Analyse complexe

(Notes de cours)

Gérald Tenenbaum
Université de Lorraine
Faculté des sciences et technologies
Licence de Mathématiques (LMI6.33) 2012/2013

(25/4/2019, 21h48)
Diffusion étudiants

Table des matières

Université de Lorraine
Faculté des sciences et technologies
Licence de mathématiques 2012/2013
Analyse complexe (LMI6.33)

I

Le corps des nombres complexes

1. Introduction

La résolution d'équations, et en particulier d'équations polynomiales, a sous-tendu l'évolution des mathématiques depuis l'Antiquité. Les équations du premier et du second degré ont été résolues par les Babyloniens environ 2000 ans avant notre ère. Les équations de degré trois ou plus ont résisté, sous forme d'un problème fameux, jusqu'au XVI^e siècle. Une solution pour le troisième degré fut alors trouvée par Scipion del Ferro, de Bologne, et Niccolo Fontana (surnommé Tartaglia le bègue) de Brescia. Peu après, Ludovic Ferrari vint à bout de l'équation du quatrième degré. Il fallut attendre le XIX^e siècle, avec Niels Abel et Évariste Galois, pour une preuve que l'équation générale du cinquième degré n'est pas soluble par radicaux.

Les solutions des équations de degré trois et quatre sont publiées par Cardan (1501-1576) en 1545. Elles utilisent toutes, sans justification théorique, des racines carrées de nombres négatifs.

Cependant la communauté mathématique rejette l'emploi de telles quantités jusqu'au milieu du XIX^e siècle : Descartes (1596-1650) désigne comme « imaginaires » les racines complexes d'équations, dont il considère l'apparition dans un problème comme un signe indubitable de non solubilité.

Euler (1707-1783) introduit en 1740 les exposants complexes et s'émerveille de la formule $\mathrm{e}^{i\pi} + 1 = 0$ qui lie les cinq nombres fondamentaux de l'analyse. Il utilise également les nombres complexes pour résoudre des équations différentielles.

C'est Gauss (1777-1855) qui leur donne un statut définitif et une signification intuitive et naturelle à travers leur représentation géométrique.

2. Définition formelle

L'écriture classique d'un nombre complexe sous la forme $a + ib$ présuppose l'existence d'un corps dans lequel -1 est un carré, ce qui n'est pas acquis a priori.

On définit formellement $\mathbb{C}$ comme l'ensemble des couples ordonnés (a, b) de $\mathbb{R}^2$ muni de l'addition et de la multiplication données par les formules

$$\begin{aligned}(a,b)+(c,d)&=(a+c,b+d)\\(a,b)(c,d)&=(ac-bd,ad+bc).\end{aligned}\tag{2·1}$$

On vérifie à partir des propriétés usuelles des nombres réels que ces lois de compositions sont associatives et commutatives et que la multiplication est distributive par rapport à l'addition. L'élément neutre de l'addition est le nombre complexe $(0, 0)$, celui de la multiplication le nombre $(1,0)$. Le fait que l'ensemble ainsi construit est un corps équivaut alors à la solubilité, pour tout $(a,b) \neq (0,0)$, du système

$$\begin{cases} ax - by = 1 \\ bx + ay = 0. \end{cases}$$

Comme le déterminant du système vaut $a^2 + b^2 \neq 0$, il a une solution unique et l'ensemble $\mathbb{C}$ muni des lois (2·1) est bien un corps.

On vérifie que l'application $p : \{(a,0) \in \mathbb{C}\} \to \mathbb{R}$ définie par $p(a,0) = a$ est un homomorphisme de corps, en ce sens qu'il préserve les deux opérations. On peut donc identifier $\mathbb{R}$ à l'ensemble des couples $(a,0)$. Si l'on pose alors $i := (0,1)$, on a d'une part identiquement

$$(a,b) = (a,0) + (0,1)(b,0) = a + ib,$$

et d'autre part

$$i^2 = (0,1)(0,1) = (-1,0) = -1.$$

Il est à noter que tout nombre complexe non nul $a + ib$ possède deux racines carrées complexes puisque l'équation $(x+iy)^2 = a + ib$ équivaut à

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b. \end{cases}$$

Ce système possède les deux solutions $(x,y) = (\pm\sqrt{a}, 0)$ si $a > 0$, $b = 0$, les deux solutions $(x,y) = (0, \pm\sqrt{-a})$ si $a < 0$, $b = 0$, et, posant $d^2 := a^2 + b^2$ avec $d > 0$, les deux solutions

$$(x,y) = \pm\Big(\sqrt{\tfrac{1}{2}(a+d)}, \operatorname{sgn}(b)\sqrt{\tfrac{1}{2}(d-a)}\Big)$$

si $b \neq 0$.(1)

Exemples. Les deux racines carrées de $2i$ sont $\pm(1+i)$. Celles de $5 + 12i$, sont $\pm(3+2i)$.

Nous verrons plus loin que toute équation polynomiale à coefficients complexes possède au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

Il est à noter qu'une importante propriété de $\mathbb{R}$, l'ordre total compatible avec la structure de corps(2), ne se transmet pas à $\mathbb{C}$: on peut vérifier aisément à l'aide des axiomes de la structure d'ordre que l'une ou l'autre des inégalités $i > 0$ ou $i < 0$ conduit à une contradiction.

3. Représentation géométrique : le plan complexe

L'interprétation géométrique des nombres complexes est due à Wallis (1616-1703). Elle a ensuite été développée par Argand (1768-1822) et Gauss.

On associe au nombre $z = x+iy$ le point de coordonnées (x,y), dont z est désigné comme l'affixe. Les nombres réels correspondent donc à l'axe des x, souvent désigné comme l'*axe réel*, alors que les représentants des nombres imaginaires ib sont situés sur l'*axe imaginaire*. On pose

$$\Re e\, z = x, \quad \Im m\, z = y, \quad \overline{z} = x - iy.$$

Ainsi $\overline{z}$, désigné comme le conjugué de z, est l'affixe du symétrique de (x,y) par rapport à l'axe réel.

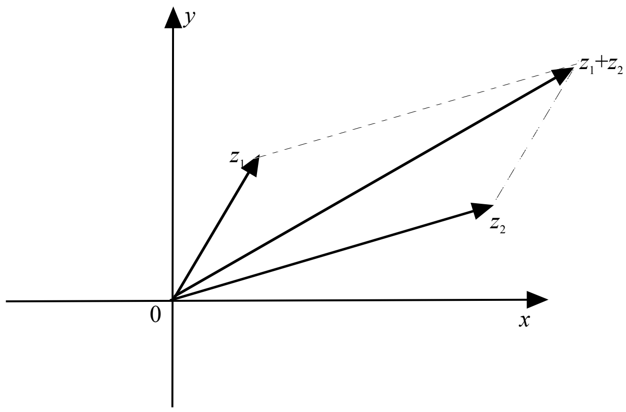
1. Dans le dernier cas, nous avons posé $y = b/2x$ et substitué dans la première équation, ce qui fournit successivement $4x^4 - 4ax^2 - b^2 = 0$ et $x^2 = \frac{1}{2}(a+d)$.

2. C'est-à-dire : $(x < y,\ a < b \Rightarrow a + x < b + y)$ et $(x < y,\ a > 0 \Rightarrow ax < ay)$.

On a

$$\Re e\, z = \frac{z+\overline{z}}{2}, \qquad \Im m\, z = \frac{z-\overline{z}}{2i}. \tag{3·1}$$

La somme z_1+z_2 de deux nombres complexes est obtenue par la règle du parallélogramme.



La multiplication peut également être décrite géométriquement. Il est plus agréable, à cette fin, d'introduire les coordonnées polaires d'un nombre complexe.

Le module $|z|$ d'un nombre complexe $z = x+iy$ est la longueur $r = \sqrt{x^2+y^2}$ du vecteur d'extrémités $(0,0)$ et (x,y). En particulier, on a identiquement

$$|z|^2 = z\overline{z}. \tag{3·2}$$

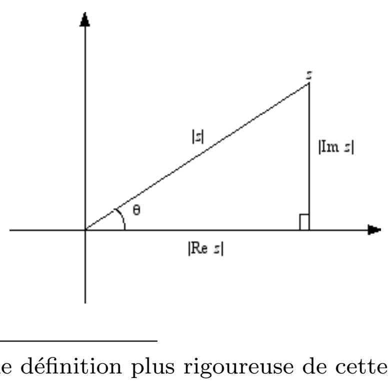
La quantité $|z_1 - z_2|$ est la distance euclidienne entre z_1 et z_2. Cela donne une preuve géométrique de l'inégalité triangulaire

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|.$$

Une preuve algébrique peut-être obtenue grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

L'argument $\arg z$ d'un nombre complexe non nul z est l'angle, défini modulo 2π, entre le vecteur z et l'axe des x.[3] On a donc

$$\arg z = \vartheta \Leftrightarrow \cos\vartheta = \Re e\, z/|z|, \quad \sin\vartheta = \Im m\, z/|z|.$$



3. Nous donnerons plus loin une définition plus rigoureuse de cette notion.

Un nombre complexe non nul est complètement déterminé par son module et son argument : si $|z| = r$ et $\arg z = \vartheta$, alors $x = r\cos\vartheta$, $y = r\sin\vartheta$, et donc

$$z = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta).$$

On dit que r et ϑ sont les coordonnées polaires de z. Si l'on pose $h(\vartheta) := \cos\vartheta + i\sin\vartheta$,[4] on a avec des notations transparentes

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 h(\vartheta_1 + \vartheta_2). \tag{3·3}$$

Cela permet de donner une interprétation géométrique simple du produit de deux nombres complexes : $z_1 z_2$ a pour module le produit des modules et pour argument la somme des arguments. Par récurrence sur n, on déduit de (3·3) la formule de Moivre[5]

$$z^n = r^n h(n\vartheta). \tag{3·4}$$

Exemple. Les racines cubiques de 1 sont déterminées par $r^3 h(3\vartheta) = 1$, d'où $r = 1$, $3\vartheta \equiv 0 \pmod{2\pi}$. Les solutions sont donc les nombres

$$1, \qquad j = h(2\pi/3) = -\tfrac{1}{2} + i\tfrac{1}{2}\sqrt{3}, \qquad j^2 = h(4\pi/3) = -\tfrac{1}{2} - i\tfrac{1}{2}\sqrt{3}.$$

4. Nous justifierons plus tard la notation classique $h(\vartheta) = \mathrm{e}^{i\vartheta}$.
5. Abraham de Moivre, 1667–1754.

