $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

14. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = 1/(1+n|\log x|) \quad (0 < x \leqslant 1)$, et $f_n(0) = 0$. Montrer que, pour chaque n, f_n est réglée et calculer $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

15. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}^+$ une fonction réglée, à valeurs positives ou nulles, et d'intégrale de Cauchy nulle.

1) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ il existe une fonction en escalier f_n telle que $f(x) \leqslant f_n(x) \leqslant f(x) + 1/n$ sur $[a,b]$.

2) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $\delta > 0$ l'ensemble $E(\delta) = f^{-1}([\delta, +\infty[)$ peut être recouvert par une famille finie d'intervalles dont la somme des longueurs n'excède pas ε. En déduire que $E(\delta)$ est négligeable, puis que l'ensemble $E = \{x \in [a,b] : f(x) \neq 0\}$ est négligeable.

3) Traiter la question précédente en supposant seulement f Riemann-intégrable.

16. Soit $f \in \mathcal{R}[a,b]$ une fonction telle que l'ensemble $N = \{t \in [a,b] : f(t) < 0\}$ soit négligeable. Montrer que $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$.
Application. Si f est intégrable sur $[a,b]$ et si $E = \{t \in [a,b] : f(t) \neq 0\}$ est négligeable, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

17. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée telle que, pour chaque $\varepsilon > 0$, l'ensemble $A_\varepsilon = \{t \in [a,b] : |f(t)| > \varepsilon\}$ soit fini. Montrer que $\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.
Application. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = 0$ si $x \notin \mathbb{Q}$, et $f(p/q) = 1/q$ si $p, q \in \mathbb{N}$, $(p,q) = 1$. Montrer que f est intégrable au sens de Riemann et calculer son intégrale. Retrouver le résultat par un raisonnement direct. (On pourra utiliser le résultat de l'exercice 15.)

18. Pour toute fonction f de $B[a,b]$, on considère la fonction *défaut d'intégrabilité*

$$D_f(x) = \overline{\int_a^x} f(t)\,\mathrm{d}t - \underline{\int_a^x} f(t)\,\mathrm{d}t \qquad (x \in [a,b]).$$

Montrer que pour $f \in \mathit{Rég}[a,b]$, la fonction $D_f(x)$ est dérivable sur $[a,b]$ et de dérivée nulle. [On admettra que l'intégrale inférieure et l'intégrale supérieure satisfont à la relation de Chasles.] Retrouver ainsi l'inclusion $\mathit{Rég}[a,b] \subset \mathcal{R}[a,b]$.

19. Désignons par $\{x\}$ la partie fractionnaire du nombre réel x, et posons $B_1(x) = \{x\} - \frac{1}{2}$. Montrer que $\int_y^z B_1(x)\,\mathrm{d}x$ est uniformément borné pour $y, z \in \mathbb{R}$. En calculant $\int_{n-1}^n f'(x)\{x\}\,\mathrm{d}x$ pour $n = 2, 3, \ldots, N$, montrer que l'on a pour toute fonction f de classe C^1 sur $[1, N]$

$$\sum_{n=1}^N f(n) = \int_1^N f(x)\,\mathrm{d}x + \tfrac{1}{2}(f(1) + f(N)) + \int_1^N B_1(x)f'(x)\,\mathrm{d}x.$$

En supposant que f' est monotone pour x assez grand et tend vers 0 à l'infini, établir l'existence d'une constante $C = C(f)$ telle que l'on ait pour N assez grand

$$(*) \qquad \sum_{n=1}^N f(n) = \int_1^N f(x)\,\mathrm{d}x + \tfrac{1}{2}f(N) + C + O(f'(N)).$$

Applications. Calculer, en faisant appel à des résultats classiques d'analyse, la constante $C(f)$ pour $f(x) = \log x$, $f(x) = 1/x$. Écrire la formule asymptotique $(*)$ pour $f(x) = \log x/x$ en évaluant le terme principal — on ne demande pas la valeur de $C(f)$ dans ce cas.

20. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction Riemann-intégrable. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une fonction en escalier g telle que $\int_a^b |f(t) - g(t)|\,\mathrm{d}t < \varepsilon$.

Montrer le *Lemme de Riemann-Lebesgue* : pour toute fonction Riemann-intégrable sur $[a,b]$, on a

$$\lim_{x\to+\infty} \int_a^b f(t)\cos xt\ \mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty} \int_a^b f(t)\sin xt\ \mathrm{d}t = 0.$$

On traitera d'abord le cas des fonctions en escalier.

21. Étant donnée une fonction f à valeurs réelles, on appelle *majorant essentiel* de f tout nombre réel m tel que $f^{-1}(]m, +\infty[)$ soit négligeable.

1) Montrer que toute fonction bornée possède un plus petit majorant essentiel. On appelle ce nombre *borne supérieure essentielle* de f et on le note $\operatorname{essup} f$.

2) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction Riemann-intégrable positive ou nulle. Pour tout $p > 0$ on définit la *moyenne d'ordre* p de f comme la quantité

$$M_p(f) = \left\{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)^p\,\mathrm{d}x\right\}^{1/p}.$$

Montrer que l'on a $\lim_{p\to+\infty} M_p(f) = \operatorname{essup} f$ en étudiant d'abord le cas des fonctions continues. $\big[$ Pour montrer que $\lim_{p\to+\infty} M_p(f) \geqslant \operatorname{essup} f$ lorsque $f \in \mathcal{R}[a,b]$, on établira que pour tout $A < \operatorname{essup} f$ il existe un nombre réel positif δ ne dépendant que de A tel que, pour toute subdivision $\sigma = \{x_j\}_{j=0}^n$ de $[a,b]$, on a $\sum_{0\leqslant j<n,\, M_j\geqslant A}(x_{j+1} - x_j) \geqslant \delta.\big]$

22. Soient a, b tels que $0 < a < b$. On pose $f_n(x) := ax^{an-1} - bx^{bn-1}$. Montrer que f_n possède une intégrale de Riemann généralisée sur $]0,1]$. Pour $0 < x < 1$, calculer $F(x) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ et montrer que F peut être prolongée en une fonction continue en 1 possédant une intégrale généralisée sur $]0,1]$ que l'on calculera. Comparer $\int_0^1 F(x)\,\mathrm{d}x$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

23. Calculer $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+1}/(2n+1)$ pour $0 \leqslant x < 1$. Montrer l'existence et calculer la valeur des intégrales généralisées $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$, et $\int_0^1 f(x)x^{-1}\,\mathrm{d}x$.

24. Montrer que l'intégrale généralisée $\int_0^{\infty} e^{-2x} \cos x\,\mathrm{d}x$ est convergente et calculer sa valeur.

25. Soit $p > 0$. Établir la formule $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1-x} \log \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(p+k)^2}$ en précisant le sens accordé à chacun des deux membres.

26. Soit $p > 0$. Montrer, grâce au critère d'Abel, que la série $\sum_{k=0}^{\infty} (-x)^k/(p+k)$ est uniformément convergente sur $[0,1]$. Établir ensuite, en précisant le sens de chaque expression, la formule $\int_0^1 x^{p-1}\,\mathrm{d}x/(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k/(p+k)$.

27. Soit f une fonction à valeurs positives ou nulles possédant une intégrale de Riemann généralisée sur $]0,1]$. Est-il vrai que pour chaque $\varepsilon \in]0,1[$ la suite $f_n(x) := x^n f(x)$ converge uniformément vers 0 sur $]0, 1-\varepsilon]$? Peut-on déterminer $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x$?

28. Construire une fonction f ayant une intégrale de Riemann généralisée sur $[0,+\infty[$ mais telle que $\limsup_{x\to+\infty} f(x) = \infty$. Peut-on imposer de plus que f soit continue sur $\mathbb{R}$? uniformément continue sur $\mathbb{R}$?

29. On considère les *intégrales de Wallis* $I_n = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^n\,\mathrm{d}t$.

1) Trouver une relation entre I_n et I_{n-2}. Montrer que I_n tend vers 0 en décroissant et que I_n/I_{n+1} tend vers 1. Donner une formule explicite pour I_{2n} et I_{2n+1}.

2) Sans considérer la parité de n, calculer nI_nI_{n-1}. En déduire un équivalent de I_n de la forme c/n^{α}.

3) Écrire le développement en série entière de $1/\sqrt{1+x}$ et de $\arcsin x$ au voisinage de l'origine. A l'aide de la question précédente, donner un équivalent du n-ième coefficient de chacune d'elles.

4) Intégrer entre 0 et $\pi/2$ l'identité $t = \arcsin(\sin t)$ où le second membre sera écrit comme une série entière en $\sin t$. Justifier l'intégration terme à terme et en déduire la valeur d'une série remarquable.

5) Établir les inégalités $(1 - t^2/n)^n \leqslant e^{-t^2}$ ($|t| \leqslant \sqrt{n}$), et $e^{-t^2} \leqslant (1 + t^2/n)^{-n}$ ($t \in \mathbb{R}$). En déduire par intégration un encadrement de l'intégrale gaussienne $G = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$. En faisant appel aux résultats des questions 1 et 2, calculer la valeur de G.

30. Soit $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite bornée de fonctions de $\mathcal{R}[a,b]$ convergeant simplement vers une fonction f, et uniformément sauf au voisinage d'un ensemble fini K. On désigne par E_n l'ensemble des points de discontinuité de f_n et on pose $E = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$.

1) Montrer que l'ensemble $E^* = E \cup K$ est négligeable.

2) Soit $x \in [a,b] \smallsetminus E^*$. Pour $n \geqslant 1$, $\delta > 0$, on pose

$$\alpha_n(\delta;x) = \sup_{|x-y|\leqslant\delta} |f_n(x) - f_n(y)|, \quad \beta_n(\delta;x) = \sup_{|x-y|\leqslant\delta} |f_n(y) - f(y)|.$$

Montrer que pour tout n fixé on a $\lim_{\delta\to 0}\alpha_n(\delta;x) = 0$ et que pour $\delta > 0$ fixé *assez petit* on a $\lim_{n\to\infty}\beta_n(\delta;x) = 0$. En déduire que f est continue en x et donc que $f \in \mathcal{R}[a,b]$.

3) Soit $\sigma = \{x_0, \ldots, x_k\}$ une subdivision de $[a,b]$. Pour $\delta > 0$, on désigne par $\mathcal{J}_1(\sigma,\delta)$ l'ensemble des indices $j \in [0,k]$ tels que $[x_j - \delta, x_{j+1} + \delta]$ ne contienne aucun point de K. On pose alors $\mathcal{J}_2(\sigma,\delta) = [0,k] \smallsetminus \mathcal{J}_1(\sigma,\delta)$. Montrer que

$$\sum_{j\in\mathcal{J}_2(\sigma,\delta)} (x_{j+1} - x_j) \leqslant 2|K|(\delta + \|\sigma\|).$$

Montrer que $\sup_{j\in\mathcal{J}_1(\sigma,\delta)}\sup_{x_j\leqslant x\leqslant x_{j+1}} |f(x) - f_n(x)| \to 0$ lorsque $n \to \infty$. En déduire une preuve directe que $f \in \mathcal{R}[a,b]$ et la validité de la formule $\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(t)\,dt$.

31. On se propose ici de démontrer, sans faire appel au théorème de Borel-Lebesgue, que l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction admettant en tout point une limite à gauche et une limite à droite est dénombrable.

Soit $f \in Rég[a,b]$. On pose $E_n := \{x \in [a,b] : \omega_x(f) > 1/n\}$ où l'oscillation $\omega_x(f)$ est définie comme à l'exercice précédent.

1) Soient $x \in [a,b]$, $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer l'existence d'un nombre réel $\delta_n(x) > 0$ tel que l'on ait $|f(x+) - f(y)| \leqslant 1/2n$ pour tout y satisfaisant à $x < y < x + \delta_n(x)$.

2) Établir que les intervalles $]x, x+\delta_n(x)[$ sont deux à deux disjoints lorsque x parcourt E_n.

3) Pour $p, n \in \mathbb{N}^*$, on pose $E_{n,p} := E_n \cap \{x \in [a,b] : \delta_n(x) > 1/p\}$. Montrer que $E_{n,p}$ est fini. Conclure.

4) A quel endroit la démonstration proposée en cours fait-elle appel au théorème de Borel-Lebesgue ?

32. *Théorème de Lebesgue-Vitali.*

Soit $f \in B[a,b]$. On se propose de prouver ici que $f \in \mathcal{R}[a,b]$ si, et seulement si, l'ensemble $E(f)$ des points de discontinuité de f est négligeable. On définit l'oscillation $\omega_f(x)$ de f en un point x de $[a,b]$ par la formule

$$\omega_f(x) := \lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{|y-x|\leqslant\varepsilon,\, |z-x|\leqslant\varepsilon} |f(y) - f(z)|.$$

Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on pose $E_p := \{x \in [a,b] : \omega_f(x) \geqslant 1/p\}$.

Étant donnée une subdivision $\sigma = \{x_j\}_{j=0}^n$ de $[a,b]$, on pose

$$M_j := \sup_{x_j\leqslant x\leqslant x_{j+1}} f(x), \quad m_j := \inf_{x_j\leqslant x\leqslant x_{j+1}} f(x), \quad D_\sigma(f) := \sum_{0\leqslant j<n} (M_j - m_j)(x_{j+1} - x_j).$$

1) Montrer que f est continue en x si, et seulement si, on a $\omega_f(x) = 0$. En déduire que $E(f) = \cup_{p=1}^\infty E_p$.

2) Supposons que $f \in \mathcal{R}[a,b]$.

(a) Montrer que pour chaque $p \geqslant 1$ et chaque $\varepsilon > 0$ il existe une subdivision $\sigma_p = \{x_j\}_{j=0}^n$ de $[a,b]$ telle que $D_{\sigma_p}(f) \leqslant \varepsilon/2p$.

(b) Soit $\mathcal{J}(\sigma_p) = \{j : 0 \leqslant j < n,\ ]x_j, x_{j+1}[\cap E_p \neq \varnothing\}$. Montrer que pour tout $j \in \mathcal{J}(\sigma_p)$ on a $M_j - m_j \geqslant 1/p$. En déduire que $\sum_{j\in\mathcal{J}(\sigma_p)}(x_{j+1} - x_j) \leqslant \varepsilon/2$.

(c) Montrer que E_p est négligeable pour tout $p \geqslant 1$ et en déduire que $E(f)$ est négligeable.

3) Soit f une fonction non nulle de $B[a,b]$ telle que $E(f)$ est négligeable.

(a) Montrer que pour chaque entier $p \geqslant 1$, l'ensemble E_p est une partie fermée de $[a,b]$, donc compacte.

(b) Soient $\varepsilon > 0$, $p \geqslant 3(b-a)/\varepsilon$. Montrer qu'il existe une suite finie $\{I_k\}_{k=1}^K$ d'intervalles ouverts telle que

$$E_p \subset \cup_{k=1}^K I_k, \qquad \sum_{1\leqslant k\leqslant K} \lambda(I_k) < \varepsilon/(9\|f\|_\infty).$$

(c) On pose $F(p,\varepsilon) = [a,b] \smallsetminus \cup_{k=1}^K I_k$. Montrer que $F(p,\varepsilon)$ est compact. Montrer que pour tout ξ de $F(p,\varepsilon)$ il existe un nombre réel positif $\eta(\xi)$ tel que, notant

$$V(\xi) =]\xi - \eta(\xi), \xi + \eta(\xi)[,$$

on ait $\sup_{y,z\in V(\xi)} |f(y) - f(z)| \leqslant 1/p$. Montrer qu'il existe une suite finie $\{\xi_h\}_{h=1}^H$ d'éléments de $F(p,\varepsilon)$ telle que $F(p,\varepsilon) \subset \cup_{h=1}^H V(\xi_h)$.

(d) Soit $\delta = \min\{\varepsilon/(12H\|f\|_\infty), \min_{1\leqslant k\leqslant K} \lambda(I_k)\}$ et $\sigma = \{x_j\}_{j=0}^n$ une subdivision de $[a,b]$ de pas $\|\sigma\| < \delta$. On décompose $D_\sigma(f) = D_\sigma^{(1)}(f) + D_\sigma^{(2)}(f) + D_\sigma^{(3)}(f)$ où $D_\sigma^{(1)}(f)$ correspond aux indices j tels que $[x_j, x_{j+1}] \cap I_k \neq \varnothing$ pour au moins un indice k, $D_\sigma^{(2)}(f)$ correspond aux indices j tels que $[x_j, x_{j+1}] \subset V(\xi_h)$ pour au moins un indice h et $D_\sigma^{(3)}(f)$ porte sur tous les autres indices — pour lesquels, en particulier, $[x_j, x_{j+1}]$ contient un point de la forme $\xi_h \pm \eta(\xi_h)$. Établir les inégalités

$$\begin{aligned}
&D_\sigma^{(1)}(f) \leqslant \|f\|_\infty \sum_{1\leqslant k\leqslant K} (\lambda(I_k) + 2\|\sigma\|) \leqslant 3\|f\|_\infty \sum_{1\leqslant k\leqslant K} \lambda(I_k) \leqslant \varepsilon/3\\
&D_\sigma^{(2)}(f) \leqslant (b-a)/p \leqslant \varepsilon/3\\
&D_\sigma^{(3)}(f) \leqslant 4H\|f\|_\infty \|\sigma\| \leqslant \varepsilon/3.
\end{aligned}$$

Conclure.

Université de Lorraine
Faculté des sciences et technologies
Licence de mathématiques 1994/95
Calcul intégral et théorie de la mesure
Gérald Tenenbaum

II

Intégrale double

1. Définition

La théorie de l'intégrale de Riemann en dimension supérieure ou égale à 2 est une extension naturelle de celle des fonctions d'une variable. Pour éviter des notations trop lourdes, nous considérons ici le cas de deux variables, mais on pourra sans peine étendre l'étude au cas général.

Soit $P = I \times J$ un pavé de $\mathbb{R}^2$. On définit la *mesure* de P par la formule

$$\lambda(P) = \lambda(I)\lambda(J),$$

ce qui n'est autre que l'aire du rectangle $I \times J$. Une *fonction en escalier* sur P est une fonction bornée de la forme

$$\varphi(x,y) = \sum_{1\leqslant j\leqslant n} z_j \mathbf{1}_{P_j}(x,y) + \psi(x,y)$$

où les P_j sont des pavés ouverts disjoints dont la réunion des adhérences $\cup_{1\leqslant j\leqslant n}\overline{P_j}$ coïncide avec P, et où le support de ψ est $P \smallsetminus \cup_{1\leqslant j\leqslant n} P_j$. On pose alors

$$\int_P \varphi(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_P \varphi(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \sum_{1\leqslant j\leqslant n} z_j\lambda(P_j).$$

On peut établir facilement que l'application $\varphi \mapsto \int_P \varphi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ est une forme linéaire positive sur l'ensemble $Esc(P)$ des fonctions en escalier sur P. Comme en dimension 1, l'intégrale de Riemann d'une fonction bornée f sera définie en comparant f avec des fonctions en escalier dont les intégrales sont proches.

Considérons un pavé fermé borné $P = [a,b] \times [c,d]$ de $\mathbb{R}^2$. Une *subdivision* de P est le produit cartésien $\sigma = \sigma_1 \times \sigma_2$ d'une subdivision $\sigma_1 = \{x_0 = a < x_1 < \ldots < x_m = b\}$ de $[a,b]$ et d'une subdivision $\sigma_2 = \{y_0 = c < y_1 < \ldots < y_n = d\}$ de $[c,d]$. On pose systématiquement

$$P_{ij} = [x_i, x_{i+1}]\times[y_j, y_{j+1}], \quad \delta_i = x_{i+1} - x_i, \quad \eta_j = y_{j+1} - y_j \quad (0 \leqslant i < m,\, 0 \leqslant j < n),$$

$$\|\sigma\| = \max\{\|\sigma_1\|, \|\sigma_2\|\} = \max\{\max_{0\leqslant i<m} \delta_i,\, \max_{0\leqslant j<n} \eta_j\},$$

(de sorte que $\lambda(P_{ij}) = \delta_i\eta_j$) et l'on définit pour toute fonction f de $B(P)$ (l'ensemble des fonctions bornées sur P) les sommes de Darboux supérieure et inférieure

$$S_\sigma(f) = \sum_{0\leqslant i<m,\, 0\leqslant j<n} M_{ij}\lambda(P_{ij}), \quad s_\sigma(f) = \sum_{0\leqslant i<m,\, 0\leqslant j<n} m_{ij}\lambda(P_{ij}),$$

où l'on a posé $M_{ij} = \sup_{(x,y)\in P_{ij}} f(x,y)$, $m_{ij} = \inf_{(x,y)\in P_{ij}} f(x,y)$. Une fonction f de $B(P)$ est dite Riemann-intégrable si l'on a

$$\sup_\sigma s_\sigma(f) = \inf_\sigma S_\sigma(f),$$

et la valeur commune des deux membres est alors appelée intégrale de Riemann de f sur P, et notée

$$\iint_P f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad \text{ou} \quad \int_P f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

On désigne par $\mathcal{R}(P)$ l'ensemble des fonctions Riemann-intégrables sur P. Le critère de Riemann reste valable, avec une démonstration identique à celle qui a été faite dans le cas d'une variable.

Théorème 1.1 (Critère de Riemann). *Soit P un pavé fermé borné de $\mathbb{R}^2$, $f \in B(P)$. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $f \in \mathcal{R}(P)$

(ii) $\lim_{\|\sigma\|\to 0} \big(S_\sigma(f) - s_\sigma(f)\big) = 0.$

Une partie N de $\mathbb{R}^2$ est dite *négligeable* si, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver une famille dénombrable $\{I_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ de pavés ouverts recouvrant N et telle que $\sum_{j\in\mathcal{J}} \lambda(I_j) < \varepsilon$. Les principales propriétés des ensembles négligeables en dimension 1 restent valables en dimension 2. En particulier, une réunion dénombrable d'ensembles négligeables est négligeable. Une propriété vérifiée en tout point d'une partie A de $\mathbb{R}^2$ sauf peut-être ceux d'un ensemble négligeable est dite satisfaite presque partout (pp) sur A. Le théorème de Lebesgue-Vitali peut être démontré dans ce cadre, en utilisant la compacité des pavés fermés bornés de $\mathbb{R}^2$.

Théorème 1.2 (Lebesgue-Vitali). *Soit P un pavé fermé borné de $\mathbb{R}^2$ et $f \in B(P)$. Alors $f \in \mathcal{R}(P)$ si, et seulement si, f est continue* pp *sur P.*

Le Théorème 1.1 ou le Théorème 1.2 permettent facilement de montrer le résultat important suivant.

Théorème 1.3. *Soit $P = [a,b]\times[c,d]$ un pavé de $\mathbb{R}^2$ et $f : P \to \mathbb{R}$ une fonction bornée qui est continue sur P sauf peut-être sur une courbe $y = \varphi(x)$ (resp. $x = \psi(y)$) où φ (resp. ψ) est continue et monotone. Alors $f \in \mathcal{R}(P)$.*

Démonstration. Déduisons ce théorème du critère de Riemann. Plaçons-nous par exemple dans le cas d'une courbe $y = \varphi(x)$ et supposons φ croissante. Soit σ une subdivision de P et $\varepsilon > 0$. Nous devons montrer que $D_\sigma(f) = S_\sigma(f) - s_\sigma(f) < \varepsilon$ dès que $\|\sigma\|$ est assez petit. A cette fin, nous scindons la somme

$$D_\sigma(f) = \sum_{i,j} (M_{ij} - m_{ij})\lambda(P_{ij})$$

en deux sous-sommes, $D_\sigma^{(1)}(f)$ et $D_\sigma^{(2)}(f)$, correspondant respectivement aux couples d'indices (i,j) tels que $P_{ij} \subset K_\varepsilon := \{(x,y) \in P : |y - \varphi(x)| \geqslant \varepsilon\}$ et tels que $P_{ij} \cap (P \smallsetminus K_\varepsilon) \neq \varnothing$. Comme f est continue sur K_ε, elle est en fait uniformément continue sur ce compact. Or, la distance maximale de deux points d'un même pavé P_{ij} n'excède pas $\sqrt{2}\,\|\sigma\|$. On a donc, pour ε fixé, $\lim_{\|\sigma\|\to 0} \sup_{P_{ij}\subset K_\varepsilon} (M_{ij} - m_{ij}) = 0$. Comme de plus $\sum_{i,j} \lambda(P_{ij}) = \lambda(P)$ est indépendant de $\|\sigma\|$, il s'ensuit que

$$(\forall \varepsilon > 0) \qquad \lim_{\|\sigma\|\to 0} D_\sigma^{(1)}(f) = 0.$$

Considérons maintenant $D_\sigma^{(2)}(f)$. Pour chaque indice i, la condition $P_{ij} \cap (P \smallsetminus K_\varepsilon) \neq \varnothing$ implique $\varphi(x_i) - \varepsilon < y_{j+1}$ et $y_j < \varphi(x_{i+1}) + \varepsilon$, grâce à la croissance de φ. D'où, à i fixé,

$$\sum_{P_{ij} \cap (P \smallsetminus K_\varepsilon) \neq \varnothing} (y_{j+1} - y_j) < \varphi(x_{i+1}) - \varphi(x_i) + 2\varepsilon + 2\|\sigma\|.$$

En sommant sur toutes les valeurs de i, il suit, notant $M := \sup_P |f(x,y)|$,

$$\begin{aligned} D_\sigma^{(2)}(f) &< 2M \sum_{0 \leqslant i < n} (x_{i+1} - x_i)\big(\varphi(x_{i+1}) - \varphi(x_i) + 2\varepsilon + 2\|\sigma\|\big) \\ &\leqslant 2M\|\sigma\|\big(\varphi(b) - \varphi(a)\big) + 4M(b-a)(\varepsilon + \|\sigma\|). \end{aligned}$$

On a donc

$$\limsup_{\|\sigma\| \to 0} D_\sigma^{(2)}(f) \leqslant 4M(b-a)\varepsilon.$$

Compte tenu de l'estimation obtenue pour $D_\sigma^{(1)}(f)$, et puisque ε était arbitraire, on peut ainsi écrire

$$(\forall \varepsilon > 0) \qquad \limsup_{\|\sigma\| \to 0} D_\sigma(f) < \varepsilon,$$

ce qui implique clairement le résultat souhaité.

Remarque. Le théorème précédent est encore vrai si l'on suppose seulement φ ou ψ monotone, sans hypothèse de continuité. Il suffit de remplacer dans la démonstration l'ensemble K_ε par $K_\varepsilon^* = \{(x,y) : |y - \varphi(x)| + |y - \varphi(x-)| + |y - \varphi(x+)| \geqslant \varepsilon\}$, qui est fermé sous l'hypothèse indiquée, et de remarquer que $\sum_{0<j<n} \{\varphi(x_j+) - \varphi(x_j-)\} \leqslant \varphi(b) - \varphi(a)$.

A la lumière du théorème de Lebesgue-Vitali, le Théorème 1.3 peut encore être interprété comme l'assertion qu'une courbe (continue) monotone est négligeable. Bien entendu, il s'étend immédiatement aux fonctions qui sont continues sur un pavé sauf peut-être sur un nombre fini d'arcs de courbes (continues) monotones. Un cas particulier important est celui de fonctions dont le support est un domaine borné D limité par un nombre fini de tels arcs. Si, par exemple, P est un pavé fermé borné et f est une fonction continue sur P, on définit l'intégrale de f sur D par la formule

$$\iint_D f \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_P f(x,y)\mathbf{1}_D(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Plus généralement, la formule précédente permet de définir l'intégrale de $f \in \mathcal{R}(P)$ sur un sous-domaine D *quarrable*, c'est-à-dire dont la fonction indicatrice $\mathbf{1}_D$ est intégrable. Un pavé est à l'évidence quarrable.

Parallèlement au Théorème I.5.2 et au Corollaire I.5.3, on peut énoncer le résultat suivant.

Théorème 1.4. *Soit P un pavé fermé borné de $\mathbb{R}^2$. Pour toute fonction $f \in B(P)$, on a*

$$s(f) = \sup_\sigma s_\sigma(f) = \sup_{g \leqslant f,\, g \in Esc(P)} \iint_P g(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \sup_{g \leqslant f,\, g \in \mathcal{C}(P)} \iint_P g(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

$$S(f) = \inf_\sigma S_\sigma(f) = \inf_{g \geqslant f,\, g \in Esc(P)} \iint_P g(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \inf_{g \geqslant f,\, g \in \mathcal{C}(P)} \iint_P g(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

En particulier, f est Riemann-intégrable si, et seulement si, l'une ou l'autre des conditions suivantes est réalisée :

(i) $\forall \varepsilon > 0\ \exists\, g, G \in Esc(P) : g \leqslant f \leqslant G,\ \iint_P (G - g)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leqslant \varepsilon,$

(ii) $\forall \varepsilon > 0\ \exists\, g, G \in \mathcal{C}(P) : g \leqslant f \leqslant G,\ \iint_P (G - g)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leqslant \varepsilon.$

2. Intégrales itérées

Il s'agit de savoir dans quelles conditions une intégrale double peut être calculée par intégrations successives, soit

$$(1) \qquad \iint_P f \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x \int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_c^d \mathrm{d}y \int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

Le premier cas à considérer est celui des fonctions continues. Le Théorème 1.2 fournit immédiatement que $f \in \mathcal{R}(P)$ et la continuité uniforme de f sur P implique que les intégrales partielles $\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y$ et $\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x$ sont bien définies (en tant qu'intégrales de fonctions continues) et dépendent continûment de x et y respectivement. Ainsi les trois membres de (1) ont bien un sens.

Théorème 2.1. *Soit P un pavé fermé borné de $\mathbb{R}^2$. Si $f \in \mathcal{C}(P)$, on a* (1).

Il ne suffit pas que $f \in \mathcal{R}(P)$ pour que l'on ait (1). En effet, il se peut que les intégrales partielles ne soient pas définies pour chaque valeur de la variable qui est considérée comme paramètre. Le Théorème 2.2 ci-dessous montre qu'en fait tout contre-exemple à (1) avec $f \in \mathcal{R}(P)$ est de ce type. Il en va en particulier ainsi de la fonction définie sur le carré $[0,1]^2$ par $f(x,y) = \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(x)\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(y)(1/q_x + 1/q_y)$ où q_x désigne le dénominateur de x si $x \in \mathbb{Q}$ et l'on convient que $q_x = \infty$ si $x \notin \mathbb{Q}$. On vérifie facilement (mais il est instructif d'écrire les détails !) que f est continue en tout couple $(x,y) \in (\mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q})^2$ et que le complémentaire de l'ensemble de ces points est négligeable.

Un autre écueil à éviter concernant la formule (1) consiste à croire que le premier membre est défini dès que le second et le troisième le sont et ont même valeur. Si, par exemple, on pose $E = \{(\alpha + \beta\sqrt{2}, \alpha - \beta\sqrt{2}) \in [0,1]^2 : \alpha, \beta \in \mathbb{Q}\}$, on vérifie que E est dense dans $[0,1]^2$, et donc que $f(x,y) = \mathbf{1}_E(x,y)$ est partout discontinue. Par conséquent f est non intégrable sur $P = [0,1]^2$. Cependant, pour chaque valeur de x, on a $f(x,y) = 0$ sauf peut-être pour une valeur de y. L'intégrale partielle $\int_0^1 f\,\mathrm{d}y$ est donc bien définie (même au sens de Cauchy) et vaut 0. Il s'ensuit que l'intégrale itérée $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y$ est elle-même bien définie et vaut également 0. Similairement, on a $\int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x = 0$.

Enfin, il faut noter que l'existence de l'une des deux intégrales itérées n'implique pas nécessairement celle de l'autre. Considérons par exemple la fonction f définie sur $[0,1]^2$ par $f(x,y) = \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(x) + 2y\mathbf{1}_{\mathbb{R}\smallsetminus\mathbb{Q}}(x)$. Alors la fonction partielle $y \mapsto f(x,y)$ est affine, donc intégrable, pour chaque valeur de x et l'on a $\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y = 1$, de sorte que $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y = 1$. Cependant, la fonction $x \mapsto f(x,y)$ n'est pas intégrable sur $[0,1]$ si $y \neq \frac{1}{2}$.

A. Warusfel a montré en 1993 que, pour toute fonction bornée, si les deux intégrales itérées existent alors elles sont égales.

Le théorème suivant montre que la relation (1) est satisfaite dès que les trois membres sont définis. Nous désignons respectivement par f_x et f_y les fonctions partielles $y \mapsto f(x,y)$ et $x \mapsto f(x,y)$.

Théorème 2.2. *Soit $P = [a,b] \times [c,d]$ un pavé fermé borné de $\mathbb{R}^2$ et $f \in \mathcal{R}(P)$ une fonction telle que*

$$(\forall x \in [a,b]) \quad f_x \in \mathcal{R}[c,d], \qquad (\forall y \in [c,d]) \quad f_y \in \mathcal{R}[a,b].$$

Alors la relation (1) *a lieu.*

Ce résultat est en fait une conséquence de la proposition suivante.

Proposition 2.3. *Soit $f \in \mathcal{R}(P)$. Alors les fonctions $x \mapsto \underline{\int_c^d} f\,\mathrm{d}y$ et $x \mapsto \overline{\int_c^d} f\,\mathrm{d}y$ sont dans $\mathcal{R}[a,b]$, les fonctions $y \mapsto \underline{\int_a^b} f\,\mathrm{d}x$ et $y \mapsto \overline{\int_a^b} f\,\mathrm{d}x$ sont dans $\mathcal{R}[c,d]$, et l'on a*

$$\iint_P f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x \underline{\int_c^d} f\,\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x \overline{\int_c^d} f\,\mathrm{d}y = \int_c^d \mathrm{d}y \underline{\int_a^b} f\,\mathrm{d}x = \int_c^d \mathrm{d}y \overline{\int_a^b} f\,\mathrm{d}x.$$

Pour la démonstration de ce résultat, nous ferons appel à deux lemmes.

Lemme 2.4. *L'intégrale de Riemann supérieure et l'intégrale de Riemann inférieure en dimension 1 satisfont à la relation de Chasles.*

Démonstration. Montrons par exemple que l'on a pour toute fonction $f \in B[a,b]$

$$\underline{\int_a^b} f\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^c} f\,\mathrm{d}x + \underline{\int_c^b} f\,\mathrm{d}x \qquad (a \leqslant c \leqslant b).$$

A cette fin, nous utilisons le Théorème I.5.2 sous la forme

$$\underline{\int_a^b} f\,\mathrm{d}x = \sup_{g \leqslant f,\, g \in Esc[a,b]} \int_a^b g\,\mathrm{d}x. \tag{2}$$

À tout couple $(g_1, g_2) \in Esc[a,c] \times Esc[c,b]$ on peut associer une fonction $g \in Esc[a,b]$ définie par $g(x) = g_1(x)$ si $x \in [a,c[$ et $g(x) = g_2(x)$ si $x \in [c,b]$. On a clairement

$$\int_a^b g\,\mathrm{d}x = \int_a^b g_1\,\mathrm{d}x + \int_a^b g_2\,\mathrm{d}x,$$

d'où

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \sup_{g_1 \leqslant f,\, g_1 \in Esc[a,c]} \int_a^c g_1\,\mathrm{d}x + \sup_{g_2 \leqslant f,\, g_2 \in Esc[c,b]} \int_c^b g_2\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^c} f\,\mathrm{d}x + \underline{\int_c^b} f\,\mathrm{d}x.$$

Pour montrer l'inégalité inverse, on considère $g \in Esc[a,b]$ telle que $g \leqslant f$ et on introduit les restrictions respectives g_1 et g_2 de g à $[a,c]$ et $[c,b]$. On a alors

$$\int_a^b g\,\mathrm{d}x = \int_a^c g_1\,\mathrm{d}x + \int_c^b g_2\,\mathrm{d}x \leqslant \underline{\int_a^c} f\,\mathrm{d}x + \underline{\int_c^b} f\,\mathrm{d}x,$$

ce qui achève la démonstration.

Lemme 2.5. *Pour $f, g \in B[a,b]$, on a*

$$\overline{\int_a^b} (f+g)\,\mathrm{d}x \leqslant \overline{\int_a^b} f\,\mathrm{d}x + \overline{\int_a^b} g\,\mathrm{d}x,$$
$$\underline{\int_a^b} (f+g)\,\mathrm{d}x \geqslant \underline{\int_a^b} f\,\mathrm{d}x + \underline{\int_a^b} g\,\mathrm{d}x.$$

Remarque. Il est important de noter qu'il n'y a pas égalité en général. Si, par exemple, on choisit $f = -g = \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ sur $[0,1]$, la première inégalité se lit : $0 \leqslant 1 + 0$.

Démonstration. Les deux inégalités sont équivalentes, quitte à changer le signe des deux fonctions. Montrons la seconde. Pour tout couple $(h,k) \in Esc[a,b]^2$ tel que $h \leqslant f$, $k \leqslant g$ on a $h + k \in Esc[a,b]$ et $h + k \leqslant f + g$, d'où

$$\underline{\int_a^b} (f+g)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b (h+k)\,\mathrm{d}x = \int_a^b h\,\mathrm{d}x + \int_a^b k\,\mathrm{d}x.$$

Le résultat requis s'obtient alors en prenant le supremum du membre de droite sur h et k indépendamment.

Nous sommes maintenant en mesure d'achever la démonstration de la Proposition 2.3. Posons $F(x) = \underline{\int_c^d} f(x,y)\,\mathrm{d}y$, et considérons une subdivision σ de P. Par le lemme 2.4, on peut écrire

$$F(x) = \sum_{0\leqslant j<n} \underline{\int_{y_j}^{y_{j+1}}} f\,\mathrm{d}y.$$

Grâce au lemme 2.5, il suit

$$\underline{\int_a^b} F(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \sum_{0\leqslant j<n} \underline{\int_a^b} \mathrm{d}x \underline{\int_{y_j}^{y_{j+1}}} f(x,y)\,\mathrm{d}y = \sum_{0\leqslant i<m}\sum_{0\leqslant j<n} \underline{\int_{x_i}^{x_{i+1}}} \mathrm{d}x \underline{\int_{y_j}^{y_{j+1}}} f(x,y)\,\mathrm{d}y,$$

où l'égalité découle d'une nouvelle application du lemme 2.4. Comme l'on a $f(x,y) \geqslant m_{ij}$ pour $x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}$, $y_j \leqslant y \leqslant y_{j+1}$, le terme général de la somme double est au moins égal à $m_{ij}\delta_i\eta_j$, d'où

$$\underline{\int_a^b} F(x)\,\mathrm{d}x \geqslant s_\sigma(f).$$

On montre semblablement que

$$\overline{\int_a^b} F(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{0\leqslant j<n} \overline{\int_a^b} \mathrm{d}x \underline{\int_{y_j}^{y_{j+1}}} f(x,y)\,\mathrm{d}y = \sum_{0\leqslant i<m}\sum_{0\leqslant j<n} \overline{\int_{x_i}^{x_{i+1}}} \mathrm{d}x \underline{\int_{y_j}^{y_{j+1}}} f(x,y)\,\mathrm{d}y,$$

d'où, en majorant le terme général de la somme double par $M_{ij}\delta_i\eta_j$,

$$s_\sigma(f) \leqslant \underline{\int_a^b} F(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \overline{\int_a^b} F(x)\,\mathrm{d}x \leqslant S_\sigma(f).$$

En faisant alors tendre $\|\sigma\|$ vers 0, on obtient que $F \in \mathcal{R}[a,b]$ et que la première des quatre égalités de la proposition est vérifiée. On procède symétriquement pour les trois autres.

3. Changements de variables

Rappelons d'abord l'énoncé relatif au cas d'une seule variable.

Théorème 3.1. *Soit $f \in \mathcal{R}[a,b]$, et $\varphi : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ une bijection monotone de classe C^1. On a*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)|\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration. Supposons par exemple φ croissante. Il suffit de prouver la formule lorsque f est continue. En effet, supposant ce cas traité, en choisissant deux fonctions continues g, G telles que $g \leqslant f \leqslant G$ et $\int_a^b (G-g)\,\mathrm{d}x \leqslant \varepsilon$, on a par le Théorème I.5.2

$$\underline{\int_\alpha^\beta} f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_\alpha^\beta G\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b f\,\mathrm{d}x + \varepsilon,$$

et symétriquement

$$\overline{\int_\alpha^\beta} f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \int_\alpha^\beta g\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \int_a^b f\,\mathrm{d}x - \varepsilon.$$

On en déduit immédiatement le résultat en faisant tendre ε vers 0.

Lorsque f est continue le théorème de dérivation des fonctions composées nous permet d'affirmer que, notant ψ l'application réciproque de φ, la fonction

$$F(x) := \int_\alpha^{\psi(x)} f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

est l'unique primitive de f sur $[a,b]$ s'annulant en $x = a$. On a donc en particulier $F(b) = \int_a^b f\,\mathrm{d}x$. Cela achève la démonstration.

Nous admettons l'extension suivante du Théorème 3.1.

Théorème 3.2. *Soit P un pavé borné de $\mathbb{R}^2$ et $f : P \to \mathbb{R}$ une fonction Riemann-intégrable. Soit $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^2$ une fonction définie et de classe C^1 sur une partie Ω de $\mathbb{R}^2$ telle que $P \subset g(\Omega)$ et telle que la restriction de φ à $\Delta = \varphi^{-1}(P)$ soit bijective. On pose $\varphi(u,v) = \big(\xi(u,v), \eta(u,v)\big)$. On suppose de plus que le jacobien*

$$J_\varphi(u,v) = \begin{vmatrix} \partial\xi/\partial u & \partial\xi/\partial v \\ \partial\eta/\partial u & \partial\eta/\partial v \end{vmatrix}$$

ne s'annule pas sur Δ. Alors on a

$$\int_P f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_\Delta f \circ \varphi(u,v) |J_\varphi(u,v)|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

En pratique, il arrive que $|J_\varphi|$ s'annule en certains points situés à la frontière du domaine Δ. On montre alors par un passage à la limite que la formule du changement de variable reste valable.

4. Intégrale double généralisée

Comme dans le cas de l'intégrale des fonctions d'une variable, on souhaite prolonger la définition au cas de fonctions non bornées ou de domaines non bornés. Les deux cas se ramènent l'un à l'autre par changement de variables, et nous nous contenterons d'examiner ici le second.

Soit donc un pavé non borné $P = [a,+\infty[\times[c,+\infty[$. Contrairement au cas d'une seule variable, il n'y a pas ici de notion satisfaisante d'intégrale semi-convergente. Lorsque l'on écrit P sous la forme $P = \cup_{n=1}^{\infty} D_n$ où $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ est une suite croissante de domaines bornés, le comportement asymptotique lorsque $n \to +\infty$ de $\int_{D_n} f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ dépend en général de la suite $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ choisie. Un exemple classique, dû à Cayley, d'une telle situation est fourni par l'intégrale de $f(x,y) = \sin(x^2+y^2)$ sur le premier quadrant $[0,+\infty[^2$. Il est facile de vérifier d'une part, en décomposant $\sin(x^2+y^2) = \sin x^2 \cos y^2 + \cos x^2 \sin y^2$, que l'on a

$$\lim_{n\to+\infty} \iint_{[0,n]^2} \sin(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \tfrac{1}{2} \int_0^\infty \sin t \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} \int_0^\infty \cos t \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} \Big(= \frac{\pi}{4}\Big),$$

et d'autre part, en utilisant les coordonnées polaires, que

$$\iint_{\{x^2+y^2 \leqslant n^2\}} \sin(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{\pi}{4}(1-\cos n^2)$$

n'a pas de limite lorsque $n \to +\infty$.

Ces considérations justifient le fait qu'*en dimension supérieure à un la seule notion retenue de convergence d'une intégrale généralisée soit celle de l'absolue convergence.*

Théorème et définition 4.1. *Soit $P = [a,+\infty[\times[c,+\infty[$ un pavé non borné et $f : P \to \mathbb{R}$. Si f est intégrable sur tout sous-pavé borné $P(b,d) = [a,b] \times [c,d]$ et si les nombres*

$$\iint_{P(b,d)} |f(x,y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \qquad (b > a,\ d > c)$$

sont uniformément bornés, la limite

$$I = \lim_{\substack{b\to+\infty \\ d\to+\infty}} \iint_{P(b,d)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

existe. On dit alors que f est intégrable sur P et que I est l'intégrale de f sur P. On note

$$\iint_P f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_P f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = I.$$

La démonstration est facile, et repose sur la décomposition $f = f^+ - f^-$, avec $f^\pm = \max(\pm f, 0)$, de sorte que $|f| = f^+ + f^-$. Nous omettons les détails.

Le Théorème 4.2 ci-dessous fournit une condition suffisante assez simple pour que l'intégrale double sur un pavé non borné soit définie, et calculable par intégrations successives. La démonstration nécessite le théorème de convergence monotone pour les fonctions Riemann-intégrables — cf. Théorème I.7.2.

Théorème 4.2. *Soit $P = [a, +\infty[\times[c, +\infty[$ et f une fonction intégrable sur tout sous-pavé borné $P(b,d) = [a,b] \times [c,d]$ telle que les intégrales partielles*

$$F^\pm(x) = \int_c^\infty f^\pm(x,y)\,\mathrm{d}y, \quad G^\pm(y) = \int_a^\infty f^\pm(x,y)\,\mathrm{d}x$$

soient convergentes en tout point, et Riemann-intégrables sur tout sous-intervalle borné de $[a,\infty[$ et $[c,\infty[$ respectivement. Si, de plus, l'une des quantités

$$\int_a^\infty \mathrm{d}x \int_c^\infty |f(x,y)|\,\mathrm{d}y, \quad \int_c^\infty \mathrm{d}y \int_a^\infty |f(x,y)|\,\mathrm{d}x$$

est finie, alors f est intégrable sur P et l'intégrale $\int_P f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ peut être calculée par intégrations successives.

Démonstration. Supposons d'abord $f \geqslant 0$, et, par exemple,

$$I_1 = \int_a^\infty \mathrm{d}x \int_c^\infty f(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_a^\infty F(x)\,\mathrm{d}x < \infty. \tag{3}$$

Pour tout couple $(b,d) \in P$, on a $f \in \mathcal{R}(P(b,d))$ et, par hypothèse, les fonctions partielles f_x, f_y sont intégrables pour tout $x \in [a,b]$ et tout $y \in [c,d]$. Par le Théorème 2.2, cela implique que l'intégrale de f sur $P(b,d)$ peut être calculée par intégrations successives, soit

$$\int_{P(b,d)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x \int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y \leqslant \int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x \leqslant I_1.$$

Cette borne étant indépendante de b et d, le Théorème 4.1 montre que f est intégrable sur P. Posons $F_d(x) = \int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y$. On a $F_d \in \mathcal{R}[a,b]$ pour tout $b > 0$ et, lorsque $d \to \infty$, F_d tend en croissant vers F, qui possède une intégrale de Riemann généralisée, égale à I_1, sur $[a,\infty[$. Cela implique que F_d possède également une intégrale généralisée sur $[a,\infty[$ et, par le théorème convergence monotone (I.7.2), il suit

$$\lim_{d\to\infty} \int_a^\infty F_d(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^\infty F(x)\,\mathrm{d}x = I_1. \tag{4}$$

Maintenant, on a pour tout $(b,d) \in P$

$$\begin{aligned}
0 \leqslant I_1 - \int_{P(b,d)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_a^\infty \mathrm{d}x \int_c^\infty f(x,y)\,\mathrm{d}y - \int_a^b \mathrm{d}x \int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y \\
&= \int_a^b \mathrm{d}x \int_c^\infty f(x,y)\,\mathrm{d}y + \int_b^\infty \mathrm{d}x \int_c^\infty f(x,y)\,\mathrm{d}y - \int_a^b \mathrm{d}x \int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y \\
&= \int_a^b \big(F(x) - F_d(x)\big)\,\mathrm{d}x + \int_b^\infty F(x)\,\mathrm{d}x \\
&\leqslant \int_a^\infty \big(F(x) - F_d(x)\big)\,\mathrm{d}x + \int_b^\infty F(x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Par (4) et (3), cette majoration est aussi petite que l'on veut si b et d sont assez grands. On a donc

$$\int_P f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \lim_{\substack{b\to\infty\\ d\to\infty}} \int_{P(b,d)} f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = I_1. \tag{5}$$

Considérons maintenant la famille de fonctions

$$G_b(y) = \int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x \qquad (b > a).$$

Par la proposition 2.3, $G_b \in \mathcal{R}[c,d]$ pour tout $d \geqslant c$ et, lorsque $b \to \infty$, G_b tend en croissant vers $G \in \mathcal{R}[c,d]$. Le Théorème 2.2 implique donc

$$\int_{P(b,d)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_c^d G_b(y)\,\mathrm{d}y \leqslant \int_P f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = I_1.$$

En faisant tendre d vers l'infini, on voit que G_b possède une intégrale de Riemann généralisée sur $[c,\infty[$. De plus, en appliquant, à d fixé, le théorème de la convergence monotone aux fonctions $G_b \cdot \mathbf{1}_{[c,d]}$ convergeant vers $G \cdot \mathbf{1}_{[c,d]}$, on voit que

$$\int_c^d G(y)\,\mathrm{d}y = \lim_{b\to\infty} \int_c^d G_b(y)\,\mathrm{d}y \leqslant I_1.$$

Cela implique que G possède une intégrale de Riemann généralisée sur $[c,\infty[$

$$I_2 = \int_c^\infty G(y)\,\mathrm{d}y \leqslant I_1.$$

Nous avons donc établi la condition symétrique de (3) obtenue en inversant les rôles des variables x et y. Le raisonnement qui nous a conduit à (5) fournit donc maintenant que

$$\int_P f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = I_2.$$

Ainsi $I_1 = I_2$, et le théorème est démontré dans le cas $f \geqslant 0$.

Pour les fonctions qui ne sont pas de signe constant, on applique le résultat précédent aux fonctions positives ou nulles f^+, f^-, pour lesquelles il est immédiat de vérifier que les hypothèses sont satisfaites. Le résultat attendu découle alors, par linéarité, de la formule $f = f^+ - f^-$.

Les hypothèses du théorème sont relativement fortes dans la mesure où elles nécessitent des renseignements sur l'intégrabilité des fonctions $F^\pm$, $G^\pm$. Cela est dû aux limitations de l'intégrale de Riemann : même pour $f \geqslant 0$, il n'est pas possible en général de déduire l'intégrabilité de $x \mapsto \int_c^\infty f(x,y)\,\mathrm{d}y$ du simple fait que $\int_a^\infty \mathrm{d}x \int_c^\infty f\,\mathrm{d}y < \infty$. Nous verrons que ces difficultés disparaîtront avec l'intégrale de Lebesgue.

En pratique, le fait que $F^\pm$, $G^\pm$ soient intégrables sur tout intervalle borné découle souvent de la convergence uniforme sur tout compact de ces intégrales.

Université de Lorraine
Faculté des sciences et technologies
Licence de mathématiques 1994/95
Calcul intégral et théorie de la mesure
Gérald Tenenbaum

Exercices sur l'intégrale double

33. Calculer l'intégrale double $\iint_{\mathcal{T}}(x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ où $\mathcal{T}$ est le domaine triangulaire $\{(x,y)\in[0,1]^2 : x\leqslant y\leqslant 1\}$.

34. Calculer l'intégrale double $\displaystyle\iint_{[0,1]^2}\frac{x^2}{1+x^2y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$

35. Calculer l'intégrale double $\iint_S e^{x/y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, où S est le triangle curviligne limité par la parabole $y^2=x$ et les droites $x=0$, $y=1$.

36. Soit $\mathcal{D}$ le demi-cercle supérieur de centre $(a,0)$ et de rayon a. En utilisant les coordonnées polaires, calculer l'intégrale double $\iint_{\mathcal{D}} y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

37. Soit $f(x,y)$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(0,0)=0$, et $f(x,y)=(x^2-y^2)/(x^2+y^2)^2$ si $(x,y)\neq(0,0)$. Calculer les intégrales de Riemann

$$F(x)=\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y\quad(0<x\leqslant 1),\qquad G(y)=\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x\quad(0<y\leqslant 1).$$

Établir la convergence et calculer la valeur des intégrales généralisées

$$\int_0^1 F(x)\,\mathrm{d}x,\quad \int_0^1 G(y)\,\mathrm{d}y.$$

En comparant les valeurs obtenues, montrer que f ne possède pas d'intégrale généralisée sur $[0,1]^2$. Retrouver cette propriété en établissant que les intégrales de $|f|$ sur $[\varepsilon,1]^2$ ne sont pas bornées lorsque $\varepsilon\to 0$.

38. Effectuer le changement de variables $u=x+y$, $v=x-y$ dans l'intégrale double $\iint_{[0,1]^2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

39. Soit $\mathcal{R}$ la région du quadrant $x\geqslant 0, y\geqslant 0$ limitée par les courbes $y-x=0$, $y^2-x^2=1$, $xy=a$, $xy=b$, où a,b sont deux paramètres tels que $0<a\leqslant b$. Calculer l'intégrale double

$$\int_{\mathcal{R}}(y^2-x^2)^{xy}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

en utilisant un changement de variables qui transforme $\mathcal{R}$ en rectangle.

40. Pour tout $y > 0$, calculer l'intégrale double $\iint_D e^{-xt} \sin x \,\mathrm{d}t \,\mathrm{d}x$ de deux manières différentes, où D est le domaine défini par $0 \leqslant x \leqslant y$, $t \geqslant 0$. En déduire la valeur de $I = \int_0^\infty (\sin t/t)\,\mathrm{d}t$.

41. Soit $\mathcal{E}$ l'intérieur de l'ellipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1 \quad (a > 0,\, b > 0)$. Calculer l'intégrale double

$$\iint_{\mathcal{E}} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

en utilisant le changement de variables $x = ar\cos\vartheta$, $y = br\sin\vartheta$.

42. Soit D le domaine de $\mathbb{R}^3$ défini par les inégalités $0 < x < 1$, $x < y < 2$, $-x < z < y$. Montrer que la fonction f définie par $f(x, y, z) = z/y^2$ possède une intégrale généralisée convergente sur D. Calculer sa valeur par intégrations successives selon l'ordre y, x, z, puis selon l'ordre z, y, x.

43. Soit $f(x, y) = x/(1 + x^2y^2)$. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$ mais que l'intégrale partielle $F(x) = \int_0^{+\infty} f(x, y)\,\mathrm{d}y$ n'est pas une fonction continue de x sur $\mathbb{R}$.

44. Soient a, b des nombres réels tels que $0 < a < b$ et D le domaine de $\mathbb{R}^2$ défini par les conditions $0 < x < 1$, $a < y < b$. En considérant l'intégrale double $\int\int_D x^y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, établir la formule $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\log x}\,\mathrm{d}x = \log\frac{1+b}{1+a}$.

45. Établir la formule $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\log x}{x^2 - 1}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{4}$ en considérant l'intégrale double $\int\int (1 + y)^{-1}(1 + x^2y)^{-1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ étendue au premier quadrant de $\mathbb{R}^2$.

46. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}^+$ une fonction Riemann-intégrable, d'intégrale I, telle que $1/f$ soit également Riemann-intégrable, d'intégrale J.

En considérant $\int\int_{[a,b]^2} f(x)f(y)^{-1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ et l'intégrale analogue obtenue en permutant les rôles de x et y, montrer que l'on a $IJ \geqslant (b - a)^2$.

47. Soit V l'endomorphisme de $\mathcal{R}[a, b]$ défini par $Vf(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ $(x \in [a, b])$. Montrer que $V^{n+1}f(x) = (1/n!)\int_a^x (x - t)^n f(t)\,\mathrm{d}t$. pour tout entier $n \geqslant 1$.

48. 1) Soit $I = \int_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$. Montrer que

$$I^2 = \lim_{R\to+\infty} \iint_{A(R)} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

où l'on a posé $A(R) = \{(x, y) \in [0, R]^2 : x^2 + y^2 \leqslant R^2\}$. En déduire la valeur de I en utilisant le changement de variables des coordonnées polaires. Comparer avec le résultat obtenu à l'exercice 29.

2) Calculer

$$I_n = \int_0^\infty x^{2n} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

par récurrence sur l'entier naturel n.

3) Pour $t \in \mathbb{R}$, calculer la valeur de l'intégrale

$$F(t) = \int_0^\infty e^{-x^2} \cos(2tx)\,\mathrm{d}x$$

en développant le cosinus en série entière et en justifiant l'intégration terme à terme.

4) Pour $z \in \mathbb{R}^+$, calculer l'intégrale

$$G(z) = \int_0^\infty e^{-x^2 - z^2/x^2}\,\mathrm{d}x$$

grâce au changement de variables défini par $w = x - z/x$. $\big[$On écrira $\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(1 + h(w))\,\mathrm{d}w$ et on montrera par un argument simple que la contribution de $h(w)$ à l'intégrale à calculer est nulle.$\big]$

5) Montrer que, pour $m \in \mathbb{R}$, l'intégrale double

$$\iint_{[0,+\infty[^2} y e^{-y^2(1+x^2)} \cos(2mx)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

peut être calculée par intégrations successives.

6) En utilisant les résultats des trois questions précédentes, calculer l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{\cos(2mx)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \qquad (m \in \mathbb{R}).$$

49. *Intégration par parties.*

Soient $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$. On pose $F(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$, $G(x) := \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$, et

$$E := \{(t,x) \in [a,b]^2 : t \leqslant x\}, \qquad \Phi(t,x) := f(x)g(t)\mathbf{1}_E(t,x).$$

1) Montrer que $\Phi \in \mathcal{R}[a,b]^2$.

2) Établir la formule d'intégration par parties

$$\int_a^b F(x)g(x)\,\mathrm{d}x = F(b)G(b) - \int_a^b f(x)G(x)\,\mathrm{d}x.$$

50. *Le théorème de Warusfel.*

Soit $P = [a,b] \times [c,d]$ et $f : P \to [-M, M]$ une fonction de deux variables dont les fonctions partielles sont intégrables point par point. On pose

$$F(x) := \int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y, \qquad G(y) := \int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

On se propose ici de démontrer le théorème de Warusfel (1993) : sous les hypothèses précédentes, on a $F \in \mathcal{R}[a,b]$, $G \in \mathcal{R}[c,d]$ et $\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x = \int_c^d G(y)\,\mathrm{d}y$.

1) Soit $\sigma = \{x_j\}_{j=0}^n$ une subdivision de $[a,b]$. On pose pour $y \in [c,d]$

$$\varepsilon_j(y) := \sup_{x_j \leqslant x \leqslant x_{j+1}} f(x,y) - \inf_{x_j \leqslant x \leqslant x_{j+1}} f(x,y), \quad H_\sigma(y) = \sum_{0 \leqslant j < n} \varepsilon_j(y)(x_{j+1} - x_j).$$

Montrer que pour tous $x, x' \in [x_j, x_{j+1}]$, on a $|F(x) - F(x')| \leqslant \underline{\int_c^d} \varepsilon_j(y)\,\mathrm{d}y$. En déduire que

$$D_\sigma(F) = S_\sigma(F) - s_\sigma(F) \leqslant \underline{\int_c^d} H_\sigma(y)\,\mathrm{d}y.$$

2) Montrer que $\lim_{\|\sigma\|\to 0} H_\sigma(y) = 0$ pour tout $y \in [c, d]$. En déduire, grâce à la Proposition I.6.5 du cours, que $\lim_{\|\sigma\|\to 0} \underline{\int_c^d} H_\sigma(y)\,\mathrm{d}y = 0$ et donc que $F \in \mathcal{R}[a, b]$. Montrer similairement que $G \in \mathcal{R}[c, d]$.

3) Soit $n \geqslant 1$, $\xi_j := a + j(b-a)/n$ $(0 \leqslant j \leqslant n)$ et $G_n(y) = ((b-a)/n) \sum_{0 \leqslant j < n} f(\xi_j, y)$. Montrer que $\{G_n\}_{n=1}^\infty$ est une suite bornée de fonctions de $\mathcal{R}[c, d]$ qui converge simplement vers G. Exprimer $\int_c^d G_n(y)\,\mathrm{d}y$ comme une somme de Riemann relative à F. Conclure en appliquant le théorème d'Arzelà.

51. *Intégrales de Fresnel.* 1) On pose pour $t > 0$, $j = 1, 2$,

$$F_j(t) = \int_0^\infty e^{-tx^j} \sin(x^j)\,\mathrm{d}x, \qquad G_j(t) = \int_0^\infty e^{-tx^j} \cos(x^j)\,\mathrm{d}x.$$

Expliquer pourquoi ces intégrales sont convergentes. Trouver une relation simple entre $F_1(t)$ et $G_1(t)$, puis calculer explicitement ces deux fonctions.

2) Soient $f_t(x, y) = e^{-t(x^2+y^2)} \sin(x^2 + y^2)$, $\quad g_t(x, y) = e^{-t(x^2+y^2)} \cos(x^2 + y^2)$. Montrer que f_t et g_t sont, pour tout $t > 0$, intégrables au sens de Riemann sur le premier quadrant $P =]0, \infty[^2$. Calculer, en fonction de $F_2(t)$ et $G_2(t)$, les intégrales doubles

$$A(t) = \int_P f_t(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \quad B(t) = \int_P g_t(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

en les écrivant comme limites lorsque $X \to \infty$ d'intégrales sur $P(X) =]0, X]^2$ et en développant $\sin(x^2 + y^2)$ et $\cos(x^2 + y^2)$.

3) Effectuer le changement de variables défini par

$$x = \sqrt{r} \cos\vartheta, \quad y = \sqrt{r} \sin\vartheta \qquad (0 < \vartheta < \pi/2,\ r > 0)$$

dans $A(t)$ et $B(t)$. Exprimer $A(t)$ et $B(t)$ en fonction de $F_1(t)$ et $G_1(t)$.

4) Étudier la convergence des intégrales de Fresnel

$$F = \int_0^\infty \sin(x^2)\,\mathrm{d}x, \qquad G = \int_0^\infty \cos(y^2)\,\mathrm{d}y.$$

5) Montrer que l'on a pour tout $X > 0$

$$\left| F_2(t) - \int_0^X e^{-tx^2} \sin(x^2)\,\mathrm{d}x \right| \leqslant 1/X,$$

et établir une relation similaire pour $G_2(t)$. En déduire que $F_2(0+) = F$, $G_2(0+) = G$.

6) Calculer F et G.

Université de Lorraine
Faculté des sciences et technologies
Licence de mathématiques 1994/95
Calcul intégral et théorie de la mesure
Gérald Tenenbaum

III

Intégrale de Lebesgue (résumé)

1. Motivation et définition

L'espace $\mathcal{R}[a,b]$ des fonctions Riemann-intégrables sur un intervalle borné n'est pas "complet" dans le sens où une suite bornée $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ de fonctions intégrables qui est simplement convergente ne converge pas nécessairement vers une fonction intégrable. Nous avons vu que cela engendrait des difficultés pour les hypothèses des théorèmes de calcul d'intégrales doubles par intégrations successives. On se propose maintenant de construire une intégrale plus générale (définie essentiellement pour toute fonction bornée), qui conserve les principales propriétés de l'intégrale de Riemann (forme linéaire continue positive) et dont l'espace des fonctions intégrables soit complet au sens précédent — et d'ailleurs aussi au sens classique !

L'idée de base de la théorie peut être facilement expliquée. Alors que l'intégrale de Cauchy est définie en *approchant uniformément* une fonction f par une fonction en escalier, et que l'intégrale de Riemann est définie en *encadrant* f par des fonctions en escalier (dont la différence n'est pas nécessairement petite mais dont la différence des intégrales l'est), l'intégrale de Lebesgue est définie en *encadrant presque partout* f par des limites monotones de fonctions en escalier dont les intégrales sont proches.

Sauf mention contraire, nous ne considérons dans ce qui suit que des fonctions à valeurs réelles. Cette restriction ne correspond qu'à un souci de simplicité d'exposition, et la quasi-totalité des résultats s'étend de manière évidente au cas de fonctions complexes.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, borné ou non. Nous désignons par $Esc_0(I)$ l'ensemble des fonctions en escalier sur I et à support compact. Si I est borné, on a $Esc_0(I) = Esc(I)$. Notre construction de l'intégrale de Lebesgue repose sur les deux lemmes suivants.

Lemme A. *Soit $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite décroissante de fonctions de $Esc_0(I)$ convergeant presque partout vers 0. Alors $\int_I \varphi_n \,\mathrm{d}x$ tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$.*

Démonstration. Pour chaque entier n, on a $\varphi_n \geqslant 0$ pp. Comme φ_n est en escalier, on en déduit que $\int_I \varphi_n \,\mathrm{d}x \geqslant 0$. Nous allons montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$ fixé, on a

$$\int_I \varphi_n \,\mathrm{d}x < \varepsilon$$

pour n assez grand, ce qui implique pleinement le résultat annoncé. Soit E_n l'ensemble (fini) des points de discontinuité de φ_n et $E = \{x \in I : \varphi_n(x) \not\to 0\} \cup \cup_{n=1}^{\infty} E_n$. Alors E est négligeable, en tant que réunion dénombrable d'ensembles négligeables. Il existe donc une réunion dénombrable $\cup_{j\in\mathcal{J}}]a_j, b_j[$ d'intervalles ouverts recouvrant E et telle que $\sum_{j\in\mathcal{J}}(b_j - a_j) < \frac{1}{2}\varepsilon/M$, avec $M = \sup_{x\in\mathbb{R}} \varphi_1(x)$. Considérons alors un intervalle borné $[a,b]$ contenant le support de φ_1, de sorte que, si $x \notin [a,b]$, on a $\varphi_n(x) \leqslant 0$ pour tout n.

Pour tout $x \in [a,b] \setminus E$, $\varphi_n(x)$ tend en décroissant vers 0. Il existe donc un indice $n(x)$ tel que

$$0 \leqslant \varphi_{n(x)}(x) \leqslant \tfrac{1}{2}\varepsilon/(b-a).$$

De plus, comme $\varphi_{n(x)}$ est constante au voisinage de $x \notin E_{n(x)}$, il existe un $\delta(x) > 0$ tel que $\sup_{|x-y|\leqslant\delta(x)} \varphi_{n(x)}(y) \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon/(b-a)$. On a clairement

$$[a,b] \subset \bigcup_{j\in\mathcal{J}}]a_j, b_j[\cup \bigcup_{x\in[a,b]\setminus E}]x-\delta(x), x+\delta(x)[.$$

Par le théorème de Borel-Lebesgue, on peut extraire un sous-recouvrement fini

$$[a,b] \subset \bigcup_{k=1}^{K}]a_{j_k}, b_{j_k}[\cup \bigcup_{r=1}^{R}]x_r-\delta(x_r), x_r+\delta(x_r)[.$$

Soit $\{z_h\}_{h=1}^{H}$ la suite ordonnée composée des points a et b et de tous les points-limites $a_{j_k}, b_{j_k}, x_r \pm \delta(x_r)$ qui sont dans $[a,b]$. Alors, chaque intervalle $]z_h, z_{h+1}[$ $(1 \leqslant h < H)$ est contenu soit dans un $]a_{j_k}, b_{j_k}[$, et nous désignons par $\mathcal{H}_1$ l'ensemble de ces indices, soit dans un $]x_r-\delta(x_r), x_r+\delta(x_r)[$. Si $n \geqslant \max_{1\leqslant r\leqslant R} n(x_r)$ et $h \in \mathcal{H}_2 = [1, H[\setminus \mathcal{H}_1$, on a $\sup_{z_h<x<z_{h+1}} \varphi_n(x) \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon/(b-a)$. On a donc pour ces valeurs de n

$$\begin{aligned}
\int_I \varphi_n(x)\,\mathrm{d}x &\leqslant \sum_{1\leqslant h<H} \int_{z_h}^{z_{h+1}} \varphi_n(x)\,\mathrm{d}x \\
&\leqslant \sum_{h\in\mathcal{H}_1} \int_{z_h}^{z_{h+1}} M\,\mathrm{d}x + \sum_{h\in\mathcal{H}_2} \int_{z_h}^{z_{h+1}} \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\,\mathrm{d}x \\
&\leqslant M \sum_{h\in\mathcal{H}_1} (z_{h+1}-z_h) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum_{h\in\mathcal{H}_2} (z_{h+1}-z_h) \\
&\leqslant M \sum_{j\in\mathcal{J}} (b_j-a_j) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Cela achève la démonstration.

Lemme B. *Soit $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite croissante de fonctions de $Esc_0(I)$ telle que*

$$\sup_{n\geqslant 1} \int_I \varphi_n(x)\,\mathrm{d}x < \infty.$$

Alors, il existe une fonction f telle que $\varphi_n(x) \to f(x)$ pp, *et, pour toute suite croissante $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ de fonctions de $Esc_0(I)$ convergeant* pp *vers f, on a*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_I \varphi_n(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \int_I \psi_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

Démonstration. Quitte à raisonner sur $\varphi_n - \varphi_1$, on peut supposer $\varphi_n \geqslant 0$. Soit E l'ensemble des $x \in I$ tels que $\varphi_n(x) \to \infty$. Posant, pour tout entier $p \geqslant 1$,

$$E_{pn} = \varphi_n^{-1}(]p, \infty[) = \{x \in I : \varphi_n(x) > p\},$$

on a $E = \cap_{p=1}^{\infty} \cup_{n=1}^{\infty} E_{pn}$. On note immédiatement que, puisque la suite $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ est croissante, il en va de même de la suite $\{E_{pn}\}_{n=1}^{\infty}$. Maintenant, chaque E_{pn} est la réunion d'un ensemble fini de points (inclus dans l'ensemble des discontinuités de φ_n)

et d'un ensemble fini d'intervalles disjoints, disons $\cup_{1\leqslant j\leqslant J_{pn}}]a_{pnj}, b_{pnj}[$. On peut donc écrire $E(p) = \cup_{n=1}^{\infty} E_{pn}$ sous la forme $E(p) = D \cup \cup_{h=1}^{\infty}]\alpha_h, \beta_h[$, où D est un ensemble dénombrable et où les $]\alpha_h, \beta_h[$ sont des intervalles ouverts deux à deux disjoints tels que $\cup_{h=1}^{\infty}]\alpha_h, \beta_h[= \cup_{n=1}^{\infty} \cup_{1\leqslant j\leqslant J_{pn}}]a_{pnj}, b_{pnj}[$. Considérons alors une sous-famille finie $\{]\alpha_h, \beta_h[: 1 \leqslant h \leqslant H\}$. Ces intervalles peuvent parfaitement être constitués à partir d'une infinité de $]a_{pnj}, b_{pnj}[$. Cependant, tout compact $\cup_{h=1}^{H} [\alpha'_h, \beta'_h]$ avec $[\alpha'_h, \beta'_h] \subset]\alpha_h, \beta_h[$ $(1 \leqslant h \leqslant H)$ peut, grâce au théorème de Borel-Lebesgue, être recouvert par une sous-famille finie des $]a_{pnj}, b_{pnj}[$. Si N est le plus grand des indices n apparaissant dans cette sous-famille, la croissance de la suite $\{E_{pn}\}_{n=1}^{\infty}$ montre que $\cup_{h=1}^{H} [\alpha'_h, \beta'_h] \subset \cup_{j=1}^{J_{pN}}]a_{pNj}, b_{pNj}[\cup F$, où F est un ensemble fini. Or on a

$$\sum_{1\leqslant j\leqslant J_{pN}} p(b_{pNj} - a_{pNj}) \leqslant \int_I \varphi_N(x)\,\mathrm{d}x \leqslant A := \sup_{n\geqslant 1} \int_I \varphi_n(x)\,\mathrm{d}x,$$

d'où $\sum_{1\leqslant h\leqslant H} (\beta'_h - \alpha'_h) \leqslant A/p$. En faisant tendre α'_h vers α_h et β'_h vers β_h, on voit que cette majoration est également valable pour $\sum_{1\leqslant h\leqslant H} (\beta_h - \alpha_h)$, et l'on obtient finalement en faisant tendre H vers l'infini

$$\sum_{h=1}^{\infty} (\beta_h - \alpha_h) \leqslant A/p.$$

En choisissant p arbitrairement grand, on obtient que E est négligeable. Cela établit la première partie du lemme : il suffit de poser

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in E, \\ \lim_{n\to+\infty} \varphi_n(x) & \text{si } x \in I \smallsetminus E. \end{cases}$$

Montrons maintenant la seconde partie de l'énoncé. Soit $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite croissante de fonctions de $Esc_0(I)$ convergeant pp vers f. Alors pour tout entier m fixé, la suite $\{(\psi_m - \varphi_n)^+\}_{n=1}^{\infty}$ est décroissante et converge vers 0 pp. En effet, pour tout x tel que $\psi_n(x) \to f(x)$ et $\varphi_n(x) \to f(x)$, on a $\psi_m(x) \leqslant f(x)$ donc

$$\big(\psi_m(x) - \varphi_n(x)\big) \to \big(\psi_m(x) - f(x)\big) \leqslant 0.$$

Par le lemme A, il s'ensuit que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_I \big(\psi_m(x) - \varphi_n(x)\big)^+ \,\mathrm{d}x = 0.$$

d'où, puisque $\int_I \psi_m \,\mathrm{d}x \leqslant \int_I \varphi_n \,\mathrm{d}x + \int_I \big(\psi_m - \varphi_n\big)^+ \,\mathrm{d}x$,

$$\int_I \psi_m(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \lim_{n\to+\infty} \int_I \varphi_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

En faisant tendre m vers l'infini, il suit

$$\lim_{m\to+\infty} \int_I \psi_m(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \lim_{n\to+\infty} \int_I \varphi_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

Nous pouvons donc appliquer la première partie de l'énoncé à la suite $\{\psi_m\}_{m=1}^{\infty}$. En inversant alors les rôles des suites $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ et $\{\psi_m\}_{m=1}^{\infty}$, on obtient l'inégalité opposée, et la démonstration est complète.

Le lemme B nous permet de définir l'intégrale sur l'ensemble $\mathcal{L}^+(I)$ des fonctions définies sur I et qui sont sur cet intervalle limites pp d'une suite croissante $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ de fonctions de $Esc_0(I)$ telle que $\sup_{n\geqslant 1} \int_I \varphi_n \,\mathrm{d}x < \infty$.

Définition. *Pour toute fonction $f \in \mathcal{L}^+(I)$, on définit l'intégrale de Lebesgue de f sur I par la formule*

$$\int_I f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \int_I \varphi_n(x)\,\mathrm{d}x,$$

où $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ est une suite croissante quelconque de fonctions de $Esc_0(I)$ convergeant pp *vers f et dont la suite des intégrales est bornée.*

Proposition et définition. *On désigne par espace des fonctions intégrables au sens de Lebesgue sur I, et on note $\mathcal{L}^1(I)$, l'ensemble des fonctions $f : I \to \mathbb{R}$ qui sont de la forme $f = f_1 - f_2$ avec $f_1, f_2 \in \mathcal{L}^+(I)$. Pour $f \in \mathcal{L}^1(I)$, le nombre $\int_I f_1\,\mathrm{d}x - \int_I f_2\,\mathrm{d}x$ est indépendant du choix de f_1 et f_2 dans $\mathcal{L}^+(I)$ telles que $f_1 - f_2 = f$. Ce nombre est appelé intégrale de Lebesgue de f, et l'on écrit*

$$\int_I f(x)\,\mathrm{d}x = \int_I f_1(x)\,\mathrm{d}x - \int_I f_2(x)\,\mathrm{d}x.$$

Posons $\mathcal{L}^-(I) = -\mathcal{L}^+(I) = \{f : I \to \mathbb{R} : -f \in \mathcal{L}^+(I)\}$. Alors $\mathcal{L}^-(I)$ est l'ensemble des fonctions définies sur I qui sont sur cet intervalle limites pp d'une suite décroissante $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ de fonctions de $Esc_0(I)$ telle que $\inf_{n\geqslant 1} \int_I \psi_n\,\mathrm{d}x > -\infty$. On peut écrire formellement

$$\mathcal{L}^1(I) = \mathcal{L}^+(I) - \mathcal{L}^+(I) = \mathcal{L}^+(I) + \mathcal{L}^-(I).$$

Il est immédiat à partir de la définition de l'intégrale de Lebesgue que, pour toute fonction $f \in \mathcal{L}^1(I)$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $g \in \mathcal{L}^-(I)$ et $G \in \mathcal{L}^+(I)$ telles que

$$g \leqslant f \leqslant G \quad \text{pp}, \qquad \int_I G\,\mathrm{d}x - \int_I g\,\mathrm{d}x < \varepsilon.$$

Nous verrons plus loin une réciproque de cette propriété.

Avant d'étudier plus avant notre nouvelle notion d'intégrale, montrons qu'elle coïncide avec celle de Riemann pour les fonctions de $\mathcal{R}[a,b]$. Dans la démonstration du résultat suivant, nous ferons usage de la notion de *normalisée* d'une fonction en escalier à support compact. Si $\vartheta \in Esc[a,b]$, la normalisée de ϑ est la fonction ϑ^* de $Esc[a,b]$ définie par $\vartheta^*(x) = \frac{1}{2}\big(\vartheta(x+) + \vartheta(x-)\big)$. Il est facile de constater que l'application $\vartheta \mapsto \vartheta^*$ est linéaire et que $\vartheta \geqslant 0$ pp implique $\vartheta^* \geqslant 0$ partout. En effet, les valeurs $\vartheta(x\pm)$ sont nécessairement prises sur un intervalle ouvert non vide.

Théorème 1.1. *Soit $[a,b]$ un intervalle fermé borné. Alors, $\mathcal{R}[a,b] \subset \mathcal{L}^+[a,b] \cap \mathcal{L}^-[a,b]$ et l'intégrale de Riemann de toute fonction de $\mathcal{R}[a,b]$ est égale à son intégrale de Lebesgue. En particulier, on a $\mathcal{R}[a,b] \subset \mathcal{L}^1[a,b]$*

Réciproquement, si $f \in \mathcal{L}^+[a,b] \cap \mathcal{L}^-[a,b]$, il existe une fonction $F \in \mathcal{R}[a,b]$ telle que $f = F$ pp.

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{R}[a,b]$. Nous désignons par φ_n (resp. ψ_n) la fonction en escalier associée à la subdivision $\sigma = \{a + j(b-a)/2^n : 0 \leqslant j \leqslant 2^n\}$, égale à f aux points de σ, et dont l'intégrale est égale à la somme de Darboux inférieure (resp. supérieure) de f relative à σ. Il est clair que la suite $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ est croissante, et que la suite $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ est décroissante. On a $\varphi_n \leqslant f \leqslant \psi_n$ et nous allons voir que φ_n et ψ_n tendent vers f pp. Cela implique bien $f \in \mathcal{L}^+[a,b] \cap \mathcal{L}^-[a,b]$ et

$$L\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \varphi_n(x)\,\mathrm{d}x = R\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

où nous avons utilisé les lettres L et R pour préciser que l'intégrale est prise au sens de Lebesgue ou à celui de Riemann.

Soit $E = \{x \in [a,b] : \lim_{n\to+\infty} \varphi_n(x) < \lim_{n\to+\infty} \psi_n(x)\}$. Il faut montrer que E est négligeable. On a $E = \cup_{p=1}^{\infty} \cap_{n=1}^{\infty} E_{pn}$, avec $E_{pn} = \{x \in [a,b] : \psi_n(x) - \varphi_n(x) > 1/p\}$. Or, E_{pn} est une réunion finie d'intervalles $\cup_{h=1}^{H_{pn}} I_{pnh}$ satisfaisant à

$$(1/p) \sum_{1\leqslant h<H_{pn}} \lambda(I_{pnh}) \leqslant \int_a^b \big(\psi_n(x) - \varphi_n(x)\big)\,\mathrm{d}x.$$

Comme $f \in \mathcal{R}[a,b]$, le membre de droite tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$. Cela implique que, pour chaque p fixé, $\cap_{n=1}^{\infty} E_{pn}$ est négligeable. Il en va donc de même de E, en tant que réunion dénombrable d'ensembles négligeables.

Montrons maintenant la seconde assertion de l'énoncé. Soit $f \in \mathcal{L}^+[a,b] \cap \mathcal{L}^-[a,b]$. Il existe une suite croissante $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ de fonctions de $Esc[a,b]$ et une suite décroissante $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ de fonctions de $Esc[a,b]$ convergeant toutes deux vers f pp. On déduit alors de l'inégalité $\varphi_n \leqslant f \leqslant \psi_m$ pp $(m, n \geqslant 1)$l'inégalité entre normalisées $\varphi_n^* \leqslant \psi_m^*$ $(m, n \geqslant 1)$. De plus la suite $\{\varphi_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ est croissante et la suite $\{\psi_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ est décroissante. Posons $F(x) = \lim_{n\to+\infty} \varphi_n^*(x)$. Pour tout n, on a $\varphi_n^* \leqslant F \leqslant \psi_n^*$. Comme φ_n^* et ψ_n^* coïncident respectivement avec φ_n et ψ_n sauf en un nombre fini de points, on peut encore écrire

$$\int_a^b \big(\psi_n^*(x) - \varphi_n^*(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \big(\psi_n(x) - \varphi_n(x)\big)\,\mathrm{d}x \to 0 \qquad (n \to +\infty),$$

d'après le lemme A. Cela implique que $F \in \mathcal{R}[a,b]$, comme annoncé. De plus comme l'ensemble des points x où $\varphi_n(x) \neq \varphi_n^*(x)$ pour au moins une valeur de n est dénombrable, donc négligeable, on a $f = F$ pp. Cela achève la démonstration.

Remarque. Il ne faut pas confondre l'égalité presque partout à une fonction Riemann-intégrable (c'est-à-dire continue presque partout) avec la continuité presque partout. Par exemple, la fonction $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ est égale presque partout à la fonction nulle, qui est Riemann-intégrable, mais n'est pas elle-même Riemann-intégrable. En particulier, *l'égalité presque partout à une fonction continue n'implique pas l'intégrabilité au sens de Riemann.* De même, l'intégrabilité au sens de Riemann n'implique pas l'égalité pp à une fonction continue. Par exemple, la fonction $f = \mathbf{1}_{[0,1/2[}$ est dans $\mathcal{R}[0,1]$, mais toute fonction continue g telle que $f = g$ pp est nécessairement discontinue en $\frac{1}{2}$.

2. Propriétés fondamentales de l'intégrale de Lebesgue

Théorème 2.1. *$\mathcal{L}^1(I)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel sur lequel l'application $f \mapsto \int_I f\,\mathrm{d}x$ est une forme linéaire positive. De plus, il suffit qu'une fonction $f \in \mathcal{L}^1(I)$ soit positive* pp *pour que l'on ait $\int_I f\,\mathrm{d}x \geqslant 0$.*

Définition. *Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite négligeable si l'on a $f = 0$* pp.

Théorème 2.2. *Toute fonction négligeable sur un intervalle I est intégrable au sens de Lebesgue et satisfait à $\int_I f\,\mathrm{d}x = 0$.*

En particulier, la fonction non Riemann-intégrable $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ est dans $\mathcal{L}^1(I)$ pour tout intervalle I.

Remarque. Toute fonction négligeable satisfait donc aussi à $f \in \mathcal{L}^1(I)$ et $\int_I |f|\,\mathrm{d}x = 0$. Nous verrons plus loin que la réciproque est vraie, mais non-triviale.

Théorème 2.3. *Si f, g sont dans $\mathcal{L}^1(I)$, il en va de même de $\max(f,g)$ et de $\min(f,g)$. En particulier, pour toute fonction intégrable sur I, on a $f^\pm$, $|f| \in \mathcal{L}^1(I)$, et*

$$\Big| \int_I f(x)\,\mathrm{d}x \Big| \leqslant \int_I |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Démonstration. Pour $f = f_1 - f_2$, $g = g_1 - g_2$ avec $f_1, f_2, g_1, g_2 \in \mathcal{L}^+(I)$, on a par exemple $\max(f,g) = h_1 - h_2$ où $h_1 = f_1 + g_1$, $h_2 = \min(f_1 + g_2, f_2 + g_1)$ sont dans $\mathcal{L}^+(I)$.

Remarque. Il est à noter que l'inégalité du Théorème 2.3 est encore valable pour des fonctions à valeurs complexes. En effet, en écrivant $\int_I f(x)\,\mathrm{d}x = re^{i\vartheta}$, il suit par le Théorème 2.3

$$r = \Big| \int_I f(x)\,\mathrm{d}x \Big| = \Re e\, e^{-i\vartheta} \int_I f(x)\,\mathrm{d}x = \int_I \Re e\,\{e^{-i\vartheta} f(x)\}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_I |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Théorème 2.4. *Pour toute fonction $f \in \mathcal{L}^1(I)$, il existe une suite $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ de fonctions de $Esc_0(I)$ telle que*

$$\int_I |f(x) - \varphi_n(x)|\,\mathrm{d}x \to 0 \qquad (n \to +\infty).$$

De plus, la même propriété est valable en remplaçant l'espace $Esc_0(I)$ par l'espace $\mathcal{C}_0(I)$ des fonctions continues à support compact définies sur I.

Ce résultat, qui sera interprété plus tard comme une propriété de densité de $Esc_0(I)$ ou $\mathcal{C}_0(I)$ dans $\mathcal{L}^1(I)$ pour une topologie convenable, implique facilement les deux théorèmes suivants.

Théorème 2.5 (Invariance par translation). *Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Alors, pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a $x \mapsto f(x+y) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et*

$$\int_{\mathbb{R}} f(x+y)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Théorème 2.6. *Soit $f \in \mathcal{L}^1(I)$. Pour tout $a \in I$, l'intégrale indéfinie $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est une fonction continue de x sur I. De plus, en tout point x de continuité de f, la fonction F est dérivable et l'on a $F'(x) = f(x)$.*

Remarque. Il est possible qu'une fonction intégrable ne soit continue nulle part, comme par exemple $f = \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$. Lebesgue a cependant démontré que F est nécessairement dérivable pp et satisfait à $F'(x) = f(x)$ pp.

3. Le théorème de la convergence monotone

Le lemme suivant montre que l'on n'obtient pas une notion plus générale d'intégrale en appliquant à $\mathcal{L}^+(I)$ le procédé utilisé sur $Esc_0(I)$.

Lemme 3.1. *Soit $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ une suite croissante d'éléments de $\mathcal{L}^+(I)$ telle que $\sup_{n\geqslant 1} \int_I f_n(x)\,\mathrm{d}x < \infty$. Alors il existe une fonction $f \in \mathcal{L}^+(I)$ telle que $f_n(x) \to f(x)$ pp et*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_I f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_I f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1}$$

Démonstration. Pour chaque entier $n \geqslant 1$, il existe une suite croissante $\{\varphi_{nk}\}_{k=1}^{\infty}$ de fonctions de $Esc_0(I)$ qui converge pp vers f_n. Posons $\varphi_k = \max_{1\leqslant n\leqslant k} \varphi_{nk}$. Alors, on a $\varphi_k \in Esc_0(I)$ et $\varphi_{nk} \leqslant f_n \leqslant f_k$ pp $\quad (1 \leqslant n \leqslant k)$. En prenant le maximum sur $n \in [1, k]$, il suit

$$\varphi_k \leqslant f_k \ \text{ pp.} \tag{2}$$

Par ailleurs, il est immédiat que la suite $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ est croissante, puisque

$$\varphi_k = \max_{1\leqslant n\leqslant k} \varphi_{nk} \leqslant \max_{1\leqslant n\leqslant k} \varphi_{n,k+1} \leqslant \max_{1\leqslant n\leqslant k+1} \varphi_{n,k+1} = \varphi_{k+1},$$

et on a, par hypothèse, $\int_I \varphi_k \,\mathrm{d}x \leqslant \int_I f_k \,\mathrm{d}x \leqslant A < \infty$. Le lemme B implique donc l'existence d'une fonction $f \in \mathcal{L}^+(I)$ telle que $f(x) = \lim_{k\to+\infty} \varphi_k(x)$ pp, et par définition de l'intégrale sur $\mathcal{L}^+(I)$,

$$\int_I f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{k\to+\infty} \int_I \varphi_k(x)\,\mathrm{d}x. \tag{3}$$

Maintenant, de l'inégalité $\varphi_{nk} \leqslant \varphi_k$ $(1 \leqslant n \leqslant k)$, on déduit en faisant tendre k vers l'infini que $f_n \leqslant f$ pp, d'où, en tenant compte de (2),

$$\varphi_n \leqslant f_n \leqslant f \quad \text{pp.} \tag{4}$$

Comme $\varphi_n \to f$ pp, on voit que $f_n \to f$ pp. La formule (1) découle alors trivialement de (3) et (4).

Théorème 3.2 (Convergence monotone, Beppo Levi). *Soit $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite croissante de fonctions de $\mathcal{L}^1(I)$ telle que $\sup_{n\geqslant 1} \int_I f_n \,\mathrm{d}x < \infty$. Alors il existe une fonction $f \in \mathcal{L}^1(I)$ telle que $f_n \to f$ pp et $\lim_{n\to+\infty} \int_I f_n \,\mathrm{d}x = \int_I f \,\mathrm{d}x$.*

Démonstration. Quitte à considérer $f_n - f_1$ à la place de f_n, nous pouvons supposer $f_n \geqslant 0$. Posons alors $g_1 = f_1$, $g_k = f_k - f_{k-1}$ $(k \geqslant 2)$, de sorte que $f_n = \sum_{1\leqslant k\leqslant n} g_k$ pour tout $n \geqslant 1$. On donc $g_k \geqslant 0$, $g_k \in \mathcal{L}^1(I)$ et

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_I g_k(x)\,\mathrm{d}x < \infty. \tag{5}$$

Soit $g_k = u_k - v_k$ une décomposition de g_k avec $u_k, v_k \in \mathcal{L}^+(I)$ et $\{\varphi_{km}\}_{m=1}^{\infty}$ une suite croissante de fonctions de $Esc_0(I)$ convergeant pp vers v_k. Pour $m = m(k)$ convenable, on a

$$\varphi_{km(k)} \leqslant v_k \text{ pp} \qquad \text{et} \qquad \int_I \big(v_k(x) - \varphi_{km(k)}(x)\big)\,\mathrm{d}x < 1/2^k.$$

Posons alors $s_k = u_k - \varphi_{km(k)}$, $t_k = v_k - \varphi_{km(k)}$. On a

(6)

$$s_k, t_k \in \mathcal{L}^+(I), \quad g_k = s_k - t_k, \quad t_k \geqslant 0 \text{ pp}, \quad s_k = g_k + t_k \geqslant 0 \text{ pp}, \quad \int_I t_k(x)\,\mathrm{d}x < 1/2^k.$$

Maintenant, observons que la fonction $r_k = s_k^- + t_k^-$ est négligeable. En posant $s_k^* = s_k + r_k$, $t_k^* = t_k + r_k$, il vient donc

$$s_k^*, t_k^* \in \mathcal{L}^+(I), \quad g_k = s_k^* - t_k^*, \quad s_k^* \geqslant 0, \quad t_k^* \geqslant 0, \quad \int_I t_k^*(x)\,\mathrm{d}x < 1/2^k.$$

En particulier $\left\{\sum_{1\leqslant k\leqslant n} s_k^*\right\}_{n=1}^{\infty}$ est une suite croissante de fonctions de $\mathcal{L}^+(I)$ et l'on a par (5)

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_I s_k^*(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty}\Big(\int_I g_k(x)\,\mathrm{d}x + \int_I t_k^*(x)\,\mathrm{d}x\Big) = \sum_{k=1}^{\infty}\int_I g_k(x)\,\mathrm{d}x + \sum_{k=1}^{\infty}\int_I t_k^*(x)\,\mathrm{d}x < \infty.$$

Le lemme 3.1 nous permet donc d'affirmer l'existence d'une fonction $s^* \in \mathcal{L}^+(I)$ telle que $s^*(x) = \sum_{k=1}^{\infty} s_k(x)$ pp et $\int_I s^*(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty}\int_I s_k^*(x)\,\mathrm{d}x$. Semblablement, la dernière inégalité de (6) implique l'existence de $t^* \in \mathcal{L}^+(I)$ telle que $t^*(x) = \sum_{k=1}^{\infty} t_k^*(x)$ pp et $\int_I t^*(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty}\int_I t_k^*(x)\,\mathrm{d}x$. Posons $f = s^* - t^*$. On a

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} s_k^*(x) - \sum_{k=1}^{\infty} t_k^*(x) = f(x) \text{ pp},$$

et

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\int_I f_n(x)\,\mathrm{d}x &= \sum_{k=1}^{\infty}\int_I g_k(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty}\int_I s_k^*(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{k=1}^{\infty}\int_I t_k^*(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_I s^*(x)\,\mathrm{d}x - \int_I t^*(x)\,\mathrm{d}x = \int_I f(x)\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

par définition de l'intégrale sur $\mathcal{L}^1(I)$. Cela achève la démonstration.

Remarque. La conclusion du théorème de Beppo Levi est bien entendu valide pour une suite décroissante $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ telle que $\inf_{n\geqslant 1}\int_I f_n\,\mathrm{d}x > -\infty$: il suffit d'appliquer le théorème à $-f_n$.

Corollaire 3.3. *Soit $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ une série de fonctions de $\mathcal{L}^1(I)$ telle que*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_I |f_n(x)|\,\mathrm{d}x < \infty.$$

Alors il existe une fonction $f \in \mathcal{L}^1(I)$ telle que

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x) \quad \text{pp}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\int_I f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_I f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème de la convergence monotone aux sommes partielles des séries $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{\pm}$.

Corollaire 3.4. *Soit $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite monotone de fonctions de $\mathcal{L}^1(I)$ convergeant* pp *vers une fonction $f \in \mathcal{L}^1(I)$. Alors on a $\lim_{n\to+\infty}\int_I f_n\,\mathrm{d}x = \int_I f\,\mathrm{d}x$.*

Démonstration. Supposons par exemple la suite croissante. Alors $f_n \leqslant f$ pp, donc $\int_I f_n\,\mathrm{d}x \leqslant \int_I f\,\mathrm{d}x$. Le théorème de la convergence monotone implique donc l'existence d'une fonction $g \in \mathcal{L}^1(I)$ telle que $f_n \to g$ pp, et par conséquent $f = g$ pp. On a

$$\int_I f_n(x)\,\mathrm{d}x \to \int_I g(x)\,\mathrm{d}x$$

par le Théorème 3.2, et $\int_I f\,\mathrm{d}x = \int_I g\,\mathrm{d}x$ par le Théorème 2.2.

Corollaire 3.5. *Soit* $f : I \to \mathbb{R}$. *Alors* $f = 0$ pp *si, et seulement si,* $f \in \mathcal{L}^1(I)$ *et* $\int_I |f|\,\mathrm{d}x = 0$.

Démonstration. Nous avons déjà vu que la condition est nécessaire (Théorème 2.2). Pour montrer qu'elle est suffisante, il suffit d'appliquer le théorème de la convergence monotone à la série de terme général $f_n = |f|$, dont la série des intégrales est la série nulle, donc convergente. On obtient que $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge pp, donc que $|f| = 0$ pp.

Corollaire 3.6. *Soit f une fonction possédant une intégrale de Riemann généralisée absolument convergente sur I. Alors $f \in \mathcal{L}^1(I)$ et son intégrale de Lebesgue sur I est égale à son intégrale de Riemann généralisée.*

Démonstration. Supposons par exemple $I = \mathbb{R}$, et posons $f_n = f\mathbf{1}_{[-n,n]}$. Alors, pour tout n, on a $f_n \in \mathcal{R}[-n,n]$, de sorte que le Théorème 1.1 implique $f_n \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Les suites $\{f_n^{\pm}\}_{n=1}^{\infty}$ sont croissantes et d'intégrales bornées par l'intégrale de Riemann de $|f|$ sur $\mathbb{R}$. Le Théorème 3.2 implique donc que $\lim_{n\to+\infty} f_n^{\pm} = f^{\pm} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}} f^+(x)\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}} f^-(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}} f_n^+(x)\,\mathrm{d}x - \lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}} f_n^-(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \lim_{n\to+\infty}\int_{-n}^{n} f(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Le résultat ci-dessous fournit une caractérisation des fonctions Lebesgue-intégrables analogue à celle du Théorème I.5.2 pour les fonctions Riemann-intégrables.