Université de Lorraine
Faculté des sciences et technologies
Licence de mathématiques 2012/2013
Analyse complexe (LMI6.33)

II

Fonctions holomorphes : étude préliminaire

1. Définitions

Définition 1.1. *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$, et $f : U \to \mathbb{C}$. On dit que f est $\mathbb{C}$-différentiable en un point a de U si la limite*

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ a+h\in U\smallsetminus\{a\}}} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \tag{1·1}$$

existe, autrement dit s'il existe $L \in \mathbb{C}$ tel que

$$f(a+h) = f(a) + Lh + o(|h|) \qquad (h \to 0).$$

Lorsque f est $\mathbb{C}$-différentiable en tout point de U, on dit que f est holomorphe sur U. On note alors $f'(a)$ la limite (1·1) *et l'on désigne par dérivée de f la fonction $f' : U \to \mathbb{C}$ qui à $z \in U$ associe le nombre $f'(z)$.*

On note

$$\mathcal{H}(U), \quad \mathcal{H}(U,V),$$

l'espace des fonctions holomorphes sur U, et celui des fonctions holomorphes sur U à valeurs dans $V \subset \mathbb{C}$.

Si l'on pose $F(x,y) = f(x+iy)$, alors F est définie sur un ouvert $\widetilde{U}$ de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{C}$. F est différentiable en $(x_0,y_0) \in \widetilde{U}$ si, et seulement si, il existe des nombres complexes A et B tels que, notant $z_0 = x_0 + iy_0$, $h = u + iv$, on ait

$$f(z_0+h) = f(z_0) + Au + Bv + o(|h|) \qquad (h \to 0). \tag{1·2}$$

On a en fait $A = \partial F(x_0,y_0)/\partial x = F'_x(x_0,y_0)$, $B = \partial F(x_0,y_0)/\partial y = F'_y(x_0,y_0)$. Avec un léger abus de notation pour simplifier l'écriture, on écrit souvent $A = f'_x(z_0)$, $B = f'_y(z_0)$. En décomposant $u = (h+\overline{h})/2$, $v = (h-\overline{h})/2i$, nous pouvons réécrire (1·2) sous la forme

$$f(z_0+h) = f(z_0) + \alpha h + \beta\overline{h} + o(|h|) \qquad (h \to 0), \tag{1·3}$$

avec

$$\alpha := \tfrac{1}{2}(A - iB), \quad \beta := \tfrac{1}{2}(A + iB).$$

On désigne les nombres α et β sous le nom de *dérivées partielles de Wirtinger* de f en z_0. On a donc, avec l'abus de notation signalé plus haut,

$$f'_z(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) := \tfrac{1}{2}\big\{f'_x(z_0) - if'_y(z_0)\big\}, \qquad f'_{\overline{z}}(z_0) = \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) := \tfrac{1}{2}\big\{f'_x(z_0) + if'_y(z_0)\big\}.$$

Soit $V = \overline{U} := \{\overline{z} : z \in U\}$. Il est immédiat que, si $G : U \times V \to \mathbb{C}$ est une fonction de deux variables vérifiant $G(z, \overline{z}) = f(z)$ pour tout z de U et si G est $\mathbb{C}$-différentiable, autrement dit s'il existe pour tout $(z, w) \in U \times V$ des nombres α et β tels que

$$G(z+h, w+k) = G(z, w) + \alpha h + \beta k + o(|h| + |k|) \qquad (|h| + |k| \to 0),$$

alors

$$f'_z(z_0) = G'_z(z_0, \overline{z_0}), \qquad f'_{\overline{z}}(z_0) = G'_w(z_0, \overline{z_0}).$$

Il est à noter que, lorsque f est donnée, il existe a priori de multiples choix possibles pour la fonction G : par exemple, si $f(z) = |z|^2$, on peut choisir $G(z, w) = |z|^2$ ou $G(z, w) = zw$.

Proposition 1.2. *Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$, $\widetilde{U} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + iy \in U\}$, $F : \widetilde{U} \to \mathbb{C}$ une application différentiable et $f : U \to \mathbb{C}$ définie par $f(x + iy) := F(x, y)$.*

(i) f est $\mathbb{C}$-différentiable en $z_0 = x_0 + iy_0$ si, et seulement si, $\mathrm{d}_{(x_0,y_0)}F$ est $\mathbb{C}$-linéaire.

(ii) L'application $\mathrm{d}_{(x_0,y_0)}F$ est $\mathbb{C}$-linéaire si, et seulement si, $f'_{\overline{z}}(z_0) = 0$.

Démonstration. (i) On a

$$f(z_0 + h) - f(z_0) = F(x_0 + u, y_0 + v) - F(x_0, y_0) = \mathrm{d}_{(x_0,y_0)}F(h) + o(h).$$

Or les applications $\mathbb{C}$-linéaires sur $\mathbb{C}$ sont les applications du type $h \mapsto ch$. Donc la $\mathbb{C}$-linéarité de $\mathrm{d}_{(x_0,y_0)}F$ implique la $\mathbb{C}$-différentiabilité de f. Réciproquement, si $\mathrm{d}_{(x_0,y_0)}F(h) = Lh + o(h)$, on a nécessairement $\mathrm{d}_{(x_0,y_0)}F(h) = Lh$ puisque l'application linéaire $h \mapsto \mathrm{d}_{(x_0,y_0)}F(h) - Lh$ est de norme nulle.

(ii) Si $f'_{\overline{z}} = 0$, on a $\mathrm{d}_{(x_0,y_0)}F(h) = f'_z(z_0)h$ pour tout $h \in \mathbb{C}$, donc $\mathrm{d}_{(x_0,y_0)}F$ est bien $\mathbb{C}$-linéaire. Réciproquement, si $\mathrm{d}_{(x_0,y_0)}F$ est $\mathbb{C}$-linéaire, on a identiquement, lorsque $h = u + iv$, en posant $\alpha := f'_z(z_0)$, $\beta := f'_{\overline{z}}(z_0)$,

$$i\alpha h - i\beta\overline{h} = \mathrm{d}_{(x_0,y_0)}F(iu, iv) = i\mathrm{d}_{(x_0,y_0)}F(u, v) = i\alpha h + i\beta\overline{h},$$

ce qui implique $\beta = 0$. □

Corollaire 1.3. *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$. Une application $f : U \to \mathbb{C}$ est $\mathbb{C}$-différentiable en un point z_0 de U si, et seulement si, la fonction de deux variables réelles F est différentiable en (x_0, y_0) et si l'on a $f'_{\overline{z}}(z_0) = 0$ ou encore*

$$F'_x(x_0, y_0) + iF'_y(x_0, y_0) = 0. \tag{1·4}$$

En particulier, une condition nécessaire et suffisante pour que f soit holomorphe sur U est que F soit différentiable en tout point de $\widetilde{U} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + iy \in U\}$ et satisfasse identiquement la relation (1·4).

Si l'on écrit $F = P + iQ$ avec P et Q à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors l'équation (1·4) devient

$$\begin{cases} P'_x(x_0, y_0) = Q'_y(x_0, y_0) \\ P'_y(x_0, y_0) = -Q'_x(x_0, y_0). \end{cases} \tag{1·5}$$

On désigne habituellement ces conditions sous le nom de *conditions de Cauchy-Riemann.*

Exemples. (i) $z \mapsto z$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$, alors que $z \mapsto \overline{z}$ n'est $\mathbb{C}$-différentiable en aucun point de $\mathbb{C}$. Plus généralement, lorsque $n \in \mathbb{N}^*$, $z \mapsto z^n$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$, de dérivée nz^{n-1}, et $z \mapsto (\overline{z})^n$ est $\mathbb{C}$-différentiable en z_0 si, et seulement si, $n > 1$ et $z_0 = 0$.

(ii) Calculons les dérivées partielles de Wirtinger de $f(z) := |z|^2$. On peut écrire $f(z) = G(z, \overline{z})$ avec $G(z, w) = zw$. Donc $f'_z(z_0) = \overline{z_0}$, $f'_{\overline{z}}(z_0) = z_0$. Il s'ensuit que f est $\mathbb{C}$-différentiable en z_0 si, et seulement si, $z_0 = 0$.

Corollaire 1.4. *Soient U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction holomorphe sur U. Alors f est constante sur U.*

Démonstration. On a $Q = 0$, donc, d'après la relation (1·5), $P'_x = P'_y = 0$, donc $\mathrm{d}_{(x_0,y_0)}F = 0$ pour tout (x_0, y_0) de $\widetilde{U}$. D'après l'inégalité des accroissements finis, on en déduit bien que F est constante. □

Remarque. Il est clair qu'une fonction holomorphe de dérivée nulle sur un ouvert connexe est constante. Plus généralement, une fonction holomorphe de dérivée nulle sur un ouvert est *localement constante*, i.e. constante sur chaque composante connexe.

Théorème 1.5. *Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$, a un point de U et $f, g : U \to \mathbb{C}$ deux fonctions $\mathbb{C}$-différentiables en a. Alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, les fonctions $f+g$, λf et fg sont $\mathbb{C}$-différentiables en a et l'on a*

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a), \quad (\lambda f)'(a) = \lambda f'(a), \quad (fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$

Si, de plus, $g(a) \neq 0$, alors il en va de même de f/g et l'on a

$$(f/g)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}.$$

Démonstration laissée en exercice.

Théorème 1.6. *Soient U, V deux ouverts de $\mathbb{C}$, a un point de U, $f : U \to V$, $g : V \to \mathbb{C}$ deux fonctions respectivement $\mathbb{C}$-différentiables en a et $b = f(a)$. Alors, $g \circ f$ est $\mathbb{C}$-différentiable en a et l'on a*

$$(g \circ f)'(a) = g'(b)f'(a).$$

Démonstration laissée en exercice.

Exemples. Les polynômes, les fractions rationnelles, les séries entières de rayon de convergence positif sont, sur l'intérieur de leurs domaines de définitions respectifs des fonctions holomorphes.

2. Fonctions définies par des séries entières

Soient $z_0 \in \mathbb{C}$, $R > 0$ et $D = D(z_0; R)$ le disque ouvert de centre z_0 et de rayon R. On dit qu'une fonction $f : D \to \mathbb{C}$ est *développable en série entière dans D* s'il existe une suite complexe $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ telle que

$$f(z) = \sum_{n \geqslant 0} a_n (z - z_0)^n \qquad (z \in D).$$

Les fonctions développables en série entière dans un disque constituent une classe très importante de fonctions holomorphes.