Corollaire 3.7. *Soit* $f : I \to \mathbb{R}$. *Alors f est dans $\mathcal{L}^1(I)$ si, et seulement si, on a*

$$\sup_{\substack{g \leqslant f \text{ pp} \\ g\in\mathcal{L}^-(I)}} \int_I g\,\mathrm{d}x = \inf_{\substack{G \geqslant f \text{ pp} \\ G\in\mathcal{L}^+(I)}} \int_I G\,\mathrm{d}x.$$

Lorsqu'il en est ainsi, le nombre $\int_I f\,\mathrm{d}x$ est égal à la valeur commune des deux extremums précédents.

Le résultat suivant fournit un renseignement lorsque la suite n'est pas monotone.

Théorème 3.8 (Lemme de Fatou). *Soient $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite de fonctions de $\mathcal{L}^1(I)$ et $f : I \to \mathbb{R}$ satisfaisant à*

$$f_n \geqslant 0 \quad (n \geqslant 1), \quad \sup_{n\geqslant 1}\int_I f_n(x)\,\mathrm{d}x < \infty, \quad f_n \to f \text{ pp}.$$

Alors $f \in \mathcal{L}^1(I)$, et $\int_I f\,\mathrm{d}x \leqslant \liminf_{n\to+\infty}\int_I f_n\,\mathrm{d}x$.

Démonstration. Posons $g_n = \inf_{m\geqslant n} f_m$, de sorte que $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ est une suite croissante convergeant vers f. Comme $f_m \geqslant 0$, le théorème de la convergence monotone implique que $g_n \in \mathcal{L}^1(I)$ et

$$\int_I g_n(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{M\to\infty}\int_I \inf_{n\leqslant m\leqslant M} f_m(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \lim_{M\to\infty}\inf_{n\leqslant m\leqslant M}\int_I f_m(x)\,\mathrm{d}x = \inf_{m\geqslant n}\int_I f_m(x)\,\mathrm{d}x.$$

Par hypothèse, cette dernière quantité est bornée indépendamment de n. Une seconde application du théorème de la convergence monotone montre donc que $f \in \mathcal{L}^1(I)$ et que $\int_I g_n\,\mathrm{d}x \to \int_I f\,\mathrm{d}x$. En passant à la limite dans l'inégalité précédente, on obtient bien la majoration annoncée pour $\int_I f\,\mathrm{d}x$.

Remarque. Il peut ne pas y avoir égalité dans le lemme de Fatou, ainsi que l'atteste l'exemple de $f_n(x) = nx^n$, $f(x) = 0$ sur $[0,1]$.

Le théorème de la convergence monotone permet également d'étendre aux fonctions de $\mathcal{L}^1(I)$ la formule du changement de variables.

Théorème 3.9 (Changement de variables). *Soit $\varphi : J \to I$ une bijection monotone de classe C^1. Alors, pour toute fonction $f \in \mathcal{L}^1(I)$, on a*

$$\int_I f(x)\,\mathrm{d}x = \int_J f\big(\varphi(y)\big)|\varphi'(y)|\,\mathrm{d}y.$$

Démonstration. La formule est vraie si $f \in Esc_0(I)$, d'après le Théorème I.3.1. Lorsque $f \in \mathcal{L}^+(I)$ et, par exemple, $\varphi' \geqslant 0$, il existe une suite croissante $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ de fonctions de $Esc_0(I)$ convergeant pp vers f. Pour chaque n, la fonction $g_n = f_n \circ \varphi \cdot \varphi'$ est à support compact et Riemann-intégrable, donc dans $\mathcal{L}^1(J)$. On a

$$\int_J g_n(y)\,\mathrm{d}y = \int_I f_n(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_I f(x)\,\mathrm{d}x$$

et, pp, g_n tend en croissant vers $g = f \circ \varphi \cdot \varphi'$. Le théorème de la convergence monotone implique donc que $g \in \mathcal{L}^1(J)$ et

$$\int_J g\,\mathrm{d}y = \lim_n \int_J g_n(y)\,\mathrm{d}y = \int_I f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Le théorème est donc établi pour $f \in \mathcal{L}^+(I)$. On en déduit le cas général par linéarité.

4. Le théorème de la convergence dominée

Pour les suites non monotones, le passage à la limite sous le signe d'intégration n'est pas toujours justifié. Pour $f_n(x) = n^2 e^{-nx}$ sur $[0, \infty[$, par exemple, on a $f_n \to 0$ pp, mais $\int_0^\infty f_n\,\mathrm{d}x = n \to \infty$. Le théorème suivant fournit une condition suffisante simple pour autoriser l'interversion des opérations de passage à la limite et intégration.

Théorème 4.1 (Convergence dominée, Lebesgue). *Soit $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite de fonctions de $\mathcal{L}^1(I)$ convergeant* pp *vers une fonction f définie sur I. On suppose qu'il existe une fonction fixe $g \in \mathcal{L}^1(I)$ telle que $|f_n| \leqslant g$* pp *pour chaque entier n. Alors $f \in \mathcal{L}^1(I)$ et $\int_I f\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \int_I f_n\,\mathrm{d}x$.*

Démonstration. Posons $g_n = \max_{1\leqslant m\leqslant n} f_m$. Alors $g_n \in \mathcal{L}^1(I)$ d'après le Théorème 2.3 et $g_n \leqslant g$ pp, donc $\sup_{n\geqslant 1} \int_I g_n\,\mathrm{d}x \leqslant \int_I g\,\mathrm{d}x < \infty$. Comme la suite $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ est trivialement croissante, le théorème de la convergence monotone implique l'existence d'une fonction g_∞ de $\mathcal{L}^1(I)$ telle que $g_\infty = \lim_{n\to\infty} g_n = \sup_{n\geqslant 1} f_n$ pp. De même, il existe une fonction $h_n \in \mathcal{L}^1(I)$ égale pp à $\sup_{m\geqslant n} f_m$. On a $h_n \geqslant h_{n+1}$ pp et, quitte à modifier chaque h_n sur un ensemble fixe négligeable (à savoir $\cup_{n\geqslant 1}\{x \in I : h_n(x) < h_{n+1}(x)\}$) on peut supposer que $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ est décroissante. On a $h_n \geqslant -g$ pp et $\lim_{n\to+\infty} h_n = f$ pp, donc le théorème de la convergence monotone implique que $f \in \mathcal{L}^1(I)$ et

$$\int_I f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \int_I h_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

Semblablement, il existe une fonction $k_n \in \mathcal{L}^1(I)$ égale pp à $\inf_{m\geqslant n} f_m$ et l'on a

$$\int_I f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \int_I k_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

En intégrant alors l'inégalité $k_n \leqslant f_n \leqslant h_n$ pp, on obtient bien la formule requise $\lim_{n\to+\infty} \int_I f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_I f(x)\,\mathrm{d}x$.

Le corollaire suivant est très utile pour montrer qu'une fonction est intégrable.

Théorème 4.2. *Soit $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite de fonctions de $\mathcal{L}^1(I)$ convergeant* pp *vers une fonction $f : I \to \mathbb{R}$. On suppose l'existence d'une fonction $g \in \mathcal{L}^1(I)$ telle que $|f| \leqslant g$* pp. *Alors $f \in \mathcal{L}^1(I)$.*

Démonstration. Considérons

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} -g(x) & \text{si } f_n(x) < -g(x), \\ f_n(x) & \text{si } |f_n(x)| \leqslant g(x), \\ g(x) & \text{si } f_n(x) > g(x). \end{cases}$$

Alors on a $\varphi_n = \min\{g, \max(f_n, -g)\}$, donc $\varphi_n \in \mathcal{L}^1(I)$. On a $|\varphi_n| \leqslant g$ pp et $\varphi_n \to f$ pp. Le théorème de Lebesgue implique donc que $f \in \mathcal{L}^1(I)$.

Remarque. Les hypothèses du théorème précédent ne sont pas suffisantes pour impliquer $\lim_n \int_I f_n \,\mathrm{d}x = \int_I f \,\mathrm{d}x$. Contre-exemple : $f_n(x) = ne^{-nx}$ sur $[0,1]$, avec $f = 0$. Pour une constante convenable c, on a $f_n(x) \leqslant c/x$ pp sur $[0,1]$, mais la fonction dominante n'est pas intégrable.

Le théorème de Lebesgue permet aussi de contrôler les intégrales dépendant d'un paramètre. Les trois énoncés suivants, qui en découlent facilement, sont les plus utiles.

Théorème 4.3 (Passage à la limite sous le signe somme). *Soit $T \subset \mathbb{R}^d$ et $\{f_t\}_{t \in T}$ une famille de fonctions de $\mathcal{L}^1(I)$ vérifiant les conditions suivantes pour un élément t_0 de $\overline{T}$ et une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ convenables :*

(i) $\exists g \in \mathcal{L}^1(I) : |f_t| \leqslant g$ pp $\quad (t \in T)$

(ii) $\lim_{t \to t_0,\, t \in T} f_t(x) = f(x)$ pp.

Alors $f \in \mathcal{L}^1(I)$ et $\int_I f \,\mathrm{d}x = \lim_{t \to t_0,\, t \in T} \int_I f_t \,\mathrm{d}x$.

Théorème 4.4 (Dérivation sous le signe d'intégration). *Soit J un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \times J \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables telle que :*

(i) $(\forall x \in J) \quad t \mapsto f(t,x) \in \mathcal{L}^1(I)$

(ii) $x \mapsto f(t,x)$ *est dérivable sur J pour presque tout t*

(iii) $\exists g \in \mathcal{L}^1(I) : \sup_{x \in J} |\partial f(t,x)/\partial x| \leqslant g(t)$ pp.

Alors la fonction définie sur J par $F(x) = \int_I f(t,x) \,\mathrm{d}t$ est dérivable sur J et l'on a

$$F'(x) = \int_I \frac{\partial f(t,x)}{\partial x} \,\mathrm{d}t.$$

Théorème 4.5 (Fonction holomorphe définie par une intégrale). *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : U \times I \to \mathbb{C}$ une fonction de deux variables telle que :*

(i) $(\forall z \in U) \quad t \mapsto f(z,t) \in \mathcal{L}^1(I)$

(ii) $z \mapsto f(z,t)$ *est holomorphe sur U pour presque tout t*

(iii) $\exists g \in \mathcal{L}^1(I) : \sup_{z \in U} |f(z,t)| \leqslant g(t)$ pp.

Alors la fonction définie sur U par $F(z) = \int_I f(z,t) \,\mathrm{d}t$ est holomorphe sur U et l'on a

$$F'(z) = \int_I \frac{\partial f(z,t)}{\partial z} \,\mathrm{d}t.$$

Théorème 4.6. *Soit* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *une fonction dérivable dont la dérivée est bornée. Alors*

$$\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t = f(b) - f(a).$$

Démonstration. La preuve est semblable à celle du Théorème 6.6 du chapitre I : il suffit d'invoquer le théorème de Lebesgue au lieu de celui d'Arzelà.

Remarque. On peut montrer que $f' \in \mathcal{L}^1([a,b])$ est une condition suffisante pour qu'une fonction *partout* dérivable f satisfasse $\int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t = f(x) - f(a)$ pour $a \leqslant x \leqslant b$. Voir W. Rudin, *Analyse réelle et complexe*, théorème 8.21.

5. L'espace de Lebesgue $L^1(I)$

Le Théorème 2.2 montre que l'appartenance d'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ à $\mathcal{L}^1(I)$ n'est pas modifiée lorsqu'on ajoute à f une fonction négligeable. Cela suggère d'introduire l'espace quotient de $\mathcal{L}^1(I)$ par le sous-espace vectoriel des fonctions nulles pp. Nous désignons cet espace de classes d'équivalences par $L^1(I)$. Si $f, g \in \mathcal{L}^1(I)$, on a $\overline{f} = \overline{g}$ dans $L^1(I)$ si, et seulement si, $f = g$ pp. Par abus de langage, on désigne encore par f la classe de f dans $L^1(I)$, et l'on parle de *fonction* de $L^1(I)$. On peut penser à un tel objet comme à une fonction définie presque partout, qui peut être arbitrairement modifiée en chaque point donné (ce qui conduit certains mauvais esprits à dire qu'elle n'est définie nulle part !), mais qui est néanmoins représentative d'un comportement commun à toutes les fonctions de la même classe d'équivalence pour les propriétés liées à l'intégration.

Théorème 5.1. $L^1(I)$ *est un espace vectoriel réel, et l'application* $f \mapsto \|f\|_1 = \int_I |f|\,\mathrm{d}x$ *est une norme sur cet espace. On la désigne par norme de la convergence en moyenne.*

Démonstration. Le fait que $L^1(I)$ soit un espace vectoriel découle des propriétés générales des espaces quotients. L'application $\|f\|_1$ est bien définie sur $L^1(I)$ puisque sa valeur est indépendante du représentant choisi dans $\mathcal{L}^1(I)$. Pour établir que c'est une norme, le seul point délicat consiste à montrer que $\|f\|_1 = 0$ implique $f = 0$ dans $L^1(I)$: c'est une conséquence immédiate du Corollaire 3.5.

Il découle maintenant du Théorème 2.3 que l'application $f \mapsto \int_I f\,\mathrm{d}x$ est une forme linéaire *continue* sur $L^1(I)$, muni de la topologie induite par la norme de la convergence en moyenne. Sur l'espace $\mathcal{L}^1(I)$, la norme de la convergence en moyenne (aussi appelée norme-L^1) est en fait une semi-norme. On munit systématiquement $\mathcal{L}^1(I)$ de la topologie associée à cette semi-norme. Le théorème suivant est le point culminant de la théorie de l'intégrale de Lebesgue.

Théorème 5.2. *L'espace* $\mathcal{L}^1(I)$ *est complet et l'espace* $L^1(I)$ *est un espace de Banach. Plus précisément, de toute suite de Cauchy* $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ *de fonctions de* $\mathcal{L}^1(I)$ *on peut extraire une sous-suite qui converge* pp *et en moyenne vers toute fonction* $f \in \mathcal{L}^1(I)$ *dont la classe dans* $L^1(I)$ *est celle de la limite en moyenne de* $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ *dans* $L^1(I)$.

Démonstration. Soit $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ une suite de Cauchy de $\mathcal{L}^1(I)$. Nous devons d'abord montrer qu'il existe une fonction $f \in \mathcal{L}^1(I)$ telle que $\|f - f_n\|_1 \to 0$. Soit $\{f_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ une sous-suite de $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ telle que $\|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}\|_1 \leqslant 1/2^k$. Alors le théorème de la convergence monotone (sous la forme du Corollaire 3.3) nous permet de déduire de la convergence de la série

$$\sum_{k=1}^\infty \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_1$$

que la série de fonctions $\sum_{k=1}^{\infty}(f_{n_{k+1}} - f_{n_k})$ converge pp vers une fonction de $\mathcal{L}^1(I)$ dont l'intégrale peut être calculée par intégration terme à terme. Autrement dit, il existe $f \in \mathcal{L}^1(I)$ telle que $f_{n_k} \to f$ pp et $\int_I f_{n_k}\,\mathrm{d}x \to \int_I f\,\mathrm{d}x$. Mais on a aussi $g_k = |f_{n_k} - f| \to 0$ pp et, par l'inégalité triangulaire, $\|g_{k+1} - g_k\|_1 \leqslant \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_1 \leqslant 1/2^k$. Le théorème de la convergence monotone implique donc que $\|g_k\|_1 = \|f_{n_k} - f\|_1 \to 0$. Comme $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ est une suite de Cauchy, il s'ensuit que $\|f_n - f\|_1 \to 0$, ce qui établit bien la complétude de $\mathcal{L}^1(I)$ et $L^1(I)$.

La seconde assertion de l'énoncé découle des propriétés de la suite $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ précédente, puisque sa limite pp $f \in \mathcal{L}^1(I)$ a nécessairement pour classe dans $L^1(I)$ l'unique limite de la suite $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ dans $L^1(I)$.

Le résultat suivant est une conséquence immédiate du Théorème 2.4.

Théorème 5.3. *Le sous-espace vectoriel constitué des classes dans $L^1(I)$ des fonctions de $Esc_0(I)$ est dense dans $L^1(I)$.*

6. Fonctions et ensembles mesurables

Définition. *Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite mesurable s'il existe une suite $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ de fonctions de $Esc_0(I)$ convergeant* pp *vers f. On désigne par $\mathcal{M}(I)$ l'ensemble des fonctions mesurables définies sur I. Une partie A de $\mathbb{R}$ est dite mesurable si sa fonction indicatrice $\mathbf{1}_A$ est dans $\mathcal{M}(\mathbb{R})$.*

Toute fonction $f \in \mathcal{L}^1(I)$ est mesurable, mais la réciproque est fausse. Par exemple, la fonction constante $f = 1$ sur $I = \mathbb{R}$, et la fonction $x \mapsto 1/x$ sur $]0, 1]$ sont mesurables mais non intégrables.

Théorème 6.1. *Si $f, g \in \mathcal{M}(I)$, alors les fonctions $|f|$, $f \pm g$, fg, $\max(f, g)$, $\min(f, g)$ sont également mesurables. Si $f \neq 0$* pp*, toute fonction égale à $1/f$* pp *est mesurable.*

Le résultat suivant donne une condition suffisante pour qu'une fonction mesurable soit intégrable. C'est une conséquence immédiate du Théorème 4.2.

Théorème 6.2. *Si $f \in \mathcal{M}(I)$ et s'il existe $g \in \mathcal{L}^1(I)$ telle que $|f| \leqslant g$* pp*, alors $f \in \mathcal{L}^1(I)$.*

L'important théorème suivant montre que $\mathcal{M}(I)$ est stable par limite simple pp.

Théorème 6.3. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction qui est limite* pp *d'une suite $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ de fonctions mesurables. Alors $f \in \mathcal{M}(I)$.*

Démonstration. Soit h une fonction intégrable sur I, et strictement positive en tout point de I, par exemple $h(x) = e^{-x^2}$. On pose $g_n = hf_n/(h + |f_n|)$. Alors $g_n \in \mathcal{M}(I)$ d'après le Théorème 6.1, et le Théorème 6.2 implique que $g_n \in \mathcal{L}^1(I)$ puisque $|g_n| \leqslant h$. Par hypothèse, on a $g_n \to g = hf/(h + |f|)$ pp. Le théorème de Lebesgue implique donc que $g \in \mathcal{L}^1(I)$. De plus, on a trivialement $|g| < h$. En notant que f et g sont de même signe, on voit que $f = hg/(h - |g|)$. Donc $f \in \mathcal{M}(I)$, d'après le Théorème 6.1.

La classe des fonctions mesurables est donc très vaste. Par exemple, une conséquence immédiate des Théorèmes 6.2 et 6.3 est que toute fonction *localement intégrable*, c'est-à-dire intégrable sur chaque intervalle borné, est mesurable. En particulier, on voit grâce au Théorème 1.1 que toute fonction continue pp est mesurable — cf.exercice 70 pour une démonstration directe.

Définition. *On appelle mesure de Lebesgue d'une partie mesurable A de $\mathbb{R}$ le nombre $\lambda(A) \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ défini par* $\lambda(A) = \begin{cases} \int_I \mathbf{1}_A\,\mathrm{d}x & \text{si } \mathbf{1}_A \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}), \\ +\infty & \text{dans le cas contraire.} \end{cases}$

On a par exemple $\lambda([a, b]) = b - a$. La caractérisation suivante des ensemble négligeables découle immédiatement du Corollaire 3.5.

Théorème 6.4. *Une partie N de $\mathbb{R}$ est négligeable si, et seulement si, elle est mesurable et de mesure $\lambda(N) = 0$.*

Les propriétés essentielles de la mesure de Lebesgue sur l'ensemble des parties mesurables de $\mathbb{R}$ sont rassemblées dans l'énoncé suivant.

Théorème 6.5. *Si A, B sont des ensembles mesurables, alors il en va de même de $A \cup B$, $A \cap B$, et $A \smallsetminus B$. Pour toute famille dénombrable $\{A_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ de parties mesurables de $\mathbb{R}$, l'intersection $\cap_{j\in\mathcal{J}} A_j$ et la réunion $\cup_{j\in\mathcal{J}} A_j$ sont mesurables. De plus, la mesure de Lebesgue est dénombrablement additive, c'est-à-dire que l'on a, si les A_j sont deux à deux disjoints,*

$$\lambda\Big(\cup_{j\in\mathcal{J}} A_j\Big) = \sum_{j\in\mathcal{J}} \lambda(A_j).$$

Nous verrons que la théorie de la mesure abstraite est une construction axiomatique reposant sur ces propriétés. Les fonctions mesurables peuvent y être définies en termes d'ensembles mesurables, à l'image du théorème suivant.

Théorème 6.6 (Caractérisation de Lebesgue des fonction mesurables). *Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Alors $f \in \mathcal{M}(I)$ si, et seulement si, les ensembles*

$$f^{-1}(]-\infty, a]), \quad f^{-1}(]-\infty, a[), \quad f^{-1}([a, +\infty[), \quad f^{-1}(]a, +\infty[)$$

sont mesurables pour tout $a \in \mathbb{R}$. De plus, la mesurabilité des ensembles de l'un des quatre types implique celle des trois autres.

Considérons une fonction mesurable $f \geqslant 0$ et posons $E_n = I \cap [-n, n] \cap f^{-1}([0, n])$. Alors E_n est intégrable puisque mesurable et majoré par l'ensemble intégrable $[-n, n]$. De plus $f_n = \mathbf{1}_{E_n} f$ tend en croissant vers f. La suite croissante des intégrales $\int_I f_n \,\mathrm{d}x$ est donc bornée si, et seulement si, f est intégrable, et il est cohérent d'étendre la définition du symbole $\int_I f(x)\,\mathrm{d}x$ en posant $\int_I f(x)\,\mathrm{d}x = \infty$ si $f \notin \mathcal{L}^1(I)$. Cette notation commode permet par exemple d'écrire la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction mesurable soit intégrable sous la forme

$$\int_I |f(x)|\,\mathrm{d}x < \infty.$$

Dans la théorie de Lebesgue, la formule de la moyenne prend la forme naturelle suivante.

Théorème 6.7. *Soit $f \in \mathcal{L}^1(I)$ et E une partie intégrable de I. Si l'on a $m \leqslant f \leqslant M$* pp *sur E, alors*

$$m\lambda(E) \leqslant \int_E f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M\lambda(E).$$

Une conséquence importante et surprenante du théorème de la convergence monotone est le résultat suivant qui lie la convergence simple pp et la convergence uniforme d'une suite de fonctions mesurables sur un ensemble intégrable. Nous convenons qu'une fonction f définie sur un ensemble quelconque $E \subset \mathbb{R}$ est dite mesurable sur E si la fonction obtenue en prolongeant f par 0 sur le complémentaire de E est mesurable sur $\mathbb{R}$.

Théorème 6.8 (Egorov). *Soit E un ensemble intégrable et $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite de fonctions mesurables sur E et convergeant* pp *vers une fonction f définie sur E. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un sous-ensemble mesurable E_ε de E tel que*

$$\lambda(E) - \varepsilon < \lambda(E_\varepsilon) \leqslant \lambda(E)$$

et sur lequel la convergence de f_n vers f est uniforme, c'est-à-dire

$$\sup_{x\in E_\varepsilon} |f_n(x) - f(x)| \to 0 \qquad (n\to\infty). \tag{7}$$

Démonstration. Soit $E_0 = \{x \in E : f_n(x) \to f(x)\}$. Posons $g_n(x) = |f_n(x) - f(x)|$ et

$$E_{pn} = \{x \in E_0 : \sup_{m\geqslant n} g_m(x) \leqslant 1/p\},$$

de sorte que, pour tout $p \geqslant 1$, $E_0 = \cup_{n=1}^\infty E_{pn}$. Les E_{pn} sont mesurables et la suite $\{E_{pn}\}_{n=1}^\infty$ est clairement croissante pour chaque entier p fixé. En d'autres termes, on a $\lim_{n\to\infty} \mathbf{1}_{E_{pn}} = \mathbf{1}_{E_0}$, et le théorème de la convergence monotone implique

$$\lambda(E) = \lambda(E_0) = \lim_{n\to\infty} \lambda(E_{pn}).$$

Pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe donc un indice n_p tel que $\lambda(E_{pn_p}) > \lambda(E) - \varepsilon/2^p$. Posons $E_\varepsilon = \cap_{p=1}^\infty E_{pn_p}$. Alors on a, pour tout $x \in E_\varepsilon$,

$$n \geqslant n_p \Rightarrow g_n(x) \leqslant g_{n_p}(x) \leqslant 1/p,$$

c'est-à-dire (7). De plus,

$$\lambda(E \smallsetminus E_\varepsilon) = \lambda(E_0 \smallsetminus E_\varepsilon) \leqslant \sum_{p=1}^\infty \lambda(E \smallsetminus E_{pn_p}) \leqslant \sum_{p=1}^\infty \varepsilon/2^p = \varepsilon.$$

Cela achève la démonstration.

7. Les espaces $\mathcal{L}^p(I)$ et $L^p(I)$

On désigne par $\mathcal{L}^p(I)$ ($1 \leqslant p < \infty$) l'espace des fonctions $f : I \to \mathbb{R}$ qui sont mesurables et telles que $|f|^p \in \mathcal{L}^1(I)$. Pour $f \in \mathcal{L}^p(I)$, on pose

$$\|f\|_p = \Big(\int_I |f(x)|^p \,\mathrm{d}x\Big)^{1/p}.$$

Le Théorème 6.2 montre immédiatement que si $f \in \mathcal{M}(I)$ et $|f| \leqslant g$ pp avec $g \in \mathcal{L}^p(I)$, alors $f \in \mathcal{L}^p(I)$. En particulier, si $f, g \in \mathcal{L}^p(I)$, alors $\max(f, g)$ et $\min(f, g)$ sont aussi dans $\mathcal{L}^p(I)$. Comme $|f + g|^p \leqslant 2^p \max(|f|^p, |g|^p)$, on voit que $\mathcal{L}^p(I)$ est stable par addition. On en déduit facilement le résultat suivant.

Théorème 7.1. *$\mathcal{L}^p(I)$ est un espace vectoriel réel.*

On désigne par $L^p(I)$ l'espace vectoriel quotient de $\mathcal{L}^p(I)$ par le sous-espace vectoriel des fonctions négligeables.

Théorème 7.2 (Inégalité de Hölder). *Soient p, q des nombres réels > 1 tels que $(1/p) + (1/q) = 1$. Si $f \in \mathcal{L}^p(I)$, $g \in \mathcal{L}^q(I)$, alors $fg \in \mathcal{L}^1(I)$ et l'on a*

$$\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p \|g\|_q.$$

Théorème 7.3. *Pour $f, g \in \mathcal{L}^p(I)$, on a $\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p$, et l'application $f \mapsto \|f\|_p$ est une semi-norme sur $\mathcal{L}^p(I)$, une norme sur $L^p(I)$. La topologie induite sur l'un ou l'autre* *de ces espaces est désignée comme la topologie de la convergence en moyenne d'ordre p, ou de la convergence-L^p.*

Théorème 7.4. *Les espaces $\mathcal{L}^p(I)$ et $L^p(I)$ sont complets. Plus précisément, de toute suite de Cauchy $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ de fonctions de $\mathcal{L}^p(I)$, on peut extraire une sous-suite convergeant* pp *et en moyenne d'ordre p vers tout représentant f de l'unique limite de la suite $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ dans $L^p(I)$.*

Théorème 7.5. *Les sous-espaces $Esc_0(I)$ et $\mathcal{C}_0(I)$ sont denses dans $\mathcal{L}^p(I)$ pour la topologie de la convergence-L^p. Plus précisément, pour toute fonction $f \in \mathcal{L}^p(I)$, il existe une suite $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ de fonctions de $Esc_0(I)$ (resp. $\mathcal{C}_0(I)$) qui converge* pp *et en moyenne d'ordre p vers f.*

8. Intégrale double

La construction précédente de l'intégrale de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ est en fait valable presque sans changement sur $\mathbb{R}^d$. Considérons pour fixer les idées le cas $d = 2$. Étant donné un pavé borné ou non P, on introduit l'ensemble $Esc_0(P)$ des fonctions en escalier à support compact sur P, sur lequel l'intégrale est définie de manière évidente, puis l'ensemble $\mathcal{L}^+(P)$ des fonctions qui sont pp limites d'une suite croissante de fonctions de $Esc_0(P)$. Les lemmes A et B peuvent alors être démontrés sans changement, ce qui permet de définir de façon intrinsèque l'intégrale sur $\mathcal{L}^+(P)$, puis sur $\mathcal{L}^1(P)$, défini comme l'ensemble des différences $f_1 - f_2$ de fonctions de $\mathcal{L}^+(P)$. Les théorèmes de la convergence monotone et de la convergence dominée restent valables tels quels, ainsi que la définition et les propriétés des ensembles mesurables. Par exemple, une limite simple pp de fonctions mesurables est mesurable, et toute fonction mesurable majorée en module par une fonction intégrable est intégrable. La caractérisation de Lebesgue des fonctions mesurables est identique : f est mesurable si, et seulement si, les ensembles $f^{-1}([a, \infty[)$ $(a \in \mathbb{R})$ le sont, avec les trois variantes habituelles.

Le théorème fondamental suivant permet de lier l'intégrale double à l'intégrale simple.

Théorème 8.1 (Fubini). *Soient I, J, des intervalles de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{L}^1(I \times J)$. Alors l'application partielle $x \mapsto f(x, y)$ est dans $\mathcal{L}^1(I)$ pour presque tout y, et l'application $y \mapsto \int_I f(x, y)\,\mathrm{d}x$ (définie initialement* pp *et prolongée par 0 dans le domaine complémentaire) est dans $\mathcal{L}^1(J)$. Les assertions symétriques obtenues en inversant les rôles de x et y sont valables, et l'on a avec les conventions précédentes*

$$\int_{I\times J} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_J \mathrm{d}y \int_I f(x,y)\,\mathrm{d}x = \int_I \mathrm{d}x \int_J f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

La démonstration repose sur le résultat suivant qui fait le lien entre les notions d'ensembles négligeables sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{R}^2$. Si $A \subset \mathbb{R}^2$, on définit les *sections* A^x, A_y par

$$A^x = \{y \in \mathbb{R} : (x,y) \in A\}, \qquad A_y = \{x \in \mathbb{R} : (x,y) \in A\}.$$

Lemme 8.2. *Soit N un ensemble négligeable de $\mathbb{R}^2$. Alors les sections N^x sont négligeables pour presque tout x.*

Démonstration. Puisque N est négligeable, il existe pour chaque entier $n \geqslant 1$ un recouvrement dénombrable $\big\{]a_{jn}, b_{jn}[\times]\alpha_{jn}, \beta_{jn}[\big\}_{j=1}^{\infty}$ de mesure totale

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda\big(]a_{jn}, b_{jn}[\times]\alpha_{jn}, \beta_{jn}[\big) \leqslant 1/2^n.$$

Cela implique que la série à termes positifs

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}(\beta_{jn}-\alpha_{jn})\mathbf{1}_{]a_{jn},b_{jn}[}(x) \tag{8}$$

est telle que la série correspondante des intégrales est convergente. Elle est donc pp convergente, d'après le théorème de la convergence monotone (Corollaire 3.3). Soit E l'ensemble des nombres réels x où la série (8) converge. Une seconde application du théorème de la convergence monotone montre que, pour $x \in E$ fixé, la série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\mathbf{1}_{]a_{jn},b_{jn}[}(x)\mathbf{1}_{]\alpha_{jn},\beta_{jn}[}(y)$$

converge pour presque tout y. Or cette série majore

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{1}_N(x,y)=\begin{cases}\infty & \text{si } (x,y)\in N,\\ 0 & \text{si } (x,y)\notin N.\end{cases}$$

On a donc nécessairement $\mathbf{1}_N(x,y)=\mathbf{1}_{N^x}(y)=0$ pp pour $x \in E$ fixé. Autrement dit, N^x est négligeable pour presque tout x, ce qu'il fallait démontrer.

Nous sommes maintenant en mesure (c'est le cas de le dire !) de démontrer le théorème de Fubini. Il suffit de considérer le cas d'une fonction de $\mathcal{L}^+(I\times J)$, l'énoncé général en découlant par linéarité. Soit donc $f \in \mathcal{L}^+(I\times J)$, et $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite croissante de fonctions de $Esc_0(I\times J)$ convergeant pp vers f. Par définition de l'intégrale de Lebesgue, on a

$$\int_{I\times J} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\lim_{n\to\infty}\int_{I\times J}\varphi_n(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\lim_{n\to\infty}\int_I \mathrm{d}x\int_J\varphi_n(x,y)\,\mathrm{d}y, \tag{9}$$

où la seconde égalité découle de l'intégrabilité par intégrations successives des fonctions en escalier. Posons $\Phi_n(x)=\int_J\varphi_n(x,y)\,\mathrm{d}y$. Comme la suite $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ est croissante, il en va de même de la suite $\{\Phi_n\}_{n=1}^{\infty}$. De plus, la relation (9) implique que la suite des intégrales $\int_I\Phi_n(x)\,\mathrm{d}x$ est uniformément majorée — par le membre de gauche de (9). Le théorème de la convergence monotone implique donc l'existence d'une fonction $\Phi\in\mathcal{L}^1(I)$ telle que $\Phi_n(x)\to\Phi(x)$ pp et

$$\int_I\Phi(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_I\Phi_n(x)\,\mathrm{d}x=\int_{I\times J}f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \tag{10}$$

où la seconde égalité découle de (9). Par ailleurs, puisque $\varphi_n(x,y)\to f(x,y)$ pp, le lemme 8.2 implique que l'ensemble

$$N^x=\{y\in J : \varphi_n(x,y)\not\to f(x,y)\}$$

est négligeable pour presque tout x. On voit donc qu'il existe un ensemble négligeable de valeurs de x en dehors duquel on a simultanément

$$\lim_{n\to\infty}\Phi_n(x)=\Phi(x),\qquad \text{et}\qquad \lim_{n\to\infty}\varphi_n(x,y)=f(x,y) \text{ pp (en } y).$$

Lorsque ces relations sont réalisées, le théorème de la convergence monotone implique que $y\mapsto f(x,y)\in\mathcal{L}^1(J)$ et que

$$\int_J f(x,y)\,\mathrm{d}y=\lim_{n\to\infty}\int_J\varphi_n(x,y)\,\mathrm{d}y=\lim_{n\to\infty}\Phi_n(x)=\Phi(x).$$

En reportant dans (10), on obtient

$$\int_I \mathrm{d}x \int_J f(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_{I\times J} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

avec la convention indiquée dans l'énoncé de remplacer, dans le membre de gauche, l'intégrale intérieure (qui est égale à $\Phi(x)$ pp) par 0 pour les valeurs de x où elle n'est pas définie. Cela achève la démonstration.

Avec la convention d'extension du symbole d'intégrale des fonctions mesurables positives indiquée à la section 6, nous pouvons énoncer le corollaire suivant qui fournit un critère commode et condensé pour l'intégrabilité d'une fonction de deux variables.

Corollaire 8.3. *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction $f : I\times J \to \mathbb{R}$ soit intégrable est que f soit mesurable et que l'on ait*

$$\int_I \mathrm{d}x \int_J |f(x,y)|\,\mathrm{d}y < \infty \qquad \textit{ou} \qquad \int_J \mathrm{d}y \int_I |f(x,y)|\,\mathrm{d}x < \infty.$$

Démonstration. Les intégrales itérées apparaissant dans l'énoncé ont un sens puisque le lemme 8.2 montre que les fonctions partielles sont mesurables pp. La condition est bien nécessaire car l'intégrabilité de f implique celle de $|f|$ et le théorème de Fubini permet alors de calculer l'intégrale par intégrations successives. Pour montrer qu'elle est suffisante, supposons par exemple la première des deux conditions de finitude réalisée et considérons une suite $\{\varphi_n(x,y)\}_{n=1}^{\infty}$ de fonctions de $\mathit{Esc}_0(I\times J)$ convergeant pp vers $f(x,y)$. L'existence d'une telle suite est garantie par le fait que f est mesurable. Posons alors

$$\psi_n(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } |\varphi_n(x,y)| > 2|f(x,y)|, \\ |\varphi_n(x,y)| & \text{si } |\varphi_n(x,y)| \leqslant 2|f(x,y)|. \end{cases}$$

Il est clair que ψ_n est mesurable, et que $\psi_n \leqslant 2|f|$ pour tout n. De plus, ψ_n est intégrable car elle est mesurable et majorée par la fonction intégrable $|\varphi_n|$. Enfin, on a $\psi_n \to |f|$ pp et

$$\int_{I\times J} \psi_n(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_I \mathrm{d}x \int_J \psi_n(x,y)\,\mathrm{d}y \leqslant 2\int_I \mathrm{d}x \int_J |f(x,y)|\,\mathrm{d}y < \infty,$$

où l'égalité découle du théorème de Fubini. Le lemme de Fatou (en version bidimensionnelle) implique donc $|f| \in \mathcal{L}^1(I\times J)$, et finalement $f \in \mathcal{L}^1(I\times J)$, par le Théorème 6.2.

Le théorème du changement de variables prend dans le cadre de l'intégrale de Lebesgue sa forme définitive.

Théorème 8.4. *Soient U et V des ouverts de $\mathbb{R}^2$ et $\Phi : U \to V$ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U sur V. Pour que $f : U \to \mathbb{R}$ soit intégrable sur U, il faut et il suffit que $f\circ\Phi$ soit intégrable sur V et l'on a dans ce cas*

$$\int_V f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_\Delta f\circ\Phi(u,v)|\,\text{dét}\, J_\varphi(u,v)|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

avec

$$J_\varphi(u,v) = \begin{pmatrix} \partial\Phi_1/\partial u & \partial\Phi_1/\partial v \\ \partial\Phi_2/\partial u & \partial\Phi_2/\partial v \end{pmatrix}.$$

Université de Lorraine
Faculté des sciences et technologies
Licence de mathématiques 1994/95
Calcul intégral et théorie de la mesure
Gérald Tenenbaum

Exercices sur l'intégrale de Lebesgue

52. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Montrer que f est négligeable sur I si, et seulement si, il existe, pour chaque $\varepsilon > 0$, une fonction $g \in Esc_0(I)$ telle que $|f| \leqslant g$ pp, et $\int_I g \, \mathrm{d}x < \varepsilon$.

53. Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, \mathrm{d}x = \lim \int_{-X}^{Y} f(x) \, \mathrm{d}x$ lorsque X et Y tendent indépendamment vers $+\infty$. En déduire que si une fonction f de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ possède une intégrale de Riemann généralisée sur $\mathbb{R}$, alors les deux intégrales coïncident. Montrer sur un exemple que l'intégrale de Riemann généralisée peut converger sans que f soit dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

54. Soit $f \in \mathcal{L}^1([a,b])$. Pour toute subdivision $\sigma = \{x_j\}_{j=1}^n$ de $[a,b]$, on pose

$$V_\sigma(f) = \sum_{0 \leqslant j < n} \Big| \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(t) \, \mathrm{d}t \Big|.$$

1) Montrer que, pour chaque σ et pour toutes fonctions f, g de $\mathcal{L}^1([a,b])$, on a $V_\sigma(f) \leqslant \int_a^b |f(t)| \, \mathrm{d}t$ et $|V_\sigma(f) - V_\sigma(g)| \leqslant V_\sigma(f - g)$

2) Montrer que $\lim_{\|\sigma\| \to 0} V_\sigma(f) = \int_a^b |f(t)| \, \mathrm{d}t$ en considérant d'abord le cas des fonctions continues.

55. La fonction $f(x) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2 \sin(1/x^2)) = 2x \sin(1/x^2) - (2/x)\cos(1/x^2)$ est-elle intégrable sur $]0,1[$?

56. On pose $f_n(x) = \sqrt{n}x/(1+x^2)^n \quad (x \geqslant 0,\ n = 2, 3, \ldots)$. Distinguer le vrai du faux parmi les assertions suivantes.

(i) La suite $\{f_n\}_{n=2}^\infty$ converge simplement vers 0 sur $[0, +\infty[$.

(ii) La suite $\{f_n\}_{n=2}^\infty$ converge uniformément vers 0 sur $[0, +\infty[$.

(iii) La suite $\{\int_0^\infty f_n(x) \, \mathrm{d}x\}_{n=2}^\infty$ converge vers 0.

(iv) La suite $\{f_n\}_{n=2}^\infty$ est dominée dans $\mathcal{L}^1([0, +\infty[)$.

57. Soit $\{f_n\}_{n=2}^\infty$ une suite de fonctions de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ convergeant uniformément vers une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

1) Montrer sur un exemple que f peut ne pas être intégrable.

2) On suppose de plus l'existence d'un ensemble intégrable E tel que $\operatorname{supp} f_n \subset E$ pour tout $n \geqslant 1$. Montrer que $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et $\lim_{n \to +\infty} \int f_n(x) \, \mathrm{d}x = \int f(x) \, \mathrm{d}x$.

3) Montrer que, si l'on suppose seulement que la suite $\{\|f_n\|_1\}_{n=1}^\infty$ est bornée, alors on a encore $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, mais plus nécessairement $\lim_{n \to +\infty} \int f_n(x) \, \mathrm{d}x = \int f(x) \, \mathrm{d}x$.

58. Pour $n \geqslant 1$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k} \mathbf{1}_{[k,k+1[}(x)$. Montrer que $f_n \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ pour tout $n \geqslant 1$, que la suite $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ et que la suite numérique $\{\int f_n(x)\,\mathrm{d}x\}_{n=1}^{\infty}$ est convergente. Que peut-on en conclure ?

59. Peut-on appliquer le théorème de la convergence dominée à la suite

$$f_n = \mathbf{1}_{[n,n+1/n]} \quad (n = 1, 2, \ldots) \quad ?$$

60. Soit f la fonction définie sur $]0,\infty[$ par $f(x) = x^{-1/2}(1 + |\log x|)^{-1}$. Déterminer l'ensemble des valeurs de p telles que $f \in \mathcal{L}^p]0,\infty[$.

61. Montrer que, pour tout intervalle borné $[a,b]$, on a $\mathcal{L}^p[a,b] \subset \mathcal{L}^q[a,b]$ pour $1 \leqslant q \leqslant p$.

62. Montrer que, pour $p < r < q$, on a $\mathcal{L}^p[0,\infty[\cap \mathcal{L}^q[0,\infty[\subset \mathcal{L}^r[0,\infty[$.

63. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction appartenant à la fois à $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et à $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ avec $p \geqslant 1$. On pose $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que l'on a $|F(x+h) - F(x)| = o(h^{1-1/p})$ lorsque $h \to 0$.

64. Soit f une fonction définie sur $[a,b]$ et telle que $f \in \mathcal{L}^p([a,b])$ pour tout $p \geqslant 1$. Montrer que $\lim_{p \to +\infty} \|f\|_p = \operatorname{essup}|f|$. Pourquoi la démonstration de ce résultat est-elle beaucoup plus simple que dans le cadre de l'intégrale de Riemann ?

65. On désigne par $\mathcal{L}^\infty(I)$ l'espace des fonctions réelles f mesurables sur un sous-intervalle I de $\mathbb{R}$ et telles que l'on ait pour une constante convenable M, $|f(x)| \leqslant M$ pp. On note alors $\|f\|_\infty =$ la borne inférieure de l'ensembles de tels M. Par ailleurs, on désigne par $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et périodiques de période 1.

1) Soit $f \in \mathcal{C}([0,1])$. Établir l'existence de $\lim_{n\to\infty}(1/n)\sum_{0\leqslant k\leqslant n-1} f(k/n)$ et exprimer sa valeur à l'aide d'une intégrale.

2) Soient $f \in \mathcal{C}([0,1])$, $g \in \mathcal{P}_1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^1([0,1])$. Montrer que

$$(*) \qquad \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(t)g(nt)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t.$$

On pourra introduire, pour $0 \leqslant k < n$, les intégrales $\int_k^{k+1} f(u/n)g(u)\,\mathrm{d}u$ et les comparer aux intégrales $\int_k^{k+1} f(k/n)g(u)\,\mathrm{d}u$.

3) Soit $g \in \mathcal{P}_1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^1([0,1])$. On pose $g_p(x) := \begin{cases} g(x) & \text{si } |g(x)| \leqslant p, \\ 0 & \text{si } |g(x)| > p. \end{cases}$ Montrer que $g_p \in \mathcal{P}_1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^\infty([0,1])$ et que g_p tend vers g dans $\mathcal{L}^1([0,1])$ lorsque $p \to \infty$.

4) Dans chacun des cas suivants, dire si la formule $(*)$ a un sens et, dans l'affirmative, discuter sa validité.

(a) $f \in \mathcal{L}^1([0,1])$, $g \in \mathcal{P}_1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^\infty([0,1])$.

(b) $f \in \mathcal{L}^1([0,1])$, $g \in \mathcal{P}_1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^1([0,1])$.

(c) $f \in \mathcal{L}^\infty([0,1])$, $g \in \mathcal{P}_1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^1([0,1])$.

Pour traiter le cas (c), on pourra faire appel au résultat de la question 3.

66. 1) Soit E un sous-ensemble mesurable de $\mathbb{R}$, de mesure de Lebesgue non nulle (éventuellement infinie). Montrer que l'intégrale

$$\alpha(E) := \int_E \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathbf{1}_E(x)\,\mathrm{d}x}{1+x^2}$$

est finie et strictement positive.

2) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable qui n'appartient pas à $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$. Montrer que, pour chaque entier $n \geqslant 1$, l'ensemble $E_n := \{x \in \mathbb{R} : |f(x)| > n\}$ est mesurable et de mesure de Lebesgue positive (éventuellement infinie).

3) Montrer que la série $g(x) := \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{1}_{E_n}(x)}{\alpha(E_n)n^2(1+x^2)}$ ne comporte, pour chaque nombre réel x, qu'un nombre fini de termes non nuls et définit une fonction de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

4) Montrer que $fg \notin \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

5) Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction mesurable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ appartienne à $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$ est que l'on ait $fg \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ pour toute fonction g de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

67. Soit $p > 1$ et $f \in \mathcal{L}^p]0,\infty[$. Montrer que l'intégrale

$$\int_0^\infty f(x)\frac{\sin xy}{x}\,\mathrm{d}x$$

est uniformément convergente sur tout compact.

68. Soient f, g des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ définies sur un intervalle compact $[a,b]$ et telles que

$$x \mapsto f(x)^2(1+\log^+ f(x)) \in \mathcal{L}^1[a,b], \qquad x \mapsto g(x)^2/(1+\log^+ g(x)) \in \mathcal{L}^1[a,b].$$

Montrer que $fg \in \mathcal{L}^1[a,b]$. $\big[$ On pourra considérer l'ensemble E des nombres x de $[a,b]$ tels que $f(x) \leqslant g(x)/(1+\log^+ g(x)).\big]$

69. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $f^{-1}([\alpha,+\infty[)$ soit mesurable pour tout $\alpha \in \mathbb{Q}$. Montrer que f est mesurable.

70. Montrer que tout sous-ensemble ouvert (resp. fermé) de $\mathbb{R}$ est mesurable.

71. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue presque partout. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose $E(\alpha) = f^{-1}([\alpha,+\infty[)$. Montrer que f est discontinue en tout point de $\overline{E(\alpha)} \smallsetminus E(\alpha)$. En déduire que f est mesurable.