Le lemme suivant permet de régler la plupart des questions de convergence.

Lemme 2.1 (Abel). *Soient $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ une suite complexe et R, r des nombres réels tels que $R > r > 0$. Si la suite $\{a_n R^n\}_{n=1}^{\infty}$ est bornée, la série entière $\sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$ converge normalement pour $|z| \leqslant r$.*

Démonstration. Soit $M := \sup_{n \geqslant 0} |a_n R^n|$. La conclusion est immédiate puisque l'on a $|a_n z^n| \leqslant M(r/R)^n$ lorsque $|z| \leqslant r$. □

Soit $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ une suite complexe. Il résulte du lemme d'Abel que l'ensemble des nombres réels r tels que la série entière

$$\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n \tag{2·1}$$

converge dans le disque $|z| \leqslant r$ est un intervalle $[0, R[$ ou $[0, R]$, avec $R \in [0, \infty[$ ou $R = \infty$. On dit que R est le rayon de convergence de la série entière (2·1).

Rappelons la notion de limite supérieure d'une suite de nombre réels :

$$\limsup_{n\to\infty} u_n := \lim_{n\to\infty} \sup_{p\geqslant n} u_p \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}.$$

Il est équivalent de dire que $\limsup u_n = -\infty$ et que $u_n \to -\infty$. En revanche, la relation $\limsup u_n = +\infty$ ne signifie pas que $u_n \to +\infty$ mais qu'il existe une sous-suite $\{u_{n_k}\}_{n=1}^{\infty}$ telle que $\lim_{k\to\infty} u_{n_k} = +\infty$. Lorsque $L \in \mathbb{R}$, on a

$$\limsup_{n} u_n = L \tag{2·2}$$

si, et seulement si,

(i) $\forall\varepsilon > 0\ \exists N_0 = N_0(\varepsilon) : (n > N_0) \Rightarrow u_n \leqslant L + \varepsilon$;

(ii) $\forall\varepsilon > 0\ \forall N \geqslant 0\ \exists n > N : u_n \geqslant L - \varepsilon$.

Une autre caractérisation consiste à dire que l'on a (2·2) si, et seulement si, toute suite extraite convergente de $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ est de limite $\leqslant L$ et L est effectivement limite d'une suite extraite convergente, autrement dit encore : L est le plus grand élément de l'ensemble des limites de suites extraites de $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$. On peut vérifier facilement que si $u_n \leqslant v_n$ pour tout indice n alors

$$\limsup_{n\to\infty} u_n \leqslant \limsup_{n\to\infty} v_n. \tag{2·3}$$

On a aussi, pour toutes suites $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$,

$$\limsup_{n\to\infty}(u_n + v_n) \leqslant \limsup_{n\to\infty} u_n + \limsup_{n\to\infty} v_n.$$

On définit symétriquement la limite inférieure

$$\liminf u_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{p\geqslant n} u_p \in \mathbb{R} \cup \pm\infty.$$

Toutes les propriétés de la limite inférieure se déduisent de celles de la limite supérieure à l'aide de la formule

$$\liminf_{n\to\infty} u_n = -\limsup_{n\to\infty}(-u_n).$$

On a en particulier, pour toutes suites $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$,

$$\liminf_{n\to\infty}(u_n + v_n) \geqslant \liminf_{n\to\infty} u_n + \liminf_{n\to\infty} v_n.$$

L'intérêt principal des notions de limites inférieure et supérieure est qu'elles sont définies pour toutes les suites. Il n'y a donc pas de précaution oratoire à prendre avant de les introduire dans un calcul. Une suite est convergente si, et seulement si, sa limite inférieure est égale à sa limite supérieure. La limite, finie ou infinie, est alors égale à la valeur commune.

Exemples.

$$\limsup(-1)^n = 1, \quad \liminf(-1)^n = -1,$$
$$\limsup \frac{1}{\sin n} = +\infty, \quad \liminf \frac{1}{1 - \sin n + 1/n} = \tfrac{1}{2}.$$

Pour traiter les deux exemples concernant la suite $\{\sin n\}_{n=1}^{\infty}$, on utilise les exercices 20 et 21, où l'on établit qu'un sous-groupe additif G de $\mathbb{R}$ est dense si, et seulement si, il n'est pas de la forme $G = a\mathbb{Z}$ pour un certain $a > 0$. Si l'on se donne $\vartheta \in \mathbb{R}$ et que l'on choisit $G := \{m\vartheta + n : m \in \mathbb{Z},\, n \in \mathbb{Z}\}$, il est immédiat que G est de la forme $a\mathbb{Z}$ si, et seulement si, ϑ est rationnel. En effet, si $\vartheta = u/v \in \mathbb{Q}$ avec $(u, v) = 1$ alors $G = (1/|v|)\mathbb{Z}$, et si $\vartheta \in \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q}$, on ne peut avoir $G = a\mathbb{Z}$: comme $1 \in G$, il faudrait $a \in \mathbb{Q}$, donc $\vartheta \in \mathbb{Q}$ puisque $\vartheta \in G$. Comme $2\pi \in \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q}$, il s'ensuit que les nombres $\pm\pi/2$ peuvent être approchés d'aussi près que l'on veut par des nombres réels de la forme $n + 2m\pi$, ce qui implique $\limsup \sin n = 1$, $\liminf \sin n = -1$.

Théorème 2.2 (Hadamard). *Soit $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ une suite complexe. Le rayon de convergence R de la série entière (2·1) est donné par la formule*

$$1/R = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} \in \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}. \tag{2·4}$$

Démonstration. Soit ϱ tel que $1/\varrho = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}$. Nous devons montrer que $\varrho = R$. Supposons que $0 < R$, $\varrho < \infty$, les autres cas se traitant de manière analogue. Alors, pour $\varepsilon \in]0, R[$, la série (2·1) converge pour $z = R - \varepsilon$, donc son terme général est borné :

$$\exists M > 0 : \forall n \geqslant 0 \ |a_n|(R - \varepsilon)^n \leqslant M.$$

En prenant la puissance $1/n$ et en appliquant (2·3), nous obtenons

$$1/\varrho \leqslant 1/(R - \varepsilon),$$

d'où $\varrho \geqslant R$ en faisant tendre ε vers 0. Réciproquement, soit $\varepsilon \in]0, \varrho[$. Alors, il existe $N_0 = N_0(\varepsilon)$ tel que $|a_n| \leqslant 1/(\varrho - \varepsilon/2)^n$ pour $n > N_0$. Il s'ensuit que $a_n(\varrho - \varepsilon)^n$ est le terme général d'une série convergente, d'où $\varrho - \varepsilon \leqslant R$ et finalement $\varrho \leqslant R$ en passant à la limite en ε. □

Exemples. $\sum_{n\geqslant 0} \pm z^n : R = 1$. $\sum_{n\geqslant 0} n! z^n : R = 0$. $\sum_{n\geqslant 0} z^n/n! : R = \infty$.

Le résultat auxiliaire suivant, qui est un cas particulier du théorème de Fubini, nous sera utile à plusieurs reprises.

Lemme 2.3. *Soit $\{a_{nk}\}_{n\geqslant 0, k\geqslant 0}$ une suite complexe double. Alors on a*

$$\sum_{k\geqslant 0}\sum_{n\geqslant 0} a_{nk} = \sum_{n\geqslant 0}\sum_{k\geqslant 0} a_{nk} \tag{2·5}$$

si $\sum_n \sum_k |a_{nk}| < \infty$. De plus, si $a_{nk} \geqslant 0$ pour tous n, k, la relation a lieu sans condition dans $[0, \infty]$.

Démonstration. Pour la commodité du lecteur, esquissons rapidement une preuve directe. La seconde assertion découle immédiatement du fait que les deux membres sont égaux à la borne supérieure des sommes finies extraites. Pour établir la première, nous remarquons que $a_{n,k} = \alpha_{n,k}^+ - \alpha_{n,k}^- + i(\beta_{n,k}^+ - \beta_{n,k}^-)$ avec $\alpha_{n,k} := \Re e\, a_{n,k}$, $\beta_{n,k} := \Im m\, a_{n,k}$. Comme chacune des quatre suites doubles réelles positives est de somme totale finie,[1] la validité

1. Car $|a_{n,k}|^2 = (\alpha_{n,k}^+)^2 + (\alpha_{n,k}^-)^2 + (\beta_{n,k}^+)^2 + (\beta_{n,k}^-)^2$.

de (2·5) dans le cas général se ramène au cas déjà traité des séries convergentes à termes positifs ou nuls. □

Théorème 2.4. *Soit $f(z) = \sum_{n\geqslant 0} a_n(z-z_0)^n$ une fonction développable en série entière dans un disque $D = D(z_0; R)$ et soit $\Delta := D(z_1; r)$ un disque contenu dans D, non nécessairement concentrique. Alors f est développable en série entière dans Δ.*

Démonstration. On peut supposer $z_0 = 0$, quitte à considérer $z - z_0$ à la place de z. On a donc, pour $|z| < R$,

$$f(z) = \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n = \sum_{n\geqslant 0} a_n(z_1 + w)^n = \sum_{n\geqslant 0} a_n \sum_{0\leqslant k\leqslant n} \binom{n}{k} z_1^{n-k} w^k$$

où nous avons posé $w = z - z_1$. Comme le rayon de convergence est $\geqslant R$, on peut affirmer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $M = M_\varepsilon$ tel que $|a_n|(R-\varepsilon)^n \leqslant M$. De plus, $|z_1| < R - |w|$ pour $z \in \Delta$ puisque $\Delta \subset D$. On a donc

$$\left|a_n \binom{n}{k} z_1^{n-k} w^k\right| \leqslant M \binom{n}{k} \frac{|z_1|^{n-k}}{(R-\varepsilon)^n} |w|^k \qquad (0 \leqslant k \leqslant n)$$

(Noter que $\binom{n}{k} = 0$ si $k > n$.) Le majorant est le terme général d'une série double convergente lorsque $|w| + |z_1| < R - \varepsilon$, ce qui est réalisé lorsque $|w| < r$ et ε est assez petit. Nous sommes donc en position d'appliquer le Lemme 2.3. Il suit

$$f(z) = \sum_{k\geqslant 0} b_k w^k$$

avec

$$b_k := \sum_{n\geqslant k} a_n \binom{n}{k} z_1^{n-k} \qquad (k \geqslant 0). \tag{2·6}$$