72. Soit f une fonction définie et mesurable sur $[a,b]$. On pose $E_n = f^{-1}([n,n+1[)$. Montrer que $f \in \mathcal{L}^1([a,b])$ si, et seulement si, l'on a $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |n|\lambda(E_n) < \infty$.

73. Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et $E_n = \{x \in \mathbb{R} : |f(x)| > n\}$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} n\lambda(E_n) = 0$.

74. Soit $\mathcal{R}$ la relation d'équivalence définie sur $\mathbb{R}$ par $x\mathcal{R}y \iff (x-y) \in \mathbb{Q}$. On considère l'ensemble E obtenu (grâce à l'axiome du choix) en sélectionnant dans $[0,1[$ un représentant et un seul de chaque classe d'équivalence. Pour tout $A \subset \mathbb{R}$, on pose $r + A = \{r + a : a \in A\}$. Montrer que, si r et s sont des rationnels distincts, alors $r + E$ et $s + E$ sont disjoints. Établir les inclusions

$$[0,1] \subset \bigcup_{r\in\mathbb{Q}\cap[-1,1]} (r+E) \subset [-1,2].$$

En déduire que E n'est pas mesurable.

75. 1) Montrer que $\mathcal{L}^2[0,1] \subset \mathcal{L}^1[0,1]$. Cette inclusion est-elle stricte ?

2) Montrer que l'on a pour toute fonction $f \in \mathcal{L}^2[0,1]$

$$(\dagger) \qquad \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x = 0,$$

et donner une estimation de la vitesse de convergence.

3) Montrer, en faisant appel à un théorème fondamental de la théorie de l'intégration, que la relation (†) persiste sous l'hypothèse plus générale $f \in \mathcal{L}^1[0,1]$.

76. Soit f une fonction de $\mathcal{L}^\infty[1,2]$.

1) Montrer que $f \in \mathcal{L}^1[1,2]$.

2) Montrer que pour tout $y \in [1,2]$ et tout entier n fixé on a

$$(*) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}y^{-nk}}{k!} \int_1^2 x^{nk} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \Big(1 - \exp\{-(x/y)^n\}\Big) f(x)\,\mathrm{d}x.$$

3) On suppose désormais qu'il existe une constante M telle que

$$\sup_{m\geqslant 0} \Big| \int_1^2 x^m f(x)\,\mathrm{d}x \Big| \leqslant M.$$

Montrer que, pour y fixé, $1 < y \leqslant 2$, le membre de gauche de $(*)$ tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$. En déduire que $\int_y^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ pour $1 \leqslant y \leqslant 2$.

4) Montrer que $\int_A f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ pour tout ensemble mesurable A. (On pourra traiter en premier lieu le cas d'un intervalle, puis utiliser le fait que la fonction caractéristique $\mathbf{1}_A$ de A est limite simple presque partout d'une suite $\{\chi_n\}_{n=1}^\infty$ de combinaisons linéaires finies de fonctions caractéristiques d'intervalles.) En appliquant cette propriété aux ensembles

$$A_p = \{x \in [1,2] : f(x) \leqslant -1/p\} \qquad (p = 1, 2, \ldots),$$

montrer que $f(x) \geqslant 0$ presque partout, puis que $f(x) = 0$ presque partout.

77. Soit $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ une suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}$, intégrables et positives ou nulles convergeant presque partout vers une fonction intégrable f.

1) Montrer par un exemple que l'on n'a pas nécessairement

$$(\dagger) \qquad \lim_{n\to\infty} \int f_n\,\mathrm{d}x = \int f\,\mathrm{d}x.$$

2) Soit $g_n = \min(f_n, f)$ $(n \geqslant 1)$. Montrer que g_n converge en moyenne vers f.

3) Montrer que $(f - f_n)^+$ converge en moyenne vers 0.

4) Sous l'hypothèse supplémentaire que la relation (†) est satisfaite, montrer que f_n converge en moyenne vers f.

78. Soit $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite de fonctions réelles intégrables de signe quelconque convergeant presque partout vers une fonction intégrable f. On se propose de montrer que les deux conditions suivantes sont équivalentes :

$$\text{(a)} \qquad \lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_1 = 0$$
$$\text{(b)} \qquad \lim_{n\to\infty} \|f_n\|_1 = \|f\|_1.$$

1) Montrer l'implication (a) $\Rightarrow$ (b).
2) Sous l'hypothèse (b), établir les inégalités

$$\int_{\mathbb{R}} f^+ \,\mathrm{d}x \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n^+ \,\mathrm{d}x, \qquad \int_{\mathbb{R}} f^- \,\mathrm{d}x \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n^- \,\mathrm{d}x.$$

3) Montrer que l'hypothèse (b) implique

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n^+ \,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f^+ \,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n^- \,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f^- \,\mathrm{d}x.$$

4) En utilisant le résultat de l'exercice 77, montrer l'implication (b) $\Rightarrow$ (a).

79. 1) On pose $H_n(t) = e^{t^2} \dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} e^{-t^2}$. Montrer que $H_n(t)$ est un polynôme de degré n et calculer $H_n(0)$ en utilisant le développement en série de l'exponentielle.

2) Soit $\varphi(t) = \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x^2t^2-x} \,\mathrm{d}x$. Montrer l'existence d'une constante C_n ne dépendant que de n telle que $\left|\dfrac{\partial^n}{\partial t^n} e^{-x^2t^2}\right| \leqslant C_n x^n$ $(x \geqslant 0)$. En déduire que φ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, et écrire $\varphi^{(n)}(t)$ sous la forme d'une intégrale convergente. Calculer $\varphi^{(n)}(0)$.
[On rappelle que $\int_0^\infty e^{-x} x^n \,\mathrm{d}x = n!$]

3) Déterminer de domaine de convergence de la série de Taylor de φ à l'origine.

80. Calculer
$$H(y) = \int_0^{\infty} \frac{\sin xy}{x(1+x^2)} \,\mathrm{d}x \qquad (y \in \mathbb{R})$$
en utilisant le résultat de l'exercice 47.

Université de Lorraine
Faculté des sciences et technologies
Licence de mathématiques 1994/95
Calcul intégral et théorie de la mesure
Gérald Tenenbaum

IV

Convolution et transformation de Fourier (résumé)

1. Convolution

On appelle convolée (ou produit de convolution) de deux fonctions f, g de variable réelle à valeurs dans $\mathbb{C}$ la fonction définie par

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y \tag{1}$$

sur l'ensemble des valeurs de x où l'application $y \mapsto f(x-y)g(y)$ est dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Le théorème du changement de variables (III.3.9) montre immédiatement que $g * f(x)$ est définie en tout point x où $f * g(x)$ est définie et que l'on a alors $f * g(x) = g * f(x)$.

Théorème 1.1. *Si f et g sont $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, alors $f * g$ est partout définie et l'on a*

$$\|f * g\|_\infty := \sup_{x\in\mathbb{R}} |f * g(x)| \leqslant \|f\|_2 \|g\|_2.$$

Théorème 1.2. *Si f et g sont dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, alors $f * g$ est définie* pp *et l'application $x \mapsto f * g(x)$ peut être prolongée en une fonction de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ qui satisfait*

$$\|f * g\|_1 \leqslant \|f\|_1 \|g\|_1. \tag{2}$$

La démonstration utilise le résultat auxiliaire suivant.

Lemme 1.3. *Soient f et g deux fonctions de $\mathcal{M}(\mathbb{R})$. Alors la fonction de deux variables $h(x,y) := f(x-y)g(y)$ est dans $\mathcal{M}(\mathbb{R}^2)$.*

Démonstration du lemme. Par hypothèse, il existe une suite $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ (resp. $\{g_n\}_{n=1}^\infty$) de fonctions de $Esc_0(\mathbb{R})$ convergeant pp vers f (resp. g). Fixons n et désignons par $\{\alpha_i\}_{i=1}^k$ (resp. $\{\beta_j\}_{j=1}^\ell$) l'ensemble (fini) des points de discontinuité de f_n (resp. g_n). Alors l'ensemble des points de discontinuité de $h_n(x,y) := f_n(x-y)g_n(y)$ est contenu dans la réunion des droites $x-y=\alpha_i$ et $y=\beta_j$, donc h_n est Riemann-intégrable et par conséquent mesurable. Il reste à montrer que $h_n \to h$ pp. À cette fin, nous introduisons l'ensemble N_1 (resp. N_2) des nombres réels x tels que $f_n(x) \not\to f(x)$ (resp. $g_n(x) \not\to g(x)$). Par hypothèse, N_1 et N_2 sont négligeables et $h_n(x,y)$ tend vers $h(x,y)$ sauf peut-être lorsque $(x,y) \in A \cup B$, avec

$$A := \{(x,y) : x-y \in N_1\}, \qquad B := \{(x,y) : y \in N_2\}.$$

Montrons que A est négligeable, une démonstration semblable étant valable pour B. Soit $A_m := A \cap [-m, m]^2$. Alors $A = \cup_{m \geqslant 1} A_m$, et il suffit de prouver que A_m est négligeable. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe une famille dénombrable $\{I_j\}_{j=1}^{\infty}$ d'intervalles ouverts telle que $N_1 \subset \cup_{j=1}^{\infty} I_j$ et $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda(I_j) < \varepsilon/2m$. Maintenant, on a $A_m \subset \cup_{j=1}^{\infty} C_j$, avec $C_j := \{(x, y) : x - y \in I_j,\, |x| \leqslant m\}$. C_j est un domaine borné limité par un nombre fini de droites, donc C_j est mesurable. On a

$$\lambda(C_j) = \int_{-m}^{m} \mathrm{d}x \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{I_j}(x - y)\,\mathrm{d}y = 2m\lambda(I_j).$$

Par l'additivité dénombrable de la mesure de Lebesgue (Théorème III.6.5), il suit

$$\lambda(\cup_{j=1}^{\infty} C_j) \leqslant 2m \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(I_j) < \varepsilon.$$

Ainsi, pour chaque $p \geqslant 1$, il existe un ensemble mesurable E_p tel que $\lambda(E_p) \leqslant 1/p$ et $A_m \subset E_p$. On a $A_m \subset E := \cap_p E_p$ et $\lambda(E) = 0$. Donc A_m est bien négligeable. Cela achève la démonstration du lemme.

Démonstration du Théorème 1.2. Comme h est mesurable, on peut écrire

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}y \int_{-\infty}^{+\infty} |h(x, y)|\,\mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{+\infty} |g(y)|\,\mathrm{d}y \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x - y)|\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} |g(y)|\,\mathrm{d}y \|f\|_1 = \|f\|_1 \|g\|_1.\end{aligned} \tag{3}$$

Par le Corollaire III.8.3, cela implique que $h \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^2)$. Le théorème de Fubini permet alors d'affirmer que l'expression

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x, y)\,\mathrm{d}y$$

est finie pp et peut être prolongée en une fonction de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. L'inégalité (2) est alors une conséquence immédiate de (3).

Bien entendu, la classe dans $L^1(\mathbb{R})$ du produit de convolution de deux fonctions de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ ne dépend que des classes de f et g dans $L^1(\mathbb{R})$. On peut donc définir le produit de convolution dans $L^1(\mathbb{R})$, et c'est sous cette forme que nous considérerons désormais le produit de convolution.

Il découle immédiatement du théorème de Fubini et de l'invariance par translation de la mesure de Lebesgue que l'on a pour toutes fonctions f, g de $L^1(\mathbb{R})$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f * g(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x. \tag{2}$$

La convolution permet de montrer que l'ensemble $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ des fonctions C^{∞} à support compact est dense dans $L^1(\mathbb{R})$ — cf.exercice 81.

On peut définir également le produit de convolution d'une fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$ par une fonction $g \in L^2(\mathbb{R})$. Le théorème de Fubini permet, par une démonstration analogue à celle du Théorème 1.2, de montrer que l'intégrale (1) converge pp et définit une fonction de $L^2(\mathbb{R})$ telle que

$$\|f * g\|_2 \leqslant \|f\|_1 \|g\|_2$$

2. Transformation de Fourier

On désigne par $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \to B(\mathbb{R})$ l'application qui à toute fonction intégrable f associe la fonction définie par

$$\mathcal{F}f(\xi) = \widehat{f}(\xi) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-2\pi i\xi x}\,\mathrm{d}x.$$

Il est en effet immédiat que $\widehat{f}$ est bornée : on a $\|\widehat{f}\|_\infty \leqslant \|f\|_1$. On pose également

$$\overline{\mathcal{F}}f(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{2\pi i\xi x}\,\mathrm{d}x.$$

On vérifie sans difficulté que $\mathcal{F}$ est linéaire. Désignons par $\tau_y : L^1(\mathbb{R}) \to L^1(\mathbb{R})$ la translation définie par $\tau_y f(x) = f(x-y)$. Alors on a

$$\widehat{\tau_y f}(\xi) = e^{-2\pi i\xi y}\widehat{f}(\xi). \tag{5}$$

Semblablement, pour $g(x) := Tf(Tx)$ avec $T > 0$ on a

$$\widehat{g}(\xi) = \widehat{f}(\xi/T). \tag{6}$$

Théorème 2.1 (Riemann–Lebesgue). *Pour toute fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$, la fonction $\xi \mapsto \widehat{f}(\xi)$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ et tend vers 0 lorsque $|\xi| \to \infty$.*

Nous indiquons à l'exercice 85 une démonstration simple du fait que la transformation de Fourier n'est pas surjective sur l'espace des fonctions continues qui tendent vers 0 à l'infini.

La propriété fondamentale de la transformation de Fourier énoncée dans le théorème suivant est une conséquence immédiate de la formule (2), appliquée aux fonctions $x \mapsto e^{-2\pi i\xi x}f(x)$ et $x \mapsto e^{-2\pi i\xi x}g(x)$.

Théorème 2.2. *Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, on a $\widehat{f * g}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi)$.*

Théorème 2.3. (i) *Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ une fonction dérivable telle que f' soit bornée sur tout intervalle compact $[a, b]$ et intégrable sur $\mathbb{R}$. Alors on a*

$$\widehat{f'}(\xi) = 2\pi i\xi\widehat{f}(\xi) \qquad (\xi \in \mathbb{R}).$$

(ii) *Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $g : x \mapsto xf(x)$ soit également intégrable sur $\mathbb{R}$. Alors $\widehat{f}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et l'on a*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\widehat{f}(\xi) = -2\pi i\,\widehat{g}(\xi).$$

Nous rassemblons dans le théorème ci-dessous quelques calculs explicites de transformées de Fourier.

Théorème 2.4. *Posons, pour $a > 0$, $T > 0$,*

$$\varphi_a(x) := \frac{a}{\pi(a^2 + x^2)}, \qquad \psi_a(x) := a^{-1/2}e^{-\pi x^2/a}, \qquad w_T(x) := T\Big(\frac{\sin(\pi Tx)}{\pi Tx}\Big)^2.$$

On a

$$\widehat{\varphi_a}(\xi) = e^{-2\pi a|\xi|}, \qquad \widehat{\psi_a}(\xi) = e^{-\pi a\xi^2}, \qquad \widehat{w_T}(\xi) = \max(1 - |\xi|/T, 0) = \big(1 - |\xi|/T\big)^+.$$

La formule pour $\widehat{\varphi_a}(\xi)$ est obtenue par un calcul standard de résidus. Celle qui fournit $\widehat{w_T}(\xi)$ est du même type, mais un peu plus délicate : voir l'exercice 82.

Calculons $\widehat{\psi_a}(\xi)$. Il suffit de considérer le cas $a = 1$, puisque (6) appliquée avec $T = 1/\sqrt{a}$ fournit le cas général. Par dérivation sous le signe d'intégration, on peut écrire

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\widehat{\psi_1}(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2 - 2\pi i\xi x}(-2\pi i x)\,\mathrm{d}x \\
&= -i\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2-2\pi i\xi x}(2\pi x + 2\pi i\xi)\,\mathrm{d}x - 2\pi\xi\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2-2\pi i\xi x}\,\mathrm{d}x \\
&= -2\pi\xi\widehat{\psi_1}(\xi).
\end{aligned}$$

En résolvant l'équation différentielle, on obtient que $\widehat{\psi_1}(\xi) = \widehat{\psi_1}(0)e^{-\pi\xi^2}$. Or, un calcul classique utilisant les coordonnées polaires fournit $\widehat{\psi_1}(0)^2 = 1$. Cela implique bien la formule annoncée.

3. Formules d'inversion

Le résultat suivant, qui possède un intérêt intrinsèque, nous sera utile pour établir la formule d'inversion.

Théorème 3.1. *Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. On a*

$$\lim_{y\to 0}\|f - \tau_y f\|_1 = \lim_{T\to\infty}\|f - f * w_T\|_1 = 0.$$

Théorème 3.2 (Réciprocité L^1). *Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. Alors on a*

$$f(x) = \overline{\mathcal{F}}\widehat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty}\widehat{f}(\xi)e^{2\pi i\xi x}\,\mathrm{d}\xi \quad \text{pp.} \tag{7}$$

L'égalité (7) a lieu en particulier en tout point de continuité de f.

Démonstration. La preuve repose sur la formule

$$w_T(x) = \int_{-T}^{T}\Big(1 - \frac{|\xi|}{T}\Big)e^{2\pi i\xi x}\,\mathrm{d}\xi, \tag{8}$$

qui est établie élémentairement. Maintenant, on a

$$\begin{aligned}
f * w_T(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)\,\mathrm{d}y\int_{-T}^{T}\Big(1-\frac{|\xi|}{T}\Big)e^{2\pi i\xi y}\,\mathrm{d}\xi \\
&= \int_{-T}^{T}\Big(1-\frac{|\xi|}{T}\Big)e^{2\pi i\xi x}\,\mathrm{d}\xi\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)e^{-2\pi i\xi(x-y)}\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{-T}^{T}\Big(1-\frac{|\xi|}{T}\Big)e^{2\pi i\xi x}\widehat{f}(\xi)\,\mathrm{d}\xi,
\end{aligned} \tag{9}$$

où nous avons utilisé successivement le théorème de Fubini et le changement de variables $z = x - y$. Si $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, le théorème de Lebesgue implique donc que l'on a pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{T\to\infty} f * w_T(x) = \int_{-\infty}^{+\infty}\widehat{f}(\xi)e^{2\pi i\xi x}\,\mathrm{d}\xi. \tag{10}$$

Or, il découle du Théorème 3.1 et du Théorème III.5.2 que la limite précédente est égale à $f(x)$ pp. Cela fournit bien (7).

Pour établir que (7) est valable en tout point de continuité de f, nous utilisons le Théorème 2.4 sous la forme $\widehat{w_1}(0) = 1$. Cela permet d'écrire pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(x) - f * w_T(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) w_1(y)\,\mathrm{d}y - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - y/T) w_1(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \big(f(x) - f(x - y/T)\big) w_1(y)\,\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Comme $w_1 \geqslant 0$, on en déduit

$$|f(x) - f * w_T(x)| \leqslant \sup_{|h| \leqslant T^{-1/3}} |f(x) - f(x-h)| \widehat{w_1}(0) + \int_{|y| > T^{2/3}} \{|f(x)| + |f(x - y/T)|\} \frac{\mathrm{d}y}{\pi^2 y^2}.$$

Supposons que f soit continue au point x. Alors le premier terme du membre de droite tend vers 0 lorsque $T \to \infty$. De plus, la dernière intégrale n'excède pas

$$2\pi^{-2} |f(x)| T^{-2/3} + \pi^{-2} T^{-1/3} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x - y/T)|\,\mathrm{d}(y/T) = |f(x)| T^{-2/3} + \pi^{-2} T^{-1/3} \|f\|_1.$$

Elle tend donc vers 0 lorsque $T \to \infty$. Compte tenu de (10), cela achève la démonstration.

Lorsqu'une fonction f possède des limites latérales en x, on pose

$$\widetilde{f}(x) = \tfrac{1}{2}\big(f(x+) + f(x-)\big).$$

Par ailleurs, rappelons qu'une fonction $f : I \to \mathbb{C}$ définie sur un intervalle I est dite de classe C^1 par morceaux s'il existe une famille finie $\{I_j\}_{j=1}^k$ de sous-intervalles ouverts disjoints de I telle que $I = \cup_{1 \leqslant j \leqslant k} \overline{I_j}$, f soit de classe C^1 sur chaque I_j et f' possède des limites latérales finies aux extrémités de chaque I_j. Le théorème suivant fournit des conditions suffisantes sur le comportement de f pour que l'intégrale de Fourier inverse de f soit semi-convergente au sens de Cauchy et ait pour valeur $\widetilde{f}(x)$.

Théorème 3.3 (Inversion locale). *Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Si f possède des limites latérales en x, on a*

$$\widetilde{f}(x) = \lim_{T \to \infty} \int_{-T}^{T} \Big(1 - \frac{|\xi|}{T}\Big) \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x}\,\mathrm{d}x. \tag{11}$$

Si de plus la fonction $\varphi_x(y) := \big(2\widetilde{f}(x) - f(x+y) - f(x-y)\big)/y$ est intégrable sur $]0,1[$, et en particulier lorsque f est de classe C^1 par morceaux dans un voisinage de x, on a

$$\widetilde{f}(x) = \lim_{T \to \infty} \int_{-T}^{T} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x}\,\mathrm{d}\xi. \tag{12}$$

En pratique, il faut donc retenir que (12) a lieu *partout* si f est C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$.

Démonstration du Théorème 3.3. Par (9), on voit que (10) équivaut à

$$\lim_{T \to \infty} f * w_T(x) = \widetilde{f}(x). \tag{13}$$

Or on a

$$\widetilde{f}(x) - f * w_T(x) = \int_0^{+\infty} \{2\widetilde{f}(x) - f(x - y/T) - f(x + y/T)\} w_1(y)\,\mathrm{d}y.$$

Par hypothèse, pour chaque $y > 0$ fixé le terme entre accolades tend vers 0 lorsque $T \to \infty$. On peut donc conclure comme dans dans la seconde partie de la démonstration du Théorème 3.2.

Montrons (12). On a

$$\begin{aligned}\int_{-T}^{T} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x} \,\mathrm{d}\xi &= \int_{-T}^{T} e^{2\pi i \xi x} \,\mathrm{d}\xi \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y) e^{-2\pi i \xi (x-y)} \,\mathrm{d}y \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y) \,\mathrm{d}y \int_{-T}^{T} e^{2\pi i \xi y} \,\mathrm{d}\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y) \frac{\sin 2\pi y T}{\pi y} \,\mathrm{d}y\,, \\ &= \int_{0}^{+\infty} \{f(x+y) + f(x-y)\} \frac{\sin 2\pi y T}{\pi y} \,\mathrm{d}y\end{aligned}$$

où l'interversion de l'ordre des intégrations découle du théorème de Fubini. Le calcul classique de l'intégrale semi-convergente (cf. par exemple les exercices 6 ou 39)

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin 2\pi y T}{\pi y} \,\mathrm{d}y = \tfrac{1}{2}$$

permet donc d'écrire

$$\begin{aligned}\widetilde{f}(x) - \int_{-T}^{T} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x} \,\mathrm{d}\xi &= \int_{0}^{+\infty} \{2\widetilde{f}(x) - f(x+y) - f(x-y)\} \frac{\sin 2\pi y T}{\pi y} \,\mathrm{d}y \\ &= \int_{0}^{+\infty} \varphi_x(y) \sin 2\pi y T \,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

Par hypothèse, $\varphi_x \in \mathcal{L}^1]0,1[$. On a donc

$$\lim_{T\to\infty} \int_{0}^{1} \varphi_x(y) \sin 2\pi y T \,\mathrm{d}y = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{T\to\infty} \int_{1}^{+\infty} \{f(x+y) + f(x-y)\} \frac{\sin 2\pi y T}{\pi y} \,\mathrm{d}y = 0,$$

d'après le le théorème de Riemann–Lebesgue. Comme de plus

$$\lim_{T\to\infty} \int_{1}^{+\infty} \widetilde{f}(x) \frac{\sin 2\pi y T}{\pi y} \,\mathrm{d}y = \widetilde{f}(x) \lim_{T\to\infty} \int_{T}^{+\infty} \frac{\sin 2\pi y}{\pi y} \,\mathrm{d}y = 0,$$

on obtient bien la conclusion attendue.

4. Transformation de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$

Nous utiliserons dans ce qui suit le résultat de l'exercice 83, soit

$$\|f\|_2 = \|\widehat{f}\|_2 \tag{14}$$

pour toute fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. Il est à noter que la formule de réciprocité L^1 implique immédiatement que sous ces hypothèses f et $\widehat{f}$ sont bornées et sont donc dans $L^2(\mathbb{R})$.

Théorème 4.1. (i) *L'espace* $E := L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ *est dense dans* $L^2(\mathbb{R})$ *pour la norme* L^2.
(ii) *L'espace* $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ *est dense dans* E *pour la norme* $\|f\| := \|f\|_1 + \|f\|_2$.
(iii) *Pour toute fonction* f *de* E, *on a* $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ *et la relation (14) est satisfaite.*

Démonstration. (i) Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$. Alors $f_T = f\mathbf{1}_{[-T,T]} \in E$ et

$$\|f - f_T\|_2^2 = \int_{|x|>T} |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x$$

tend vers 0 lorsque $T \to \infty$ par le théorème de Lebesgue.
(ii) Observons d'abord que l'on a

$$\lim_{y\to 0} \|f - \tau_y f\|_2 = 0.$$

Cela découle facilement du fait que l'espace $C_0(\mathbb{R})$ des fonctions continues à support compact est dense dans $L^2(\mathbb{R})$, et nous omettons les détails. Soit $f \in E$. Pour $a > 0$, posons $g_a = f * \varphi_a$ où φ_a est définie au Théorème 2.4. Cette convolution est bien définie puisque $\varphi_a \in L^2(\mathbb{R})$ (cf.Théorème 1.1). Par dérivation sous le signe d'intégration, on montre que g_a est de classe C^∞. De plus, comme $\widehat{\varphi_1}(0) = 1$ on a

$$f(x) - g_a(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \big(f(x) - f(x - ay)\big)\varphi_1(y) \,\mathrm{d}y,$$

d'où, par l'inégalité de Cauchy–Schwarz,

$$|f(x) - g_a(x)|^2 \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} \big|f(x) - f(x - ay)\big|^2 \varphi_1(y) \,\mathrm{d}y.$$

Le théorème de Fubini permet donc d'écrire

$$\|f - g_a\|_2^2 \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} \|f - \tau_{ay} f\|_2^2 \varphi_1(y) \,\mathrm{d}y.$$

Le théorème de Lebesgue implique que la dernière intégrale tend vers 0 lorsque $a \to 0$. On a donc $\lim_{a\to 0} \|f - g_a\|_2 = 0$. On établit de la même manière que $\lim_{a\to 0} \|f - g_a\|_1 = 0$. Enfin, on a, en désignant par ϑ_ε la fonction de $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ construite à l'exercice 81,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|\vartheta_\varepsilon g_a - g_a\|_j = 0 \qquad (j = 1, 2).$$

Cela montre bien que $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est dense dans E pour la norme indiquée.
Montrons la dernière assertion de l'énoncé. Si $f \in E$, on a

$$\widehat{g_a}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\widehat{\varphi_a}(\xi) = \widehat{f}(\xi)e^{-2\pi a|\xi|} \to \widehat{f}(\xi) \quad (a \to 0) \qquad \text{et} \qquad \|\widehat{g_a}\|_2 = \|g_a\|_2 \to \|f\|_2,$$

où nous avons utilisé (14) pour g_a. Par le théorème de Fatou, cela implique que $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R})$. Comme de plus $|\widehat{g_a}| \leqslant |\widehat{f}|$, on peut appliquer le théorème de Lebesgue pour établir que

$$\|f\|_2 = \lim_{a\to 0} \|g_a\|_2 = \lim_{a\to 0} \|\widehat{g_a}\|_2 = \|\widehat{f}\|_2.$$

Cela achève la démonstration du théorème.

Théorème 4.2 (Plancherel). *Il existe un unique opérateur $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ ayant les propriétés suivantes :*

(i) $\mathcal{F}f(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-2\pi i\xi x}\,\mathrm{d}x$ *si* $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$,

(ii) $(\forall f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})) \qquad \|\mathcal{F}f\|_2 = \|f\|_2$

(iii) $\mathcal{F}$ *est bijective et, plus précisément, on a :* $(\forall f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})) \quad \mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}f = \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}f = f$.

Démonstration. Observons d'abord qu'il existe au plus un opérateur satisfaisant les propriétés (i) et (ii). En effet, si $f \in L^2(\mathbb{R})$, toute suite $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ de fonction de E convergeant vers f dans $L^2(\mathbb{R})$ est telle que $\{\widehat{f_n}\}_{n=1}^\infty$ est de Cauchy, donc convergente, dans $L^2(\mathbb{R})$ et, puisque $\|\mathcal{F}f - \widehat{f_n}\|_2 = \|f - f_n\|_2$ on doit avoir

$$\mathcal{F}f := \lim_{n\to\infty} \mathcal{F}f_n \tag{15}$$

où la limite est prise dans $L^2(\mathbb{R})$.

Il est de plus évident que la formule (15) définit bien une isométrie sur $L^2(\mathbb{R})$ puisque (14) implique que la limite est indépendante de la suite $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ de fonctions de E convergeant vers f dans $L^2(\mathbb{R})$.

Il reste à établir le point (iii). Observons d'abord que la transformée de Fourier d'une fonction h de classe C^2 à support compact est nécessairement intégrable. En fait on a, grâce au Théorème 2.3(i),

$$|\widehat{h}(\xi)| \leqslant \min\{\|h\|_1,\ \|h''\|_1/(4\pi^2\xi^2)\}.$$

Par le Théorème 3.1, on a donc $h = \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}h = \mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}h$. Notons que $\overline{\mathcal{F}}h$ est intégrable et bornée, donc dans $L^2(\mathbb{R})$. Considérons alors une fonction quelconque $f \in L^2(\mathbb{R})$. Il existe une suite $\{h_n\}_{n=1}^\infty$ de fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ convergeant dans $L^2(\mathbb{R})$ vers f. D'après ce que nous venons de voir, on a $\mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}h_n = h_n$ pour chaque indice n et, en appliquant deux fois (ii), $\|\mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}h_n - \mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}f\|_2 = \|h_n - f\|_2 \to 0$ (noter que $\overline{\mathcal{F}}g = \mathcal{F}\check{g}$ où $\check{g}$ est définie par $\check{g}(x) = g(-x)$). Ainsi $f = \lim_n h_n = \lim_n \mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}h_n = \mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}f$. La relation $\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}f = f$ est établie de manière identique. Cela complète la démonstration du théorème.

Remarque. Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$. Alors $f_n := f\mathbf{1}_{[-n,n]} \in E$ et f_n converge vers f dans $L^2(\mathbb{R})$. D'après le Théorème III.7.4 il existe donc une suite d'entiers strictement croissante $\{n_j\}_{j=1}^\infty$ telle que

$$\mathcal{F}f(\xi) = \lim_{j\to\infty} \int_{-n_j}^{n_j} f(x)e^{-2\pi i\xi x}\,\mathrm{d}x \qquad \text{pp.} \tag{16}$$

Théorème 4.3. *Soient $f \in L^1(\mathbb{R})$, $g \in L^2(\mathbb{R})$. Alors on a*

$$\widehat{f * g}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi) \qquad \text{pp.} \tag{17}$$

Démonstration. Nous avons vu à la section 1 que $f * g \in L^2(\mathbb{R})$, donc les deux membres de (17) sont bien définis pp. D'après le Théorème 4.1, il existe une suite $\{g_n\}_{n=1}^\infty$ de fonctions de $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ qui tend vers g dans $L^2(\mathbb{R})$. Quitte à extraire une sous-suite, nous pouvons supposer que $g_n(\xi) \to g(\xi)$ pp (cf.Théorème III.7.3). Par le Théorème 2.2, il suit

$$\lim_{n\to\infty} \widehat{f * g_n}(\xi) = \lim_{n\to\infty} \widehat{f}(\xi)\widehat{g}_n(\xi) = \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi) \qquad \text{pp.}$$

Par ailleurs, nous avons grâce au théorème de Plancherel

$$\|\widehat{f * g} - \widehat{f * g_n}\|_2 \;=\; \|f * g - f * g_n\|_2 \;=\; \|f * (g - g_n)\|_2 \;\leqslant\; \|f\|_1\ \|g - g_n\|_2,$$

de sorte que $\widehat{f * g_n}$ tend vers $\widehat{f * g}$ dans $L^2(\mathbb{R})$. En extrayant au besoin une nouvelle sous-suite, on peut donc écrire

$$\lim_{n\to\infty} \widehat{f * g_n}(\xi) = \lim_{n\to\infty} \widehat{f * g}(\xi) \qquad \text{pp},$$

d'où le résultat annoncé.

Université de Lorraine
Faculté des sciences et technologies
Licence de mathématiques 1994/95
Calcul intégral et théorie de la mesure
Gérald Tenenbaum

Exercices sur la transformation de Fourier

81. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $f(x) > 0$ pour tout nombre réel x. Montrer que, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^*$, on a $|\widehat{f}(\xi)| < \widehat{f}(0)$.

82. Pour $a > 0$, on pose $\varphi_a(x) = \dfrac{a}{\pi(a^2+x^2)}$. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$.

1) Montrer que $f_a(x) = f * \varphi_a(x)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

2) Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\int_{|x|>\varepsilon} \varphi_a(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{2a}{\pi\varepsilon}.$$

3) Montrer que $\| f - f_a \|_1 \leqslant \sup_{|y|\leqslant\varepsilon} \|f - \tau_y f\|_1 + (4a/\pi\varepsilon)\ \| f \|_1$. En déduire que $\lim_{a\to 0} \| f - f_a \|_1 = 0$.

4) Soit ϑ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\vartheta(x) = \begin{cases} \exp\{1-(1-x^2)^{-2}\} & \text{si } |x| < 1, \\ 0 & \text{si } |x| \geqslant 1. \end{cases}$$

Dessiner sommairement le graphe de ϑ. Montrer que ϑ est de classe C^∞. Pour $\varepsilon > 0$, on définit ϑ_ε par $\vartheta_\varepsilon(x) = \vartheta(\varepsilon x)$. Montrer que, pour toute fonction $g \in L^1(\mathbb{R})$, on a $\lim_{\varepsilon\to 0} \|g\vartheta_\varepsilon - g\|_1 = 0$.

5) Déduire des résultats des questions 3 et 4 que l'espace vectoriel $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ des fonctions à support compact et de classe C^∞ est dense dans $L^1(\mathbb{R})$.

83. 1) Montrer par intégration complexe que l'on a pour $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2ax - \cos 2bx}{x^2}\,\mathrm{d}x = 2\pi(b-a).$$

2) En déduire que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Big(\frac{\sin \pi x}{\pi x}\Big)^2 e^{-2\pi i\xi x}\,\mathrm{d}x = (1-|\xi|)^+.$$

Calculer, pour $T > 0$, la transformée de Fourier de la fonction $w_T(x) = T\Big(\dfrac{\sin \pi Tx}{\pi Tx}\Big)^2$.

84. 1) Soient f, $g \in L^1(\mathbb{R})$. Montrer que $f\widehat{g} \in L^1(\mathbb{R})$ et établir la formule

$$(\dagger) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\widehat{g}(x)\,\mathrm{d}x$$

2) En appliquant $(\dagger)$ avec $g = \overline{\widehat{f}}$ montrer que la formule de Plancherel

$$\|f\|_2 = \|\widehat{f}\|_2$$

est valable pour toute fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$.

85. En utilisant (†), montrer que

$$\int_0^{+\infty} e^{-2\pi x}\Big(\frac{\sin\pi x}{\pi x}\Big)^2 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{4} - \frac{\log 2}{2\pi}.$$

86. Soit $\mathcal{C}^*(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ qui tendent vers 0 lorsque $|x| \to \infty$. Soit φ une fonction impaire de $\mathcal{C}^*(\mathbb{R})$ telle que $\varphi = \widehat{f}$ pour une certaine fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$.

Montrer que $\varphi(x) = -i\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin(2\pi xt)\,\mathrm{d}t$. En déduire que

$$\sup_{y\geqslant 1}\Big|\int_1^y \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x\Big| < \infty.$$

En déduire que la transformation de Fourier $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^*(\mathbb{R})$ n'est pas surjective.

87. Calculer la transformée de Fourier de $f(x) = 1/\operatorname{ch}\pi x$ en intégrant $e^{-2\pi iz\xi}/\operatorname{ch}\pi z$ sur le bord du rectangle de sommets $\pm R$, $\pm R + i$. [Réponse : $\widehat{f}(\xi) = 1/\operatorname{ch}\pi\xi = f(\xi)$.]

88. On pose $\varphi_n(x) = (-1)^n e^{\pi x^2}\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}e^{-2\pi x^2}$. Trouver une équation différentielle satisfaite par $\widehat{\varphi}_0$ et déterminer cette fonction. Montrer que $\varphi_n(x) = 2\pi x\varphi_{n-1}(x) - \varphi'_{n-1}(x)$ pour $n \geqslant 1$ et établir que la suite des fonctions $i^n\widehat{\varphi}_n(\xi)$ vérifie la même relation de récurrence. Calculer $\widehat{\varphi}_n(\xi)$ pour $n \geqslant 1$ en fonction de $\varphi_n(\xi)$.

89. Soit $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ (espace de Schwartz) l'espace vectoriel des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe C^∞ telles que $x^p f^{(n)}(x)$ soit bornée pour tous entiers $n, p \geqslant 0$. Déterminer l'équation différentielle satisfaite par $\widehat{f}(\xi)$ si f est solution dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ de l'équation différentielle $f''(x) + xf'(x) + f(x) = 0$. En déduire que cette équation possède effectivement des solutions dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ et les déterminer.

90. Montrer que l'équation homogène associée à l'équation différentielle

$$(*) \qquad f''(t) - 2f'(t) + 2f(t) = e^{-|t|}$$

n'a pas de solution non-triviale dans $L^1(\mathbb{R})$. En utilisant la transformée de Fourier trouver une solution intégrable de $(*)$ et montrer qu'elle est unique.

91. Soit φ une fonction de classe C^∞ et à support compact inclus dans $[-1, 1]$.

1) Montrer que la formule $\widehat{\varphi}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)e^{-2\pi izx}\,\mathrm{d}x$ définit un prolongement holomorphe de $\widehat{\varphi}(\xi)$. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 0$, on a

$$(1 + |z|)^n|\widehat{\varphi}(z)| \leqslant C_n e^{2\pi|\Im m\, z|}.$$

2) Soit F une fonction entière vérifiant $(1 + |z|)^n|F(z)| = O(e^{2\pi|\Im m\, z|})$ pour chaque entier $n \geqslant 1$. Montrer que la restriction de F à $\mathbb{R}$ est intégrable et que

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi)e^{2\pi ix\xi}\,\mathrm{d}\xi$$

est de classe C^∞. Grâce à une intégration complexe, établir que le support de φ est inclus dans $[-1, 1]$. Montrer que $\widehat{\varphi}(\xi) = F(\xi)$.

3) Énoncer le théorème démontré dans cet exercice.

92. On convient dans cet exercice qu'une fonction de $L^1(\mathbb{R})$ est dite continue si sa classe coïncide avec celle d'une fonction continue. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ une fonction paire bornée dans un voisinage de l'origine.

1) Montrer que $\widehat{f}(\xi)$ est réelle et paire.

2) On pose $f_T := f * w_T$. Montrer que $f_T(0)$ est borné indépendamment de T. En déduire que si $\widehat{f}$ est de signe constant à l'infini (c'est-à-dire s'il existe un ξ_0 tel que $\widehat{f}(\xi)$ soit de signe constant pour $|\xi| > \xi_0$) alors $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ et f est continue. Autrement dit : si $f \in L^1(\mathbb{R})$ n'est pas continue, alors $\widehat{f}(\xi)$ change infiniment souvent de signe lorsque $|\xi| \to \infty$. [Indication : utiliser les deux expressions pour $f_T(0)$ obtenues dans la démonstration du Théorème 3.2.]

93. Soit $g \in L^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R})$ et f une solution intégrable de classe C^2 de l'équation différentielle $f'' - f + g = 0$.

1) Montrer que $f'' \in L^1(\mathbb{R})$ et en déduire que $f'(x) \to 0$ lorsque $|x| \to \infty$.

2) Pour $a, b \in \mathbb{R}^+$, $\xi \in \mathbb{R}$, évaluer $\displaystyle\int_{-a}^{b} f''(x)e^{-2\pi i\xi x}\,\mathrm{d}x$ en intégrant deux fois par parties. Montrer que $f(x)e^{-2\pi ix\xi}$ tend vers une limite $h^{\pm}(\xi)$ lorsque $x \to \pm\infty$. En déduire que $h^{\pm}(\xi) = 0$.

3) Montrer que $\widehat{f''}(\xi) = -4\pi^2\xi^2\widehat{f}(\xi)$.

4) Calculer $\widehat{f}(\xi)$ et en déduire une expression de f en fonction de g. Montrer que cette expression définit bien une solution de l'équation différentielle initiale.

94. Calculer $\mathcal{F}\mathbf{1}_{[-1,1]}$. Appliquer le théorème d'inversion locale et en déduire $\mathcal{F}f$ pour $f(x) = (\sin 2\pi x)/(\pi x) \in L^2(\mathbb{R})$.

95. Calculer $\mathcal{F}g$ pour $g(x) = x/(1 + x^2)$. Cette fonction est-elle continue à l'origine ?

96. Soient $f, g \in L^2(\mathbb{R})$. Montrer que $f * g = \overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}f \cdot \mathcal{F}g)$. Montrer que l'espace $L^2(\mathbb{R}) * L^2(\mathbb{R})$ des produits de convolution de deux fonctions de $L^2(\mathbb{R})$ est inclus dans l'espace $\mathcal{F}L^1(\mathbb{R})$ des transformées de Fourier de fonctions intégrables. Réciproquement, si $f \in L^1(\mathbb{R})$, poser $u := \overline{\mathcal{F}}\dfrac{f}{\sqrt{|f|}}$, $v := \overline{\mathcal{F}}\sqrt{|f|}$ et montrer que $u, v \in L^2(\mathbb{R})$, $u * v = \overline{\mathcal{F}}f$. En déduire que $\mathcal{F}L^1(\mathbb{R}) = L^2(\mathbb{R}) * L^2(\mathbb{R})$.

97. *Formule de Parseval.* Montrer que pour $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{g}(\xi)}\,\mathrm{d}x.$$

Application. Calculer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi|x|}\frac{\sin(2\pi x)}{\pi x}\,\mathrm{d}x$ en utilisant un résultat de l'exercice 93.

Université de Lorraine
Faculté des sciences et technologies
Licence de mathématiques 1994/95
Calcul intégral et théorie de la mesure
Gérald Tenenbaum

V

Intégrale abstraite (résumé)

1. Tribus. Espaces et applications mesurables

La théorie de l'intégrale abstraite est une construction axiomatique permettant de définir l'intégrale sur un espace quelconque à partir de la mesure de certains de ses sous-ensembles. Lorsqu'on l'applique à $\mathbb{R}$, on retrouve l'intégrale de Lebesgue dès qu'on impose que la mesure d'un intervalle fini $[a, b]$ est $b - a$. Nous verrons que cette extension n'est pas une généralisation gratuite : non seulement nous pourrons intégrer des fonctions définies sur des espaces naturels, comme la sphère de $\mathbb{R}^d$ ou l'ensemble des entiers relatifs, mais nous disposerons pour cela d'un cadre unique qui permettra de dégager de manière définitive les concepts-clefs.

Le point de départ de la théorie n'est pas, comme dans la construction que nous avons donnée de l'intégrale de Lebesgue, l'intégrale des fonctions en escalier mais celle des fonctions caractéristiques d'ensembles. Ainsi qu'il a été constaté pour la mesure de Lebesgue, il n'est pas possible en général de mesurer toutes les parties d'un ensemble E. L'axiome de base consiste à se donner une classe de parties mesurables satisfaisant aux propriétés minimales attendues — essentiellement les analogues des propriétés des parties Lebesgue-mesurables de $\mathbb{R}$.

Définition. *Une classe de parties d'un ensemble E est appelée une tribu si elle contient E et est stable par passage au complémentaire, et intersection ou réunion dénombrable.*

Un exemple trivial de tribu est la classe $\mathcal{P}(E)$ de toutes les parties de E. Un exemple moins évident est la classe de toutes les sous-réunions $\cup_{j\in\mathcal{J}} A_j$ ($\mathcal{J} \subset \mathbb{N}$) lorsque $\{A_j : j \in \mathbb{N}\}$ est une partition de E.

Lorsqu'un ensemble E est muni d'une tribu, on peut considérer celle-ci comme la classe des parties mesurables de E (pour une mesure qui reste à définir... et que nous définirons effectivement dans la suite !). La donnée du couple $(E, \mathcal{A})$ est désignée sous le nom d'*espace mesurable*. Bien entendu, un même espace E peut être sous-jacent à plusieurs espaces mesurables, associés à différentes tribus sur E.

Il est facile de vérifier qu'une intersection quelconque de tribus est encore une tribu. Pour toute classe $\mathcal{C}$ de parties de E, il existe donc une plus petite tribu contenant $\mathcal{C}$, définie comme l'intersection $\cap_{\mathcal{A}\supset\mathcal{C}}\mathcal{A}$ (non vide car on peut choisir $\mathcal{A} = \mathcal{P}(E)$) des tribus contenant $\mathcal{C}$. Cette plus petite tribu est appelée *tribu engendrée par* $\mathcal{C}$ *sur* E ; elle est notée $\tau_E(\mathcal{C})$, ou, lorsqu'aucune confusion n'est à craindre, simplement $\tau(\mathcal{C})$.

Définition. *On appelle tribu borélienne (ou tribu des parties boréliennes) de $\mathbb{R}^d$ la tribu $\tau(\mathcal{O})$ engendrée par la classe $\mathcal{O}$ des ouverts de $\mathbb{R}^d$. On note $\beta(\mathbb{R}^d) = \tau(\mathcal{O})$ et l'on désigne aussi par borélien un élément de cette tribu.*

Proposition 1.1. *Pour tout $d \geqslant 1$, la tribu borélienne $\beta(\mathbb{R}^d)$ coïncide avec la tribu engendrée par les pavés ouverts bornés.*

Démonstration. C'est immédiat en remarquant que tout ouvert de $\mathbb{R}^d$ est réunion dénombrable de pavés ouverts bornés, par exemple à sommets rationnels.

Considérons deux espaces mesurables $(E, \mathcal{A})$ et $(F, \mathcal{B})$. Nous dirons qu'une application $g : E \to F$ est mesurable si l'image réciproque de toute partie mesurable de F (c'est-à-dire un élément de $\mathcal{B}$) est mesurable dans E (c'est-à-dire appartient à $\mathcal{A}$). Il est facile de vérifier que la classe

$$g^{-1}(\mathcal{B}) = \{g^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}\}$$

est une tribu de parties de E. On peut donc énoncer que *g est mesurable si, et seulement si, $g^{-1}(\mathcal{B})$ est une sous-tribu de $\mathcal{A}$.* Deux cas particuliers de fonctions automatiquement mesurables sont à signaler : d'une part l'identité $i : E \to E$, d'autre part (cas un peu moins trivial) les fonctions constantes $f : E \to F$, avec $f(x) = y_0$, indépendant de x. On a en effet $f^{-1}(\mathcal{B}) = \{\varnothing, E\}$ (puisque $\varnothing \in \mathcal{B}$, $F \in \mathcal{B}$) et donc $f^{-1}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{A}$, puisque $\varnothing \in \mathcal{A}$, $E \in \mathcal{A}$.

La proposition suivante fournit un critère simple pour vérifier qu'une application est mesurable.

Proposition 1.2. *Soient $(E, \mathcal{A})$, $(F, \mathcal{B})$ deux espaces mesurables et $g : E \to F$. Pour toute classe $\mathcal{K}$ de parties de F, on a*

$$\tau_E\big(g^{-1}(\mathcal{K})\big) = g^{-1}\big(\tau_F(\mathcal{K})\big).$$

En particulier, si $\mathcal{B} = \tau(\mathcal{K})$, alors g est mesurable si, et, seulement si, $g^{-1}(\mathcal{K}) \subset \mathcal{A}$.

Dans le cas d'une fonction à valeurs réelles, on retrouve la caractérisation de Lebesgue des fonctions mesurables. Sauf mention contraire, $\mathbb{R}$ et tous les $\mathbb{R}^d$ sont systématiquement munis des tribus boréliennes.

Proposition 1.3. *Soit $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable et $f : E \to \mathbb{R}$. Alors f est mesurable si, et seulement si, les ensembles*

$$f^{-1}(]-\infty, a]), \quad f^{-1}(]-\infty, a[), \quad f^{-1}([a, +\infty[), \quad f^{-1}(]a, +\infty[)$$

sont dans $\mathcal{A}$ pour tout $a \in \mathbb{R}$. De plus, si la propriété est satisfaite pour les ensembles de l'un des quatre types, elle l'est aussi pour les trois autres.

Dans le cas $E = \mathbb{R}^d$, $F = \mathbb{R}^k$, on utilise souvent la dénomination *application borélienne* à la place d'application mesurable. Un cas particulier important de fonction borélienne est fourni par le résultat suivant.

Proposition 1.4. *Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$ une fonction continue. Alors f est borélienne.*

Il faut utiliser l'axiome du choix pour construire une fonction non borélienne. Nous montrerons plus loin que la classe des ensembles Lebesgue-mesurables est la tribu engendrée par les ouverts et les ensembles négligeables.

La proposition suivante montre qu'une composée de fonctions mesurables est mesurable.

Proposition 1.5. *Soient $(E, \mathcal{A})$, $(F, \mathcal{B})$, $(G, \mathcal{D})$ trois espaces mesurables. Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont des applications mesurables, il en va de même de $h = g \circ f$.*

La notion de sous-espace mesurable repose sur celle de tribu induite. Si $(E, \mathcal{A})$ est un espace mesurable et si $E_1 \subset E$, on désigne par *tribu induite de $\mathcal{A}$ sur E_1*, et l'on note $\mathcal{A}_1 = E_1 \cap \mathcal{A}$ (attention à cette écriture hybride !) la tribu définie par

$$\mathcal{A}_1 = \{A \cap E_1 : A \in \mathcal{A}\}.$$

Bien entendu, il faut vérifier que $\mathcal{A}_1$ est effectivement une tribu : cela découle immédiatement du fait que $\mathcal{A}_1 = i^{-1}(\mathcal{A})$ où i est l'injection canonique de E_1 dans E — puisque nous avons remarqué précédemment que l'image réciproque d'une tribu par une application quelconque est encore une tribu.

Proposition 1.6. *Soit $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable et $E_1 \subset E$. Si $E_1 \in \mathcal{A}$, alors on a*

$$\mathcal{A}_1 = E_1 \cap \mathcal{A} = \{A_1 : A_1 \subset E_1,\ A_1 \in \mathcal{A}\}.$$

De plus, pour toute classe $\mathcal{C}$ de parties de E, on a

$$E_1 \cap \tau_E(\mathcal{C}) = \tau_{E_1}(E_1 \cap \mathcal{C}),$$

et en particulier si $\mathcal{C}$ engendre $\mathcal{A}$, alors $E_1 \cap \mathcal{C}$ engendre $\mathcal{A}_1 = E_1 \cap \mathcal{A}$.

Pour tout espace mesurable $(F, \mathcal{B})$ et toute application mesurable $f : E \to F$, la restriction $f_1 = f|E_1 : E_1 \to F$ est encore mesurable si E_1 est muni de la tribu $\mathcal{A}_1 = E_1 \cap \mathcal{A}$. Une application $g : F \to E_1$ est mesurable en tant qu'application à valeurs dans l'espace mesurable $(E_1, \mathcal{A}_1)$ si, et seulement si, elle est mesurable en tant qu'application à valeurs dans l'espace mesurable $(E, \mathcal{A})$.

Démonstration. Lorsque $E_1 \in \mathcal{A}$, chaque ensemble $A \cap E_1$ avec $A \in \mathcal{A}$ est dans $\mathcal{A}$, donc $\mathcal{A}_1 \subset \{A_1 : A_1 \subset E_1,\ A_1 \in \mathcal{A}\}$. L'inclusion réciproque est triviale puisque tout $A_1 \in \mathcal{A}$ tel que $A_1 \subset E_1$ peut encore s'écrire $A_1 = A_1 \cap E_1$.

Soit $\mathcal{C}$ une classe de parties de E et i l'injection canonique $i : E_1 \to E$. On a

$$\tau_{E_1}(E_1 \cap \mathcal{C}) = \tau_{E_1}\big(i^{-1}(\mathcal{C})\big) = i^{-1}\big(\tau_E(\mathcal{C})\big) = E_1 \cap \tau_E(\mathcal{C}),$$

où la seconde égalité découle de la Proposition 1.2. Cela établit la seconde assertion de l'énoncé.

Considérons maintenant $f : E \to F$. Comme $i : E_1 \to E$ est trivialement mesurable lorsque E_1 est muni de la tribu $\mathcal{A}_1$, l'application $f_1 = f \circ i$ est mesurable d'après la Proposition 1.5. Pour toute application $g : F \to E_1$, on a

$$(i \circ g)^{-1}(\mathcal{A}) = g^{-1}\big(i^{-1}(\mathcal{A})\big) = g^{-1}(\mathcal{A}_1).$$

Or g (resp. $i \circ g : F \to E$) est mesurable si, et seulement si, $g^{-1}(\mathcal{A}_1) \subset \mathcal{B}$ (resp. $(i \circ g)^{-1}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{B}$). La mesurabilité de g et celle de $i \circ g$ sont donc bien équivalentes.

2. Produits d'espaces mesurables

Soit $\{(E_i, \mathcal{A}_i) : i \in \mathcal{I}\}$ une famille d'espaces mesurables. Il est naturel de munir le produit cartésien $E = \prod_{i \in \mathcal{I}} E_i$ d'une structure d'espace mesurable pour laquelle les applications coordonnées $X_i : E \to E_i$ sont mesurables. Plus généralement, on peut considérer le problème de trouver la plus petite tribu sur un ensemble E rendant mesurables des applications $f_i : E \to E_i$. Cette tribu est évidemment

$$\mathcal{A}^* = \tau_E\big(\cup_{i \in \mathcal{I}} f_i^{-1}(\mathcal{A}_i)\big).$$

En effet, la condition $f_i^{-1}(\mathcal{A}_i) \subset \mathcal{A}^*$ est nécessaire et suffisante pour que f_i soit mesurable. Nous désignons cette tribu comme la *tribu engendrée par les applications* f_i et notons

$$\mathcal{A}^* = \tau_E\big(f_i ; i \in \mathcal{I}\big),$$

où l'indice E peut être omis lorsqu'aucune confusion n'est à craindre. Le lemme très simple suivant nous sera utile.

Lemme 2.1. *Soient* $(E_i, \mathcal{A}_i)$ $(i \in \mathcal{I})$, $(E, \mathcal{A})$, $(F, \mathcal{B})$ *des espaces mesurables. Pour toutes applications* $f_i : F \to E_i$, $g : E \to F$, *on a*

$$\tau_E\big(f_i \circ g; i \in \mathcal{I}\big) = g^{-1}\big(\tau_F(f_i; i \in \mathcal{I})\big).$$

Démonstration. Soit $\mathcal{K} = \cup_{i\in\mathcal{I}} f_i^{-1}(\mathcal{A}_i)$. On a

$$\tau_F(f_i; i \in \mathcal{I}) = \tau_F(\mathcal{K}) \quad \text{et} \quad \tau_E\big(f_i \circ g; i \in \mathcal{I}\big) = \tau_E\big(\cup_{i\in\mathcal{I}}\, g^{-1}\big(f_i^{-1}(\mathcal{A}_i)\big)\big) = \tau_E\big(g^{-1}(\mathcal{K})\big).$$

Il suffit donc d'appliquer la Proposition 1.2.

Définition. *Soit* $\{(E_i, \mathcal{A}_i) : i \in \mathcal{I}\}$ *une famille d'espaces mesurables et* $E = \prod_{i\in\mathcal{I}} E_i$ *le produit cartésien des ensembles* E_i. *On appelle produit tensoriel des tribus* $\mathcal{A}_i$, *et on note* $\otimes_{i\in\mathcal{I}}\mathcal{A}_i$, *la tribu* $\tau_E\big(X_i; i \in \mathcal{I}\big)$, *où les* $X_i : E \to E_i$ *sont les applications coordonnées. L'espace mesurable* $(E, \otimes_{i\in\mathcal{I}}\mathcal{A}_i)$ *est appelé espace mesurable produit des* $(E_i, \mathcal{A}_i)$ *et peut aussi être noté* $\prod_{i\in\mathcal{I}}(E_i, \mathcal{A}_i)$.

Dans le cas d'un produit fini, on peut caractériser simplement le produit tensoriel $\otimes_{i\in\mathcal{I}}\mathcal{A}_i$. Pour toute famille $\{\mathcal{C}_i : i \in \mathcal{I}\}$ où $\mathcal{C}_i$ est pour chaque i une classe de parties de E_i, nous notons $\prod_{i\in\mathcal{I}} \mathcal{C}_i$ la classe de parties de E définie par

$$\prod_{i\in\mathcal{I}} \mathcal{C}_i = \Big\{\prod_{i\in\mathcal{I}} C_i : C_i \in \mathcal{C}_i \ (i \in \mathcal{I})\Big\}.$$

Il est à noter que $\prod_{i\in\mathcal{I}} \mathcal{A}_i$ n'est pas en général une tribu.

Proposition 2.2. *Pour tout produit fini* $(E, \mathcal{A}) = \big(\prod_{i=1}^n E_i, \otimes_{i=1}^n\mathcal{A}_i\big)$ *d'espaces mesurables, on a*

$$\bigotimes_{i=1}^n \mathcal{A}_i = \tau_E\Big(\prod_{i=1}^n \mathcal{A}_i\Big).$$

Plus généralement, si $\mathcal{C}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ *est une classe de parties de* E_i *satisfaisant à*

$$\tau_{E_i}(\mathcal{C}_i) = \mathcal{A}_i \quad \text{et} \quad E_i \in \mathcal{C}_i \qquad (1 \leqslant i \leqslant n),$$

alors on a

$$\bigotimes_{i=1}^n \mathcal{A}_i = \tau_E\Big(\prod_{i=1}^n \mathcal{C}_i\Big).$$

Démonstration. On a $\otimes_{i=1}^n\mathcal{A}_i = \tau_E\big(\cup_{i=1}^n X_i^{-1}(\mathcal{A}_i)\big)$ et

$$X_i^{-1}(\mathcal{A}_i) = \big\{A_i \times \prod_{j\neq i} E_j : A_i \in \mathcal{A}_i\big\} \subset \tau_E\Big(\prod_{i=1}^n \mathcal{A}_i\Big) \qquad (1 \leqslant i \leqslant n),$$

où nous avons noté par abus d'écriture

$$A_i \times \prod_{j\neq i} E_j = E_1 \times \ldots \times E_{i-1} \times A_i \times E_{i+1} \ldots \times E_n.$$

Cela implique immédiatement $\otimes_{i=1}^n\mathcal{A}_i \subset \tau_E\Big(\prod_{i=1}^n \mathcal{A}_i\Big)$. Réciproquement, pour $A_i \in \mathcal{A}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, on a

$$\prod_{i=1}^n A_i = \bigcap_{i=1}^n \Big(A_i \times \prod_{j\neq i} E_j\Big) = \bigcap_{i=1}^n X_i^{-1}(A_i) \in \bigotimes_{i=1}^n \mathcal{A}_i,$$

donc $\tau_E\Big(\prod_{i=1}^n \mathcal{A}_i\Big) \subset \otimes_{i=1}^n \mathcal{A}_i$.

Pour établir la seconde assertion, on remarque d'abord que $\prod_{i=1}^n \mathcal{C}_i \subset \prod_{i=1}^n \mathcal{A}_i$, donc

$$\tau_E\Big(\prod_{i=1}^n \mathcal{C}_i\Big) \subset \tau_E\Big(\prod_{i=1}^n \mathcal{A}_i\Big) = \bigotimes_{i=1}^n \mathcal{A}_i.$$

Réciproquement, l'hypothèse $E_i \in \mathcal{C}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ montre que

$$X_i^{-1}(C_i) = C_i \times \prod_{j \neq i} E_j \in \prod_{i=1}^n \mathcal{C}_i,$$

donc

$$X_i^{-1}(\mathcal{A}_i) = X_i^{-1}\big(\tau_{E_i}(\mathcal{C}_i)\big) = \tau_E\big(X_i^{-1}(\mathcal{C}_i)\big) \subset \tau_E\Big(\prod_{i=1}^n \mathcal{C}_i\Big) \qquad (1 \leqslant i \leqslant n).$$

Il s'ensuit que $\cup_{i=1}^n X_i^{-1}(\mathcal{A}_i) \subset \tau_E\Big(\prod_{i=1}^n \mathcal{C}_i\Big)$, et finalement

$$\bigotimes_{i=1}^n \mathcal{A}_i = \tau_E\Big(\bigcup_{i=1}^n X_i^{-1}(\mathcal{A}_i)\Big) \subset \tau_E\Big(\prod_{i=1}^n \mathcal{C}_i\Big).$$

Corollaire. *Pour tout entier $d \geqslant 1$, on a $\beta(\mathbb{R}^d) = \otimes_{i=1}^d \beta(\mathbb{R})$ et, plus généralement, pour toute décomposition $d = \sum_{i=1}^k d_i$ avec $d_i \in \mathbb{N}$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$, on a*

$$\beta(\mathbb{R}^d) = \otimes_{i=1}^k \beta(\mathbb{R}^{d_i}).$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer la seconde assertion de la proposition précédente en choisissant pour classe $\mathcal{C}_i$ la classe des pavés ouverts de $\mathbb{R}^{d_i}$. On a $\beta(\mathbb{R}^{d_i}) = \tau(\mathcal{C}_i)$, grâce à la Proposition 1.1, et la Proposition 2.2 fournit

$$\bigotimes_{i=1}^k \beta(\mathbb{R}^{d_i}) = \bigotimes_{i=1}^k \tau\big(\mathcal{C}_i\big) = \tau\Big(\prod_{i=1}^k \mathcal{C}_i\Big).$$

Comme $\prod_{i=1}^k \mathcal{C}_i$ est évidemment la classe des pavés ouverts de $\mathbb{R}^d$ on a

$$\tau\Big(\prod_{i=1}^k \mathcal{C}_i\Big) = \beta(\mathbb{R}^d),$$

d'où découle la conclusion annoncée.

La proposition suivante fournit un critère effectif pour qu'une application à valeurs dans un espace mesurable produit soit mesurable : il faut et il suffit que les applications coordonnées le soient.

Proposition 2.3. *Soit $f : (F, \mathcal{B}) \to (E, \mathcal{A}) = \big(\prod_{i=1}^n E_i, \otimes_{i=1}^n \mathcal{A}_i\big)$ une application à valeurs dans un espace mesurable produit. Alors f est mesurable si, et seulement si, les applications coordonnées $f_i = X_i \circ f$ sont toutes mesurables.*

Démonstration. Par définition, f est mesurable si, et seulement si, $f^{-1}\big(\otimes_{i=1}^n \mathcal{A}_i\big) \subset \mathcal{B}$. Par définition, on a $\otimes_{i=1}^n \mathcal{A}_i = \tau_E\big(\cup_{i=1}^n X_i^{-1}(\mathcal{A}_i)\big)$, d'où

$$\begin{aligned} f^{-1}\Big(\otimes_{i=1}^n \mathcal{A}_i\Big) &= f^{-1}\Big(\tau_E\big(\cup_{i=1}^n X_i^{-1}(\mathcal{A}_i)\big)\Big) = \tau_F\Big(f^{-1}\big(\cup_{i=1}^n X_i^{-1}(\mathcal{A}_i)\big)\Big) \\ &= \tau_F\big(\cup_{i=1}^n f_i^{-1}(\mathcal{A}_i)\big) = \tau_F(f_i; 1 \leqslant i \leqslant n). \end{aligned}$$

Il suit que f est mesurable si, et seulement si, $\tau_F(f_i; 1 \leqslant i \leqslant n) \subset \mathcal{B}$, ce qui signifie précisément que toutes les applications f_i sont mesurables.

Nous pouvons déduire du théorème précédent un lien entre la mesurabilité d'une fonction de plusieurs variables et celle des applications partielles. Nous procédons en deux temps, déduisant le cas général de celui de deux variables.

Proposition 2.4. *Soit $f : (E_1 \times E_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2) \to (F, \mathcal{B})$ une application mesurable. Alors les applications partielles $f^x : y \mapsto f(x,y)$ et $f_y : x \mapsto f(x,y)$ sont mesurables pour tous $x \in E_1$, $y \in E_2$ respectivement.*

Démonstration. Considérons, pour $x \in E_1$ fixé, l'application $g^x : E_2 \to E_1 \times E_2$ définie par $g^x(y) = (x,y)$. La Proposition 2.3 implique que g^x est mesurable puisque ses applications coordonnées le sont : en effet, g_1^x est l'application constante $y \mapsto x$, g_2^x est l'identité, et nous avons remarqué au §1 que ces deux applications sont mesurables. Maintenant, on voit que $f^x = f \circ g^x$ est mesurable en tant que composée d'applications mesurables (Proposition 1.5). Un raisonnement symétrique fournit le résultat relatif à f_y.

La réciproque de la Proposition 2.4 est fausse. On peut avoir f^x et f_y mesurables pour tous x, y sans que f soit mesurable.

On appelle *section* d'un sous-ensemble A d'un produit cartésien $E_1 \times E_2$ un ensemble du type $A^x = \{y \in E_2 : (x,y) \in A\}$ ou $A^y = \{x \in E_1 : (x,y) \in A\}$. La Proposition 2.4 implique donc que *toute section d'un ensemble mesurable est mesurable.*

On peut mettre la Proposition 2.4 en parallèle avec le théorème de Fubini pour l'intégrale de Lebesgue, qui précise que les applications partielles d'une fonction intégrable sont presque partout intégrables, d'où l'on déduit facilement que les applications partielles d'une fonction Lebesgue-mesurable sont presque partout Lebesgue-mesurables. Cependant, il n'est pas exact que *toutes* les applications partielles d'une fonction Lebesgue-mesurable de $\mathbb{R}^2$ soient Lebesgue-intégrables. Cela provient du fait que la tribu associée à la mesure de Lebesgue en dimension 2 n'est pas exactement le produit tensoriel des tribus de Lebesgue sur la droite. Nous reviendrons sur ce point à la section suivante.

Proposition 2.5. *Soit $f : \left(\prod_{i=1}^n E_i, \otimes_{i=1}^n \mathcal{A}_i\right) \to (F, \mathcal{B})$ une application mesurable. Alors toutes les applications partielles obtenues en fixant certaines des variables sont mesurables.*

Démonstration. Supposons par exemple que l'on fixe les p premières coordonnées. Posons $(E_1', \mathcal{A}_1') = \left(\prod_{i=1}^p E_i, \otimes_{i=1}^p \mathcal{A}_i\right)$, $(E_2', \mathcal{A}_2') = \left(\prod_{i=p+1}^n E_i, \otimes_{i=p+1}^n \mathcal{A}_i\right)$. Alors l'application $g : E_1' \times E_2' \to \left(\prod_{i=1}^n E_i, \otimes_{i=1}^n \mathcal{A}_i\right)$ définie par $g(x,y) = (x,y)$ est mesurable d'après la Proposition 2.3, et donc $f \circ g = \widetilde{f} : E_1' \times E_2' \to (F, \mathcal{B})$, définie par $\widetilde{f}(x,y) = f((x,y))$, est mesurable en tant que composée de fonctions mesurables. Le résultat souhaité découle alors de la Proposition 2.4.

Considérons une famille finie d'applications réelles $f_i : E_i \to \mathbb{R}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. On appelle *produit tensoriel des f_i*, et l'on note $f = \otimes_{i=1}^n f_i$, l'application $f : E = \prod_{i=1}^n E_i \to \mathbb{R}$ définie par $f(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^n f_i(x_i)$.

Proposition 2.6. *Soit $f = \otimes_{i=1}^n f_i$ un produit tensoriel d'applications réelles définie sur un ensemble mesurable produit $\left(\prod_{i=1}^n E_i, \otimes_{i=1}^n \mathcal{A}_i\right)$. On suppose qu'aucune des f_i n'est identiquement nulle. Alors f est mesurable si, et seulement si, toutes les applications f_i le sont.*

Démonstration. L'application $g : \left(\prod_{i=1}^n E_i, \otimes_{i=1}^n \mathcal{A}_i\right) \to \left(\mathbb{R}^n, \beta(\mathbb{R}^n)\right)$ définie par

$$g(x_1, \ldots, x_n) = \big(f_1(x_1), \ldots, f_n(x_n)\big)$$

est, d'après la Proposition 2.3, certainement mesurable si les f_i le sont puisque les applications partielles satisfont à $X_i \circ g = f_i \circ X_i$. Comme l'application $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ telle que $\pi(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \cdots x_n$ est mesurable car continue, on voit que $f = \pi \circ g$ est mesurable en tant que composée d'applications mesurables.

Réciproquement, supposons les f_i non identiquement nulles et choisissons x_i^* $(2 \leqslant i \leqslant n)$ tel que $f_i(x_i^*) \neq 0$. Posons $K = \prod_{i=2}^n f_i(x_i^*) \neq 0$. La fonction partielle $x_1 \mapsto f(x_1, x_2^*, \ldots, x_n^*) = K f_1(x_1)$ est mesurable d'après la Proposition 2.5. Cela implique

que f_1 est mesurable car, pour tout borélien B de $\mathbb{R}$, l'ensemble $B' = \{x/K : x \in B\}$ est encore un borélien, donc $f_1^{-1}(B) = (Kf_1)^{-1}(B')$ est bien dans $\mathcal{A}_1$. Par symétrie, toutes les autres f_i sont également mesurables.

Les deux propositions suivantes concernent les fonctions mesurables réelles.

Proposition 2.7. *Soit $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable. L'ensemble des fonctions mesurables réelles $f : E \to \mathbb{R}$ est une algèbre réticulée, c'est-à-dire stable par les opérations $f \mapsto \alpha f$ $(\alpha \in \mathbb{R})$, $(f, g) \mapsto f + g$, $(f, g) \mapsto fg$, $(f, g) \mapsto \sup(f, g)$, $(f, g) \mapsto \inf(f, g)$.*

Démonstration. Si f, g sont mesurables, la fonction $\vartheta : (E, \mathcal{A}) \to \big(\mathbb{R}^2, \beta(\mathbb{R}^2)\big)$ définie par $\vartheta(x) = \big(f(x), g(x)\big)$ est mesurable d'après la Proposition 2.3. Comme les applications de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ envoyant respectivement (u, v) sur αu, $u + v$, uv, $\sup(u, v)$, $\inf(u, v)$ sont mesurables car continues (Proposition 1.4), on conclut que les applications considérées dans l'énoncé sont mesurables en tant que composées d'applications mesurables (Proposition 1.5).

Proposition 2.8. *Soit $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite de fonctions mesurables réelles définies sur un espace mesurable $(E, \mathcal{A})$. Alors les fonctions*

$$\sup_n f_n, \quad \inf_n f_n, \quad \limsup_n f_n, \quad \liminf_n f_n$$

sont finies sur des ensembles mesurables et définissent sur leurs ensembles de finitude respectifs des fonctions mesurables. En particulier, l'ensemble de convergence

$$K = \big\{x : \{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \text{converge}\big\}$$

est mesurable, et toute limite simple d'une suite de fonctions mesurables est mesurable.

Démonstration. Considérons le cas de $f(x) = \sup_n f_n(x) \in \overline{\mathbb{R}}_+$. L'ensemble de finitude de f est $D = f^{-1}(\mathbb{R}) = \cup_{m\geqslant 1} \cap_{n\geqslant 1} f_n^{-1}(]-m, m[)$. Cet ensemble est donc mesurable d'après la Proposition 1.3. Notons encore f la restriction de f à D. Les sous-ensembles mesurables de D sont les ensembles mesurables inclus dans D (Proposition 1.6). Or, pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'ensemble $f^{-1}(]-\infty, a]) = \cap_n f_n^{-1}(]-\infty, a])$ est inclus dans D et mesurable. Par la Proposition 1.3, il suit que f est mesurable sur D. On procède de façon similaire pour les trois autres cas — en utilisant, par exemple, le résultat que nous venons de démontrer pour établir la mesurabilité de $\limsup f_n$. L'ensemble de convergence $K = (g-h)^{-1}(\{0\})$, avec $g = \limsup f_n$, $h = \liminf f_n$, est donc également mesurable.

3. Mesures positives, espaces mesurés

Définition. *On appelle mesure positive sur un espace mesurable $(E, \mathcal{A})$ une application $\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ qui est dénombrablement additive. Le triplet $(E, \mathcal{A}, \mu)$ est alors appelé un espace mesuré.*

Exemples.

1. Considérons un ensemble dénombrable E. La *mesure de comptage* définie sur la tribu $\mathcal{P}(E)$ par $\mu(A) = |A|$ si A est fini et $\mu(A) = \infty$ si A est infini est une mesure positive.

2. La mesure de Lebesgue λ est une mesure positive sur la tribu borélienne $\beta(\mathbb{R})$. Il suffit de vérifier que tout borélien est Lebesgue-mesurable. Il est immédiat (cf.Théorème III.6.5) que l'ensemble $\mathcal{A}$ des parties Lebesgue-mesurables est une tribu. Comme les intervalles ouverts sont mesurables et engendrent $\beta(\mathbb{R})$, on a nécessairement $\beta(\mathbb{R}) \subset \mathcal{A}$. Désignons par $\beta^*(\mathbb{R})$ la tribu engendrée sur $\mathbb{R}$ par les intervalles ouverts et les ensembles Lebesgue-négligeables. On a en fait

$$\mathcal{A} = \beta^*(\mathbb{R}).$$

L'inclusion $\mathcal{A} \supset \beta^*(\mathbb{R})$ est évidente puisque $\mathcal{A}$ est une tribu et contient à la fois les intervalles ouverts et les ensembles négligeables. Réciproquement, si A est un ensemble Lebesgue-mesurable, il existe une suite $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ de fonctions en escalier convergeant pp vers $\mathbf{1}_A$. Posons $A_{np} = \varphi_n^{-1}]1-1/p, 1+1/p[$. Alors A_{np} est un borélien car réunion finie d'intervalles (éventuellement réduits à un point). Donc $A' = \cap_{p \geqslant 1} \cup_{m \geqslant 1} \cap_{n \geqslant m} A_{np}$ est un borélien. Or A' est l'ensemble des x tels que $\forall p \geqslant 1\ \exists m \geqslant 1 : \forall n \geqslant m\ |\varphi_n(x) - 1| < 1/p$. En d'autres termes, A' est l'ensemble des x pour lesquels $\varphi_n(x) \to 1$. Il s'ensuit que $\mathbf{1}_{A'} = \mathbf{1}_A$ pp et donc $A = (A' \smallsetminus N_1) \cup N_2$ où N_1, N_2 sont négligeables. On a donc bien $A \in \beta^*(\mathbb{R})$.

Plus généralement, la tribu des ensembles Lebesgue-mesurables sur $\mathbb{R}^d$ est la tribu $\beta^*(\mathbb{R}^d)$ engendrée par les boréliens et les ensembles négligeables. Cela permet de comprendre pourquoi les sections d'une fonction Lebesgue mesurable de deux variables ne sont pas nécessairement Lebesgue mesurables : bien que $\beta(\mathbb{R}^2) = \beta(\mathbb{R}) \otimes \beta(\mathbb{R})$, on n'a pas $\beta^*(\mathbb{R}^2) = \beta^*(\mathbb{R}) \otimes \beta^*(\mathbb{R})$.

Dans les propositions qui suivent, nous énonçons les propriétés fondamentales des mesures positives.

Proposition 3.1. *Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Alors la mesure positive μ est croissante : pour tous A, B de $\mathcal{A}$ tels que $A \subset B$, on a $\mu(A) \leqslant \mu(B)$.*

Définition. *On dit qu'une mesure positive μ sur un espace mesurable $(E, \mathcal{A})$ est finie si on a $\mu(E) < \infty$. On dit qu'elle est σ-finie s'il existe une suite croissante d'ensembles $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ telle que $E = \cup_{n \geqslant 1} E_n$ et $\mu(E_n) < \infty$ pour tout n.*

La mesure de comptage est σ-finie sur $\mathbb{R}$. La mesure de Lebesgue est finie sur tout intervalle borné, σ-finie sur $\mathbb{R}$.

Proposition 3.2. *Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Alors μ est sous-σ-additive, c'est-à-dire que l'on a pour toute famille dénombrable $\{A_j\}_{j \in \mathcal{J}}$ d'ensembles mesurables*

$$\mu\Big(\bigcup_{j \in \mathcal{J}} A_j\Big) \leqslant \sum_{j \in \mathcal{J}} \mu(A_j).$$

Proposition 3.3. *Toute mesure positive μ sur un espace mesurable $(E, \mathcal{A})$ possède la propriété de continuité croissante, c'est-à-dire qu'elle vérifie pour toute suite croissante $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ d'ensembles mesurables*

$$\mu\Big(\bigcup_{n \geqslant 1} A_n\Big) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n).$$

Réciproquement, pour qu'une application $\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ soit une mesure positive il faut et il suffit qu'elle soit additive et possède la propriété de continuité croissante.

La continuité croissante équivaut au théorème de la convergence monotone pour les fonctions indicatrices d'ensembles.

Le résultat suivant est à la base de tous les théorèmes d'unicité de mesures. Il joue aussi un rôle important dans l'étude des mesures produits.

Théorème 3.4. *Soient μ_1, μ_2 deux mesures positives définies sur un même espace mesurable $(E, \mathcal{A})$ et $\mathcal{C}$ une classe de parties de $\mathcal{A}$ satisfaisant aux trois propriétés suivantes*

(i) *$\mathcal{C}$ est stable par intersection finie,*

(ii) *μ_1 et μ_2 sont finies et coïncident sur $\mathcal{C}$,*

(iii) *il existe une suite croissante $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ d'ensembles de $\mathcal{C}$ telle que $\cup_{n \geqslant 1} E_n = E$.*

Alors μ_1 et μ_2 coïncident sur $\tau(\mathcal{C})$.

La dernière hypothèse est souvent utilisée en pratique sous la forme plus forte $E \in \mathcal{C}$. Le théorème montre en particulier que la mesure de Lebesgue est la seule mesure positive sur $\mathbb{R}$ telle que $\mu([a,b]) = b - a$. Il suffit d'appliquer le résultat à la classe $\mathcal{C}$ des intervalles fermés, qui engendre $\beta(\mathbb{R})$ ainsi qu'on peut facilement le déduire de la Proposition 1.1.

Nous aurons besoin du lemme suivant pour établir le Théorème 3.4.

Lemme 3.5. *Soit $\mathcal{C}$ une classe de parties de E stable par intersection finie et contenant E. Alors toute classe $\mathcal{D}$ de parties de E stable par différence*[1] *et limite croissante et contenant $\mathcal{C}$ contient $\tau(\mathcal{C})$.*

Démonstration du lemme. On peut supposer que $\mathcal{D}$ est la plus petite (c'est-à-dire l'intersection) des classes satisfaisant aux conditions de l'énoncé. Il suffit alors de montrer que $\mathcal{D}$ est une tribu. Comme $\mathcal{D}$ contient E et est stable par limite croissante, il ne reste qu'à établir que $\mathcal{D}$ est stable par intersection finie. En effet, la stabilité par différence impliquera alors la stabilité par réunion finie, d'où la stabilité par réunion dénombrable grâce à la stabilité par limite croissante.

Nous devons donc montrer que $A \in \mathcal{D}, D \in \mathcal{D} \Rightarrow A \cap \mathcal{D} \in \mathcal{D}$. Pour cela, nous procédons en plusieurs étapes et introduisons, pour A quelconque dans E, l'ensemble $\mathcal{D}_A = \{D \in \mathcal{D} : D \cap A \in \mathcal{D}\}$. Alors :

(i) $\mathcal{D}_A$ est stable par différence, puisque pour tous D_1, D_2 de $\mathcal{D}$ tels que $D_1 \subset D_2$ on a $D_2 \smallsetminus D_1 \in \mathcal{D}$ et $(D_2 \smallsetminus D_1) \cap A = (D_2 \cap A) \smallsetminus (D_1 \cap A) \in \mathcal{D}$,

(ii) $\mathcal{D}_A$ est stable par limite croissante, puisque pour toute suite croissante $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ d'éléments de $\mathcal{D}_A$ la suite croissante $\{D_n \cap A\}_{n=1}^{\infty}$ est constituée d'éléments de $\mathcal{D}$ et satisfait donc à $(\cup_n D_n) \cap A = \cup_n (D_n \cap A) \in \mathcal{D}$,

(iii) $\mathcal{D}_A$ contient $\mathcal{C}$ dès que $A \in \mathcal{C}$, puisque dans ce cas, pour tout $C \in \mathcal{C}$, on a $C \in \mathcal{D}$ par hypothèse sur $\mathcal{D}$, $C \cap A \in \mathcal{C}$ par hypothèse sur $\mathcal{C}$, et donc $C \in \mathcal{D}_A$.

Comme $\mathcal{D}$ est la plus petite classe satisfaisant les trois propriétés ci-dessus, on en déduit que $A \in \mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{D}_A \supset \mathcal{D}$, et donc $\mathcal{D}_A = \mathcal{D}$. Autrement dit, nous avons montré que

$$D \in \mathcal{D},\ A \in \mathcal{C} \Rightarrow A \cap D \in \mathcal{D},$$

ce que nous pouvons encore réécrire

$$A \in \mathcal{D},\ D \in \mathcal{C} \Rightarrow A \cap D \subset \mathcal{D},$$

c'est-à-dire que $A \in \mathcal{D} \Rightarrow \mathcal{D}_A \supset \mathcal{C}$. D'après les points (i) et (ii) ci-dessus, on obtient donc que $\mathcal{D}_A$ possède les trois propriétés de l'énoncé, et la minimalité de $\mathcal{D}$ nous permet à nouveau d'inférer que $\mathcal{D}_A = \mathcal{D}$, c'est-à-dire : $A \in \mathcal{D}$, $D \in \mathcal{D} \Rightarrow A \cap D \in \mathcal{D}$. La classe $\mathcal{D}$ est donc bien stable par intersection finie, et le lemme est démontré.

Démonstration du théorème. Soit $\mathcal{B}$ la classe des parties sur lesquelles μ_1 et μ_2 coïncident. Nous devons montrer que $\mathcal{B} \supset \tau(\mathcal{C})$. Nous savons que $\mathcal{B} \supset \mathcal{C}$, et il est clair que $\mathcal{B}$ est stable par différence et limite croissante car μ_1 et μ_2 sont des mesures positives (cf.Proposition 3.3). Donc, le lemme 3.5 implique certainement $\mathcal{B} \supset \tau(\mathcal{C})$ dans le cas particulier $E \in \mathcal{B}$. Sous la condition plus générale (iii) de l'énoncé, on applique le résultat précédent à $(E_n, \mathcal{A}_n)$ avec $\mathcal{A}_n = \{A \in \mathcal{A} : A \subset E_n\}$. Comme $E_n \in \mathcal{A}$, la classe $\mathcal{A}_n$ est bien une tribu (Proposition 1.6). Posant $\mathcal{C}_n = \{C \in \mathcal{C} : C \subset E_n\}$, on obtient que μ_1 et μ_2 coïncident sur $\tau_{E_n}(\mathcal{C}_n)$. Or la Proposition 1.6 montre que $\tau_{E_n}(\mathcal{C}_n) = E_n \cap \tau(\mathcal{C}) = \{C \cap E_n : C \in \tau(\mathcal{C})\}$. On a donc $\mu_1(C \cap E_n) = \mu_n(C \cap E_n)$ pour tout C de $\tau(\mathcal{C})$. En prenant la limite croissante, on obtient donc $\mu_1(C) = \mu_2(C)$ grâce à la Proposition 3.3.

1. Par « stable par différence », on entend ici la propriété :

$$D_1 \in \mathcal{D},\ D_2 \in \mathcal{D} \text{ et } D_1 \subset D_2 \Rightarrow \mathcal{D}_2 \smallsetminus D_1 \in \mathcal{D}.$$

4. Intégrale des fonctions étagées positives

Définition. *Une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ est dite étagée si $f(E)$ est fini.*

Une fonction en escalier est étagée, mais la réciproque est fausse : par exemple, $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ est étagée sans être en escalier.

Proposition 4.1. *Une fonction étagée $f : (E, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}$, définie sur un espace mesurable $(E, \mathcal{A})$, est mesurable si, et seulement si, $f^{-1}(\{y\}) \in \mathcal{A}$ pour tout $y \in \mathbb{R}$. L'ensemble des fonctions réelles étagées et mesurables définies sur $(E, \mathcal{A})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel engendré par les fonctions indicatrices $\mathbf{1}_A$ $(A \in \mathcal{A})$.*

Il est à noter que la première assertion de la proposition ne s'étend pas à toutes les fonctions réelles. Un contre-exemple est fourni par la fonction identité $x \mapsto x$ considérée comme application de $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$ dans $\big(\mathbb{R}, \beta(\mathbb{R})\big)$, où $\mathcal{A}$ est la tribu des parties dénombrables ou co-dénombrables (i.e. dont le complémentaire est dénombrable). On a bien $f^{-1}(\{y\}) = \{y\} \in \mathcal{A}$ pour tout y, mais $f^{-1}([0,1]) = [0,1] \notin \mathcal{A}$.

Nous notons $\mathcal{E}^+ = \mathcal{E}^+(E, \mathcal{A})$ l'ensemble des fonctions mesurables étagées positives définies sur un espace mesurable $(E, \mathcal{A})$. $\mathcal{E}^+$ n'est pas un espace vectoriel car il n'est stable que par multiplication par un nombre réel positif ou nul : c'est un cône. Une application $\varphi : \mathcal{E}^+ \to \mathcal{E}^+$ satisfaisant à $\varphi(f+g) = \varphi(f) + \varphi(g)$ et $\varphi(\alpha f) = \alpha\varphi(f)$ $(\alpha \geqslant 0)$ est dite *semi-linéaire.*

Définition. *Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. L'intégrale d'une fonction $f \in \mathcal{E}^+$ est le nombre de $\overline{\mathbb{R}}_+$*

$$\int_E f(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \int_E f\,\mathrm{d}\mu = \sum_{y \in f(E)} y\mu\big(f^{-1}(\{y\})\big),$$

où, par convention, le terme correspondant à $y = 0$ est considéré comme nul même si $\mu\big(f^{-1}(\{0\})\big) = \infty$.

On pourra aussi utiliser les notations moins lourdes $\{f = y\}$ ou $f^{-1}(y)$ à la place de $f^{-1}(\{y\})$. Dans le cas de la mesure de Lebesgue sur la droite, on notera simplement $\mathrm{d}x$ au lieu de $\mathrm{d}\lambda(x)$. Il est à noter que, pour $\mu = \lambda$ et lorsque f est une fonction en escalier positive, la définition de $\int_E f\,\mathrm{d}x$ est bien consistante avec celle que nous avons antérieurement employée pour l'intégrale de Lebesgue.

On a $\int_E \mathbf{1}_A\,\mathrm{d}\mu = \mu(A)$ pour tout $A \in \mathcal{A}$. L'intégrale des fonctions de $\mathcal{E}^+$ généralise donc la notion de mesure.

Proposition 4.2. *L'application $f \mapsto \int_E f\,\mathrm{d}\mu$ définie sur $\mathcal{E}^+$ est semi-linéaire, croissante, et satisfait à la propriété de continuité croissante : pour toute suite croissante $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ de fonctions de $\mathcal{E}^+$ convergeant vers une fonction $f \in \mathcal{E}^+$, on a (dans $\overline{\mathbb{R}}_+$)*

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n\,\mathrm{d}\mu = \int_E f\,\mathrm{d}\mu.$$

Démonstration. Bornons-nous à établir la dernière propriété, qui équivaut au théorème de la convergence monotone sur $\mathcal{E}^+$. La croissance de l'intégrale implique immédiatement l'inégalité

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n\,\mathrm{d}\mu \leqslant \int_E f\,\mathrm{d}\mu.$$

Pour montrer la réciproque, nous introduisons un paramètre $\alpha \in [0,1[$ et considérons $A_n = \{x \in E : f_n(x) \geqslant \alpha f(x)\}$ $(n \geqslant 1)$. Pour chaque n fixé, $f_n - \alpha f$ est mesurable d'après la Proposition 2.7, donc $A_n = (f_n - \alpha f)^{-1}\big([0,\infty[\big) \in \mathcal{A}$. De plus, comme $\{f_n\}_{n=1}^\infty$

est croissante, la suite $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ est croissante pour l'inclusion et le fait que $\lim_n f_n = f$ implique que $\cup_n A_n = E$. On peut alors écrire

$$\int_E f_n \,\mathrm{d}\mu \geqslant \int_E \mathbf{1}_{A_n} \alpha f \,\mathrm{d}\mu = \alpha \int_E \mathbf{1}_{A_n} f \,\mathrm{d}\mu = \alpha \sum_{y \in f(E)} y\mu\big(A_n \cap f^{-1}(y)\big).$$

Par la propriété de continuité croissante sur les ensembles (Proposition 3.3), le terme général de la somme en y tend vers $y\mu\big(f^{-1}(y)\big)$ lorsque $n \to \infty$. D'où

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n \,\mathrm{d}\mu \geqslant \alpha \int_E f \,\mathrm{d}\mu.$$

On peut alors faire tendre α vers 1, et en déduire la conclusion souhaitée.

5. Intégrale des fonctions mesurables positives

Nous construisons l'intégrale des fonctions mesurables positives de manière analogue à celle de l'intégrale de Lebesgue des fonctions de $\mathcal{L}^+$. Le rôle des fonctions en escalier est joué ici par les fonctions étagées.

Définition. *Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f : E \to \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable. L'intégrale de f sur E relativement à la mesure μ est le nombre de $\overline{\mathbb{R}}_+$*

$$\int_E f(x) \,\mathrm{d}\mu(x) = \int_E f \,\mathrm{d}\mu = \sup_{g \leqslant f,\, g \in \mathcal{E}^+} \int_E g \,\mathrm{d}\mu.$$

La proposition suivante montre que l'on aurait obtenu une définition équivalente en considérant des limites croissantes, comme dans notre présentation de l'intégrale de Lebesgue. Nous notons $\mathcal{M}^+ = \mathcal{M}^+(E, \mathcal{A})$ le cône des fonctions mesurables positives sur $(E, \mathcal{A})$.

Proposition 5.1. *Soit $f \in \mathcal{M}^+(E, \mathcal{A})$. Alors il existe au moins une suite croissante $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ de fonctions de $\mathcal{E}^+$ qui converge simplement vers f. De plus, pour toute suite ayant cette propriété, on a*

$$\int_E f \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Démonstration. Posons $A_{jn} = f^{-1}\Big(\big[j/2^n, (j+1)/2^n\big[\Big)$, $B_n = f^{-1}\big([n, \infty[\big)$, et

$$f_n = \sum_{0 \leqslant j < n2^n} (j/2^n) \mathbf{1}_{A_{jn}} + n\mathbf{1}_{B_n}.$$

On a $f_n \in \mathcal{E}^+$ pour tout n, et il est facile de vérifier que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ est croissante et converge simplement vers f. Il est clair que $\lim_n \int_E f_n \,\mathrm{d}\mu \leqslant \int_E f \,\mathrm{d}\mu$. Pour montrer l'inégalité inverse, considérons une fonction arbitraire $g \in \mathcal{E}^+$ telle que $g \leqslant f$. Alors $g_n = \min(f_n, g) \in \mathcal{E}^+$ et g_n tend simplement vers g. D'après la Proposition 4.2 (continuité croissante de l'intégrale sur $\mathcal{E}^+$), on a $\lim_n \int_E g_n \,\mathrm{d}\mu = \int_E g \,\mathrm{d}\mu \leqslant \lim_n \int_E f_n \,\mathrm{d}\mu$. En reportant dans la définition de $\int_E f \,\mathrm{d}\mu$, on en déduit que $\lim_n \int_E f_n \,\mathrm{d}\mu \geqslant \int_E f \,\mathrm{d}\mu$, ce qui achève la démonstration.

Le résultat suivant montre que la Proposition 4.2 s'étend aux fonctions mesurables positives.

Théorème 5.2. *L'application $f \mapsto \int_E f\,\mathrm{d}\mu$, définie $\mathcal{M}^+(E,\mathcal{A})$, est semi-linéaire, croissante, et satisfait à la propriété de continuité croissante forte : si $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ est une suite croissante de fonctions de $\mathcal{M}^+(E,\mathcal{A})$ convergeant simplement vers une fonction $f : E \to \mathbb{R}_+$, alors f est mesurable et l'on a (dans $\overline{\mathbb{R}}_+$)*

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n\,\mathrm{d}\mu = \int_E f\,\mathrm{d}\mu.$$

Corollaire 5.3 (σ-additivité). *Pour toute série convergente $\sum f_n$ de fonctions de $\mathcal{M}^+(E,\mathcal{A})$, on a (dans $\overline{\mathbb{R}}_+$)*

$$\int_E \sum_n f_n\,\mathrm{d}\mu = \sum_n \int_E f_n\,\mathrm{d}\mu.$$

Corollaire 5.4 (Inégalité de Fatou). *Pour toute suite $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ de fonctions de $\mathcal{M}^+(E,\mathcal{A})$ on a*

$$\int_E \liminf_n f_n\,\mathrm{d}\mu \leqslant \liminf_n \int_E f_n\,\mathrm{d}\mu.$$

Le corollaire 5.3 découle immédiatement du théorème en l'appliquant à la suite des sommes partielles. Le corollaire 5.4 est établi en considérant la suite croissante des fonctions $F_n = \inf_{k\geqslant n} f_k$ et en remarquant que $\int_E F_n\,\mathrm{d}\mu \leqslant \inf_{k\geqslant n}\int_E f_k\,\mathrm{d}\mu$, puisque $F_n \leqslant f_k$ pour tout $k \geqslant n$. Il suit

$$\int_E \liminf_n f_n\,\mathrm{d}\mu = \int_E \lim_n F_n\,\mathrm{d}\mu = \lim_n \int_E F_n\,\mathrm{d}\mu \leqslant \liminf_n \int_E f_n\,\mathrm{d}\mu.$$

Démonstration du Théorème 5.2. Montrons seulement la continuité croissante, les autres propriétés découlant simplement de la Proposition 4.2. La mesurabilité de la limite simple f a été établie à la Proposition 2.8. Il est clair que $\lim_n \int_E f_n\,\mathrm{d}\mu \leqslant \int_E f\,\mathrm{d}\mu$. Pour prouver l'inégalité opposée, nous allons montrer l'existence d'une suite croissante $\{g_n\}_{n=1}^\infty$ de fonctions de $\mathcal{M}^+(E,\mathcal{A})$ telle que $g_n \leqslant f_n$ pour tout n et $\lim_n g_n = f$. Le résultat souhaité découlera alors de la Proposition 5.1 sous la forme

$$\int_E f\,\mathrm{d}\mu = \lim_n \int_E g_n\,\mathrm{d}\mu \leqslant \lim_n \int_E f_n\,\mathrm{d}\mu.$$

Puisque $f_n \in \mathcal{M}^+(E,\mathcal{A})$, il existe, par la Proposition 5.1, une suite croissante $\{f_{np}\}_{p=1}^\infty$ de fonctions de $\mathcal{E}^+$ qui converge simplement vers f_n. Posons $g_p = \max_{n\leqslant p} f_{np}$. On a bien $g_p \leqslant f_p$ puisque $f_{np} \leqslant f_n \leqslant f_p$ ($n \leqslant p$). De plus

$$g_p = \max_{n\leqslant p} f_{np} \leqslant \max_{n\leqslant p+1} f_{np} \leqslant \max_{n\leqslant p+1} f_{n,p+1} = g_{p+1}.$$

Enfin, on a bien $\lim_p g_p = f$ puisque d'une part $g_p \leqslant f_p \leqslant f$ et d'autre part $g_p \geqslant f_{np}$, d'où $\lim_p g_p \geqslant \lim_p f_{np} = f_n$ et donc $\lim_p g_p \geqslant \lim_n f_n = f$. Cela achève la démonstration.