□

Corollaire 2.5. *Soit $f(z) = \sum_{n\geqslant 0} a_n(z-z_0)^n$ une fonction développable en série entière dans un disque $D = D(z_0; R)$. Alors f est holomorphe dans D, f' est développable en série entière dans D et l'on a*

$$f'(z) = \sum_{n\geqslant 1} n a_n (z-z_0)^{n-1} \qquad (z \in D). \tag{2·7}$$

Démonstration. Supposons sans perte de généralité que $z_0 = 0$. Avec les notations (2·6), on a, pour tout z_1 de D et $w \in D(0; R - |z_1|)$,

$$f(z_1 + w) = f(z_1) + b_1 w + O(w^2) \quad (w \to 0).$$

Cela montre que f est $\mathbb{C}$-différentiable en z_1 et que $f'(z_1) = b_1$ est donné par (2·7). La formule de Hadamard montre que le rayon de convergence de la série (2·7) est égal à celui de la série $f(z)$: il est donc $\geqslant R$. □

Corollaire 2.6. *Soit $f(z) = \sum_{n\geqslant 0} a_n(z-z_0)^n$ une fonction développable en série entière dans un disque $D = D(z_0; R)$. Alors f est indéfiniment dérivable dans D, $f^{(p)}$ est, pour tout entier $p \geqslant 0$, développable en série entière dans D et l'on a*

$$f^{(p)}(z) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{(n+p)!}{n!} a_{n+p}(z-z_0)^n \qquad (z \in D). \tag{2·8}$$

En particulier, on a la formule de Taylor

$$f(z) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n \qquad (z \in D). \tag{2·9}$$

Démonstration. La formule (2·8) est établie par récurrence sur p grâce au Corollaire 2.5. En spécialisant $z = z_0$, on obtient donc $f^{(p)}(z_0) = p!a_p$. Cela implique immédiatement (2·9) puisque $f(z) = \sum_{n\geqslant 0} a_n(z-z_0)^n$. □

Corollaire 2.7. *Si une fonction admet un développement en série entière dans un disque, ce développement est unique.*

Démonstration. Cela découle immédiatement du Corollaire 2.6 puisque $a_n = f^{(n)}(z_0)/n!$ est déterminé par f pour tout n. □

Exemple d'application. Supposons qu'on cherche à résoudre l'équation différentielle $y' = y$ en cherchant *a priori* la solution sous la forme d'une série entière convergente

$$y(z) = \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n.$$

La formule (2·7) et le Corollaire 2.7 impliquent alors $a_{n+1} = a_n/(n+1)$, d'où $a_n = a_0/n!$. On trouve donc $y(z) = a_0 \sum_{n\geqslant 0} z^n/n!$ comme seule solution de la forme cherchée.

Théorème 2.8. *Soient $f(z) = \sum_{n\geqslant 0} a_n(z-z_0)^n$ et $g(z) = \sum_{n\geqslant 0} b_n(z-z_0)^n$ deux fonctions développables en séries entières dans un disque $D = D(z_0; R)$. Alors leur somme et leur produit le sont également. On a*

$$\left.\begin{aligned} f(z)+g(z) &= \sum_{n\geqslant 0}(a_n+b_n)(z-z_0)^n \\ f(z)g(z) &= \sum_{n\geqslant 0}\Big(\sum_{0\leqslant k\leqslant n} a_k b_{n-k}\Big)(z-z_0)^n \end{aligned}\right\} \quad (z \in D).$$

Démonstration. La première assertion est évidente. La seconde résulte du Lemme 2.3 appliqué à la série double $\sum_{n\geqslant 0}\sum_{0\leqslant k\leqslant n} a_k b_{n-k}(z-z_0)^n$. Nous omettons les détails. □

Il est à noter que la formule du produit est un cas particulier du résultat classique suivant.

Proposition 2.9. *Soient $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ et $\{v_n\}_{n=0}^{\infty}$ deux suites complexes dont les séries associées sont absolument convergentes, de sommes respectives U, V. Alors la série de terme général $w_n = \sum_{0\leqslant k\leqslant n} u_k v_{n-k}$ est absolument convergente et sa somme vaut UV.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer le lemme d'interversion de sommation des séries doubles absolument convergentes à la série de terme général $u_k v_{n-k}\mathbf{1}_{[0,\infty[}(n-k)$: on a

$$\sum_{n\geqslant 0}|w_n| \leqslant \sum_k \sum_j |u_k||v_j| < \infty$$

et donc

$$\sum_{n\geqslant 0} w_n = \sum_{k\geqslant 0} u_k \sum_{n\geqslant k} v_{n-k} = \sum_{k\geqslant 0} u_k \sum_{j\geqslant 0} v_j = UV.$$

□

Le résultat suivant, connu sous le nom de Transformation d'Abel, est très utile pour examiner la convergence des séries entières sur le (ou au voisinage du) cercle de convergence.

Théorème 2.10 (Transformation d'Abel). *Soient $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ des suites complexes. Pour tous entiers $N \in \mathbb{Z}$, $M \in \mathbb{N}^*$, on a*

$$\sum_{N<n\leqslant N+M} a_n b_n = A_{N+M} b_{N+M+1} + \sum_{N<n\leqslant N+M} A_n(b_n - b_{n+1}), \tag{2·10}$$

où l'on a posé $A_n := \sum_{N<m\leqslant n} a_m$ $(n \geqslant 0)$. En particulier, si $\sup_{N<n\leqslant N+M} |A_n| \leqslant A$, et si $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ est positive décroissante alors

$$\Bigg|\sum_{N<n\leqslant N+M} a_n b_n\Bigg| \leqslant A b_{N+1}. \tag{2·11}$$

Démonstration. La première assertion résulte d'un simple changement de variable entière en posant $a_n = A_n - A_{n-1}$ $(N < n \leqslant N + M)$. Lorsque $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ est positive décroissante, on déduit de (2·11) que

$$\Bigg|\sum_{N<n\leqslant N+M} a_n b_n\Bigg| \leqslant A b_{N+M+1} + A \sum_{N<n\leqslant N+M} (b_n - b_{n+1}) = A b_{N+1}.$$

□

Corollaire 2.11 (Critère de convergence d'Abel). *Soient $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ une suite complexe et $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ une suite réelle positive décroissante. On suppose que*

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 0, \qquad \sup_{N\geqslant 0} \Bigg|\sum_{0\leqslant n\leqslant N} a_n\Bigg| \leqslant A.$$

Alors la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n b_n$ est convergente et l'on a

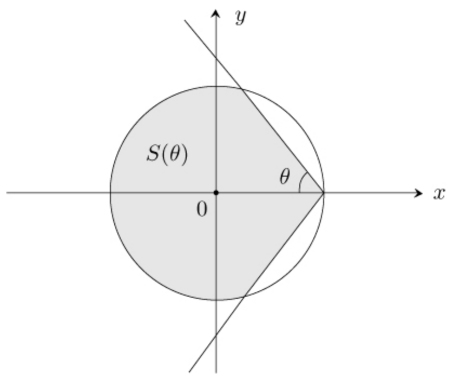
$$\Bigg|\sum_{n>N} a_n b_n\Bigg| \leqslant 2A b_{N+1}. \tag{2·12}$$

Démonstration. C'est immédiat à partir du Théorème 2.10. □

Exemple. La série $\sum_{n\geqslant 1} z^n/n$, de rayon de convergence 1, converge en tous les points du cercle unité sauf $z = 1$.

Corollaire 2.12 (Abel). *Soit $f(z) = \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière convergeant en $z = 1$. Pour $\vartheta < \pi/2$, on définit le secteur $S(\vartheta) := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1,\, |\arg(1 - z)| \leqslant \vartheta\}$. Alors*

$$\lim_{\substack{z\to 1\\ z\in S(\vartheta)}} f(z) = f(1). \tag{2·13}$$



SECTEUR $S(\vartheta)$.

Démonstration. Soit $z = 1 - re^{i\varphi} \in S(\vartheta)$ avec $r > 0$, $|\varphi| \leqslant \vartheta$. On a

$$|z|^2 = 1 - 2r\cos\varphi + r^2 < 1,$$

donc $r < 2\cos\varphi$. Comme $r \to 0$ lorsque $z \to 1$, nous pouvons supposer $r \leqslant \cos\vartheta$. Nous désignons par $S^*(\vartheta)$ la partie de $S(\vartheta)$ correspondant à cette condition supplémentaire.

Lorsque $z \in S^*(\vartheta)$, nous avons donc

$$(2{\cdot}14) \qquad |1 - z|\cos\vartheta = r\cos\vartheta \leqslant r(2\cos\varphi - r) = 1 - |z|^2 \leqslant 2(1 - |z|).$$

Il suffit de montrer que la convergence de la série $f(z)$ est uniforme dans le secteur $S^*(\vartheta)$,[2] i.e. que

$$\sup_{z\in S^*(\vartheta)} \Big|\sum_{n>N} a_n z^n\Big| \to 0 \qquad (N \to \infty).$$

Posons $\varepsilon_N := \sup_{n>N} |\sum_{N<m\leqslant n} a_m|$, de sorte que notre hypothèse sur la convergence de $f(1)$ implique $\varepsilon_N \to 0$ lorsque $N \to \infty$. Or, il résulte immédiatement de (2·10) (en faisant tendre M vers l'infini) et (2·14) que l'on a pour $z \in S^*(\vartheta)$

$$\Big|\sum_{n>N} a_n z^n\Big| \leqslant \frac{\varepsilon_N |1 - z||z|^N}{1 - |z|} \leqslant \frac{2\varepsilon_N}{\cos\vartheta}.$$

□

Remarque. Il peut arriver que $f(z)$ tende vers une limite finie lorsque $z \to 1$ sans que la série converge en ce point. Exemple : $f(z) = 1/(1 + z)$.

À titre d'application du théorème d'Abel, nous pouvons établir la jolie formule

$$\ln 2 = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \cdots = \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Cela découle immédiatement, grâce au Corollaire 2.12, du fait que cette série converge et que $\ln(1 + x) = \sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n-1}x^n/n$ tend vers $\ln 2$ lorsque $x \to 1$ en restant dans $]0, 1[$.

2. En effet, comme la série converge en $z = 1$, la convergence uniforme sur $S^*(\vartheta)$ équivaut à la convergence uniforme sur $S^*(\vartheta) \cup \{1\}$.

Université de Lorraine
Faculté des sciences et technologies
Licence de mathématiques 2012/2013
Analyse complexe (LMI6.33)

III

L'exponentielle et le logarithme complexes

1. La fonction exponentielle complexe

La définition de l'exponentielle à partir de la série entière permet de donner une construction rigoureuse de la trigonométrie circulaire et hyperbolique ainsi que de la notion d'angle.

Définition 1.1. *On désigne par exponentielle la fonction définie sur $\mathbb{C}$ par la formule*

$$\exp z = \sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n!}. \tag{1·1}$$

Cette définition a bien un sens puisque le théorème de Hadamard garantit que le rayon de convergence de la série (1·1) est infini.

Théorème 1.2. *La fonction exponentielle est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et est égale à sa dérivée. Elle vérifie*

$$(\exp z)(\exp w) = \exp(z+w) \qquad (w, z \in \mathbb{C}). \tag{1·2}$$

Démonstration. Les deux premières assertions découlent immédiatement du Corollaire II.2.5. La troisième est une conséquence de la formule du produit de deux séries (Proposition II.2.9). □

On pose

$$\mathrm{e} := \exp 1.$$

La relation (1·2) justifie alors la notation

$$\mathrm{e}^z = \exp(z) \qquad (z \in \mathbb{C}).$$

Théorème 1.3. *On a*

(i) $\mathrm{e}^z \neq 0$ *pour tout* $z \in \mathbb{C}$.

(ii) $\overline{\exp(z)} = \exp(\overline{z})$ *pour tout* $z \in \mathbb{C}$.

(iii) $|\exp z| = \exp(\Re e\, z)$ *pour tout* $z \in \mathbb{C}$.

(iv) La restriction de exp *à* $\mathbb{R}$ *est une bijection strictement croissante de* $\mathbb{R}$ *sur* $\mathbb{R}^{+*} =]0, \infty[$.

Démonstration. (i) $\exp(z)\exp(-z) = 1$.

Le point (ii) découle immédiatement du fait que la série (1·1) est à coefficients réels.

On en déduit que

$$|\exp z|^2 = \exp z\, \overline{\exp z} = \exp(z+\overline{z}) = \exp(2\Re e\, z),$$

d'où $|\exp z| = \pm\exp(\Re e\, z)$. Mais la restriction de exp à $\mathbb{R}$ est à valeurs positives puisque $\exp(x) = (\exp(x/2))^2$ pour tout x réel. D'où (iii).

Pour montrer (iv), on remarque d'abord que, si l'on note f la restriction de exp à $\mathbb{R}$, alors $f'(x) = f(x)$, donc f est croissante et $f(x) \geqslant 1 + x$ pour $x \geqslant 0$, donc $f(x) \to \infty$ lorsque $x \to \infty$. Comme $f(-x) = 1/f(x)$, il s'ensuit que $f(x) \to 0$ lorsque $x \to -\infty$. $\square$

Désignons par $\mathbb{U} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ le cercle unité et considérons la fonction $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{U}$ définie par

$$\sigma(x) = \mathrm{e}^{ix}.$$

Alors $\sigma'(x) = i\sigma(x)$ est de module 1 pour tout x, ce qui signifie que l'abscisse curviligne d'un point courant $\sigma(x)$ sur $\mathbb{U}$ est égale à x : c'est la mesure des angles en radians.[(1)]

Nous allons à présent étudier de plus près l'homomorphisme σ. Nous posons

$$\cos x := \Re e\, \mathrm{e}^{ix}, \quad \sin x := \Im m\, \mathrm{e}^{ix},$$

de sorte que

$$\sigma(x) = \mathrm{e}^{ix} = \cos x + i \sin x \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

On a donc

$$(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

De plus, il résulte de (1·1) que

$$\cos x = \sum_{n \geqslant 0} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \qquad \sin x = \sum_{n \geqslant 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

On peut bien entendu étendre ces définitions à $\mathbb{C}$ et obtenir ainsi des fonctions sinus et cosinus développables en série entière dans le plan tout entier et satisfaisant aux propriétés suivantes que nous rassemblons, à fin de référence ultérieure, dans un énoncé formel dont nous omettons la démonstration qui n'utilise que la définition et les propriétés de base de la fonction exponentielle.

Proposition 1.4. *On a* $\cos 0 = 1$, $\sin 0 = 0$. *Pour tous* w, $z \in \mathbb{C}$, *on a*
(i) $\cos'(z) = -\sin z$, $\sin' z = \cos z$.
(ii) $\cos(-z) = \cos z$, $\sin(-z) = -\sin z$.
(iii) $\cos(w + z) = \cos w \cos z - \sin w \sin z$, $\sin(w + z) = \sin w \cos z + \sin z \cos w$.
(iv) $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$.

Soient E une partie de $\mathbb{C}$ et $f : E \to \mathbb{C}$. On dit que $\omega \in \mathbb{C}$ est une période pour f si $\omega + E := \{\omega + z : z \in E\} = E$ et si $f(\omega + z) = f(z)$ pour tout z de E. Il est immédiat que l'ensemble $P(f)$ des périodes d'une fonction donnée f est un sous-groupe additif de $\mathbb{C}$. La démonstration du théorème suivant utilise le fait que tout sous groupe additif de $\mathbb{R}$ non trivial et fermé est de la forme $a\mathbb{Z}$ avec $a > 0$ — voir les Exercices 20 et 21.

Théorème 1.5. *La restriction de* exp *à la droite imaginaire* $i\mathbb{R}$ *est une surjection périodique sur le cercle unité* $\mathbb{U} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. *Le groupe des périodes est de la forme* $ip\mathbb{Z}$ *pour un certain nombre réel positif* p. *Par définition, on pose* $\pi := p/2$.

Démonstration. Le noyau $G = \sigma^{-1}(\{1\})$ de σ est un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ puisque σ est un homomorphisme de groupes. Il est fermé puisque σ est continue. Il n'est pas égal à $\mathbb{R}$ car σ n'est pas constante : on a par exemple $\sigma(x) = 1 + ix + O(x^2)$ au voisinage de 0. Pour montrer qu'il n'est pas réduit à $\{0\}$, nous allons montrer qu'il existe $x \neq 0$ tel que $\sigma(x) = 1$. On vérifie aisément que

$$\Im m\, \sigma(x) = \sin x = \sum_{n \geqslant 0} \frac{\{(4n+2)(4n+3) - x^2\}x^{4n+1}}{(4n+3)!},$$

1. Si une courbe Γ est paramétrée par $t \mapsto \gamma(t)$, l'abscisse curviligne $s(x)$ du point M_x de paramètre x vérifie $s(x) - s(0) = \int_0^x |\gamma'(t)|\, \mathrm{d}t$. Ce nombre est égal à la longueur du segment de courbe joignant M_0 à M_x. Voir le §V.1 pour plus de détails.

donc $\sin x > 0$ pour $0 < x \leqslant 2$ puisque $(4n+2)(4n+3) - 4 > 0$ pour $n \geqslant 0$. Par ailleurs

$$\cos x = 1 - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{24}x^4 - \sum_{n \geqslant 2} \frac{\{4n(4n-1) - x^2\}x^{4n-2}}{(4n)!},$$

donc

$$\cos 2 \leqslant 1 - 2 + \tfrac{2}{3} = -\tfrac{1}{3}.$$

Il résulte de ce qui précède que, puisque $\cos' = -\sin$, il existe un unique zéro α de cos sur $]0,2[$. On a alors $\sin\alpha = \pm 1$. Comme $\sin]0,2] \subset]0,1]$, il s'ensuit que $\sin\alpha = 1$ et donc $\sigma(\alpha) = i$, d'où $\sigma(4\alpha) = 1$. Cela montre que $G \neq \{0\}$ et donc que l'on a bien $G = p\mathbb{Z}$ avec $p > 0$.

Il reste à montrer que σ est surjective. Observons tout d'abord que $\mathbb{U}$ est connexe par arcs puisque $\mathbb{U} = \{x \pm i\sqrt{1-x^2} : -1 \leqslant x \leqslant 1\}$. Ensuite, $\sigma(\mathbb{R})$ est fermé dans $\mathbb{U}$: si $\sigma(x_n)$ converge, on peut supposer, d'après la première partie de la démonstration, que $0 \leqslant x_n \leqslant 2\pi$ et donc, en vertu du théorème de Bolzano–Weierstrass et quitte à extraire une sous-suite, que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge. Comme $\mathbb{R}$ est complet et σ continue, la limite des $\sigma(x_n)$ est bien dans $\sigma(\mathbb{R})$. Enfin, montrons que $\sigma(\mathbb{R})$ est ouvert dans $\mathbb{U}$. Il est facile de voir sur la série que cos est décroissante sur un voisinage de 0, et donc que $[1-\delta, 1] \subset \cos\mathbb{R}$ pour un $\delta > 0$ convenable. Cela montre que pour $z \in \mathbb{U}$, $|z-1|$ assez petit, il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $\Re e\, z = \Re e\, \sigma(x)$. On a donc $\Im m\, z = \pm \Im m\, \sigma(x)$. Comme la fonction sinus est impaire, on a donc $z = \sigma(x)$ ou $z = \sigma(-x)$. Ainsi, $\sigma(\mathbb{R})$ contient un voisinage de 1. Cela implique que $\sigma(\mathbb{R})$ est ouvert grâce à l'équation fonctionnelle $\sigma(x)\sigma(y) = \sigma(x+y)$. □

Nous avons donc défini π comme le plus petit nombre réel positif tel que

$$\mathrm{e}^{2\pi i} = 1.$$

Il est à noter que $2\pi i\mathbb{Z}$ coïncide avec l'ensemble des solutions *complexes* de l'équation $\mathrm{e}^z = 1$, car il découle du Théorème 1.3 et de la relation $\mathrm{e}^0 = 1$ que e^z n'est pas de module 1 si $z \notin i\mathbb{R}$.

Nous pouvons déduire de l'étude précédente une définition rigoureuse de l'argument d'un nombre complexe.

L'application $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{U}$ induit par passage au quotient un isomorphisme φ de $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{U}$. L'isomorphisme réciproque $\psi : \mathbb{U} \to \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ associe donc à tout nombre complexe w de module 1 une classe de nombres réels modulo 2π. On désigne par argument de w, et l'on note $\arg w$ cette classe. Par abus de notation, on note encore $\arg w$ l'un quelconque des représentants réels de la classe en question.

Pour $z \in \mathbb{C}^*$ quelconque, nous posons $\arg z = \psi(z/|z|)$. Comme précédemment, ce nombre n'est défini qu'à un multiple entier de 2π près. On a ainsi

$$z = |z|\mathrm{e}^{i \arg z}. \tag{1·3}$$

2. Le logarithme complexe

La formule (1·3) montre qu'un nombre possède une infinité de logarithmes, définis modulo 2π par

$$\log z = \ln|z| + i \arg z.$$

Lorsque $z \in \mathbb{R}^{+*}$ un seul logarithme est réel. Lorsque z n'est pas réel positif, le choix d'un logarithme privilégié est moins évident.