Les deux théorèmes suivants fournissent d'importants procédés de construction de mesures.

Théorème 5.5. *Soit $(E,\mathcal{A},\mu)$ un espace mesuré et $f \in \mathcal{M}^+(E,\mathcal{A})$. Alors il existe une unique mesure ν sur $(E,\mathcal{A})$ telle que*

$$\nu(A) = \int_E \mathbf{1}_A f\,\mathrm{d}\mu \qquad (A \in \mathcal{A}),$$

que l'on désigne comme la mesure de densité f par rapport à μ et que l'on note $\nu = f\mu$. Pour toute fonction $g \in \mathcal{M}^+(E,\mathcal{A})$, on a

$$\int_E g\,\mathrm{d}\nu = \int_E gf\,\mathrm{d}\mu. \tag{1}$$

Démonstration. Pour montrer que l'application $\nu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ est bien une mesure positive, il suffit de vérifier qu'elle est σ-additive, les autres propriétés étant évidentes. Pour toute suite $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ de parties mesurables de E deux à deux disjointes, on a, notant $A = \cup_n A_n$,

$$\mathbf{1}_A f = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{A_n} f.$$

Par la σ-additivité de μ (corollaire 5.3), on en déduit que $\nu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n)$. La formule (1) est vérifiée pour $g = \mathbf{1}_A$ ($A \in \mathcal{A}$) par définition de ν. Par semi-linéarité, elle reste valable pour $g \in \mathcal{E}^+$. Par limite croissante, elle est donc encore satisfaite pour toute $g \in \mathcal{M}^+$ — cf. Proposition 5.1 et Théorème 5.2.

Un exemple important de mesure à densité est fourni par le choix $f = \mathbf{1}_B$, où $B \in \mathcal{A}$. On alors $\nu(A) = \mu(A \cap B)$ pour tout $A \in \mathcal{A}$ et $\int_E g \, \mathrm{d}\nu = \int_E g \mathbf{1}_B \, \mathrm{d}\mu = \int_B g \, \mathrm{d}\mu$, où cette dernière expression doit être interprétée comme l'intégrale de g relativement à la mesure induite par μ sur $(B, B \cap \mathcal{A})$.

Théorème 5.6. *Soient $(F, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré, $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable et $\varphi : F \to E$ une application mesurable. Alors il existe une unique mesure ν sur $(E, \mathcal{A})$ telle que*

$$\nu(A) = \mu\big(\varphi^{-1}(A)\big) \qquad (A \in \mathcal{A}),$$

que l'on désigne comme mesure image de μ par φ et que l'on note $\nu = \mu_\varphi$. Pour toute fonction $f \in \mathcal{M}^+(E, \mathcal{A})$, on a

(2) $$\int_E f \, \mathrm{d}\mu_\varphi = \int_F f \circ \varphi \, \mathrm{d}\mu.$$

Démonstration. L'application $\nu = \mu_\varphi$ est bien définie sur $\mathcal{A}$ et à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. Les propriétés de φ^{-1} impliquent immédiatement que ν est dénombrablement additive dès que μ l'est. La relation (2) est satisfaite lorsque $f = \mathbf{1}_A$ ($A \in \mathcal{A}$), puisque $\mathbf{1}_A \circ \varphi = \mathbf{1}_{\varphi^{-1}(A)}$. Par semi-linéarité, elle persiste donc pour $f \in \mathcal{E}^+(E, \mathcal{A})$, et par continuité croissante elle s'étend à $\mathcal{M}^+(E, \mathcal{A})$.

A titre d'exemple de mesure image, considérons le tore $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ muni de la plus petite tribu $\mathcal{A}$ rendant mesurable la projection canonique $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{T}$. On a donc $A \in \mathcal{A} \Leftrightarrow \pi^{-1}(A) = \{a \in \mathbb{R} : \overline{a} \in A\} \in \beta^*(\mathbb{R})$. Pour chaque $y \in \mathbb{R}$, la mesure $\nu_y = \mathbf{1}_{[y, y+1[} \lambda_\pi$ est alors définie par

$$\int_{\mathbb{T}} f(x) \, \mathrm{d}\nu_y(x) = \int_y^{y+1} f(\overline{x}) \, \mathrm{d}x = \int_0^1 f(\overline{x} + \overline{y}) \, \mathrm{d}x.$$

Comme ν_y et ν_0 coïncident sur les intervalles du tore, qui engendrent $\mathcal{A}$, elles sont égales, d'après le Théorème 3.4. On peut donc énoncer que la mesure ν définie sur $\mathbb{T}$ par

$$\int_{\mathbb{T}} f(x) \, \mathrm{d}\nu(x) = \int_0^1 f(\overline{x}) \, \mathrm{d}x$$

est invariante par translation.

Un autre champ d'application de la notion de mesure image est le produit de convolution de mesures. Nous ne traiterons pas de ce sujet dans ces notes.

6. Fonctions intégrables réelles ou complexes

Nous notons $\mathcal{M}(E,\mathcal{A})$ l'ensemble des fonctions réelles mesurables définies sur un espace mesurable $(E,\mathcal{A})$. On a bien entendu $f \in \mathcal{M}(E,\mathcal{A}) \Rightarrow |f| \in \mathcal{M}^+(E,\mathcal{A})$.

Définition. *Soit $(E,\mathcal{A},\mu)$ un espace mesuré et $f \in \mathcal{M}(E,\mathcal{A})$. On dit que f est intégrable relativement à μ si $\int_E |f|\,\mathrm{d}\mu < \infty$. On définit alors l'intégrale de f relativement à la mesure μ comme le nombre réel*

$$\int_E f\,\mathrm{d}\mu = \int_E f^+\,\mathrm{d}\mu - \int_E f^-\,\mathrm{d}\mu.$$

On note $\mathcal{L}^1(E,\mu) = \mathcal{L}^1(E,\mathcal{A},\mu)$ (et parfois $\mathcal{L}^1(E)$, $\mathcal{L}^1(\mu)$ voire simplement $\mathcal{L}^1$, selon le contexte) l'ensemble des fonctions réelles intégrables sur E relativement à μ.

Il est clair que la finitude des deux quantités $\int_E f^\pm\,\mathrm{d}\mu$ équivaut à celle de $\int_E |f|\,\mathrm{d}\mu$. Comme de coutume, on dit qu'un ensemble $A \in \mathcal{A}$ est intégrable si $\mathbf{1}_A$ l'est.

Lorsque f est mesurable, f et $|f|$ sont simultanément intégrables. En revanche, la mesurabilité de $|f|$ n'implique pas celle de f dans le cas général : étant donné un sous-ensemble de E non-mesurable A, la fonction $f = \mathbf{1}_A - \mathbf{1}_{A^c}$ n'est pas mesurable (car $f^{-1}(1) = A$) mais $|f| = \mathbf{1}_E$ est évidemment mesurable. En particulier, il est faux que $|f| \in \mathcal{L}^1$ implique $f \in \mathcal{L}^1$, mais la seule circonstance où la conclusion est en défaut est $f \notin \mathcal{M}(E,\mathcal{A})$.

Théorème 6.1. *Pour tout espace mesuré $(E,\mathcal{A},\mu)$, $\mathcal{L}^1(E,\mathcal{A},\mu)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel sur lequel l'application $f \mapsto \int_E f\,\mathrm{d}\mu$ est une forme linéaire positive.*

Nous omettons la démonstration, qui est immédiate à partir de la définition et du Théorème 4.2.

Une fonction complexe est dite mesurable (resp. intégrable) si ses parties réelle et imaginaire le sont. On note $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(E,\mathcal{A},\mu)$ (avec les variantes usuelles) l'ensemble des fonctions intégrables complexes. Une fonction complexe mesurable f est intégrable si, et seulement si, $\int_E |f|\,\mathrm{d}\mu < \infty$. L'intégrale est encore une forme linéaire sur $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(E,\mathcal{A},\mu)$ et, pour toute fonction intégrable f, on a $\left|\int_E f\,\mathrm{d}\mu\right| \leqslant \int_E |f|\,\mathrm{d}\mu$.

Une fonction mesurable bornée et à support dans un ensemble intégrable est intégrable. Considérons par exemple une fonction continue f sur un intervalle compact $[a,b]$. Alors $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R},\beta(\mathbb{R}),\lambda)$ puisque l'image réciproque de tout ouvert est un ouvert, donc un borélien. De plus, posant $I_{jn} = \left[a + j(b-a)/2^n, a + (j+1)(b-a)/2^n\right[$ $(n \geqslant 0,\ 0 \leqslant j < 2^n)$ et $m_{jn} = \inf_{I_{jn}} f$, la suite de fonctions étagées $\{f_n\}_{n=0}^\infty$ définie par

$$f_n = \sum_{0 \leqslant j < 2^n} m_{jn} \mathbf{1}_{I_{jn}}$$

est croissante et converge simplement vers f. On a donc grâce au Théorème 5.2 (éventuellement appliqué à $f_n - f_0$)

$$\int_{[a,b]} f\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} f_n\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} 2^{-n} \sum_{0 \leqslant j < 2^n} m_{jn}.$$

On retrouve ainsi que l'intégrale de f est égale à son intégrale de Riemann.

Sur un ensemble E dénombrable (par exemple un ensemble fini, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}^d$, etc...) muni de la tribu $\mathcal{A} = \mathcal{P}(E)$, toute fonction est mesurable. Désignons par σ la mesure de comptage. On a en fait

$$\int_E f\,\mathrm{d}\sigma = \sum_{x \in E} f(x),$$

l'espace $\mathcal{L}^1(E, \mathcal{A}, \sigma)$ étant précisément l'ensemble des fonctions f pour lesquelles la série précédente est absolument convergente. Pour établir cela, on considère d'abord les fonctions positives étagées, puis les fonctions positives quelconques, que l'on écrit sous la forme d'une limite croissante de fonctions étagées, par exemple $f = \lim_n \mathbf{1}_{E_n} f$ où $\{E_n\}_{n=1}^\infty$ est une suite croissante de sous-ensembles finis de E telle que $\cup_n E_n = E$. Le cas général est alors immédiat à partir de la définition des fonctions intégrables.

7. Ensembles et fonctions négligeables

Définition. *Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Une partie mesurable $A \in \mathcal{A}$ est dite négligeable si $\mu(A) = 0$. Une propriété est dite satisfaite pour presque tout $x \in E$ (ou presque partout, en abrégé* pp*) si l'ensemble des points où elle tombe en défaut est mesurable et de mesure nulle. Une fonction réelle ou complexe définie sur E est dite négligeable si elle est mesurable et nulle* pp.

La notion n'est pas nouvelle et le point essentiel à souligner concernant cette définition est que, contrairement à la définition employée dans l'étude de la mesure de Lebesgue, un sous-ensemble d'un ensemble négligeable n'est pas nécessairement négligeable. Pour circonvenir cette difficulté, on pourra "compléter" la tribu $\mathcal{A}$ en y incluant tous les sous-ensembles des ensembles négligeables. Nous reviendrons un peu plus loin sur ce point.

L'additivité dénombrable de μ implique immédiatement qu'une réunion dénombrable d'ensembles négligeables est encore négligeable.

Théorème 7.1 (Borel-Cantelli). *Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ une suite de fonctions positives intégrables telle que*

$$\sum_{n \geqslant 1} \int_E f_n \, \mathrm{d}\mu < \infty.$$

Alors la série $\sum_n f_n(x)$ converge pp. *En particulier, pour toute suite $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ de parties mesurables telle que $\sum_n \mu(A_n) < \infty$, la limite supérieure $A = \cap_{n=1}^\infty \cup_{m \geqslant n} A_m$ est négligeable.*

La dénomination limite supérieure pour l'ensemble A est justifiée par la relation $\mathbf{1}_A = \limsup_n \mathbf{1}_{A_n}$. Ainsi A est l'ensemble des x qui appartiennent à une infinité de A_n. Dans le cas de la mesure de Lebesgue, le théorème de Borel-Cantelli est une conséquence immédiate du théorème de la convergence monotone.

Démonstration. Soit $S = \sum_{n \geqslant 1} \int_E f_n \, \mathrm{d}\mu < \infty$, et $N = \{x \in E : \sum_n f_n(x) = \infty\}$. Nous devons montrer que N est négligeable. Pour $n, p \geqslant 1$, nous posons

$$N_{np} = \{x \in E : \sum_{m \leqslant n} f_m(x) \geqslant p\}.$$

On a $N = \cap_p N_p$, avec $N_p = \cup_n N_{np}$. En particulier, N est mesurable et l'on a

$$p \mathbf{1}_{N_n p} \leqslant \sum_{m \leqslant n} f_m \qquad \text{d'où} \qquad p\mu(N_{np}) \leqslant S.$$

Grâce à la continuité croissante de μ, on en déduit que $\mu(N_p) = \lim_n \mu(N_{np}) \leqslant S/p$. Comme $N \subset N_p$ pour tout p, on a bien $\mu(N) = 0$. En appliquant ce résultat à $f_n = \mathbf{1}_{A_n}$, on obtient que la série $\sum_n \mathbf{1}_{A_n}$ est presque partout convergente, autrement dit presque tout x n'appartient au plus qu'à un nombre fini d'ensembles A_n.

Le résultat suivant donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction mesurable soit négligeable qui est le strict analogue du critère que nous avons vu dans le cadre de l'intégrale de Lebesgue.

Théorème 7.2. *Soit* $(E, \mathcal{A}, \mu)$ *un espace mesuré et* $f \in \mathcal{M}(E, \mathcal{A})$. *Alors* f *est négligeable si, et seulement si, on a* $\int_E |f| \, \mathrm{d}\mu = 0$.

Démonstration. La condition nécessaire est banale : il suffit d'appliquer la continuité croissante de μ (Théorème 5.2) à la suite $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ définie par $f_n = \min(|f|, n)$. On a $f_n \nearrow |f|$ et $\int_E f_n \, \mathrm{d}\mu = 0$ puisque $f_n \leqslant n\mathbf{1}_A$ où $A = \{x \in E : f(x) \neq 0\}$ est négligeable par hypothèse. La condition suffisante découle du théorème de Borel-Cantelli appliqué à la série de terme général $f_n = |f|$.

On déduit immédiatement du Théorème 7.2 le corollaire suivant, grâce à la continuité croissante de la mesure positive μ.

Théorème 7.3. *L'ensemble des fonctions mesurables négligeables sur un espace mesuré* $(E, \mathcal{A}, \mu)$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathcal{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu)$ *qui est stable par les opérations de bornes supérieure et inférieure dénombrables.*

Définition. *On appelle espace de Lebesgue associé à* $(E, \mathcal{A}, \mu)$, *et on note* $L^1(E, \mathcal{A}, \mu)$, *l'espace vectoriel quotient de* $\mathcal{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu)$ *par le sous-espace des fonctions mesurables négligeables.*

Lorsque f, g sont dans $\mathcal{M}^+(E, \mathcal{A})$ ou dans $\mathcal{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu)$, on a d'après le Théorème 7.2

$$f = g \text{ pp} \quad \Rightarrow \quad \int_E f \, \mathrm{d}\mu = \int_E g \, \mathrm{d}\mu.$$

Cela permet de définir μ sur $L^1(E, \mathcal{A}, \mu)$.

Nous revenons maintenant sur la définition des ensembles négligeables.

Définition. *Soit* $(E, \mathcal{A}, \mu)$ *un espace mesuré. On dit qu'une partie* A *de* E *est* μ*-négligeable si elle est contenue dans une partie mesurable négligeable. Une propriété est dite satisfaite* μ-pp *si elle est vraie sauf sur un ensemble* μ*-négligeable. On appelle tribu complétée de* $\mathcal{A}$ *pour* μ, *et l'on note* $\mathcal{A}_\mu$ *la tribu engendrée par* $\mathcal{A}$ *et les ensembles* μ*-négligeables. On dit qu'un élément de* $\mathcal{A}_\mu$ *est une partie* μ*-mesurable de* E. *Une application* $f : E \to \mathbb{R}$ *est dite* μ*-mesurable si elle est mesurable relativement aux tribus* $\mathcal{A}_\mu$ *et* $\beta(\mathbb{R})$.

Nous avons montré au paragraphe 3 que la classe des ensembles mesurables pour la mesure de Lebesgue est la tribu $\beta^*(\mathbb{R}) = \beta(\mathbb{R})_\lambda$. On dit que $\beta^*(\mathbb{R})$ est la tribu de Lebesgue.

Théorème 7.4. *Soit* $(E, \mathcal{A}, \mu)$ *un espace mesuré. Alors une partie* A *de* E *est dans* $\mathcal{A}_\mu$ *si, et seulement si, il existe des parties* $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ *telles que* $A_1 \subset A \subset A_2$ *et* $\mu(A_2 \smallsetminus A_1) = 0$. *Il existe une unique mesure* μ *sur* $\mathcal{A}_\mu$ *prolongeant* μ, *que l'on note encore* μ. *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction* $f : E \to \mathbb{R}$ *soit* μ*-mesurable est qu'il existe deux fonctions mesurables* g_1, g_2 *de* $(E, \mathcal{A})$ *sur* $\big(\mathbb{R}, \beta(\mathbb{R})\big)$ *telles que* $g_1 \leqslant f \leqslant g_2$ *et* $g_1 = g_2$ pp. *Alors* f *est intégrable si, et seulement si,* g_1 *et* g_2 *le sont ; on a dans ce cas*

$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu = \int_E g_i \, \mathrm{d}\mu \qquad (i = 1, 2).$$

En particulier, l'application $f \mapsto g_1$ *induit une bijection naturelle entre* $L^1(E, \mathcal{A}_\mu, \mu)$ *et* $L^1(E, \mathcal{A}, \mu)$.

Démonstration. Soit $\mathcal{B}$ la classe des parties B de E pour lesquelles il existe des parties $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ telles que $A_1 \subset B \subset A_2$ et $\mu(A_2 \smallsetminus A_1) = 0$. Alors, $\mathcal{B}$ contient $\mathcal{A}$ et les parties μ-négligeable, et l'on vérifie facilement que $\mathcal{B}$ est une tribu. On a donc $\mathcal{A}_\mu \subset \mathcal{B}$. Or, pour toute partie $B \in \mathcal{B}$, on a $B = A_1 \cup (B \smallsetminus A_1)$. Comme A_1 est mesurable et comme $B \smallsetminus A_1$, étant inclus dans $A_2 \smallsetminus A_1$, est μ-négligeable, on a $B \in \mathcal{A}_\mu$, d'où l'égalité requise $\mathcal{B} = \mathcal{A}_\mu$.

On prolonge μ à $\mathcal{A}_\mu$ en posant $\mu(A) = \mu(A_1) = \mu(A_2)$ pour toute partie A de $\mathcal{A}_\mu$. Le prolongement est unique car la positivité et la croissance de μ imposent $\mu(N) = 0$ pour toute partie N μ-négligeable.

Soit $f : E \to \mathbb{R}$ satisfaisant à $g_1 \leqslant f \leqslant g_2$ où g_1 et g_2 sont dans $\mathcal{M}(E, \mathcal{A})$ et sont égales pp. Alors pour tout $a \in \mathbb{R}$ on a $f^{-1}\big([a, \infty[\big) = g_1^{-1}\big([a, \infty[\big) \cup N_a$ où N_a est μ-négligeable. On a donc $f^{-1}\big([a, \infty[\big) \in \mathcal{A}_\mu$ et f est bien μ-mesurable. Réciproquement, toute fonction indicatrice $\mathbf{1}_A$ d'un ensemble μ-mesurable peut être encadrée comme indiqué en choisissant $g_i = \mathbf{1}_{A_i}$ $(i = 1, 2)$. Par linéarité, la propriété s'étend à toutes les fonctions étagées μ-mesurables. Par limite croissante (cf.la Proposition 4.2), on obtient qu'elle est encore satisfaite pour toute fonction μ-mesurable positive puisqu'une réunion dénombrable d'ensembles négligeables est négligeable. Finalement, on obtient le résultat pour toute fonction μ-mesurable en considérant f^+ et f^-.

Pour toute fonction f μ-mesurable on a $\int_E g_1 \,\mathrm{d}\mu \leqslant \int_E f \,\mathrm{d}\mu \leqslant \int_E g_2 \,\mathrm{d}\mu$ puisque μ est positive. Comme nous l'avons remarqué plus haut, le Théorème 7.2 implique que les termes extrêmes de cette inégalité sont égaux. Cela établit la dernière assertion de l'énoncé et achève la démonstration.

Corollaire 7.5. *Soit f une fonction μ-mesurable telle qu'il existe une fonction intégrable g satisfaisant $|f| \leqslant g$ μ-pp. Alors f est intégrable. En particulier, f est μ-négligeable si, et seulement si, f est μ-mesurable et satisfait à $\int_E |f| \,\mathrm{d}\mu = 0$.*

Démonstration. Soient g_1, g_2 les fonctions associées à $|f|$ comme dans l'énoncé du théorème 7.4. On a $|g_1| \leqslant g$ pp, donc $|g_1| \leqslant G = g + |g_1|\mathbf{1}_A$, où $A = \{|g_1| > g\}$ est négligeable. La fonction $|g_1|\mathbf{1}_A$ est mesurable et négligeable, donc intégrable (Théorème 7.2) et on en déduit que $|g_1|$ est intégrable, puisque majorée par la fonction intégrable G. La conclusion découle donc du Théorème 7.4. Cela implique immédiatement la condition nécessaire pour qu'une fonction f soit μ-négligeable puisqu'alors $|f| \leqslant 0$ pp. La condition suffisante découle du Théorème 7.2 appliqué à $\mathcal{A}_\mu$.

8. Convergence pp. Théorème de Lebesgue

Nous sommes maintenant en mesure d'établir les analogues abstraits des principaux théorèmes de la théorie de l'intégrale de Lebesgue.

Proposition 8.1. *Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ une suite de fonctions μ-mesurables convergeant μ-pp vers une fonction f. Alors f est μ-mesurable.*

Démonstration. Soit $A = \{x \in E : \lim_n f_n(x) = f(x)\}$. Alors A est μ-mesurable car son complémentaire A^c est μ-négligeable, donc μ-mesurable. Il suit que $\mathbf{1}_A f_n$ est μ-mesurable en tant que produit de fonctions μ-mesurables. De plus, $\mathbf{1}_{A^c} f$ est μ-négligeable donc μ-mesurable. Cela implique que $g_n = \mathbf{1}_A f_n + \mathbf{1}_{A^c} f$ est μ-mesurable. Comme g_n converge partout vers f, on obtient bien que f est μ-mesurable (Proposition 2.8).

Théorème 8.2 (Lebesgue). *Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ une suite de fonctions μ-mesurable réelles ou complexes convergeant μ-pp vers une fonction f. On suppose qu'il existe une fonction $g \in \mathcal{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu)$ telle que $|f_n| \leqslant g$ μ-pp $(n \geqslant 1)$. Alors $f_n, f \in \mathcal{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu)$ et $\int_E f \,\mathrm{d}\mu = \lim_n \int_E f_n \,\mathrm{d}\mu$.*

Démonstration. La fonction f est μ-mesurable d'après la Proposition 8.1. L'intégrabilité des f_n et de f découle alors immédiatement du corollaire 7.5. Pour établir le passage à la limite sous le signe d'intégration, on peut modifier les fonctions sur un ensemble négligeable, de façon à imposer $|f_n| \leqslant g$. L'inégalité de Fatou (corollaire 5.4) implique alors $\int_E \liminf_n (f_n + g)\,\mathrm{d}\mu \leqslant \liminf_n \int_E (f_n + g)\,\mathrm{d}\mu$, d'où

$$\int_E f\,\mathrm{d}\mu = \int_E \liminf_n f_n\,\mathrm{d}\mu \leqslant \liminf_n \int_E f_n\,\mathrm{d}\mu,$$

où l'égalité provient du fait que $f = \liminf_n f_n$ μ-pp. En appliquant maintenant l'inégalité de Fatou à $(g - f_n)$, on obtient similairement

$$\int_E f\,\mathrm{d}\mu = \int_E \limsup_n f_n\,\mathrm{d}\mu \geqslant \limsup_n \int_E f_n\,\mathrm{d}\mu,$$

d'où la conclusion annoncée.

Une conséquence classique du théorème de Lebesgue abstrait appliqué à la mesure de comptage est le résultat suivant relatif aux séries à double indice — et que l'on pourrait d'ailleurs établir directement sans difficulté.

Corollaire 8.3. *Soit $\sum_{m=1}^{\infty} a_{mn}$ $(n \geqslant 1)$ une suite de séries convergentes telle qu'il existe une série convergente $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$ avec $|a_{mn}| \leqslant b_m (m \geqslant 1, n \geqslant 1)$. Si, pour chaque m fixé, on a $a_{mn} \to a_m$ $(n \to \infty)$, alors $\lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{mn} = \sum_m a_m$.*

Les trois théorèmes suivants sont les analogues de résultats établis dans le cadre de l'intégrale de Lebesgue.

Théorème 8.4 (Passage à la limite sous le signe somme). *Soit $T \subset \mathbb{R}^d$ et $\{f_t\}_{t\in T}$ une famille de fonctions de $\mathcal{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu)$ vérifiant les conditions suivantes pour un élément t_0 de $\overline{T}$ et une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ convenables :*

(i) $\exists g \in \mathcal{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu) : |f_t| \leqslant g$ μ-pp $\quad (t \in T)$

(ii) $\lim_{t\to t_0,\, t\in T} f_t(x) = f(x)$ μ-pp.

Alors $f \in \mathcal{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu)$ et $\int_E f\,\mathrm{d}\mu = \lim_{t\to t_0,\, t\in T} \int_E f_t\,\mathrm{d}\mu$.

Théorème 8.5 (Dérivation sous le signe somme). *Soit T un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : T \times E \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables telle que :*

(i) $(\forall t \in T) \quad x \mapsto f(t, x) \in \mathcal{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu)$

(ii) $t \mapsto f(t, x)$ *est dérivable sur T pour presque tout x*

(iii) $\exists g \in \mathcal{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu) : \sup_{t\in T} |\partial f(t, x)/\partial t| \leqslant g(x)$ μ-pp.

Alors la fonction définie sur T par $F(t) = \int_E f(t, x)\,\mathrm{d}\mu(x)$ est dérivable sur T et l'on a

$$F'(t) = \int_E \frac{\partial f(t, x)}{\partial t}\,\mathrm{d}\mu(x).$$

Théorème 8.6 (Convergence monotone). *Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite croissante de fonctions mesurables telle que $\sup_n \int_E f_n\,\mathrm{d}\mu < \infty$. Alors il existe une fonction $f \in \mathcal{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu)$ telle que $f_n \to f$ pp et $\int_E f_n\,\mathrm{d}\mu \to \int_E f\,\mathrm{d}\mu$.*

Démonstration. La série $\sum_{n\geqslant 1} (f_{n+1} - f_n)$ satisfait aux hypothèses du théorème de Borel-Cantelli. Cela implique que la suite $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ converge pp, et, d'après la Proposition 8.1, toute limite pp f est μ-mesurable. En appliquant l'inégalité de Fatou à la suite croissante positive $g_n = f_n - f_1$, on obtient

$$\int_E f\,\mathrm{d}\mu = \int_E \liminf_n f_n\,\mathrm{d}\mu \leqslant \lim_n \int_E f_n\,\mathrm{d}\mu < \infty.$$

Cela implique $f \in \mathcal{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu)$ car $|f| \leqslant |f_1| + f - f_1 \leqslant 2|f_1| + f$. Comme $0 \leqslant g_n \leqslant f - f_1$ pp, on peut appliquer le théorème de Lebesgue à g_n, d'où la conclusion.

9. Les espaces $L^1(E,\mathcal{A},\mu)$ et $L^2(E,\mathcal{A},\mu)$

Nous avons défini au paragraphe 7 l'espace $L^1(E,\mathcal{A},\mu)$ des classes d'équivalence de fonctions de $\mathcal{L}^1(E,\mathcal{A},\mu)$ pour la mesure μ. Le Théorème 7.2 implique que l'expression $\|f\|_1 = \int_E |f|\,\mathrm{d}\mu$ ne dépend que de la classe de f dans $L^1(E,\mathcal{A},\mu)$. Il est facile de constater que $f \mapsto \|f\|_1$ est une norme sur $L^1(E,\mathcal{A},\mu)$: le seul point non trivial (à savoir $\|f\|_1 = 0 \Rightarrow f = 0$) est fourni par le Théorème 7.2.

Comme dans le cas de l'intégrale de Lebesgue sur la droite, on désigne $f \mapsto \|f\|_1$ par norme de la convergence en moyenne. La convergence en moyenne d'une suite de fonctions $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ n'implique pas la convergence μ-pp. On a cependant le résultat plus faible suivant.

Proposition 9.1. *Si $f_n \to f$ dans $L^1(E,\mathcal{A},\mu)$, alors on a pour tout $\varepsilon > 0$*

$$\lim_n \{x \in E : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\} = 0$$

Démonstration. Soit $A_n(\varepsilon) = \{x \in E : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}$. Alors $A_n(\varepsilon)$ est mesurable et on l'inégalité (dite de Markov)

$$\mathbf{1}_{A_n(\varepsilon)} \leqslant (1/\varepsilon)|f_n - f|.$$

Il suit $\mu\big(A_n(\varepsilon)\big) \leqslant (1/\varepsilon)\|f_n - f\|_1$, ce qui implique le résultat annoncé.

La réciproque de la Proposition 9.1 est fausse, comme l'atteste le contre-exemple fourni par $f_n(x) = ne^{-nx}$ sur $[0,\infty[$: on a $f = 0$ et $A_n(\varepsilon) = [0,(1/n)\log(n/\varepsilon)[$ mais $\|f_n\|_1 = 1$ pour tout n.

La notion de convergence en moyenne est bien adaptée à l'étude des convergences d'intégrales, comme le montre le résultat trivial suivant.

Proposition 9.2. *Si $f_n \to f$ dans $L^1(E,\mathcal{A},\mu)$, alors on a pour tout $A \in \mathcal{A}$*

$$\lim_n \int_A f_n\,\mathrm{d}\mu = \int_A f\,\mathrm{d}\mu.$$

Démonstration. On a $\left|\int_A f_n\,\mathrm{d}\mu - \int_A f\,\mathrm{d}\mu\right| \leqslant \|f_n - f\|_1$.

Le théorème de la convergence dominée peut être énoncé comme un résultat de convergence en moyenne — dont la proposition précédente permet de retrouver immédiatement la version usuelle.

Théorème 9.3. *Soit $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ une suite de fonctions mesurables convergeant* pp *vers une fonction f. S'il existe une fonction $g \in L^1(E,\mathcal{A},\mu)$ telle que $|f_n| \leqslant g$* pp *alors $f_n, f \in L^1(E,\mathcal{A},\mu)$ et $\|f_n - f\|_1 \to 0$.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème de Lebesgue à la suite $F_n = |f_n - f|$, qui est dominée par $2g$.

Comme dans le cas de la mesure de Lebesgue, le théorème suivant est fondamental. La démonstration est identique, *mutatis mutandis*, à celle du théorème correspondant pour l'intégrale de Lebesgue sur la droite.

Théorème 9.4 (Fischer-Riesz). *L'espace vectoriel normé $L^1(E,\mathcal{A},\mu)$ est un espace de Banach.*

Comme dans le cas de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, nous obtenons le renseignement supplémentaire que de toute suite de Cauchy de $L^1(E,\mathcal{A},\mu)$ on peut extraire une sous-suite convergeant pp. On ne peut pas éviter, en général, d'extraire une sous-suite. Considérons par exemple sur $I = [\frac{1}{2},1[$, les fonctions $f_n = \mathbf{1}_{[n/2^m,(n+1)/2^m[}$ où $m = m(n)$ est l'unique entier tel que $2^{m-1} \leqslant n < 2^m$. On a alors $\|f_n\|_1 = 1/2^m < 1/n$, donc $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ est une suite de Cauchy. Cependant, en considérant pour tout x fixé dans $[\frac{1}{2}, 1[$ les sous-suites $n_{k1} = n_{k1}(x) = [x2^k]$ et $n_{k2} = n_{k2}(x) = [x2^k] + 1$ pour $k \geqslant 1$, de sorte que, pour k assez grand, $m(n_{k1}) = m(n_{k2}) = k$ et $f_{n_{k1}}(x) = 1$, $f_{n_{k2}}(x) = 0$, on voit que

$$\limsup_n f_n(x) = 1, \qquad \liminf_n f_n(x) = 0 \qquad (\tfrac{1}{2} \leqslant x < 1).$$

Ainsi, l'ensemble de convergence de $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ sur $[0, 1[$ est vide.

On désigne par $\mathcal{L}^2(E, \mathcal{A}, \mu)$ l'ensemble des fonctions mesurables dont le carré du module est dans $\mathcal{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu)$. On montre facilement grâce à l'inégalité

$$|f + g|^2 \leqslant 2(|f|^2 + |g|^2)$$

que $\mathcal{L}^2(E, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace vectoriel. Son quotient par le sous-espace des fonctions négligeables est noté $L^2(E, \mathcal{A}, \mu)$.

L'inégalité $|f\overline{g}| \leqslant \frac{1}{2}(|f|^2 + |g|^2)$ montre que l'intégrale

$$\langle f, g\rangle = \int_E f\overline{g}\,\mathrm{d}\mu$$

est définie pour tout couple (f, g) de fonctions de $L^2(E, \mathcal{A}, \mu)$. En fait, on vérifie immédiatement que l'application $(f, g) \mapsto \langle f, g\rangle$ est une forme hermitienne qui induit une structure d'espace préhilbertien sur $L^2(E, \mathcal{A}, \mu)$. On pose

$$\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f\rangle}.$$

Cela définit une norme sur $L^2(E, \mathcal{A}, \mu)$, grâce au Théorème 7.2.

Le résultat suivant peut être établi comme dans le cas de $L^2(\mathbb{R})$.

Théorème 9.5. *Pour tout espace mesuré $(E, \mathcal{A}, \mu)$, l'espace $L^2(E, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace de Hilbert.*

Le corollaire suivant, qui est valable dans tout espace de Hilbert, est très utile en pratique.

Théorème 9.6. *Pour toute suite orthogonale $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ de $L^2(E, \mathcal{A}, \mu)$, la série $\sum_{n=1}^\infty f_n$ est convergente dans $L^2(E, \mathcal{A}, \mu)$ si, et seulement si, on a*

$$\sum_{n=1}^\infty \|f_n\|_2^2 < \infty.$$

10. Produits d'espaces mesurés

Nous nous limitons ici au cas de deux facteurs, mais le résultat est valide pour un nombre quelconque. Nous avons déjà défini le produit d'espaces mesurables

$$(E, \mathcal{A}) \times (F, \mathcal{B}) = (E \times F, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}).$$

Il nous faut maintenant définir la mesure produit.

Théorème 10.1. *Soient $(E, \mathcal{A}, \mu_1)$, $(F, \mathcal{B}, \mu_2)$ deux espaces mesurés dont les mesures sont finies (resp. σ-finies). Alors il existe une unique mesure μ, notée $\mu = \mu_1 \otimes \mu_2$, sur l'espace mesurable produit $(E \times F, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$ telle que l'on ait, pour tout pavé $A \times B$ de $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$,*

$$\mu(A \times B) = \mu_1(A)\mu_2(B).$$

De plus cette mesure est finie (resp. σ-finie).

Lorsque μ_2 est finie, on peut définir μ par

$$\mu(D) = \int_E \mu_2(D^x)\,\mathrm{d}\mu_1(x) \qquad (D \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}). \tag{3}$$

Pour $D = A \times B$, on a $D^x = B$ pour tout $x \in A$, et $D^x = \varnothing$ pour $x \notin A$. On a donc bien $\mu(D) = \int_A \mu_2(B)\,\mathrm{d}\mu_1 = \mu_1(A)\mu_2(B)$. Il faut encore, bien entendu, vérifier que l'expression (3) a un sens pour tout $D \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ — c'est-à-dire que la fonction $x \mapsto \mu_2(D^x)$ est bien mesurable sur $(E, \mathcal{A})$ — puis que la fonction $\mu : \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ est bien dénombrablement additive. Nous omettons les détails. Lorsque μ_2 est σ-finie, on introduit une suite croissante $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ de parties mesurables de F telle que $F = \cup_n F_n$ et $\mu_2(F_n) < \infty$ pour chaque n. On pose alors

$$\mu(D) = \lim_{n \to \infty} \int_E \mu_2\big(D^x \cap E \times F_n\big)\,\mathrm{d}\mu_1(x).$$

Nous omettons à nouveau les vérifications à opérer sur cette expression.

Nous aurions évidemment pu définir μ en inversant les rôles de μ_1 et μ_2. On déduit alors de l'unicité de μ que l'on a pour tout ensemble $D \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ inclus dans un produit de sous-ensembles intégrables

$$\int_E \mu_2(D^x)\,\mathrm{d}\mu_1(x) = \int_F \mu_1(D_y)\,\mathrm{d}\mu_2(y).$$

Cela signifie que le théorème de Fubini est valable pour les fonctions indicatrices d'ensembles. La généralisation suivante est donc très naturelle. Pour avoir un énoncé agréable, il est commode d'étendre la définition de l'intégrale des fonctions positives aux fonctions à valeur dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. Si f est finie pp, on pose $\int_E f\,\mathrm{d}\mu = \int_E \widetilde{f}\,\mathrm{d}\mu$, où $\widetilde{f}(x) = f(x)$ si $f(x) < \infty$ et $\widetilde{f}(x) = 0$ dans le cas contraire. Si $\mu\big(\{f = \infty\}\big) > 0$, on pose $\int_E f\,\mathrm{d}\mu = \infty$. Une fonction f à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ est mesurable si, et seulement si, $f^{-1}(\mathbb{R})$ est mesurable et la restriction de f à $f^{-1}(\mathbb{R})$ est mesurable.

Théorème 10.2 (Fubini). *Soient $(E, \mathcal{A}, \mu_1)$, $(F, \mathcal{B}, \mu_2)$ deux espaces mesurés dont les mesures sont σ-finies. Pour toute fonction $f \in \mathcal{M}^+(E \times F)$ les intégrales*

$$G(x) = \int_F f(x,y)\,\mathrm{d}\mu_2(y) \qquad \text{et} \qquad H(y) = \int_E f(x,y)\,\mathrm{d}\mu_1(x)$$

définissent respectivement sur E, F des fonctions mesurables à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. On a alors

$$\int_{E\times F} f \,\mathrm{d}\mu_1 \otimes \mu_2 = \int_E G \,\mathrm{d}\mu_1 = \int_F H \,\mathrm{d}\mu_2.$$

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction mesurable $g : E \times F \to \mathbb{R}$ soit intégrable relativement à $\mu = \mu_1 \otimes \mu_2$ est que l'on ait

$$\int_E \mathrm{d}\mu_1(x) \int_F |g(x,y)| \,\mathrm{d}\mu_2(y) < \infty.$$

Lorsqu'il en est ainsi, la fonction $y \mapsto g(x,y)$ est μ_2-intégrable pour μ_1-presque tout x, et la fonction définie pp *par*

$$\int_F g(x,y) \,\mathrm{d}\mu_2(y)$$

peut être prolongée en une fonction de $\mathcal{L}^1(E,\mu_1)$. Les propriétés obtenues en inversant les rôles des variables sont aussi valables, et l'on a

$$\int_{E\times F} g \,\mathrm{d}\mu_1 \otimes \mu_2 = \int_E \mathrm{d}\mu_1 \int_F g \,\mathrm{d}\mu_2 = \int_F \mathrm{d}\mu_2 \int_E g \,\mathrm{d}\mu_1.$$

Corollaire 10.3. *Pour tout série double à termes positifs ou (absolument) convergente $\sum_{m,n} a_{mn}$, on a*

$$\sum_m \sum_n a_{mn} = \sum_n \sum_m a_{mn}.$$

Corollaire 10.4. *Soient $(E, \mathcal{A}, \mu_1)$, $(F, \mathcal{B}, \mu_2)$ deux espaces mesurés dont les mesures sont σ-finies. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) *f est négligeable sur $(E \times F, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu_1 \otimes \mu_2)$*
(ii) *$y \mapsto f(x,y)$ est négligeable sur F pour μ_1 presque tout x*
(iii) *$x \mapsto f(x,y)$ est négligeable sur E pour μ_2 presque tout y.*

En particulier $D \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ est négligeable si, et seulement si, D^x est μ_2-négligeable pour μ_1-presque tout x ou D_y est μ_1-négligeable pour μ_2-presque tout y.

Université de Lorraine
Faculté des sciences et technologies
Licence de mathématiques 1994/95
Calcul intégral et théorie de la mesure
Gérald Tenenbaum

Exercices sur l'intégrale abstraite

98. Soit E un ensemble. Caractériser les éléments de la tribu $\mathcal{T}(E)$ engendrée par les points de E. En admettant que tout ensemble non dénombrable peut être partitionné en deux sous ensembles non dénombrables, donner une condition nécessaire et suffisante sur E pour que $\mathcal{T}(E) = \mathcal{P}(E)$. A-t-on $\mathcal{T}(\mathbb{R}) = \beta(\mathbb{R})$?

99. On appelle *atome* d'une tribu $\mathcal{A}$ de parties de E toute partie non vide $A \in \mathcal{A}$ telle que $B \in \mathcal{A}, \quad B \subset A \Longrightarrow B = \varnothing \quad \text{ou} \quad B = A$. En introduisant les atomes de $\mathcal{A}$, montrer que, si $\mathcal{A}$ est finie, alors $\mathcal{A}$ est engendrée par une partition finie de E. En déduire que l'on a dans cette circonstance $|\mathcal{A}| = 2^k$ pour un entier $k > 0$ convenable.

La tribu engendrée par une partition dénombrable infinie d'un ensemble E est-elle dénombrable ?

100. Montrer que la classe des réunions dénombrables d'intervalles réels ne coïncide pas avec la tribu borélienne $\beta(\mathbb{R})$. On pourra par exemple considérer l'ensemble $\mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q}$.

101. Montrer que la classe des parties (resp. des parties boréliennes) de $\mathbb{R}^d$ qui sont symétriques par rapport à l'origine forme une tribu (resp. une sous-tribu de $\beta(\mathbb{R}^d)$).

102. Montrer que toute fonction réelle f mesurable et bornée sur un espace mesuré $(E, \mathcal{A}, \mu)$ est limite uniforme d'au moins une suite de fonctions mesurables étagées.

103. Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Les *sommes de Lebesgue* d'une fonction mesurable $f : E \to \mathbb{R}_+$ sont définies dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ par la formule

$$L_n(f) := \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{k}{2^n} \mu\Big(\Big\{\frac{k}{2^n} \leqslant f < \frac{k+1}{2^n}\Big\}\Big).$$

Montrer que $L_n(f)$ tend en croissant vers $\int f \, \mathrm{d}\mu$.

104. Soit f une fonction réelle mesurable, positive ou intégrable, définie sur $(\mathbb{R}, \beta(\mathbb{R}), \mu)$. Montrer que

$$\lim_{X,Y \to \infty} \int_{-X}^{Y} f \, \mathrm{d}\mu = \int_{\mathbb{R}} f \, \mathrm{d}\mu.$$

105. Soit $f \in \mathcal{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu)$. Montrer que $\lim_{y \to \infty} y\mu\big(\{f \geqslant y\}\big) = 0$. Cette propriété est-elle suffisante pour qu'une fonction mesurable soit intégrable ?

106. Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré de mesure totale $\mu(E)$ finie. Montrer qu'une fonction mesurable f est intégrable si, et seulement si, on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) < \infty$$

avec $E_n = \{x \in E : |f(x)| > n\}$. Cette condition demeure-t-elle nécessaire (resp. suffisante) lorsque $\mu(E) = \infty$?

107. Soit f une fonction intégrable réelle définie sur un espace mesuré $(E, \mathcal{A}, \mu)$. Montrer que l'on a $\lim_{\substack{\mu(A)\to 0\\ A\in\mathcal{A}}} \int_A f \,\mathrm{d}\mu = 0$.

108. 1) Soit $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite décroissante de fonctions mesurables positives telles que $f_1 \in \mathcal{L}^1(E, \mu)$. Montrer que l'on a $\int \lim_{n\to\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\mu$. Donner un exemple de suite décroissante $\{f_n\}$ de fonctions mesurables sur $\big(]0, 1], \beta(]0, 1]), \lambda\big)$ telle que $\lim f_n = 0$ mais $\int f_n \,\mathrm{d}\mu = \infty$ pour tout entier n.

2) Montrer que toute suite monotone $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ de fonctions positives et intégrables, convergeant simplement vers f définie sur E, satisfait à $\int f \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\mu$. Ce résultat reste-t-il valide pour des suites non monotones ?

109. Soit σ la mesure de comptage sur $\mathbb{Z}$. Montrer que toute mesure positive μ sur $\big(\mathbb{Z}, \mathcal{P}(\mathbb{Z})\big)$ telle que $\mu(\{n\}) < \infty$ pour tout entier n est de la forme $\mu = f\sigma$ où f est une application convenable de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}_+$.

110. Soit $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite de fonctions mesurables réelles définies sur un espace mesuré $(E, \mathcal{A}, \mu)$. On suppose qu'il existe une série convergente à termes positifs, $\sum \varepsilon_n$, telle que $\sum_{n=1}^{\infty} \mu\big(\{x \in E : |f_n(x)| > \varepsilon_n\}\big) < \infty$. Montrer que $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge presque partout.

2) Montrer, en choisissant une suite de fonctions indicatrices d'intervalles, que la condition suffisante précédente n'est en général pas nécessaire.

111. Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ de fonctions réelles mesurables sur $(E, \mathcal{A}, \mu)$ converge presque partout vers une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ est que l'on ait, pour tout $\varepsilon > 0$, $\mu\big(\{x \in E : \limsup_{n\to\infty} |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}\big) = 0$. En déduire que la condition $(\forall\varepsilon > 0) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mu\big(\{x \in E : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}\big) < \infty$ est suffisante pour que f_n converge vers f presque partout. Montrer par un contre-exemple que cette condition n'est pas nécessaire.

112. Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable. Montrer que l'on a $f \geqslant 0$ presque partout si, et seulement si, on a $\int_A f \,\mathrm{d}\mu \geqslant 0$ pour tout $A \in \mathcal{A}$.

I. Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite de fonctions réelles intégrables positives ou nulles convergeant presque partout vers une fonction intégrable f.

1) Montrer par un exemple que l'on n'a pas nécessairement

$$(C) \qquad \lim_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\mu = \int f \,\mathrm{d}\mu.$$

2) Soit $g_n = \min(f_n, f)$ $(n \geqslant 1)$. Montrer que g_n converge en moyenne vers f.

3) Montrer que $(f - f_n)^+$ converge en moyenne vers 0.

4) Sous l'hypothèse supplémentaire que la relation (C) est satisfaite, montrer que f_n converge en moyenne vers f.

II. Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite de fonctions réelles intégrables de signe quelconque convergeant presque partout vers une fonction intégrable f. Dans cette seconde partie, on se propose de montrer que les deux conditions suivantes sont équivalentes : (a) $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_1 = 0$, (b) $\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_1 = \|f\|_1$.

1) Montrer l'implication (a) $\Rightarrow$ (b).