Commençons par un résultat négatif.

Proposition 2.1. *Il n'existe pas de fonction continue $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ telle que $\mathrm{e}^{f(z)} = z$.*

Démonstration. Raisonnons par l'absurde. Si une telle fonction f existait, on aurait $g(z) = z - f(\mathrm{e}^z) \in 2\pi i\mathbb{Z}$ pour tout z. Comme $\mathbb{C}^*$ est connexe, cela impliquerait que g est constante. Or $g(2\pi i) - g(0) = 2\pi i$ puisque $\mathrm{e}^{2\pi i} = 1$. □

Montrons cependant qu'il existe un logarithme continu sur le disque $D(1;1)$.

Proposition 2.2. *Soit f la fonction définie sur $D = D(1;1)$ par la formule*

$$f(z) := -\sum_{n\geqslant 1}(1-z)^n/n.$$

Alors f est holomorphe et vérifie $\mathrm{e}^{f(z)} = z$ pour tout z de D.

Démonstration. Le rayon de convergence de la série est 1 et l'on a identiquement $f'(z) = 1/z$. On en déduit que $g(z) = z\mathrm{e}^{-f(z)}$ est de dérivée nulle, donc constante sur D qui est connexe. Comme $g(1) = 1$, on obtient bien la conclusion annoncée. □

Définition 2.3. *On appelle domaine une partie de $\mathbb{C}$ ouverte et connexe.*

La proposition suivante fournit une première description du logarithme d'une fonction holomorphe sur un domaine.

Proposition 2.4. *Soit U un domaine de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{H}(U, \mathbb{C}^*)$. Alors*

(i) Soit $g \in \mathcal{C}(U, \mathbb{C})$ telle que $\mathrm{e}^g = f$. Alors $g \in \mathcal{H}(U)$ et $g' = f'/f$.

(ii) Pour toute fonction $g \in \mathcal{H}(U)$ telle que $g' = f'/f$ il existe une constante $c \in \mathbb{C}^*$ telle que $\mathrm{e}^g = cf$.

(iii) Si $g, h \in \mathcal{H}(U)$ vérifient $\mathrm{e}^g = \mathrm{e}^h = f$, alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $g - h = 2\pi ik$.

Démonstration. Soient $z \in U$ et h assez petit pour que $z + h \in U$. Posons alors $\varepsilon(h) := g(z+h) - g(z)$. Comme g est continue en z, on a $\varepsilon(h) \to 0$ lorsque $h \to 0$. De plus

$$f(z)(\mathrm{e}^{\varepsilon(h)} - 1) = \mathrm{e}^{g(z+h)} - \mathrm{e}^{g(z)} = f(z+h) - f(z) = hf'(z) + o(h) \quad (h \to 0).$$

On en déduit successivement que $\varepsilon(h) = O(h)$ et que

$$f(z)\varepsilon(h) + O(h^2) = hf'(z) + o(h).$$

Cela établit bien le point (i).

Si $g' = f'/f$, alors $\mathrm{e}^{-g}f$ est de dérivée nulle sur U qui est connexe. Cette fonction est donc constante sur U, d'où (ii).

Pour montrer (iii), on remarque que $\mathrm{e}^{g-h} = 1$ est constante, donc $g - h \in 2\pi i\mathbb{Z}$. Comme U est connexe, cela implique bien le résultat. □

Définition 2.5. *Soient U un domaine de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{H}(U, \mathbb{C}^*)$. On appelle* détermination du logarithme de f *toute fonction g continue (donc holomorphe) sur U vérifiant $\mathrm{e}^g = f$. On dit aussi que g est un logarithme holomorphe de f.*

Toute détermination g du logarithme de f — on dit aussi : de $\log f(z)$ — vérifie $\Re e\, g = \ln|f|$. En revanche, $\Im m\, g$ n'est pas entièrement déterminée par f.

Il est évident qu'il n'existe pas de détermination de $\log z$ sur un domaine contenant 0 puisque $0 \notin \exp\mathbb{C}$. La proposition suivante donne une condition nécessaire plus précise.

Proposition 2.6. *Soit U un domaine de $\mathbb{C}^*$ contenant un cercle de centre 0 et de rayon positif. Alors il n'existe pas de détermination de $\log z$ sur U.*

Démonstration. Raisonnons par l'absurde. Si $C(0;r) := \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\} \subset U$ et s'il existe une détermination $f(z)$ de $\log z$, soit $g(\vartheta) = f(r\mathrm{e}^{i\vartheta}) - \ln r - i\vartheta$ ($\vartheta \in \mathbb{R}$). Alors g est continue sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $2\pi i\mathbb{Z}$, donc elle est constante. Mais $g(0) - g(2\pi) = 2\pi i$. □

Voici à présent un résultat positif.

Proposition 2.7. *Soit* Δ *une demi-droite issue de l'origine. Alors il existe une détermination de* $\log z$ *sur* $U := \mathbb{C} \smallsetminus \Delta$.

Démonstration. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{e}^{i\alpha} \in \Delta$. Pour $z \in U$, nous pouvons écrire $z = r\mathrm{e}^{i\vartheta}$ avec $\alpha < \vartheta < \alpha + 2\pi$. Posons $g(z) = \ln r + i\vartheta$. D'après la Proposition 2.4, il suffit de montrer que $g \in \mathcal{C}(U, \mathbb{C})$. Posons $z = \mathrm{e}^{i\alpha}(u + iv)$. Alors u et v sont des fonctions continues de z, et il en va de même de $r = \sqrt{u^2 + v^2}$. Il suffit donc d'établir que ϑ est une fonction continue de u et v. Remarquons que $v \neq 0$ pour $z \in U$, $u > 0$, donc $u < r$. On a de plus $u = r\cos(\vartheta - \alpha)$, $v = r\sin(\vartheta - \alpha)$. Donc

$$\cot(\tfrac{1}{2}\vartheta - \tfrac{1}{2}\alpha) = \frac{2\sin(\frac{1}{2}\vartheta - \frac{1}{2}\alpha)\cos(\frac{1}{2}\vartheta - \frac{1}{2}\alpha)}{2\sin^2(\frac{1}{2}\vartheta - \frac{1}{2}\alpha))} = \frac{\sin(\vartheta - \alpha)}{1 - \cos(\vartheta - \alpha)} = \frac{v}{r - u}.$$

Comme $\frac{1}{2}\vartheta - \frac{1}{2}\alpha \in]0, \pi[$, on a donc

$$\tfrac{1}{2}\vartheta - \tfrac{1}{2}\alpha = \operatorname{arccotg}\Big(\frac{v}{r-u}\Big) = \tfrac{1}{2}\pi - \operatorname{arctg}\Big(\frac{v}{r-u}\Big).$$

□

Remarques. (i) On ne peut prolonger g en aucun point de Δ car les limites obtenues en approchant un point de Δ par la gauche et la droite diffèrent de $2\pi i$.

(ii) On peut aussi établir que $z \mapsto \vartheta$ est continue en remarquant que l'application $\varphi : \mathbb{R}^{+*} \times]\alpha, \alpha + 2\pi] \to \mathbb{C} \smallsetminus \Delta$ définie par $\varphi(r, \vartheta) = r\mathrm{e}^{i\vartheta}$ est une bijection différentiable de classe $\mathcal{C}^1$ dont la matrice jacobienne est inversible en tout point puisque son déterminant vaut r. D'après le théorème d'inversion locale (forme globale), φ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme et en particulier $z \mapsto \vartheta$ est continue.

Corollaire 2.8. *(i) Soit* D *un disque ouvert de* $\mathbb{C}$ *ne contenant pas* 0. *Alors il existe sur* D *une détermination de* $\log z$.

(ii) Soit U *un domaine arbitraire de* $\mathbb{C}$ *et* $f \in \mathcal{H}(U, \mathbb{C}^*)$. *Alors, il existe localement des déterminations de* $\log f$.

Démonstration. L'assertion (i) résulte simplement du fait que, si $0 \notin D$, alors D est inclus dans $\mathbb{C} \smallsetminus \Delta$ où Δ est une demi-droite quelconque issue de 0 et ne rencontrant pas D. La seconde propriété signifie que tout point $z \in U$ possède un voisinage V sur lequel $\log f(z)$ est définie et holomorphe : d'après ce qui précède on peut en fait choisir $V = f^{-1}(D(f(z); |f(z)|) \cap U$, puisque D est un disque ne contenant pas 0 et que $w \in V \Rightarrow f(w) \in D$, ce qui permet de considérer $\log f(w)$. □

Parmi les déterminations de $\log z$ construites à la Proposition 2.7, une joue un rôle privilégié dans la théorie.

Théorème et définition 2.9. *On appelle détermination principale du logarithme sur* $U := \mathbb{C} \smallsetminus \mathbb{R}^-$ *l'unique détermination de* $\log z$ *telle que* $\log 1 = 0$. *La restriction à* $D(1; 1)$ *de cette fonction vérifie*

$$\log z = -\sum_{n \geqslant 1} \frac{(1-z)^n}{n}. \tag{2·1}$$

Démonstration. On obtient une détermination de $\log z$ sur U telle que $\log 1 = 0$ en choisissant $\alpha = -\pi$ dans la construction de la Proposition 2.7. La Proposition 2.4(iii) montre alors que cette fonction est l'unique solution du problème. Nous avons vu par ailleurs à la Proposition 2.2 que le membre de droite de (2·1) est une solution sur $D(1; 1)$. □

Remarque. La détermination principale $\lambda(z) = \log z$ sur $\mathbb{C} \smallsetminus \mathbb{R}^-$ vérifie bien $\lambda'(z) = 1/z$ et $\lambda(1/z) = -\lambda(z)$ pour tout z de U mais la relation

$$\lambda(zw) = \lambda(z) + \lambda(w) \tag{2·2}$$

n'est pas satisfaite pour tout choix de $(z,w) \in U^2$. Par exemple, pour $z = w = \mathrm{e}^{3\pi i/4} = (-1+i)\sqrt{2}/2$, on a $\lambda(z^2) = -i\pi/2$, alors que $2\lambda(z) = 3\pi i/2$. On vérifiera sans peine que (2·2) est satisfaite lorsque w et z appartiennent au demi-plan $\Re e\, z > 0$.

3. Les puissances complexes

On peut définir sans ambiguïté z^α lorsque $z > 0$ et $\alpha \in \mathbb{C}$ ou $z \in \mathbb{C}$ et $\alpha \in \mathbb{N}$. Dans le cas général α, $z \in \mathbb{C}$, des précautions sont nécessaires.

Définition 3.1. *Soient $\alpha \in \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{C}^*$. On appelle détermination de z^α un nombre complexe de la forme $\mathrm{e}^{\alpha\lambda(z)}$ où $\lambda(z)$ est un logarithme de z.*

Ainsi, si $\alpha \in \mathbb{Z}$, il existe une seule détermination de z^α, si $\alpha \in \mathbb{Z}/n$, il en existe n et si $\alpha \in \mathbb{C} \smallsetminus \mathbb{Q}$, il en existe une infinité.

On adopte le même vocabulaire pour les fonctions : si $f \in \mathcal{H}(U)$ où U est un domaine, une détermination de $f(z)^\alpha$ est une fonction de la forme $\mathrm{e}^{\alpha \log f(z)}$ pour une détermination convenable de $\log f(z)$. On appelle détermination principale de z^α la fonction définie sur $\mathbb{C} \smallsetminus \mathbb{R}^-$ par $\mathrm{e}^{\alpha \log z}$ où $\log z$ désigne la détermination principale de $\log z$. On a toujours $z^\alpha z^\beta = z^{\alpha+\beta}$, mais la relation $z^\alpha w^\alpha = (zw)^\alpha$ n'est pas satisfaite identiquement.

Posons

$$\binom{\alpha}{n} := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!},$$

ce qui est cohérent avec la notation binomiale lorsque $\alpha \in \mathbb{N}$.

Théorème 3.2. *La détermination principale de $(1+z)^\alpha$ est donnée dans $D := D(0;1)$ par la formule*

$$(1+z)^\alpha = \sum_{n \geqslant 0} \binom{\alpha}{n} z^n.$$

Démonstration. On vérifie aisément que la série converge dans D : elle est en fait de rayon de convergence 1. Soit $f(z)$ sa somme. L'identité $(n+1)\binom{\alpha}{n+1} = (\alpha-n)\binom{\alpha}{n}$ implique alors

$$(1+z)f'(z) = \alpha f(z),$$

d'où, en notant $g(z) = f(z)(1+z)^{-\alpha} = f(z)\mathrm{e}^{-\alpha\log(1+z)}$,

$$g'(z) = \Big\{f'(z) - \frac{\alpha f(z)}{1+z}\Big\}(1+z)^{-\alpha} = 0.$$

Ainsi g est constante sur D, et, puisque $f(0) = 1$, $g = 1$. □

Remarque. On a en particulier

$$\frac{1}{(1-z)^{m+1}} = \sum_{n \geqslant 0} \binom{m+n}{m} z^n \qquad (|z| < 1).$$

Université de Lorraine
Faculté des sciences et technologies
Licence de mathématiques 2012/2013
Analyse complexe (LMI6.33)

IV

Fonctions analytiques complexes

1. Définition et condition suffisante

Définition 1.1. *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$. On dit que $f : U \to \mathbb{C}$ est analytique dans U si f est développable en série entière en chaque point de U, autrement dit si, pour tout $z_0 \in U$, il existe un disque $D(z_0; r)$ de rayon $r > 0$ tel que $f(z)$ soit développable en série entière dans $D(z_0; r)$.*

D'après le Corollaire II.2.6, si f est analytique dans un ouvert U, elle y est indéfiniment dérivable, toutes ses dérivées sont analytiques, et l'on a, pour chaque z_0 de U,

$$f(z) = \sum_{n \geqslant 0} f^{(n)}(z_0) \frac{(z - z_0)^n}{n!}$$

dans un voisinage convenable de z_0.

Théorème 1.2. *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$.*
(i) L'espace $\mathcal{A}(U)$ des fonctions analytiques dans U est une $\mathbb{C}$-algèbre.
(ii) Si $f \in \mathcal{A}(U)$ et si V est un sous-ouvert de U où f ne s'annule pas, alors $1/f \in \mathcal{A}(V)$.
(iii) Si $f \in \mathcal{A}(U)$, $g \in \mathcal{A}(V)$ et $f(U) \subset V$, alors $g \circ f \in \mathcal{A}(U)$.

Démonstration. Le point (i) résulte immédiatement du Théorème II.2.8 qui stipule que la somme et le produit de deux fonctions développables en séries entières dans un disque est également développable en série entière dans le même disque.

Pour établir (ii), considérons z_0 tel que $f(z_0) \neq 0$. On a dans un voisinage convenable de z_0

$$f(z) = \sum_{n \geqslant 0} a_n (z - z_0)^n$$

et en particulier il existe $r > 0$ et $A > 0$ tels que $|a_n| \leqslant Ar^n$ pour tout $n \geqslant 0$. Comme $a_0 = f(z_0) \neq 0$, on peut définir une suite $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ par

$$\begin{cases} a_0 b_0 = 1, \\ a_0 b_n = -\sum_{0 \leqslant k < n} b_k a_{n-k}. \end{cases} \tag{1·1}$$

Posons alors $\varrho := r + (Ar + 1)/|a_0|$. On a $|b_0| \leqslant \varrho$ et (1·1) implique immédiatement par récurrence sur n que $|b_n| \leqslant \varrho^{n+1}$ pour tout n. En effet, si l'hypothèse est réalisée jusqu'au rang $n - 1$ avec $n \geqslant 1$, on a

$$|b_n| \leqslant \frac{1}{|a_0|} \sum_{0 \leqslant k < n} \varrho^{k+1} A r^{n-k} \leqslant \frac{Ar}{|a_0|(\varrho - r)} \varrho^{n+1} \leqslant \varrho^{n+1}.$$

Il résulte alors du théorème de multiplication des séries entières que, si l'on note $g(z) := \sum_{n \geqslant 0} b_n (z - z_0)^n$, on a $f(z)g(z) = 1$ dans un voisinage convenable de z_0.

Montrons (iii). Posons $z_1 := f(z_0) \in V$ et $f(z) = z_1+\sum_{n\geqslant 1} a_n(z-z_0)^n$ le développement en série entière de f au voisinage de z_0. Il existe $r > 0$ tel que

$$g(z) = \sum_{m\geqslant 0} b_m(z - z_1)^m \qquad (|z - z_1| < r).$$

Pour $|z - z_0|$ assez petit, on a $|f(z) - z_1| < r$, donc la série

$$\sum_{m\geqslant 0} b_m(f(z) - z_1)^m$$

est convergente. Posons $(f(z) - z_1)^m = \sum_{n\geqslant 1} a_{n,m}(z - z_0)^n$. Il est facile de montrer en appliquant récursivement le lemme de multiplication des séries que si l'on note $A_{n,m}$ le coefficient de Z^n dans la série $\big(\sum_{n\geqslant 1} |a_n|Z^n\big)^m$, alors $|a_{n,m}| \leqslant A_{n,m}$ pour $m \geqslant 0$, $n \geqslant 1$. Comme $\sum_{n\geqslant 1} |a_n|\varrho^n < r$ pour ϱ assez petit, il s'ensuit que

$$\sum_{m\geqslant 0} |b_m| \sum_{n\geqslant 1} |a_{m,n}|\,|z - z_0|^m$$

converge dans un voisinage de z_0. Cela implique le résultat annoncé grâce au Lemme II.2.3 concernant l'interversion des sommations dans les séries doubles. □

Nous verrons plus loin qu'une fonction holomorphe dans un ouvert y est analytique. Pour le moment, nous nous contentons de noter le résultat suivant, qui est une conséquence immédiate du Théorème II.2.4.

Théorème 1.3. *La somme $f(z)$ d'une série entière est analytique dans le disque ouvert de convergence. Plus précisément, si R désigne le rayon de convergence de la série entière $f(z)$ en z_0, le développement au point $z_1 \in D(z_0; R)$ converge dans $D(z_1; R - |z_1 - z_0|)$.*

2. Le principe du prolongement analytique

Théorème 2.1. *Soient U un domaine de $\mathbb{C}$, $z_0 \in U$ et $f \in \mathcal{A}(U)$. Les trois assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) $f^{(n)}(z_0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(ii) f est identiquement nulle sur un voisinage de z_0.

(iii) f est identiquement nulle sur U.

Démonstration. Il est évident que (iii) implique (i). De plus, si (i) est réalisée, la série de Taylor de f en z_0 est identiquement nulle, mais le Corollaire II.2.6 implique que cette série représente f dans un voisinage de z_0, d'où (ii). Il reste donc seulement à montrer que (ii) implique (iii). Supposons (ii) et désignons par E l'ensemble des points de U où toutes les dérivées de f s'annulent. Alors $E \neq \varnothing$ puisque $z_0 \in E$. De plus, E est ouvert car si $z \in E$ et h est de module assez petit, on a

$$f^{(p)}(z + h) = \sum_{n\geqslant p} f^{(n)}(z)h^{n-p}/(n - p)! \qquad (p \geqslant 0)$$

donc $z + h \in E$. Enfin, E est fermé puisque $f^{(p)} \in \mathcal{C}(U)$ pour tout p et $E = \cap_{p\geqslant 0}\{z \in U : f^{(p)}(z) = 0\}$. Comme U est connexe, cela implique bien $E = U$. □

Corollaire 2.2. *Soit U un domaine de $\mathbb{C}$. Alors $\mathcal{A}(U)$ est un anneau d'intégrité : si $f, g \in \mathcal{A}(U)$ vérifient $fg = 0$ alors $f = 0$ ou $g = 0$.*

Démonstration. Soit $z_0 \in U$. On a

$$\sum_{0 \leqslant j \leqslant n} \binom{n}{j} f^{(j)}(z_0) g^{(n-j)}(z_0) = 0 \qquad (n \geqslant 0). \tag{2·1}$$

Supposons que $f \neq 0$. Alors il existe un indice minimal $p \geqslant 0$ tel que $f^{(p)}(z_0) \neq 0$. La relation (2·1) appliquée avec $n = p$ montre alors que $g(z_0) = 0$. En appliquant ensuite (2·1) avec $n = p + 1$, il suit $g'(z_0) = 0$. Par itération, nous obtenons ainsi que la suite $\{g^{(n)}(z_0)\}_{n=0}^{\infty}$ est identiquement nulle, d'où la conclusion par le Théorème 2.1. □

Corollaire 2.3 (Principe du prolongement analytique). *Soient U un domaine de $\mathbb{C}$ et f, $g \in \mathcal{A}(U)$. Si f et g coïncident au voisinage d'un point de U, elles coïncident sur U.*

3. Zéros d'une fonction analytique

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{A}(U)$. Au voisinage de chaque point z_0 de U, on peut écrire

$$f(z) = \sum_{n \geqslant 0} a_n (z - z_0)^n.$$

Si $f(z_0) = 0$ mais f n'est pas identiquement nulle au voisinage de z_0, il existe d'après les résultats du paragraphe précédent un entier, que nous supposerons minimal, p tel que $a_p \neq 0$. La série

$$g(z) = \sum_{n \geqslant p} a_p (z - z_0)^{n-p}$$

converge pour $|z - z_0|$ assez petit et sa somme définit au voisinage de z_0 une fonction analytique telle que $g(z_0) = a_p \neq 0$. Comme g est continue en z_0, il s'ensuit que

$$f(z) = g(z)(z - z_0)^p \tag{3·1}$$

est non nulle sur un disque épointé convenable $D(z_0; r) \smallsetminus \{z_0\}$ avec $r > 0$. Autrement dit, chaque point au voisinage duquel f n'est pas identiquement nulle possède un voisinage sur lequel il est l'unique zéro de f.