2) Sous l'hypothèse (b), établir les inégalités

$$\int f^+ \,\mathrm{d}\mu \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int f_n^+ \,\mathrm{d}\mu, \qquad \int f^- \,\mathrm{d}\mu \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int f_n^- \,\mathrm{d}\mu.$$

3) Montrer que l'hypothèse (b) implique

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n^+ \,\mathrm{d}\mu = \int f^+ \,\mathrm{d}\mu \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} \int f_n^- \,\mathrm{d}\mu = \int f^- \,\mathrm{d}\mu.$$

4) En utilisant le résultat de la partie I, montrer l'implication (b) $\Rightarrow$ (a).

Université de Lorraine
Faculté des sciences et technologies
Licence de mathématiques 1994/95
Calcul intégral et théorie de la mesure

VI

Intégrale de Stieltjes

1. Fonctions à variation bornée

Définition 1.1. *On appelle subdivision d'un intervalle réel $[a,b]$ une suite finie $\sigma = \{x_0, \ldots, x_n\}$ telle que $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Le pas d'une subdivision σ est la quantité $\|\sigma\| := \max_{0 \leqslant j < n}(x_{j+1} - x_j)$.*

Pour $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ et $\sigma \in \mathfrak{S}[a,b]$, on pose $V(f,\sigma) = \sum_j |f(x_{j+1}) - f(x_j)|$.

Définition 1.2. *Une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est dite à variation bornée sur $[a,b]$ si*

$$V_f[a,b] := \sup_{\sigma \in \mathfrak{S}[a,b]} V(f,\sigma) < \infty.$$

On désigne par $VB[a,b]$ l'ensemble des fonctions à variation bornée sur $[a,b]$ et on pose $V_0(\mathbb{R}) = \cap_n VB[-n,n]$.

Proposition 1.3. *Si f est monotone sur $[a,b]$ alors $f \in VB[a,b]$ et $V_f[a,b] = |f(b) - f(a)|$.*

Démonstration. Supposons par exemple f croissante. On a pour toute subdivision σ

$$V(f,\sigma) = \sum_{0 \leqslant j < n} \{f(x_{j+1}) - f(x_j)\} = f(b) - f(a).$$

□

Proposition 1.4. *Soit $g \in \mathcal{L}^1[a,b]$ et $f(x) := \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$. Alors $f \in VB[a,b]$ et*

$$V_f[a,b] = \int_a^b |g(t)|\,\mathrm{d}t = \|g\|_1.$$

Démonstration. L'inégalité $V_f[a,b] \leqslant \int_a^b |g(t)|\,\mathrm{d}t$ est évidente. Pour montrer la réciproque, on se donne $\varepsilon > 0$ et $\varphi \in \mathcal{C}[a,b]$ telle que $\|g - \varphi\|_1 < \varepsilon$. Soit $F(x) := \int_a^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t$. On a

$$\Big| V_f[a,b] - V_F[a,b] \Big| \leqslant V_{f-F}[a,b] \leqslant \|g - \varphi\|_1 < \varepsilon.$$

Or, pour $\sigma \in \mathfrak{S}[a,b]$, on a

$$\left| V(F,\sigma) - \int_a^b |\varphi(t)|\,\mathrm{d}t \right| = \left| \sum_j |F(x_{j+1}) - F(x_j)| - \int_{x_j}^{x_{j+1}} |\varphi(t)|\ \mathrm{d}t \right|$$
$$= \left| \sum_j \left| \int_{x_j}^{x_{j+1}} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \right| - \int_{x_j}^{x_{j+1}} |\varphi(t)|\ \mathrm{d}t \right| = \Big| \sum_j (x_{j+1} - x_j)\{|\varphi(u_j)| - |\varphi(v_j)|\} \Big|$$

où u_j, $v_j \in [x_j, x_{j+1}]$. Il s'ensuit que, notant ω_φ le module de continuité de σ,

$$\left| V_F[a,b] - \int_a^b |\varphi(t)|\,\mathrm{d}t \right| \leqslant (b-a)\omega_\varphi(\|\sigma\|) \to 0 \qquad (\|\sigma\| \to 0),$$

d'où $V_F[a,b] = \|\varphi\|_1$. Nous avons finalement obtenu

$$V_f[a,b] > V_F[a,b] - \varepsilon = \|\varphi\|_1 - \varepsilon > \|g\|_1 - 2\varepsilon.$$

□

Théorème 1.5. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Alors $f \in VB[a,b]$ si, et seulement si, on peut écrire $f = F - G$ où F et G sont croissantes. Dans ce cas, on a $V_f[a,b] \leqslant V_F[a,b] + V_G[a,b]$.*

Démonstration. La condition est trivialement suffisante puisque, si $f = F - G$, alors $V_f[a,b] \leqslant V_F[a,b] + V_G[a,b]$. Réciproquement, posons, pour $\sigma \in \mathfrak{S}[a,b]$,

$$p(\sigma) := \sum_j \big(f(x_{j+1} - f(x_j)\big)^+, \quad n(\sigma) := \sum_j \big(f(x_{j+1} - f(x_j)\big)^-. \tag{1·1}$$

On a alors

$$V(f;\sigma) = p(\sigma) + n(\sigma),$$
$$f(b) - f(a) = p(\sigma) - n(\sigma).$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} 2p(\sigma) &= V(f;\sigma) + f(b) - f(a), \\ 2n(\sigma) &= V(f;\sigma) - \{f(b) - f(a)\}. \end{aligned} \tag{1·2}$$

En particulier les quantités $p(\sigma)$ et $n(\sigma)$ sont bornées lorsque σ parcourt $\mathfrak{S}[a,b]$. Posons

$$F(x) := \sup_{\sigma \in \mathfrak{S}[a,x]} p(\sigma), \quad G(x) := \sup_{\sigma \in \mathfrak{S}[a,x]} n(\sigma). \tag{1·3}$$

Ce sont des fonctions croissantes de x et par (1·2) on a

$$f(x) - f(a) = F(x) - G(x). \tag{1·4}$$

On note à fins de référence ultérieure que

$$F(x) + G(x) = V_f[a,x]. \tag{1·5}$$

□

Théorème 1.6. *L'ensemble $\mathcal{D}(F)$ des points de discontinuité d'une fonction monotone $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dénombrable.*

Démonstration. Supposons par exemple F croissante. Pour tout intervalle borné $[a,b]$, posons

$$D_m := \{x \in [a,b] : F(x+) - F(x-) > 1/m\}.$$

Si $\{x_j\}_{j=1}^n$ est une suite strictement croissante de points de D_m, alors

$$n/m \leqslant \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} F(x_j+) - F(x_j-) \leqslant F(b) - F(a),$$

donc D_m est fini, de cardinal n'excédant pas $m\big\{F(b) - F(a)\big\}$. Cela implique que $\mathcal{D} \cap [a,b] = \cup_{m \geqslant 1} D_m$ est dénombrable, donc aussi $\mathcal{D} = \cup_n \mathcal{D} \cap [-n,n]$. □

Corollaire 1.7. *Toute fonction $f \in VB[a,b]$ est réglée et l'ensemble de ses points de discontinuité est dénombrable.*

Démonstration. Si $f = F - G$ où F et G sont croissantes, alors $\mathcal{D}(f) \subset \mathcal{D}(F) \cup \mathcal{D}(G)$, donc $\mathcal{D}(f)$ est bien dénombrable. Par ailleurs, F et G ont en chaque point une limite à gauche et une limite à droite, elles sont donc réglées, et il en va de même de f. □

Théorème 1.8. *Soit $f \in VB[a,b]$. Il existe des fonctions croissantes F et G telles que*
(i) $F(a) = G(a) = 0$,
(ii) $\mathcal{D}(f) = \mathcal{D}(F) \cup \mathcal{D}(G)$,
(iii) $f(x) - f(a) = F(x) - G(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$,
(iv) $V_f[a,x] = F(x) + G(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$.

Démonstration. Nous allons montrer que les fonctions F et G définies en (1·3) possèdent les propriétés souhaitées. Les relations (iii) et (iv) coïncident respectivement avec (1·4) et (1·5) et (i) est satisfaite par construction. Il ne reste donc que (ii) à établir. On a vu que $\mathcal{D}(f) \subset \mathcal{D}(F) \cup \mathcal{D}(G)$, donc seule l'inclusion réciproque est à prouver ; nous la réécrivons sous la forme

$$\mathcal{C}(f) \subset \mathcal{C}(F) \cap \mathcal{C}(G), \tag{1·6}$$

où nous employons la notation $\mathcal{C}(f) := [a,b] \smallsetminus \mathcal{D}(f)$ pour l'ensemble des points de continuité d'une fonction f.

Posons $v(x) := V_f[a,x]$. Alors F et G sont combinaisons linéaires de f et v, donc (1·6) est impliquée par

$$\mathcal{C}(f) \subset \mathcal{C}(v).$$

Soit donc $x \in \mathcal{C}(f)$. Supposons d'abord $x > a$ et montrons que v est continue à gauche en x. Pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe $\sigma \in \mathfrak{S}[a,x]$ telle que $V(f;\sigma) > v(x) - \varepsilon$. Soit y le plus grand point de σ strictement plus petit que x. On peut imposer que $y \in [a,x[$ et $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Cela implique l'existence d'une subdivision $\tau \in \mathfrak{S}[a,y]$ telle que

$$V(f;\sigma) - |f(x) - f(y)| = V(f;\tau),$$

d'où

$$v(x) \geqslant v(y) \geqslant V(f;\tau) \geqslant V(f;\sigma) - \varepsilon \geqslant v(x) - 2\varepsilon.$$

En faisant tendre ε vers 0, on obtient bien que $v(x-) = v(x)$.

On procède symétriquement pour établir que v est continue à droite en tout point de $\mathcal{C}(f) \cap [a,b[$. □

Exemples 1. La fonction définie par

$$f(x) := \begin{cases} x\sin(1/x) & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0). \end{cases}$$

est continue sur $[0, 2/\pi]$ mais n'est pas à variation bornée. Si, par exemple,

$$\sigma := \{0\} \cup \{2/(2n+1)\pi : 0 \leqslant n \leqslant N\},$$

on a $f(x_{N-j}) = 2(-1)^j/(2j+1)\pi$ $(0 \leqslant j \leqslant N-1)$, d'où

$$\begin{aligned} V(f;\sigma) &= |f(x_1)| + \sum_{1 \leqslant k < N} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \\ &= \frac{2}{\pi N} + \frac{2}{\pi} \sum_{1 \leqslant j < N} \left| \frac{1}{2j+1} + \frac{1}{2j+3} \right| \sim \frac{2}{\pi} \log N \quad (N \to \infty). \end{aligned}$$

2. La fonction $g(x) := xf(x)$ est à variation bornée sur tout intervalle bornée car elle est dérivable en 0, donc partout, et à dérivée bornée.

3. La fonction $h(x) := \sqrt[3]{x}$ est à dérivée non bornée sur $[-1, 1]$, mais elle est croissante donc à variation bornée.

4. Si $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ est une suite réelle quelconque, la fonction sommatoire

$$A(x) := \sum_{1 \leqslant n \leqslant x} a_n$$

est à variation bornée sur tout intervalle fini : on a $A(x) = F(x) - G(x)$ où F (resp. G) est la fonction sommatoire de $\{a_n^+\}_{n=1}^{\infty}$ (resp. de $\{a_n^-\}_{n=1}^{\infty}$).

2. Définition de l'intégrale de Stieltjes

Considérons une mesure positive régulière sur $\mathbb{R}$, i.e. telle que tout intervalle borné soit de mesure finie. Alors la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) := \begin{cases} \mu(]0, x]) & (x > 0) \\ 0 & (x = 0) \\ -\mu(]x, 0]) & (x < 0) \end{cases}$$

est croissante et continue à droite. Elle est continue en x si, et seulement si, $\mu(\{x\}) = 0$. On a de plus

$$\mu(]a, b]) = F(b) - F(a) \qquad (a,\, b \in \mathbb{R},\, a < b). \tag{2·1}$$

L'intégrale de Stieltjes répond au problème inverse : construire, connaissant F, une mesure complète μ satisfaisant (2·1). On rappelle qu'une mesure est dite complète si tout sous-ensemble d'un ensemble négligeable est mesurable. On obtient canoniquement une mesure complète à partir d'une mesure quelconque en étendant la mesure initiale à la tribu engendrée par les ensembles mesurables et les ensembles négligeables. Cette extension est unique.

La tribu engendrée par les intervalles semi-ouverts coïncide avec la tribu borélienne. Le théorème de prolongement d'une mesure définie sur les ensembles ouverts fournit donc, sous réserve d'existence, l'unicité d'une mesure μ vérifiant (2·1). Nous allons maintenant construire une telle mesure.

Dans toute la suite, nous notons $\mathcal{C}_K(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions réelles de variable réelle qui sont continues à support compact et par $\mathcal{B}_K(\mathbb{R})$ celui des des fonctions bornées à support compact sur $\mathbb{R}$.

Étant données une fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ croissante (non nécessairement continue à droite), et une subdivision $\sigma = \{x_j\}_{j=0}^{n}$ de $[a, b]$, on pose

$$\Delta_j F = F(x_{j+1}) - F(x_j) \qquad (0 \leqslant j \leqslant n-1).$$

Pour $\varphi \in B[a, b]$, $\sigma \in \mathfrak{S}[a, b]$, on définit les sommes de Darboux

$$S_\sigma(\varphi) = \sum_{j=0}^{n} M_j \Delta_j F, \qquad s_\sigma(\varphi) = \sum_{j=0}^{n} m_j \Delta_j F,$$

avec $M_j = \sup_{[x_j, x_{j+1}]} \varphi(x)$, $m_j = \inf_{[x_j, x_{j+1}]} \varphi(x)$.

Théorème 2.1. *Pour $\varphi \in \mathcal{C}_K(\mathbb{R})$, $[a,b] \supset \operatorname{supp}\varphi$, $\sigma = \{x_j\}_{j=0}^n \in \mathfrak{S}[a,b]$ la limite suivante existe*

$$\lim_{\substack{\|\sigma\|\to 0\\ \sigma\in\mathfrak{S}[a,b]}} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(x_j)\Delta_j F = \sup_{\sigma\in\mathfrak{S}[a,b]} s_\sigma(\varphi) = \inf_{\sigma\in\mathfrak{S}[a,b]} S_\sigma(\varphi). \tag{2·2}$$

On désigne sa valeur comme l'intégrale de Stieltjes de φ relativement à la mesure $\mathrm{d}F$ et on la note

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi\, \mathrm{d}F.$$

L'application $\varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}} \varphi\, \mathrm{d}F$ est une forme linéaire positive sur $\mathcal{C}_K(\mathbb{R})$.

Le théorème de représentation de Riesz, que nous énonçons ici dans le cas de $\mathbb{R}$, fournit alors le résultat.

Théorème 2.2 (Riesz). *Soit T une forme linéaire positive sur $\mathcal{C}_K(\mathbb{R})$. Il existe une tribu $\mathcal{A}$ contenant les boréliens et une unique mesure μ sur $\mathcal{A}$ telle que*

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi\, \mathrm{d}\mu = T(\varphi) \qquad (\varphi \in \mathcal{C}_K(\mathbb{R})).$$

De plus, μ est régulière et complète.

Pour la démonstration voir par exemple Rudin, *Analyse réelle et complexe*, Masson 1987.

Définition 2.3. *Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction croissante. On désigne par mesure de Stieltjes, et l'on note $\mathrm{d}F$, l'unique mesure positive complète déterminée par sa valeur* (2·2) *sur les fonctions de $\mathcal{C}_K(\mathbb{R})$.*

On verra plus loin (Corollaire 2.9) que la mesure μ ainsi construite répond à la question initialement posée.

Une autre manière de construire l'intégrale de Stieltjes consiste à utiliser le théorème de prolongement d'une mesure définie sur les ouverts, établi dans le polycopié de Licence de Varouchas. Ici encore, nous restreignons l'énoncé au cas de $\mathbb{R}$.

Théorème 2.4. *Soient $\mathcal{O}$ la classe des ouverts de $\mathbb{R}$ et $\mu : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ une fonction vérifiant :*

(i) $\mu(\varnothing) = 0$;
(ii) $U \subset V \Rightarrow \mu(U) \leqslant \mu(V)$;
(iii) $\mu(U) + \mu(V) = \mu(U \cup V) + \mu(U \cap V)$;
(iv) $\mu(U) < \infty$ si $\overline{U}$ est compact ;
(v) $\lim_n \mu(U_n) = \mu(U)$ si $\{U_n\}_{n=1}^\infty$ est une suite croissante d'ouverts de réunion U.

Alors il existe une tribu $\mathcal{A}$ sur $\mathbb{R}$ contenant les boréliens et une mesure complète $\widehat{\mu}$ sur $\mathcal{A}$ prolongeant μ. De plus, toute mesure borélienne prolongeant μ coïncide avec $\widehat{\mu}$.

On vérifie aisément que les propriétés (i) à (v) sont satisfaites lorsque μ est déterminée sur les intervalles ouverts par

$$\mu(]a,b[) = F(b-) - F(a+)$$

et prolongée à $\mathcal{O}$ par additivité dénombrable — puisque tout ouvert de $\mathbb{R}$ est réunion disjointe d'une suite d'intervalles ouverts. Établissons par exemple le point (v). On a d'une part $\mu(U_n) \leqslant \mu(U)$ pour tout n, donc $\lim_n \mu(U_n) \leqslant \mu(U)$. D'autre part, le théorème de Borel–Lebesgue implique immédiatement que tout compact K inclus dans U est contenu dans l'un des U_p. Or, on déduit du fait que $U = \cup_n]a_n, b_n[$ que pour tout N et tout $\varepsilon > 0$ il existe un compact K tel que

$$\mu(\overset{\circ}{K}) > \sum_{1\leqslant n\leqslant N} \mu(]a_n, b_n]) - \varepsilon.$$

Cela implique bien $\lim_p \mu(U_p) \geqslant \mu(U)$.

Exemples. Soit $F = \mathbf{1}_{[0,\infty[}$. Alors $\mathrm{d}F$ est la mesure de Dirac en 0. Une partie A de $\mathbb{R}$ est négligeable si, et seulement si, $0 \notin A$.

Si $F(x) := \int_{-\infty}^{x} h(t)\,\mathrm{d}t$ avec $h \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, $h \geqslant 0$, alors $\mathrm{d}F$ coïncide avec la mesure de densité h par rapport à la mesure de Lebesgue puisque ces deux mesures prennent la même valeur sur les ensembles ouverts.

Lorsque $F \in V_0(\mathbb{R})$, la fonction

$$V_F(x) := \begin{cases} V_F(]0,x]) & \text{si } x > 0,\\ 0 & \text{si } x = 0\\ V_F(]x,0]) & \text{si } x < 0,\end{cases}$$

est croissante et l'on désigne par $|\mathrm{d}F|$ la mesure de Stieltjes associée.

Définition 2.5. *Soit $F \in V_0(\mathbb{R})$. On désigne par mesure de Stieltjes associée à F et l'on note $\mathrm{d}F$, la mesure réelle $\mathrm{d}F := \mathrm{d}F_1 - \mathrm{d}F_2$ où F_1 et F_2 sont des fonctions croissantes telles que $F = F_1 - F_2$, $V_F = F_1 + F_2$. La mesure $\mathrm{d}F$ définit une forme linéaire sur l'espace $\mathcal{L}^1(|\mathrm{d}F|)$.*

On vérifie immédiatement que

$$\left|\int \varphi\,\mathrm{d}F\right| \leqslant \int |\varphi|\,|\mathrm{d}F| \qquad \big(\varphi \in \mathcal{L}^1(|\mathrm{d}F|)\big).$$

À ce stade, la théorie de l'intégrale de Stieltjes relève de celle de Lebesgue. Nous mentionnons pour mémoire les résultats de base, directement issus de leurs analogues dans la théorie de l'intégrale abstraite.

Théorème 2.6 (Convergence monotone). *Soit $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite croissante de fonctions de $\mathcal{L}^1(|\mathrm{d}F|)$ telle que $\sup_{n\geqslant 1} \int_{\mathbb{R}} \varphi_n\,|\mathrm{d}F| < \infty$. Alors il existe une fonction $\varphi \in \mathcal{L}^1(|\mathrm{d}F|)$ telle que $\varphi_n \to \varphi$ $|\mathrm{d}F|$-pp et $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \varphi_n\,\mathrm{d}F = \int_{\mathbb{R}} \varphi\,\mathrm{d}F$.*

En particulier, pour toute une série de fonctions $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n$ de $\mathcal{L}^1(|\mathrm{d}F|)$ telle que $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} |\varphi_n(x)|\,|\mathrm{d}F| < \infty$, il existe une fonction $\varphi \in \mathcal{L}^1(|\mathrm{d}F|)$ telle que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) = \varphi(x) \quad |\mathrm{d}F|\text{-pp}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} \varphi_n(x)\,\mathrm{d}F = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,\mathrm{d}F.$$

On en déduit que pour $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on a $\varphi = 0$ $\mathrm{d}F$-pp si, et seulement si, $\varphi \in \mathcal{L}^1(|\mathrm{d}F|)$ et $\int_{\mathbb{R}} |\varphi|\,|\mathrm{d}F| = 0$.

Théorème 2.7 (Lemme de Fatou). *Soient* $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ *une suite de fonctions de* $\mathcal{L}^1(|\mathrm{d}F|)$ *et* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *satisfaisant à*

$$\varphi_n \geqslant 0 \quad (n \geqslant 1), \quad \sup_{n\geqslant 1} \int_{\mathbb{R}} \varphi_n \, |\mathrm{d}F| < \infty, \quad \varphi_n \to \varphi \ |\mathrm{d}F|\text{-pp.}$$

Alors $\varphi \in \mathcal{L}^1(|\mathrm{d}F|)$, *et* $\int_{\mathbb{R}} \varphi \, |\mathrm{d}F| \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \varphi_n \, |\mathrm{d}F|$.

Théorème 2.8 (Convergence dominée). *Soit* $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ *une suite de fonctions de* $\mathcal{L}^1(|\mathrm{d}F|)$ *convergeant* $|\mathrm{d}F|$-pp *vers une fonction* φ *définie sur* $\mathbb{R}$. *On suppose qu'il existe une fonction fixe* $g \in \mathcal{L}^1(|\mathrm{d}F|)$ *telle que* $|\varphi_n| \leqslant g$ $|\mathrm{d}F|$-pp *pour chaque entier* n. *Alors* $\varphi \in \mathcal{L}^1(|\mathrm{d}F|)$ *et* $\int_{\mathbb{R}} \varphi \, \mathrm{d}F = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \varphi_n \, \mathrm{d}F$.

Corollaire 2.9. *Soit* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction croissante. On a*

$$\int_{]a,b]} \mathrm{d}F = F(b+) - F(a+) \qquad (a,\, b \in \mathbb{R},\, a < b).$$

Théorème 2.10 (Dérivation sous le signe d'intégration). *Soit* J *un intervalle ouvert de* $\mathbb{R}$ *et* $\varphi : \mathbb{R} \times J \to \mathbb{R}$ *une fonction de deux variables telle que :*

(i) $(\forall x \in J) \quad t \mapsto \varphi(t,x) \in \mathcal{L}^1(|\mathrm{d}F|)$

(ii) $x \mapsto \varphi(t,x)$ *est dérivable sur* J *pour presque tout* t

(iii) $\exists g \in \mathcal{L}^1(|\mathrm{d}F|) : \sup_{x\in J} |\partial\varphi(t,x)/\partial x| \leqslant g(t)$ $|\mathrm{d}F|$-pp.

Alors la fonction définie sur J *par* $h(x) := \int_{\mathbb{R}} \varphi(t,x) \, \mathrm{d}F(t)$ *est dérivable sur* J *et l'on a*

$$h'(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial x} \, \mathrm{d}F(t).$$

L'application $f \mapsto \|f\|_1 := \int_{\mathbb{R}} |f| \, |\mathrm{d}F|$ est une semi-norme sur $\mathcal{L}^1(|\mathrm{d}F|)$ et une norme sur l'espace $L^1(\mathrm{d}F)$ quotient de $\mathcal{L}^1(|\mathrm{d}F|)$ par la relation d'équivalence de l'égalité $|\mathrm{d}F|$-pp.

Théorème 2.11 (Fischer–Riesz). *Soit* $F \in V_0(\mathbb{R})$. *Alors* $L^1(|\mathrm{d}F|)$ *est un espace de Banach. Plus généralement, les espaces* $\mathcal{L}^p(|\mathrm{d}F|)$ *et* $L^p(|\mathrm{d}F|)$ *sont complets pour* $1 \leqslant p \leqslant \infty$. *Plus précisément, de toute suite de Cauchy* $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ *de fonctions de* $\mathcal{L}^p(\mathrm{d}F)$, *on peut extraire une sous-suite convergeant* $|\mathrm{d}F|$-pp *et en moyenne d'ordre* p *vers tout représentant* φ *de l'unique limite de la suite* $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ *dans* $L^p(|\mathrm{d}F|)$.

Théorème 2.12 (Changement de variables). *Soient* $F \in V_0(\mathbb{R})$ *et* $\vartheta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une bijection continue strictement monotone. Alors* $\varphi \in \mathcal{L}^1(|\mathrm{d}F|) \Leftrightarrow \varphi \circ \vartheta \in \mathcal{L}^1(\mathrm{d}(F \circ \vartheta))$ *et l'on a dans cette circonstance*

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi \, \mathrm{d}F = \varepsilon \int_{\mathbb{R}} (\varphi \circ \vartheta) \, \mathrm{d}(F \circ \vartheta)$$

avec $\varepsilon = 1$ *si* ϑ *est croissante,* $\varepsilon = -1$ *si* ϑ *est décroissante.*

Théorème 2.13 (Fubini). *Soient F, G deux fonctions de $V_0(\mathbb{R})$. Pour toute fonction positive $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mesurable pour $\mathcal{A}(|\mathrm{d}F|) \otimes \mathcal{A}(|\mathrm{d}G|)$,[1] les intégrales*

$$U(x) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x,y)\,\mathrm{d}G(y) \qquad \text{et} \qquad V(y) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x,y)\,\mathrm{d}F(x)$$

définissent des fonctions respectivement $|\mathrm{d}G|$ et $|\mathrm{d}F|$ mesurables. On a alors

$$\int_{\mathbb{R}^2} \varphi\,\mathrm{d}F \otimes \mathrm{d}G = \int_{\mathbb{R}} U\,\mathrm{d}F = \int_{\mathbb{R}} V\,\mathrm{d}G.$$

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction mesurable $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ soit intégrable relativement à $\mathrm{d}F \otimes \mathrm{d}G$ est que l'on ait

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}F(x) \int_{\mathbb{R}} |g(x,y)|\,\mathrm{d}G(y) < \infty.$$

Lorsqu'il en est ainsi, la fonction $y \mapsto g(x,y)$ est $\mathrm{d}G$-intégrable pour $\mathrm{d}F$-presque tout x, et la fonction définie $|\mathrm{d}F|$-pp par

$$\int_{\mathbb{R}} g(x,y)\,\mathrm{d}G(y)$$

peut être prolongée en une fonction de $\mathfrak{L}^1(|\mathrm{d}F|)$. Les propriétés obtenues en inversant les rôles des variables sont aussi valables, et l'on a

$$\int_{\mathbb{R}^2} g\,\mathrm{d}F \otimes \mathrm{d}G = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}F \int_{\mathbb{R}} g\,\mathrm{d}G = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}G \int_{\mathbb{R}} g\,\mathrm{d}F.$$

3. Intégration par parties

Normalisation. Pour des raisons qui tiennent à l'intégration par parties, un des attraits essentiels de l'intégrale de Stieltjes, il est préférable, dans le cadre de l'intégrale de Lebesgue–Stieltjes, d'adopter la normalisation suivante des fonctions de $V_0(\mathbb{R})$ en posant

$$F(x) = \tfrac{1}{2}F(x+) + \tfrac{1}{2}F(x-).$$

Lorsque cette relation est satisfaite identiquement, on dit que F est *équilibrée.* On désigne par $V_0^*(\mathbb{R})$ le sous-espace de $V_0(\mathbb{R})$ composé des fonctions équilibrées. On pose alors, pour $a \leqslant b$,

$$\int_a^b f\mathrm{d}F := \int_{\mathbb{R}} \chi f \mathrm{d}F$$

où $\chi = \chi_{a,b}$ est la fonction équilibrée issue de $\mathbf{1}_{]a,b]}$. Avec cette convention, on a

$$\int_a^b \mathrm{d}F = \tfrac{1}{2}\int_{]a,b]} \mathrm{d}F + \tfrac{1}{2}\int_{[a,b[} \mathrm{d}F = F(b) - F(a) \tag{3·1}$$

1. Il suffit pour cela d'imposer que $x \mapsto \varphi(x,y)$ est $\mathrm{d}F$-mesurable $\mathrm{d}G$-pp et que $y \mapsto g(x,y)$ est $\mathrm{d}G$-mesurable $|\mathrm{d}F|$-pp.

pour toute fonction $F \in V_0^*(\mathbb{R})$ et tous $a, b \in \mathbb{R}$. Lorsque $a > b$, on définit

$$\int_a^b \mathrm{d}F = -\int_b^a \mathrm{d}F.$$

Il est alors évident que la relation de Chasles

$$\int_a^b \mathrm{d}F + \int_b^c \mathrm{d}F = \int_a^c \mathrm{d}F$$

est valable identiquement.

Il est à noter que l'on a, en vertu du théorème de convergence dominée, pour tous a, b, et toute fonction $\mathrm{d}F$-intégrable f,

$$\int_a^b f dF = \tfrac{1}{2}\int_{a-}^{b-} f dF + \tfrac{1}{2}\int_{a+}^{b+} f dF. \tag{3·2}$$

Cela résulte immédiatement du fait que χ est la limite simple partout (et donc $\mathrm{d}F$-pp) de la moyenne $\frac{1}{2}\chi_{a_n,b_n} + \frac{1}{2}\chi_{c_n,d_n}$ pour des suites convenables $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ vérifiant $a_n < a < c_n < b_n < b < d_n$.

Exemples. 1. Soit $F = \frac{1}{2}\mathbf{1}_{[0,\infty[} + \frac{1}{2}\mathbf{1}_{]0,\infty[}$. Alors, comme nous l'avons vu précédemment, $\mathrm{d}F$ est la mesure de Dirac en 0.[2] Plus généralement, si F est une fonction de sauts normalisée

$$F(x) = \tfrac{1}{2}\sum_{x_j<x} a_j + \tfrac{1}{2}\sum_{x_j\leqslant x} a_j$$

où la série $\sum_{x_j\leqslant x} |a_j|$ converge pour tout nombre réel x,[3] alors $\varphi \in \mathcal{L}^1(|\mathrm{d}F|)$ si, et seulement si, $\varphi(x_j)$ est défini pour chaque indice j tel que $a_j \neq 0$ et $\sum_j |\varphi(x_j)a_j| < \infty$. Lorsque cette condition est réalisée, on a

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi\,\mathrm{d}F = \sum_j \varphi(x_j)a_j.$$

2. Soit maintenant $F(x) = \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$ où g est une fonction localement intégrable sur $\mathbb{R}$. Alors, comme on l'a vu plus haut, $\mathcal{L}^1(|\mathrm{d}F|)$ coïncide avec l'ensemble des fonctions $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $\varphi g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et l'on a lorsque cette condition est remplie

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi\,\mathrm{d}F = \int_{\mathbb{R}} \varphi g\,\mathrm{d}x.$$

Théorème 3.1 (Intégration par parties). *Soient f, $g \in V_0^*(\mathbb{R})$. Alors f et g sont respectivement localement intégrables pour les mesures de Stieltjes $\mathrm{d}g$ et $\mathrm{d}f$. Pour tous a, $b \in \mathbb{R}$, on a*

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}g + \int_a^b g\,\mathrm{d}f = \tfrac{1}{2}\big[fg\big]_{a-}^{b-} + \tfrac{1}{2}\big[fg\big]_{a+}^{b+}. \tag{3·3}$$

2. Cette propriété est également vraie, avec la même démonstration, pour $F_1 := \mathbf{1}_{[0,\infty[}$ ou $F_2 := \mathbf{1}_{[0,\infty[}$.

3. Cette condition équivaut évidemment à $F \in V_0^*(\mathbb{R})$.

En particulier, pour tous a, $b \in \mathcal{C}(f) \cup \mathcal{C}(g)$ on a

$$\int_a^b f \,\mathrm{d}g + \int_a^b g \,\mathrm{d}f = \big[fg\big]_a^b. \tag{3·4}$$

Démonstration. L'intégrabilité est évidente puisque des fonctions à variation bornée sont localement bornées.

Montrons (3·3). Supposons d'abord que a et b sont des points de continuité de f et g. D'après (3·1), on a alors, pour tout x de $[a, b]$, puisque f et g sont équilibrées,

$$f(x) = f(b) - \int_x^b \mathrm{d}f(t), \quad g(x) = g(a) + \int_a^x \mathrm{d}g(t).$$

Il s'ensuit que

$$\int_a^b f(x) \,\mathrm{d}g(x) + \int_a^b g(x) \,\mathrm{d}f(x) = f(b)g(b) - f(a)g(a) + I_1 - I_2,$$

avec

$$I_1 := \int_a^b \Big(\int_a^x \mathrm{d}g(t)\Big) \,\mathrm{d}f(x), \qquad I_2 := \int_a^b \Big(\int_x^b \mathrm{d}f(t)\Big) \,\mathrm{d}g(x).$$

Nous obtiendrons le résultat annoncé en appliquant le théorème de Fubini (Théorème 2.13). Nous pouvons en effet écrire, du fait de la continuité de f et g en a et b,

$$I_j = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \chi_j(x, t) \,\mathrm{d}f(x) \,\mathrm{d}g(t) \qquad (j = 1, 2),$$

avec

$$\chi_1(x, t) := \tfrac{1}{2} \mathbf{1}_{[a,b]}(x) \big\{\mathbf{1}_{[a,x]}(t) + \mathbf{1}_{[a,x[}(t)\big\},$$
$$\chi_2(x, t) := \tfrac{1}{2} \mathbf{1}_{[a,b]}(t) \big\{\mathbf{1}_{]t,b]}(x) + \mathbf{1}_{[t,b]}(x)\big\},$$

et donc $\chi_1 = \chi_2$.

Cela établit bien (3·4) lorsque a, $b \in \mathcal{C}(f) \cap \mathcal{C}(g)$. On déduit le cas général en remarquant que $\mathcal{C}(f) \cap \mathcal{C}(g)$ est de complémentaire dénombrable, donc dense, et en utilisant (3·2). Ensuite, on constate que (3·3) implique (3·4) lorsque a et b sont des points de continuité de f ou g. □

En pratique, il est souvent nécessaire de travailler avec des fonctions non normalisées, comme par exemple la fonction partie entière. La formule d'intégration par parties est alors soumise à condition.

Théorème 3.2. *Soient F, $G \in V_0(\mathbb{R})$. Alors F est $\mathrm{d}G$ localement intégrable, G est $\mathrm{d}F$ localement intégrable. Si l'on interprète une intégrale de a à b comme une intégrale sur $]a, b]$ (resp. $[a, b[$), la formule (3·4) est valable dès que $\mathcal{D}(F) \cap \mathcal{D}(G) = \varnothing$.*

Démonstration. L'intégrabilité est établie comme au Théorème 3.1. Pour montrer la formule d'intégration par parties, on observe que, si G^* désigne la fonction normalisée issue de G, et si l'on note $s_F(z) = F(z+) - F(z-)$ le saut de F en z, alors

$$\int_{]a,b]} \{G(x) - G^*(x)\} \,\mathrm{d}F(x) = \sum_{z \in \mathcal{D}(F) \cap \mathcal{D}(G) \cap]a,b]} s_F(z) \{G(z) - G^*(z)\}.$$

□

Remarque. Un examen de la démonstration révèle que la validité du Théorème 3.1 est conditionnelle à normalisation choisie plus haut pour les fonctions de $V_0^*(\mathbb{R})$, qui est essentielle pour pouvoir appliquer le théorème de Fubini. La formule (3·4) n'a pas lieu lorsque l'on choisit les fonctions dans $V_0^+(\mathbb{R})$: pour $F = \mathbf{1}_{[0,\infty[}$, on a par exemple

$$\int_{-1}^{1} F\,\mathrm{d}F = F(0) = 1$$

alors que

$$\Big[F^2\Big]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} F\,\mathrm{d}F = 1 - 1 = 0.$$

Comme application élégante du théorème d'intégration par parties et du théorème de Lebesgue, retrouvons le théorème de Jordan selon lequel toute fonction 1-périodique à variation bornée sur $\mathbb{T} := \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ et équilibrée est somme de sa série de Fourier. À cette fin, nous observons que l'on a pour $n \neq 0$

$$\widehat{f}(n) := \int_0^1 f(u)\mathrm{e}(-nu)\,\mathrm{d}u = \int_{\mathbb{T}} \frac{\mathrm{e}(-nu)}{2\pi i n}\,\mathrm{d}f(u),$$

d'où

$$S_N(f;x) := \sum_{|n|\leqslant N} \widehat{f}(n)\mathrm{e}(nx) = \widehat{f}(0) - \int_{\mathbb{T}} B(x-u;N)\,\mathrm{d}f(u)$$

avec

$$B(v;N) := \sum_{|n|\leqslant N} \frac{\mathrm{e}(-nv)}{2\pi i n} = -\sum_{1\leqslant n\leqslant N} \frac{\sin(2\pi nv)}{\pi n}.$$

Ici, l'intégrale sur $\mathbb{T}$ coïncide avec l'intégrale de 0 à 1.

Il est bien connu que $B(u;N)$ est uniformément bornée en N et v et tend en tout point vers

$$B(v) := \begin{cases} \{v\} - \frac{1}{2} & \text{si } v \notin \mathbb{Z}, \\ 0 & \text{si } v \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Le théorème de la convergence dominée implique alors

$$\begin{aligned} \lim_N S_N(f;x) &= \widehat{f}(0) - \int_{\mathbb{T}} B(x-u)\,\mathrm{d}f(u) = \widehat{f}(0) + \int_{\mathbb{T}} B(u)\,\mathrm{d}f(x-u) \\ &= \widehat{f}(0) + \Big[B(u)f(x-u)\Big]_0^1 - \int_0^1 f(x-u)\,\mathrm{d}B(u) \\ &= \widehat{f}(0) - \int_0^1 f(x-u)\,\mathrm{d}B(u) = \widehat{f}(0) + f(x) - \int_{\mathbb{T}} f(u)\,\mathrm{d}u = f(x), \end{aligned}$$

où nous avons utilisé l'identité $\mathrm{d}B(u) = \mathrm{d}u - \delta_0$ dans l'espace des mesures sur $\mathbb{T}$.

Théorème 3.3 (Sommation d'Abel). *Soient $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite de nombres complexes et $A(t) := \sum_{1\leqslant n\leqslant t} a_n$ $(t \geqslant 1)$ sa fonction sommatoire. Pour toute fonction $b \in \mathcal{C}^1[1,x]$, on a*

$$\sum_{1\leqslant n\leqslant x} a_n b(n) = A(x)b(x) - \int_1^x A(t)b'(t)\,\mathrm{d}t. \tag{3·5}$$

Si $A(t) = M(t) + O(R(t))$ $(1 \leqslant t \leqslant x)$ *avec* $M \in \mathcal{C}^1[1,x]$*, on a*

$$(3{\cdot}6)\quad \sum_{1\leqslant n\leqslant x} a_n b(n) = \int_1^x M'(t)b(t)\,\mathrm{d}t + O\Big(\big|R(1)b(1)\big| + \big|R(x)b(x)\big| + \int_1^x \big|R(t)b'(t)\big|\,\mathrm{d}t\Big).$$

Démonstration. En interprétant $\int_a^b$ comme $\int_{]a,b]}$, le membre de gauche de (3·5) vaut

$$\int_0^x b(t)\,\mathrm{d}A(t) = [A(x)b(x)]_0^x - \int_0^x A(t)b'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Cela montre bien (3·5). Pour établir (3·6), on procède de même, mais en remarquant que $\mathrm{d}A(t) = M'(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{d}N(t)$ avec $N(t) = O(R(t))$ et n'intégrant par parties que l'intégrale relative à $\mathrm{d}N(t)$. □

4. Formule d'Euler–Maclaurin

On désigne par $B_r(x)$ les fonctions 1-périodiques de Bernoulli définies par l'identité

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{B_r(x)}{r!} y^r = \frac{ye^{xy}}{e^y - 1} \qquad (0 \leqslant x < 1,\ |y| < 2\pi)$$

et l'on pose $B_r := B_r(0)$.

Théorème 4.1 (Formule d'Euler–Maclaurin). *Soient* $k \geqslant 0$*,* a*,* $b \in \mathbb{Z}$*,* $f \in \mathcal{C}^{k+1}[a,b]$*. On a*

$$\sum_{a<n\leqslant b} f(n) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \sum_{r=0}^{k} \frac{(-1)^{r+1}B_{r+1}}{(r+1)!}\big(f^{(r)}(b) - f^{(r)}(a)\big)$$
$$+ \frac{(-1)^k}{(k+1)!}\int_a^b B_{k+1}(t) f^{(k+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration. Puisque $B_1(x) = \{x\} - \frac{1}{2}$, on peut écrire

$$\sum_{a<n\leqslant b} f(n) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}[t] = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}B_1(t).$$

Calculons la dernière intégrale par intégration par parties :

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}B_1(t) = B_1{\cdot}(f(b) - f(a)) - \int_a^b B_1(t)f'(t)\,\mathrm{d}t$$
$$= B_1{\cdot}(f(b) - f(a)) - \frac{1}{2!}\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}B_2(t).$$

En effet, on vérifie sans peine que $B_2(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Z}$, où elle satisfait à $B_2'(t) = 2B_1(t)$. De plus, pour $r \geqslant 3$, $B_r(t)$ est dérivable sur tout $\mathbb{R}$ et satisfait à

$$B_r'(t) = rB_{r-1}(t).$$

On peut donc calculer l'intégrale relative à $B_2(t)$ par une nouvelle sommation partielle, en faisant intervenir $B_3(t)$. Une itération du procédé fournit le résultat. □

5. Formules de la moyenne

Théorème 5.1 (Première formule de la moyenne). *Soit F une fonction croissante et $\varphi \in \mathcal{L}^1(\mathrm{d}F)$ telle que $m \leqslant \varphi \leqslant M$ $\mathrm{d}F$-pp sur $[a,b]$. Alors il existe $\mu \in [m,M]$ tel que*

$$\int_a^b \varphi \,\mathrm{d}F = \mu\big(F(b) - F(a)\big). \tag{5·1}$$

Si de plus $\varphi \in \mathcal{C}[a,b]$, alors il existe $c \in [a,b]$ tel que $\mu = \varphi(c)$.

Démonstration. La formule (5·1) résulte immédiatement de l'intégration des inégalités $m \leqslant \varphi \leqslant M$ pour la mesure positive $\mathrm{d}F$. Si φ est continue, on applique le théorème des valeurs intermédiaires. □

Corollaire 5.2 (Seconde formule de la moyenne pour l'intégrale de Lebesgue). *Soient $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathrm{d}x)$ avec g monotone sur $[a,b]$. Alors il existe $\xi \in [a,b]$ tel que*

$$\int_a^b fg \,\mathrm{d}x = g(a)\int_a^\xi f\,\mathrm{d}t + g(b)\int_\xi^b f\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration. Posons $F(t) = \int_a^t f(v)\,\mathrm{d}v$. Le membre de gauche vaut

$$\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}F(t) = F(b)g(b) - \int_a^b F(t)\,\mathrm{d}g(t),$$

par intégration par parties. Supposons par exemple g croissante. Alors $\mathrm{d}g(t)$ est une mesure de Stieltjes positive et, $F(t)$ étant continue, il existe ξ, $a \leqslant \xi \leqslant b$, tel que la dernière intégrale vaille $F(\xi)\{g(b) - g(a)\}$. On obtient le résultat souhaité en regroupant les termes. □

Théorème 5.3 (Seconde formule de la moyenne). *Si $F \in VB[a,b]$ est continue et si $\varphi \in \mathcal{L}^1[a,b]$ est croissante, il existe $\xi \in [a,b]$ tel que*

$$\int_a^b \varphi\,\mathrm{d}F = \varphi(a)\int_a^\xi \mathrm{d}F + \varphi(b)\int_\xi^b \mathrm{d}F. \tag{5·2}$$

Démonstration. La continuité de F permet d'appliquer la formule d'intégration par parties au membre de gauche de (5·2). On obtient

$$\int_a^b \varphi\,\mathrm{d}F = [\varphi F]_a^b - \int_a^b F\,\mathrm{d}\varphi = [\varphi F]_a^b - F(\xi)\{\varphi(b) - \varphi(a)\},$$

avec $\xi \in [a,b]$, en vertu du Théorème 5.1. On obtient (5·2) en regroupant les termes. □

On peut appliquer ce résultat à l'étude de l'intégrale indéfinie.

Théorème 5.4. *Soient $F \in V_0(\mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{L}^1(|\mathrm{d}F|)$. On pose $\beta(x) = \int_a^x g\,\mathrm{d}F$. Alors*

(i) *$\beta \in V_0(\mathbb{R})$ et $|\mathrm{d}\beta| = |g|\,|\mathrm{d}F|$,*

(ii) *$\mathrm{d}\beta = g\mathrm{d}F$, c'est-à-dire que $f \in \mathcal{L}^1(|\mathrm{d}\beta|) \Leftrightarrow fg \in \mathcal{L}^1(|\mathrm{d}F|)$ et, sous cette hypothèse*

$$\int_{\mathbb{R}} f\mathrm{d}\beta = \int_{\mathbb{R}} fg\,\mathrm{d}F.$$

(iii) *β est dérivable en tout point où F l'est et g est continue. En un tel point $\beta'(x) = g(x)F'(x)$.*

Remarque. Il découle d'un théorème de Lebesgue que F est dérivable pp.

Démonstration. (i) On a clairement $V_\beta[a,b] \leqslant \int_a^b |g|\,|\mathrm{d}F|$, donc $\beta \in VB[a,b]$. la preuve de la formule $|\mathrm{d}\beta| = |g|\,|\mathrm{d}F|$ est semblable à celle de la Proposition 1.4, en utilisant maintenant la densité dans $\mathcal{L}^1(\mathrm{d}F)$ de l'espace des fonctions continues à support compact. Nous omettons les détails.

(ii) $\mathrm{d}\beta$ et $g\mathrm{d}F$ coïncident évidemment sur les fonctions indicatrices d'intervalles. Par unicité de la mesure de Stieltjes, ces deux mesures sont donc égales.

(iii) Nous omettons les détails, qui sont faciles. □

6. Suites de mesures de Stieltjes

Commençons par une application classique du procédé diagonal de Cantor.

Lemme 6.1. *Soit $\{a_{mn}\}_{m,\,n=1}^\infty$ une suite double bornée. Il existe une suite $\{n_j\}_{j=1}^\infty$ telle que chacune des suites $\{a_{mn_j}\}_{j=1}^\infty$ $(m \geqslant 1)$ soit convergente.*

Démonstration. la suite $\{a_{1n}\}_{n=1}^\infty$ étant bornée, il existe une suite $\{p_{j1}\}_{j=1}^\infty$ telle que $\{a_{1p_{j1}}\}_{n=1}^\infty$ soit convergente. Comme la suite $\{a_{2p_{j1}}\}_{n=1}^\infty$ est bornée, on peut en extraire une sous-suite convergente, disons $\{a_{2p_{j2}}\}_{n=1}^\infty$. En itérant le procédé, on construit pour chaque entier k une suite $\{p_{jk}\}_{n=1}^\infty$ telle que $\{a_{mp_{jk}}\}_{n=1}^\infty$ converge pour tout $m \leqslant k$. La suite définie par $n_j := p_{jj}$ possède donc la propriété requise. □

Théorème 6.2. *Soit $\{F_n\}_{n=1}^\infty$ une suite de fonctions de $VB[a,b]$ telle que*

$$\sup_n \left\{ |F_n(a)| + \int_a^b |\mathrm{d}F_n| \right\} < \infty.$$

Alors il existe $F \in VB[a,b]$ et une sous-suite d'indices $n_j \to \infty$ telles que $F_{n_j} \to F$ simplement. De plus, l'énoncé est encore valable si $[a,b]$ est remplacé par $[a,\infty[$.

Démonstration. Supposons d'abord que les F_n sont croissantes. Si $\{r_m\}_{m=1}^\infty$ est une suite décrivant les rationnels de $[a,b]$, le Lemme 6.1 implique l'existence d'une fonction $G : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ et d'une suite $\{n_j\}_{j=1}^\infty$ telle que $F_{n_j}(r_m) \to G(r_m)$ pour tout $m \geqslant 1$. On prolonge G à $\mathbb{R}$ tout entier en posant

$$G(x) := \limsup_{j\to\infty} F_{n_j}(x) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Bien entendu, G est croissante. On a en fait

$$G(x) := \lim_{j\to\infty} F_{n_j}(x) \qquad (x \in \mathcal{C}(G)) \tag{6·1}$$

avec la notation $\mathcal{C}(G) := \mathbb{R} \smallsetminus \mathcal{D}(G)$. En effet, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $r \in \mathbb{Q}$ tel que $G(r) < G(x) < G(r) + \varepsilon$ et $r < x$. Pour j assez grand, on aussi $F_{n_j}(r) > G(r) - \varepsilon$, d'où

$$F_{n_j}(x) \geqslant F_{n_j}(r) > G(x) - 2\varepsilon.$$

On en déduit que $\liminf_{j\to\infty} F_{n_j}(x) = G(x)$ et donc (6·1). On sait d'après le Théorème 1.6 que $\mathcal{D}(G)$ est dénombrable. Le Lemme 6.1 permet donc de supposer, quitte à extraire de la suite $\{n_j\}_{n=1}^\infty$ une nouvelle sous-suite que $F_{n_j}(x)$ converge pour tout $x \in \mathcal{D}(G)$. En posant

$$F(x) := \begin{cases} G(x) & (x \in \mathcal{C}(G)), \\ \lim_j F_{n_j}(x) & (x \in \mathcal{D}(G)), \end{cases}$$

on a donc établi le résultat annoncé lorsque F est croissante.

Le cas général en découle en appliquant ce que nous venons de démontrer à deux fonctions croissantes F_1 et F_2 telles que $F - F_1 - F_2$. Lorsque $[a,b]$ est remplacé par $[a,\infty[$, le même raisonnement s'applique puisque les suites $F_{n_j}(x)$ sont uniformément bornées. □

Théorème 6.3. *Soit* $\{\mathrm{d}F_n\}_{n=1}^{\infty}$ *une suite de mesures de Stieltjes telle que*

$$\sup_n \int_a^b |\mathrm{d}F_n| < \infty. \tag{6·2}$$

Si $F_n \to F$ *simplement alors on a pour toute fonction* $\varphi \in V_0^*(\mathbb{R})$

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi \,\mathrm{d}F_n = \int_a^b \varphi \,\mathrm{d}F.$$

Démonstration. On peut manifestement supposer les F_n croissantes et normalisées car la normalisation ne modifie pas la mseure de Stieltjes. Par intégration par parties, on peut écrire

$$\int_a^b \varphi \,\mathrm{d}F_n = [\varphi F_n]_a^b - \int_a^b F_n \,\mathrm{d}\varphi.$$

Comme F_n tend simplement vers F et que la convergence est dominée en vertu de la condition (6·2), le théorème de lebesgue implique

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi \,\mathrm{d}F_n = [\varphi F]_a^b - \int_a^b F \,\mathrm{d}\varphi = \int_a^b \varphi \,\mathrm{d}F,$$

grâce à une nouvelle intégration par parties. □

Remarque. Le résultat précédent est en défaut si les intégrales sont prises sur un intervalle infini, même avec la condition (6·2). Il se peut en effet que $\varphi \notin L^1(\mathrm{d}F)$, comme lorsque

$$\mathrm{d}F_n := \frac{\mathrm{e}^{-x^2/n}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x, \qquad \varphi(x) := x.$$

On a alors $\int_{\mathbb{R}} \varphi \,\mathrm{d}F_n = 0$, mais φ n'est pas $\mathrm{d}F$-intégrable.

Une autre classe de contre-exemples au Théorème 6.3 est fourni par les cas où $\int \varphi \,\mathrm{d}F_n$ ne tend pas vers $\int \varphi \,\mathrm{d}F$. Ainsi, pour

$$F_n(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant n \\ 1 - e^{-x/n} & \text{si } x > n, \end{cases}$$

avec $\varphi = 1$, on a $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}F_n = 1$, $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}F = 0$.

Université de Lorraine
Faculté des sciences et technologies
Licence de mathématiques 1994/95
Calcul intégral et théorie de la mesure

Exercices sur les fonctions à variation bornée et l'intégrale de Stieltjes

1. Montrer que $VB[a,b]$ est stable pour l'addition, la différence et le produit. Étudier la stabilité pour le passage à l'inverse.

2. Montrer qu'une fonction possédant une variation nulle sur un segment $[a,b]$ est constante sur $[a,b]$.

3. On rappelle qu'une courbe $y = f(x)$ est dite rectifiable sur $[a,b]$ si, notant $F(x) = (x, f(x))$, on a

$$L := \sup_{\sigma} \sum_{j=0}^{n-1} \|F(x_{j+1} - F(x_j)\| < \infty,$$

où le supremum est pris sur l'ensemble des subdivisions $\sigma = \{x_j\}_{j=0}^{n}$ de $[a,b]$. On dit alors que L est la longueur de la courbe. Montrer que $f \in VB[a,b]$ si, et seulement si, la courbe $y = f(x)$ est rectifiable sur $[a,b]$. Donner une majoration de la longueur L en fonction de $V_f[a,b]$.

4. Montrer que pour tous nombres réels a, b, c tels que $a = b - c$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$, on a $a^+ = \max(a,0) \leqslant b$, $a^- = \max(-a,0) \leqslant c$. En déduire que si $f \in VB[a,b]$ vérifie

$$f(x) - f(a) = \alpha_1(x) - \alpha_2(x)$$

où α_1 et α_2 sont croissantes, nulles en $x = a$ et telles que $V_f[a,x] = \alpha_1(x) + \alpha_2(x)$, alors on a, pour toutes fonctions croissantes β_1 et β_2 telles que $f = \beta_1 - \beta_2$,

$$\beta_j(b) - \beta_j(a) \geqslant \alpha_j(b) \qquad (j = 1, 2).$$

Montrer ainsi que $V_f[a,b] = \min\{\beta_1(b) + \beta_2(b) - \beta_1(a) - \beta_2(a)\}$.

5. Étant donné $\alpha > 0$, on désigne par $L_\alpha[a,b]$ la classe des fonctions lipschitziennes d'ordre α sur $[a,b]$, c'est-à-dire des fonctions f pour lesquelles il existe un nombre réel M tel que

$$|f(x) - f(y)| \leqslant M|x - y|^\alpha \qquad (x, y \in [a,b]).$$

(a) Décrire $L_\alpha[a,b]$ pour $\alpha > 1$.
(b) Montrer que $L_1[a,b] \subset VB[a,b]$.
(c) Montrer que pour tout $\beta > 0$ la fonction f_β définie sur $[0,1]$ par

$$f_\beta(x) = x^\beta \sin(1/x^\beta) \quad (x \neq 0), \qquad f_\beta(0) = 0$$

est dans $L_\alpha[a,b]$ avec $\alpha = \beta/(\beta+1)$. En déduire que pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, $\alpha < 1$, on a

$$L_\alpha[a,b] \not\subset VB[a,b].$$

(d) Pour quelles valeurs de α a-t-on $VB[a,b] \cap \mathcal{C}[a,b] \subset L_\alpha[a,b]$?

6. *Séries de Fourier des fonctions à variation bornée.* On désigne par $L^1[0,1]$ l'ensemble des fonctions 1-périodiques intégrables sur une période et l'on pose pour $f \in L^1[0,1]$

$$c_n(f) := \int_0^1 f(t)e(-nt)\,\mathrm{d}t, \quad S_N(f,x) := \sum_{|n|\leqslant N} c_n(f)e(nx),$$

avec la notation $e(u) := e^{2\pi i u}$ $(u \in \mathbb{R})$.

(a) Montrer que $S_N(f,x) = \int_0^{1/2} D_N(t)\{f(x+t)+f(x-t)\}\,\mathrm{d}t$, où $D_N(t)$ désigne le noyau de Dirichlet

$$D_N(t) = \sum_{|n|\leqslant N} e^{2\pi i n t} = 1 + 2\sum_{n=1}^{N} \cos(2\pi n t) = \frac{\sin\{(2N+1)\pi t\}}{\sin(\pi t)}.$$

En déduire que la suite $\{S_N(f,x)\}_{N=1}^{\infty}$ converge vers ℓ si, et seulement s'il existe un $\delta > 0$ tel que

$$\lim_{N\to\infty} \int_0^{\delta} \sin\big((2N+1)\pi t\big)\frac{\varphi_\ell(t)}{t}\,\mathrm{d}t = 0,$$

où l'on a posé $\varphi_\ell(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2\ell$.

(b) Montrer que s'il existe un $\alpha > 0$ tel que $f \in VB[x-\alpha, x+\alpha]$, alors

$$\lim_{N\to\infty} S_N(f,x) = \tfrac{1}{2}\{f(x+) + f(x-)\}.$$

7. *Fonctions absolument continues.*

On dit qu'une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est absolument continue si

$$\lim_{\|\varrho\|\to 0} \sum_{\nu} |f(x_\nu + h_\nu) - f(x_\nu)| = 0$$

où ϱ désigne une réunion disjointe $\cup_\nu [x_\nu, x_\nu + h_\nu]$ d'un nombre fini de sous-intervalles de $[a,b]$ et où l'on a posé $\|\varrho\| = \sum_\nu h_\nu$. On désigne par $A[a,b]$ l'ensemble des fonctions absolument continues sur $[a,b]$.

(a) Montrer que $A[a,b] \subset \mathcal{C}[a,b]$.

(b) Montrer que $A[a,b] \subsetneq VB[a,b] \cap \mathcal{C}[a,b]$. En déduire que l'inclusion (a) est stricte.

(c) Montrer que si $\alpha \in A[a,b]$ alors $v_\alpha : x \mapsto V_\alpha[a,x]$ est aussi dans $A[a,b]$. En déduire que l'on peut écrire $\alpha = a_1 - \alpha_2$ où les α_j sont des fonctions croissantes de $A[a,b]$. [*Ce résultat est une étape préliminaire dans la preuve de l'important résultat suivant : une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction soit absolument continue est qu'elle soit l'intégrale indéfinie d'une fonction intégrable.*

8. *L'ensemble triadique de Cantor.*

L'ensemble triadique de Cantor est obtenu à partir de $[0,1]$ de la façon suivante. On divise $[0,1]$ en trois segments égaux, et l'on retire l'intérieur du segment médian. Ensuite on répète cette opération sur chacun des 2 segments restants, puis sur chacun des 4 segments restants, etc. On retire donc 2^{p-1} segments à la p-ième étape, que l'on note I_{pk} $(1 \leqslant k \leqslant 2^{p-1})$. L'ensemble triadique de Cantor E est défini par $E = [0,1] \smallsetminus \cup_{p,k} I_{pk}$.

(a) Montrer que $|I_{pk}| = 3^{-p}$ pour tous p, k.

(b) On note x_{pk} $(1 \leqslant k \leqslant 2^{p-1})$ les nombres de la forme $x_{pk} = \sum_{1\leqslant j\leqslant p-1} \varepsilon_j/3^j + 1/3^p$ avec $\varepsilon_j = 0$ ou 2 $(1 \leqslant j \leqslant p-1)$ rangés par ordre croissant. Montrer par récurrence sur p que $I_{pk} =]x_{pk}, x_{pk} + 1/3^p[$.

(c) Montrer que E est Lebesgue-négligeable.

(d) Montrer que E contient tous les réels de $[0,1]$ dont au moins une écriture en base 3 ne contient pas le chiffre 1. En déduire que E n'est pas dénombrable.

9. *Une fonction continue croissante qui n'est pas absolument continue.*

On conserve les notations de l'exercice 8. Pour $x \in [0,1]$, on pose $x = \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j(x)/3^j$ avec $\varepsilon_j(x) \in \{0,1,2\}$ avec la convention que $\varepsilon_p(x) = 0$, $\varepsilon_j(x) = 2$ $(j > p)$ si $x = (3a+1)/3^p$ avec $a \in \mathbb{N}$. Pour $x \in E$, on pose $f(x) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j(x)/2^j$.

(a) Montrer que $f(x_{pk}) = f(x_{pk} + 1/3^p)$. En déduire que l'on peut prolonger f sur $[0,1]$ en posant $f(x) = f(x_{pk})$ $(x \in I_{pk})$.

(b) Montrer que f est croissante et continue sur $[0,1]$.

(c) On pose $[0,1] \smallsetminus \cup_{p \leqslant m} \cup_{1 \leqslant k \leqslant 2^{p-1}} I_{pk} = \cup_j [\alpha_j, \beta_j]$. Montrer que $\sum_j f(\beta_j) - f(\alpha_j) = 1$, $\sum_j (\beta_j - \alpha_j) = (\frac{2}{3})^m$. En déduire que $f \notin A[0,1]$.

10. Soient $\alpha \in VB[0,1]$ et $g \in \mathcal{C}[0,1]$. Montrer que l'intégrale de Stieltjes $f(t) = \int_0^1 g(tx)\,\mathrm{d}\alpha(x)$ est bien définie pour chaque valeur de $t \in [0,1]$. Calculer $\lim_{t\to 0+} f(t)$.

11. Une courbe complexe est une application continue $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$. Si γ est bijective, on dit que c'est un arc, si $\gamma(a) = \gamma(b)$, on dit que c'est une courbe fermée.

(a) Montrer, en utilisant la définition donnée à l'exercice 3, que γ est rectifiable si, et seulement si, $\gamma \in VB[a,b]$ et que, dans ce cas, la longueur $L(\gamma)$ est donnée par $L(\gamma) = \int_a^b |\mathrm{d}\gamma|$. En déduire une formule pour $L(\gamma)$ lorsque γ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$.

(b) On définit trois courbes du plan complexe $\gamma_j : [0,1] \to \mathbb{C}$ par $\gamma_1(t) = e^{2\pi i t}$, $\gamma_2(t) = e^{4\pi i t}$, $\gamma_3(t) = e^{\pi^2 i t \sin(1/t)}$. Montrer que ces trois courbes ont même image, que γ_1 et γ_2 sont rectifiables avec $L(\gamma_1) = 2\pi$, $L(\gamma_2) = 4\pi$, et que γ_3 n'est pas rectifiable.

(c) Soit $\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{C}$ une courbe complexe et $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ une bijection continue telle que $\varphi(c) = a$. On définit alors une courbe $\gamma_2 : [c,d] \to \mathbb{C}$ par $\gamma_2(s) = \gamma_1(\varphi(s))$. Montrer que γ_2 est un arc, une courbe fermée ou un arc rectifiable si et seulement s'il en va de même de γ_1. Montrer que γ_1 et γ_2 sont rectifiables, alors $L(\gamma_1) = L(\gamma_2)$.

12. *Intégrale de Riemann–Stieltjes.*

Pour F à support inclus dans $[a,b]$, on définit l'ensemble $\mathcal{R}(\mathrm{d}\alpha)$ de toutes les fonctions $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ telles que : $\forall \varepsilon > 0\ \exists \sigma_\varepsilon \in \mathfrak{S}[a,b] : \sigma \supset \sigma_\varepsilon \Rightarrow |T_\sigma(\varphi) - T_{\sigma_\varepsilon}(\varphi)| < \varepsilon$. Ici, $T_\sigma(\varphi)$ est une somme quelconque de Riemann–Stieltjes, c'est-à-dire une expression de la forme $T_\sigma(\varphi) = \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(\xi_j)\Delta_j\alpha$ avec $\xi_j \in [x_j, x_{j+1}]$. On pose alors $\int_{\mathbb{R}} \varphi\,\mathrm{d}\alpha = \lim_{n\to\infty} T_{\tau_n}(\varphi)$, où $\tau_n = \cup_{k \leqslant n} \sigma_{1/k}$.

Établir l'identité suivante pour toute subdivision $\sigma = \{x_j\}_{j=0}^n \in \mathfrak{S}[a,b]$ et tous points ξ_j $(0 \leqslant j < n)$ tels que $x_j \leqslant \xi_j \leqslant x_{j+1}$ $(0 \leqslant j < n)$

$$\sum_{j=0}^{n-1} F(\xi_j)\big\{G(x_{j+1}) - G(x_j)\big\}$$
$$= \big[FG\big]_a^b - \sum_{j=0}^{n-1} \Big(G(x_j)\big\{F(\xi_j) - F(x_j)\big\} + G(x_{j+1})\{F(x_{j+1}) - F(\xi_j)\}\Big).$$

En déduire que, si F et G sont bornées et à support compact, on a $G \in \mathcal{R}(\mathrm{d}F)$ si, et seulement si, $F \in \mathcal{R}(\mathrm{d}G)$. Établir que, lorsqu'il en est ainsi, on a

$$\int_a^b F\,\mathrm{d}G + \int_a^b G\,\mathrm{d}F = \big[FG\big]_a^b.$$

13. (a) Montrer que pour $f \in VB[0,1]$ et $0 \leqslant u < v \leqslant 1$, on a

$$\int_u^v \{f(x) - f(u)\}\,\mathrm{d}x = \int_u^v (v-x)\,\mathrm{d}f(x).$$

(b) En déduire que pour $f \in VB[0,1]$ on a

$$\Big|\frac{1}{n}\sum_{0\leqslant j<n} f\Big(\frac{j}{n}\Big) - \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\Big| \leqslant \frac{1}{n}V_f[0,1] \qquad (n \geqslant 1).$$

(c) On dit qu'une suite $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ est équirépartie modulo 1 si

$$(\forall a, b \in]0,1[) \quad \lim_{n\to\infty} (1/n)|\{k \leqslant n : a \leqslant \{u_k\} \leqslant b\}| = b - a.$$

On pose $\alpha_n(x) = (1/n)\sum_{k\leqslant n} \mathbf{1}_{[0,x]}(\{u_k\})$. Montrer que $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ est équirépartie modulo 1 si, et seulement si α_n tend uniformément vers l'identité sur $[0,1]$.

(d) Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ soit équirépartie modulo 1 est que l'on ait

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{0\leqslant k<n} f(\{u_k\}) = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$

pour toute fonction $f \in \mathcal{R}(\mathrm{d}x)$.

(e) Montrer qu'une autre condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ soit équirépartie modulo 1 est que l'on ait

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{0\leqslant k<n} e^{2\pi i h u_k} = 0 \qquad (h = \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

14. *Formule de Stirling.*

(a) Montrer en appliquant la formule d'Euler-Maclaurin à l'ordre 0 pour $f(t) = \log t$ que l'on a

$$n! = n^n\, e^{-n}\sqrt{An}\,\{1 + O(1/n)\} \qquad (n \geqslant 1)$$

avec $\log A = 2 + 2\int_1^{\infty} B_1(t)t^{-1}\mathrm{d}t$.

(b) Montrer en utilisant une intégration par parties que la suite

$$W_n = \int_0^{\pi/2} (\cos t)^n \mathrm{d}t$$

des intégrales de Wallis satisfait la relation de récurrence $n\,W_n = (n-1)W_{n-2} \quad (n \geqslant 2)$.

En déduire que, lorsque $n \to \infty$, $W_{2n} \sim \pi/\sqrt{2An}$ et $W_{2n+1} \sim \sqrt{A/8n}$.

(c) Prouver que $W_n \sim W_{n+1}$ $(n \to \infty)$ et montrer que $A = 2\pi$.

15. *Prolongement analytique de $\zeta(s)$.*

(a) En appliquant la formule d'Euler–Maclaurin à $f(t) := t^{-s}$, montrer que l'on a pour $s > 1$, $k \geqslant 0$,

$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} + \sum_{r=0}^{k} \frac{B_{r+1}}{r+1}\binom{s+r-1}{r} - \binom{s+k}{k+1}\int_1^{\infty} B_{k+1}(t)t^{-s-k-1}\,\mathrm{d}t.$$

(b) En déduire que la fonction $\zeta(s)$ est prolongeable analytiquement en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ ayant pour seule singularité un pôle simple, en $s = 1$, de résidu 1.

(c) Montrer que le prolongement de $\zeta(s)$ vérifie

$$\zeta(-n) = (-1)^n\frac{B_{n+1}}{n+1} \qquad (n \geqslant 0).$$

et en particulier que $\zeta(-2n) = 0$ pour tout $n \geqslant 1$.

16. (a) Pour $k \in \mathbb{Z}^+$, calculer $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\oint_{|z|=\pi(2k+1)} \frac{ze^{xz}}{(e^z-1)}\frac{\mathrm{d}z}{z^{2r+1}}$ et établir ainsi le développement de Fourier des fonctions de Bernoulli d'ordre pair :

$$B_{2r}(x) = (-1)^{r-1}2(2r)!(2\pi)^{-2r}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos(2\pi mx)}{m^{2r}} \qquad (r \geqslant 1).$$

En déduire une formule générale pour $\zeta(2r)$.

(b) Établir, par la méthode de la question précédente, le développement de Fourier de $B_{2r+1}(x)$, i.e.

$$B_{2r+1}(x) = (-1)^{r-1}(2r+1)!\,2(2\pi)^{-2r-1}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin(2\pi mx)}{m^{2r+1}} \qquad (r \geqslant 0),$$

où l'égalité n'est valable que pour $x \in \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Z}$ lorsque $r = 0$.

Pourquoi n'obtient-on pas ainsi une formule pour $\zeta(2r+1)$?

17. Montrer que, pour $|\tau| \leqslant (1-\delta)2\pi x$ et $y \geqslant x \geqslant 1$, l'on a

$$\sum_{x<n\leqslant y} n^{-i\tau} = \int_x^y t^{-i\tau}\,\mathrm{d}t + O(1)$$

en adoptant la stratégie suivante : appliquer la formule d'Euler–Maclaurin à l'ordre 0 à $f(t) := t^{-i\tau}$, développer $B_1(t)$ en série de Fourier, intégrer terme à terme et majorer chacune des intégrales obtenues par la seconde formule de la moyenne.

Notations pour les exercices 18 et 19.

On désigne par $VB(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions complexes à variation bornée sur $\mathbb{R}$, normalisées par continuité à droite. Pour $\alpha \in VB(\mathbb{R})$, on pose

$$\varphi_\alpha(y) := \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{2\pi ixy}\,\mathrm{d}\alpha(x).$$

On note $\widehat{f}(y) := \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-2\pi ixy} f(x)\,\mathrm{d}x$ la transformée de Fourier d'une fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$.

On dénote par $E(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions complexes, définies sur $\mathbb{R}$, qui sont uniformément continues sur $\mathbb{R}$ et intégrables. On rappelle que toute fonction de $E(\mathbb{R})$ est bornée.

Pout $T > 0$, on pose

$$(1) \qquad w_T(x) := \frac{1}{T}\left(\frac{\sin \pi Tx}{\pi x}\right)^2 = \int_{-T}^{T}(1-|u|/T)\mathrm{e}^{2\pi ixu}\,\mathrm{d}u \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

et $\quad f_T(x) := w_T * f(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x-y)w_T(y)\,\mathrm{d}y \quad (f \in L^1(\mathbb{R}))$. On rappelle que $\widehat{w}_T(0) = 1$.

Enfin, on désigne par $\mathrm{Lip}_\delta(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions complexes définies sur $\mathbb{R}$ et lipschitziennes d'exposant $\delta > 0$.

18. *Inversion de la transformation de Fourier-Stieltjes.*

(a) Soit $g \in L^1(\mathbb{R})$. Montrer que la fonction $\beta : x \mapsto \beta(x) := \int_{-\infty}^{x} g(u)\,\mathrm{d}u$ est dans $VB(\mathbb{R})$. Exprimer $\varphi_\beta(y)$ à l'aide de la fonction $\widehat{g}$.

(b) (i) Soit $\alpha \in VB(\mathbb{R})$. Montrer que $E(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathrm{d}\alpha)$.

(ii) Montrer que, pour $f \in E(\mathbb{R})$, on a $\lim_{T\to\infty} \|f - f_T\|_\infty = 0$. [On pourra commencer par effectuer le changement de variables $u = Ty$ dans l'intégrale définissant $f_T(x)$.]

(iii) En déduire que, pour $f \in E(\mathbb{R})$, on a $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}\alpha(x) = \lim_{T\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_T(x)\,\mathrm{d}\alpha(x)$.

(c) (i) En utilisant (1), montrer que, pour $f \in L^1(\mathbb{R})$, on a

$$f_T(x) = \int_{-T}^{T} (1 - |y|/T)\widehat{f}(y)\mathrm{e}^{2\pi ixy}\,\mathrm{d}y.$$

(ii) En déduire que l'on a, pour $f \in E(\mathbb{R})$,

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}\alpha(x) = \int_{-T}^{T} (1 - |y|/T)\widehat{f}(y)\varphi_\alpha(y)\,\mathrm{d}y + \varepsilon(T)$$

où $\lim_{T\to\infty} \varepsilon(T) = 0$.

(iii) Lorsque $f \in \mathrm{Lip}_\delta(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$, expliciter une majoration de $\|f - f_T\|_\infty$ en fonction de T, δ et f, et en déduire une inégalité du type $|\varepsilon(T)| \leqslant C(f,\alpha)/T^\Delta$ avec $\Delta > 0$. On précisera la dépendance de $C(f,\alpha)$ en f et α et l'on exprimera Δ en fonction de δ. [On ne demande pas de déterminer les valeurs optimales de ces constantes.]

(d) Application. Déterminer une constante A telle que l'on ait

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \frac{f(n)}{n^2} = A \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} (1 - |y|/T)\widehat{f}(y)B_2(y)\,\mathrm{d}y \qquad (f \in E(\mathbb{R})),$$

où $B_2(y)$ désigne la seconde fonction de Bernoulli.

19. *Critère de continuité de Paul Lévy.*

On pose $\sigma_T(x) = \dfrac{\sin(2\pi Tx)}{2\pi Tx} = \dfrac{1}{2T}\displaystyle\int_{-T}^{T} \mathrm{e}^{2\pi ixy}\,\mathrm{d}y$. Pour $\alpha \in VB(\mathbb{R})$, on définit

$$\alpha_T^*(x) := \int_{\mathbb{R}} \sigma_T(x - y)\,\mathrm{d}\alpha(y).$$

1) Montrer que si α est continue, alors $\lim_{T\to\infty} \alpha_T^*(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2) On désigne par $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ la suite des discontinuités de α et l'on pose

$$s_n = \alpha(x_n) - \alpha(x_n -), \qquad \beta(x) := \sum_{x_n \leqslant x} s_n \quad (x \in \mathbb{R}).$$

a) Montrer que $\sum_{n=1}^\infty |s_n| < \infty$.

b) Montrer que $\alpha - \beta$ est continue.

c) En déduire que $\lim_{T\to\infty} \alpha_T^*(x) = \sum_{n=1}^\infty s_n \mathbf{1}_{\{x_n\}}(x) \qquad (x \in \mathbb{R})$.

3) Exprimer $\alpha_T^*(x)$ puis $\int_{\mathbb{R}} \overline{\alpha_T^*(x)}\,\mathrm{d}\alpha(x)$ comme des intégrales relatives à φ_α.

4) Montrer que

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |\varphi_\alpha(y)|^2\,\mathrm{d}y = \sum_{n=1}^\infty |s_n|^2$$

et en déduire un critère pour qu'une fonction $\alpha \in VB(\mathbb{R})$ soit continue.

Université de Nancy 1 — Vendredi 25 novembre 1994

Licence de Mathématiques 1993/94 — Durée : 2h

Intégration et théorie de la mesure

Sujet d'examen partiel

Aucun document n'est autorisé. L'usage d'une calculatrice est interdit.
Les quatre parties peuvent être traitées de manière indépendante. Il sera tenu le plus grand compte de la rédaction et de la présentation.

I. 1) Calculer la valeur de la série

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(4m+1)(4m+3)} = \tfrac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

en intégrant terme à terme, après l'avoir convenablement justifié, la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$.

2) Soit h la fonction définie sur $[0,1[$ par

$$h(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{4m+2}}{4m+1}.$$

Montrer que $h(x) \leqslant \ln \dfrac{1}{1-x}$ en comparant les développements en série entière des deux membres. Montrer la convergence et calculer la valeur de l'intégrale généralisée

$$\int_0^1 h(x) \, \mathrm{d}x.$$

II. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Pour chaque nombre entier $k \geqslant 1$, on pose

$$I_k = \int_k^{k+1} x e^{-x^{\alpha} \sin^2(\pi x)} \, \mathrm{d}x.$$

1) Montrer que

$$I_k = \int_0^{1/2} \left\{ (k+t) e^{-(k+t)^{\alpha} \sin^2(\pi t)} + (k+1-t) e^{-(k+1-t)^{\alpha} \sin^2(\pi t)} \right\} \mathrm{d}t.$$

En utilisant les encadrements

$$k \leqslant k+u \leqslant 2k \quad (0 \leqslant u \leqslant 1), \qquad 2t \leqslant \sin(\pi t) \leqslant \pi t \quad (0 \leqslant t \leqslant 1/2),$$

et un changement de variables simple, montrer que l'on a

$$A k^{\beta} \leqslant I_k \leqslant B k^{\beta},$$

où A, B et β sont des constantes réelles ne dépendant que de α, avec $0 < A \leqslant B$. Déterminer explicitement β.

2) Déterminer l'ensemble des valeurs de α pour lesquelles l'intégrale généralisée

$$\int_0^{\infty} x \exp\{-x^{\alpha} \sin^2(\pi x)\} \, \mathrm{d}x$$

converge.

III. 1) Donner un exemple de fonction continue $f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ telle que l'intégrale généralisée

$$I = \int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$$

soit convergente alors que la série $S = \sum_{n=1}^\infty f(n)$ est divergente.

2) Une telle situation est-elle encore possible si l'on remplace l'hypothèse de continuité de f par l'hypothèse que f est décroissante ? Justifiez votre réponse par un exemple dans l'affirmative ou une démonstration dans la négative.

IV. Soit f une fonction possédant une intégrale de Riemann généralisée absolument convergente sur $[0, +\infty[$. (NB : on ne suppose donc pas f continue.)

1) Montrer que l'intégrale

$$F(y) = \int_0^\infty f(x)\cos(xy)\,\mathrm{d}x$$

est convergente et définit une fonction continue de y. On pourra établir d'abord que $F_n(y) = \int_0^n f(x)\cos(xy)\,\mathrm{d}x$ est, pour chaque entier $n \geqslant 1$, une fonction continue de y.

2) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un nombre réel $T > 0$ et une fonction $\varphi \in Esc[0, T]$ tels que

$$\int_0^T |f(x) - \varphi(x)|\,\mathrm{d}x + \int_T^\infty |f(x)|\,\mathrm{d}x < \varepsilon.$$

3) En utilisant le résultat de la question précédente, calculer $\lim_{y\to+\infty} F(y)$.

4) Peut-on déduire de ce qui précède que F est uniformément continue sur $[0, +\infty[$?

Université de Nancy 1 | Vendredi 27 janvier 1995
Licence de Mathématiques 1993/94 | Durée : 3h
Intégration et théorie de la mesure

Sujet d'examen

Aucun document n'est autorisé. L'usage d'une calculatrice est interdit.
Les quatre parties peuvent être traitées de manière indépendante. Il sera tenu le plus grand compte de la rédaction et de la présentation.

I. Pour $f \in \mathcal{L}^1[0,1]$, on désigne par $F = \varphi(f)$ la fonction définie sur $[0, \infty[$ par

$$F(y) := \int_0^1 \frac{f(x)}{1+xy}\,\mathrm{d}x.$$

1) Soit $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ une suite de fonctions de $\mathcal{L}^1[0,1]$ convergeant en moyenne (c'est-à-dire en norme L^1) vers une fonction $f \in \mathcal{L}^1[0,1]$. On pose $F_n := \varphi(f_n)$ $(n \geqslant 1)$. La suite $\{F_n\}_{n=1}^\infty$ converge-t-elle vers F simplement ? uniformément ? en moyenne ?

2) Calculer $F = \varphi(f)$ lorsque $f = 1/(1+x)$. La fonction F est-elle continue en $y = 1$? Pouvait-on prévoir le résultat ?

3) Soient $f \in \mathcal{L}^1[0,1]$ et $F = \varphi(f)$. Calculer $\lim_{y\to\infty} F(y)$.

4) a) Donner une majoration de $\left|\sum_{n=0}^N (-1)^n x^n y^n\right|$ uniforme pour $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, $N \geqslant 0$.

b) Soit $f \in \mathcal{L}^1[0,1]$ et $F = \varphi(f)$. Montrer que l'on a pour $0 \leqslant y \leqslant 1$

$$F(y) = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n a_n(f) y^n$$

avec $a_n(f) := \displaystyle\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x$. [*N.B. : la totalité des points de cette question est consacrée à la justification de l'intégration terme à terme.*]

5) Calculer $a_n(f)$ lorsque $f(x) = (\ln x)^2$. [On pourra effectuer le changement de variable $x = e^{-t/(n+1)}$ dans l'intégrale définissant $a_n(f)$.] En déduire une formule intégrale pour la somme de la série $\sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-1}/n^3$.

6) Soit $f \in \mathcal{L}^2[0,1]$ telle que $a_n(f) = 0$ pour tout entier $n \geqslant 0$. Montrer que

$$\int_0^1 f(x)h(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

pour toute fonction h continue sur $[0,1]$. [On pourra utiliser le théorème de Weierstrass : *toute fonction continue sur* $[0,1]$ *à valeurs complexes est limite uniforme de polynômes.*] En déduire que $f = 0$ pp.

II. 1) Énoncer le théorème de Plancherel.

2) Montrer que pour f, $g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, on a $fg \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. En utilisant la relation (qu'on ne cherchera pas à démontrer)

$$4\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x = \sum_{m=0}^3 i^m \|f + i^m g\|_2^2,$$

montrer que pour f, $g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, on a la formule de Parseval

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(x)\overline{\widehat{g}(x)}\,\mathrm{d}x.$$

III. Soit $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de classe C^∞ à support compact.

1) Montrer que l'on a pour toute fonction f de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$f = \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}f = \mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}f. \tag{$*$}$$

2) Montrer que la relation $(*)$ est vraie pp pour toute fonction f de $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$.

IV. Soit $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ telle que $g(x) := xf(x)$ soit aussi dans $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$.

1) En utilisant la relation $|f(x)| = (|f(x)| + |g(x)|)/(1 + |x|)$, montrer que $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

2) Soit $y \in]0, \infty[$. Déterminer $h_y \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ telle que $\widehat{h_y} = \mathbf{1}_{[0,y]}$ pp. On pourra commencer par calculer $\overline{\mathcal{F}}\mathbf{1}_{[0,y]}$ et utiliser $(*)$.

3) En utilisant le résultat de la question précédente et la formule de Parseval, établir la formule

$$-2\pi i \int_0^y \widehat{g}(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \widehat{f}(y) - \widehat{f}(0) \qquad (y \in \mathbb{R}).$$

Université de Nancy 1
Licence de Mathématiques 1994/95
Intégration et théorie de la mesure

Mercredi 6 septembre 1995
Durée : 3h

Sujet d'examen

Aucun document n'est autorisé. L'usage d'une calculatrice est interdit.
Les trois parties ne sont pas *indépendantes.*
Il sera tenu le plus grand compte de la rédaction et de la présentation.

I. Soit $\varphi \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$ une fonction réelle de deux variables réelles.

1) Montrer que l'application partielle $\varphi_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi_x(y) = \varphi(x,y)$ est de carré intégrable pour presque tout x et que l'on peut prolonger l'application $\psi(x) = \|\varphi_x\|_2$ en une fonction de $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. On pose $N(\varphi) = \|\psi\|_2$.

2) Montrer que, pour $g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, on a $g\varphi_x \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ pour presque tout nombre réel x.

3) On désigne par $G = T_\varphi(g)$ la fonction définie par

$$G(x) := \int_{\mathbb{R}} g(y)\varphi(x,y)\,\mathrm{d}y$$

si $g\varphi_x \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et prolongée par 0 dans le cas contraire. Montrer que $G \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ et donner une majoration de $\|G\|_2$ en fonction de $N(\varphi)$ et $\|g\|_2$. (NB. La mesurabilité de G sera notée 2 points *hors barème* et il est conseillé de n'y pas passer trop de temps.)

II. Pour $g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ on pose $G_0 = g$ et $G_n = T_\varphi(G_{n-1})$ $(n \geqslant 1)$ et

(i) $\varphi_1(x,y) := \mathbf{1}_{[0,1]^2}(x,y)\sin(\pi x)\cos(\pi y)$,

(ii) $\varphi_2(x,y) := \mathbf{1}_{[0,1]}(x)\mathbf{1}_{[0,x]}(y)$,

(iii) $\varphi_3(x,y) := \lambda\mathbf{1}_{[0,\pi]}(x)\mathbf{1}_{[0,x]}(y)\cos(x-y) \qquad (\lambda \in]0,1])$.

1) Calculer $N(\varphi_j)$ pour $j = 1, 2, 3$.

2) Expliciter, pour chaque entier $n \geqslant 2$, une fonction $\Phi_n \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$ telle que $G_n = T_{\Phi_n}(g)$ dans chacun des cas $\varphi = \varphi_j$, $j = 1, 2, 3$.

3) Déterminer, pour chaque nombre réel x, la nature de la série $\sum_{n=0}^\infty G_n(x)$, et, le cas échéant, calculer sa somme, lorsque $\varphi = \varphi_1$ et lorsque $\varphi = \varphi_2$.

4) a) Même question lorsque $\varphi = \varphi_3$ avec $\lambda < 1$.

b) Calculer $G_n(\pi/2)$ pour $\varphi = \varphi_3$ avec $\lambda = 1$ et $g = \mathbf{1}_{[0,\pi]}$. Que peut-on conclure ?

III. On suppose maintenant que $N(\varphi) < 1$.

1) Soit $g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. Montrer que la série $\sum_{n=0}^\infty |G_n|$ converge dans $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ et presque partout. (On pourra faire appel à l'inégalité obtenue au I.3.)

2) Pour $g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, on pose $h(x) := \sum_{n=0}^\infty G_n(x)$ lorsque la série converge et $h(x) = 0$ dans le cas contraire. Montrer que l'équation intégrale

$$(*) \qquad f - T_\varphi(f) = g$$

possède dans $L^2(\mathbb{R})$ une unique solution, dont h est un représentant.

3) Lorsque $g(x) = \mathbf{1}_{[0,\infty[}(x)e^{-x}$, résoudre l'équation $(*)$ pour $\varphi = \varphi_j$ $(j = 1, 2, 3)$ en choisissant $\lambda = \frac{1}{2}$ dans la définition de φ_3.

Université Henri Poincaré–Nancy 1 — Mardi 9 avril 1996
Maîtrise de Mathématiques 1995/96 — Durée : 3h
Méthodes analytiques pour l'arithmétique

Sujet d'examen partiel

La consultation des notes manuscrites *de cours et des documents pédagogiques distribués sont autorisés, à l'exclusion de tout autre document. L'usage d'une calculatrice est interdit.*
Les trois parties peuvent être traitées indépendamment.
Il sera tenu le plus grand compte de la rédaction et de la présentation.

Notations pour les parties I et II. On désigne par $VB(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions complexes à variation bornée sur $\mathbb{R}$, normalisées par continuité à droite. Pour $\alpha \in VB(\mathbb{R})$, on pose

$$\varphi_\alpha(y) := \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{2\pi ixy}\,\mathrm{d}\alpha(x).$$

On note $\widehat{f}(y) := \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-2\pi ixy} f(x)\,\mathrm{d}x$ la transformée de Fourier d'une fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$.

On dénote par $E(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions complexes, définies sur $\mathbb{R}$, qui sont uniformément continues sur $\mathbb{R}$ et intégrables. On rappelle que toute fonction de $E(\mathbb{R})$ est bornée.

Pout $T > 0$, on pose

$$w_T(x) := \frac{1}{T}\left(\frac{\sin \pi Tx}{\pi x}\right)^2 = \int_{-T}^{T} (1 - |u|/T)\mathrm{e}^{2\pi ixu}\,\mathrm{d}u \qquad (x \in \mathbb{R}), \tag{1}$$

et $\quad f_T(x) := w_T * f(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x-y)w_T(y)\,\mathrm{d}y \quad (f \in L^1(\mathbb{R}))$. On rappelle que $\widehat{w}_T(0) = 1$.

Enfin, on désigne par $\mathrm{Lip}_\delta(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions complexes définies sur $\mathbb{R}$ et lipchitziennes d'exposant $\delta > 0$.

I. 1) Soit $g \in L^1(\mathbb{R})$. Montrer que la fonction $\beta : x \mapsto \beta(x) := \int_{-\infty}^{x} g(u)\,\mathrm{d}u$ est dans $VB(\mathbb{R})$. Exprimer $\varphi_\beta(y)$ à l'aide de la fonction $\widehat{g}$.

2) a) Soit $\alpha \in VB(\mathbb{R})$. Montrer que $E(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathrm{d}\alpha)$.

b) Montrer que, pour $f \in E(\mathbb{R})$, on a $\lim_{T\to\infty} \|f - f_T\|_\infty = 0$. [On pourra commencer par effectuer le changement de variables $u = Ty$ dans l'intégrale définissant $f_T(x)$.]

c) En déduire que, pour $f \in E(\mathbb{R})$, on a $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}\alpha(x) = \lim_{T\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_T(x)\,\mathrm{d}\alpha(x)$.

3) a) En utilisant (1), montrer que, pour $f \in L^1(\mathbb{R})$, on a

$$f_T(x) = \int_{-T}^{T} (1 - |y|/T)\widehat{f}(y)\mathrm{e}^{2\pi ixy}\,\mathrm{d}y.$$

b) En déduire que l'on a, pour $f \in E(\mathbb{R})$,

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}\alpha(x) = \int_{-T}^{T} (1 - |y|/T)\widehat{f}(y)\varphi_\alpha(y)\,\mathrm{d}y + \varepsilon(T)$$

où $\lim_{T\to\infty} \varepsilon(T) = 0$.

c) Lorsque $f \in \mathrm{Lip}_\delta(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$, expliciter une majoration de $\|f - f_T\|_\infty$ en fonction de T, δ et f, et en déduire une inégalité du type $|\varepsilon(T)| \leqslant C(f,\alpha)/T^\Delta$ avec $\Delta > 0$. On précisera la dépendance de $C(f,\alpha)$ en f et α et l'on exprimera Δ en fonction de δ. [On ne demande pas de déterminer les valeurs optimales de ces constantes.]

4) Application. Déterminer une constante A telle que l'on ait

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \frac{f(n)}{n^2} = A \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} (1 - |y|/T)\widehat{f}(y)B_2(y)\,\mathrm{d}y \qquad (f \in E(\mathbb{R})),$$

où $B_2(y)$ désigne la seconde fonction de Bernoulli.

II. On pose $\sigma_T(x) = \dfrac{\sin(2\pi Tx)}{2\pi Tx} = \dfrac{1}{2T}\displaystyle\int_{-T}^{T} \mathrm{e}^{2\pi ixy}\,\mathrm{d}y$. Pour $\alpha \in VB(\mathbb{R})$, on définit

$$\alpha_T^*(x) := \int_{\mathbb{R}} \sigma_T(x-y)\,\mathrm{d}\alpha(y).$$

1) Montrer que si α est continue, alors $\lim_{T\to\infty} \alpha_T^*(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2) On désigne par $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ la suite des discontinuités de α et l'on pose

$$s_n = \alpha(x_n) - \alpha(x_n-), \qquad \beta(x) := \sum_{x_n \leqslant x} s_n \quad (x \in \mathbb{R}).$$

a) Montrer que $\sum_{n=1}^{\infty} |s_n| < \infty$.

b) Montrer que $\alpha - \beta$ est continue.

c) En déduire que $\lim_{T\to\infty} \alpha_T^*(x) = \sum_{n=1}^{\infty} s_n \mathbf{1}_{\{x_n\}}(x) \qquad (x \in \mathbb{R})$.

3) Exprimer $\alpha_T^*(x)$ puis $\int_{\mathbb{R}} \overline{\alpha_T^*(x)}\,\mathrm{d}\alpha(x)$ comme des intégrales relatives à φ_α.

4) Montrer que

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |\varphi_\alpha(y)|^2\,\mathrm{d}y = \sum_{n=1}^{\infty} |s_n|^2$$

et en déduire un critère pour qu'une fonction $\alpha \in VB(\mathbb{R})$ soit continue.

III. 1) Montrer que, pour tout $\sigma \geqslant \frac{1}{2}$, il existe une constante $M_0(\sigma)$ telle que l'on ait

$$|\Gamma(x+iy)| \leqslant M_0(\sigma)\mathrm{e}^{-|y|} \qquad (\tfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant \sigma,\ y \in \mathbb{R}).$$

2) Montrer que pour $z = \frac{1}{2} + iy$, $s = \sigma + i\tau$, $\sigma \geqslant 1$, on a

$$\Gamma(z-k)\Gamma(s-z+k) = (-1)^k \Gamma(z)\Gamma(s-z)\prod_{j=1}^{k}\Big(1 + \frac{s-1}{j-z}\Big).$$

En utilisant l'estimation $|1+w| \leqslant \exp\big\{\Re e\, w + O(|w|^2)\big\}$ $(w \in \mathbb{C})$, en déduire que, pour chaque s vérifiant $\sigma = \Re e\, s \geqslant 1$, il existe une constante $M(s) > 0$ telle que

$$|\Gamma(z-k)\Gamma(s-z+k)| \leqslant M(s)k^{\sigma-1}\mathrm{e}^{-|y|} \qquad (k \geqslant 1,\ z = \tfrac{1}{2} + iy,\ y \in \mathbb{R}).$$

3) On pose pour $s \in \mathbb{C}$, $\Re e\, s \geqslant 1$, $u \in]0,1[$, $k \geqslant 0$,

$$I_k(s,u) := \frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{2}-k-i\infty}^{\frac{1}{2}-k+i\infty} \Gamma(z)\Gamma(s-z)u^{-z}\,\mathrm{d}z.$$

Montrer que cette intégrale est absolument convergente et tend vers 0 lorsque k tend vers l'infini.

4) Montrer que l'on a pour $v \in \mathbb{C}$, $|v| < 1$,

$$\Gamma(s)(1+v)^{-s} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\Gamma(s+k)}{k!} v^k.$$

5) Montrer que $I_0(s,u) = (1+u)^{-s}\Gamma(s)$ pour $\Re e\, s \geqslant 1$, $u \in]0,1[$.

6) Montrer que l'on a pour $a, b \in [1,\infty[$, $\Re e\, s \geqslant 1$,

$$\frac{\Gamma(s)}{(a+b)^s} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} \frac{\Gamma(z)\Gamma(s-z)}{a^z b^{s-z}}\,\mathrm{d}z.$$

[On distinguera les cas $a < b$, $a = b$ et $a > b$.]

7) Montrer qu'il existe une constante σ_0 que l'on calculera (on ne demande pas la valeur optimale) telle que l'on ait pour $\sigma > \sigma_0$

$$\Gamma(s)\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(m^3+n^2)^{-s} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} \zeta(3z)\zeta(2s-2z)\Gamma(z)\Gamma(s-z)\,\mathrm{d}z$$

où ζ désigne la fonction zêta de Riemann.