Théorème 3.1 (Principe des zéros isolés). *Soient U un domaine de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{A}(U)$. Si f n'est pas identiquement nulle, l'ensemble de ses zéros est discret : chacun de ses éléments est isolé.*

L'entier p définit par (3·1) s'appelle l'ordre de multiplicité du zéro z_0 de f. Si $p = 1$, on dit que z_0 est un zéro simple de f. Si $p > 1$, on dit que z_0 est un zéro multiple de f.

Corollaire 3.2. *Soient U un domaine de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{A}(U)$ non identiquement nulle.*
(i) Tout sous-ensemble compact de U contient au plus un nombre fini de zéros de f.
(ii) L'ensemble des zéros de f dans U est dénombrable.
(iii) L'ensemble des zéros de f sur U ne possède aucun point d'accumulation dans U.

Démonstration. Le point (i) est une conséquence immédiate du critère de compacité de Borel–Lebesgue. Le point (ii) découle de (i) et du fait que $\mathbb{C}$ peut être recouvert par une famille dénombrable de compacts, par exemple les disques fermés de rayons rationnels. Enfin, l'assertion (iii) résulte du fait que si $z \in U$ est un point d'accumulation de l'ensemble des zéros de U, alors tout voisinage de z dans U contient une infinité de zéros de f. □

Corollaire 3.3 (Principe des zéros isolés, seconde formulation). *Soient U un domaine $\mathbb{C}$ et f, $g \in \mathcal{A}(U)$. Si f et g coïncident sur un sous-ensemble de U possédant un point d'accumulation, elles coïncident sur U.*

4. Les principes du module maximum et minimum

Théorème 4.1 (Principe du maximum). *Soient U un domaine de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{A}(U)$. Si $|f|$ possède un maximum local dans U, alors f est constante sur U.*

Si U est borné et si f est prolongeable par continuité à $\overline{U}$, alors

$$|f(z)| \leqslant M := \sup_{w \in \partial U} |f(w)| \qquad (z \in U). \tag{4·1}$$

Si f n'est pas constante sur U, l'inégalité (4·1) *est stricte.*

Démonstration. Supposons que $|f(z)|$ possède un maximum local en z_0, c'est-à-dire qu'il existe un voisinage V de z_0 tel que $|f(z)| \leqslant |f(z_0)|$ pour tout z de V. Si f n'est pas constante, le Théorème 2.1 implique que son développement de Taylor en z_0 n'est pas réduit au terme constant. Supposons, sans perte de généralité, que $z_0 = 0$. On a pour $|z| < R$ assez petit

$$f(z) = a_0 + a_p z^p + O(z^{p+1}).$$

Si $a_0 = f(0) = 0$, alors $f(z) = 0$ dans $D(0; R)$ et le principe du prolongement analytique implique $f = 0$ sur U, ce qui contredit l'hypothèse que f n'est pas constante. Si $a_0 \neq 0$, posons $a_0 = r_0 \mathrm{e}^{i\vartheta_0}$, $a_p = r_p \mathrm{e}^{i\vartheta_p}$. Pour $z := r_0^{1/p} r \mathrm{e}^{i(\vartheta_0 - \vartheta_p)/p}$, $r < R/r_0$, on a donc

$$f(z) = a_0 \big\{1 + r^p r_p + O(r^{p+1})\big\}$$

donc $|f(z)| > |a_0|$ pour $r > 0$ assez petit.

Lorsque U est borné, on peut supposer f non constante, car (4·1) est trivialement vérifiée dans le cas contraire. D'après la première partie, on a donc $|f(z)| < \sup_{w \in \overline{U}} |f(w)|$ pour tout $z \in U$, ce qui implique que le maximum est bien atteint sur le bord ∂U. □

Théorème 4.2 (Principe du minimum). *Soient U un domaine de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{A}(U)$. Si $|f|$ possède un minimum local en un point z_0 de U, alors ou bien $f(z_0) = 0$, ou bien f est constante sur U.*

Démonstration. Si $f(z_0) \neq 0$, alors, d'après le Théorème 1.2(ii), $g := 1/f$ est analytique dans un disque ouvert centré en z_0 et $|g|$ possède en ce point un maximum local. D'après le Théorème 4.1, il s'ensuit que g est constante sur un voisinage de z_0. Il en va donc de même de f. Le principe du prolongement analytique permet alors de conclure que f est constante sur U. □

Université de Lorraine
Faculté des sciences et technologies
Licence de mathématiques 2012/2013
Analyse complexe (LMI6.33)

V

Le théorème de Cauchy

1. Intégrales curvilignes

Définition 1.1. *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$. On appelle chemin de U une application continue $\gamma : [a,b] \to U$ définie sur un intervalle compact $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Le nombre complexe $\gamma(a)$ s'appelle l'origine de γ, et $\gamma(b)$ s'appelle son extrémité. L'image $\gamma([a,b])$ s'appelle le support géométrique de γ. On la note aussi γ^* ou $\operatorname{supp}\gamma$.*

On dit qu'un chemin est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux s'il existe une subdivision

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$$

de $[a,b]$ telle que γ soit de classe $\mathcal{C}^1$ sur chacun des intervalles ouverts $]t_j, t_{j+1}[$.

On dit qu'un chemin est fermé, si $\gamma(a) = \gamma(b)$.

On dit qu'un chemin est un lacet s'il est fermé et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

Exemples. (i) Un segment $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$, défini par $\gamma(t) = z_1 + t(z_2 - z_1)$. On note alors $\gamma^* = [z_1, z_2] := \{z_1 + t(z_2 - z_1) : 0 \leqslant t \leqslant 1\}$.

(ii) Une ligne brisée, obtenue par « concaténation » de segments : par exemple

$$\gamma(t) := \begin{cases} z_1 + t(z_2 - z_1) & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ z_2 + (t-1)(z_3 - z_2) & \text{si } 1 \leqslant t \leqslant 2. \end{cases}$$

Voir la Définition 1.2 ci-dessous pour une définition formelle de la concaténation.

(iii) Un cercle : $\gamma(t) := z_0 + re^{it}$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$. Nous notons $C(z_0; r)$ ce chemin.

Lorsque γ est un chemin, on peut définir sur $[a,b]$ un chemin γ^- joignant $\gamma(b)$ à $\gamma(a)$ par la formule

$$\gamma^-(t) := \gamma(a + b - t).$$

Le chemin γ^- a même support géométrique que γ mais l'arc de courbe est parcouru en sens inverse.

Définition 1.2. *Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $\gamma_1 : [a,b] \to U$, $\gamma_2 : [c,d] \to U$ deux chemins de U tels que $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$. On appelle concaténation de γ_1 et γ_2, et l'on note $\gamma = \gamma_1 * \gamma_2$ le chemin défini sur $[a, b + d - c]$ par la formule*

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{si } a \leqslant t \leqslant b, \\ \gamma_2(c + t - b) & \text{si } b \leqslant t \leqslant b + d - c. \end{cases}$$

Pour tout chemin γ de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, le chemin $\gamma * \gamma^-$ est donc un lacet. On a

$$\gamma * \gamma^-(t) = \begin{cases} \gamma(t) & \text{si } a \leqslant t \leqslant b, \\ \gamma(2b - t) & \text{si } b \leqslant t \leqslant 2b - a. \end{cases}$$

Définition 1.3. *Soit $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ un chemin de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. On appelle longueur de γ le nombre*

$$L(\gamma) := \int_a^b |\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t.$$

On peut montrer que $L(\gamma)$ correspond bien à la notion intuitive de longueur : c'est la borne supérieure des longueurs des lignes brisées dont les sommets sont sur γ^*.

On a $L(\gamma) = |z_2 - z_1|$ si γ est le segment $[z_1, z_2]$, et $L(\gamma) = 2\pi r$ si $\gamma = C(z_0; r)$ est un cercle de rayon r.

Définition 1.4. *Soient $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ un chemin de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux et f une fonction continue sur γ^*. On appelle intégrale curviligne de f le long de γ l'intégrale*

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z := \int_a^b f\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Remarque. On a donc, pour tout chemin de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux γ,

$$\int_{\gamma^-} f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z. \tag{1·1}$$

Exemple.

$$\int_{C(0;r)} \frac{\mathrm{d}z}{z} = 2i\pi. \tag{1·2}$$

Notation. Nous utiliserons occasionnellement la notation

$$\oint_{|z-z_0|=r} = \int_{C(z_0;r)}.$$

Les résultats suivants, très utiles en pratique, sont évidents à partir de la définition d'une intégrale curviligne.

Proposition 1.5. *Soient γ un chemin de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux et $f : \gamma^* \to \mathbb{C}$ une fonction continue. Alors*

$$\left|\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leqslant L(\gamma) \sup_{z\in\gamma^*} |f(z)|.$$

Proposition 1.6 (Additivité de l'intégrale curviligne). *Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $\gamma_1 : [a,b] \to U$, $\gamma_2 : [c,d] \to U$ deux chemins de U, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux et tels que $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$. On pose $\gamma := \gamma_1 * \gamma_2$. Alors on a pour toute fonction $f \in \mathcal{C}(\gamma^*)$,*

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z$$

Proposition 1.7 (Changement de paramétrage d'une intégrale curviligne). *Soient $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ un chemin de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, $f \in \mathcal{C}(\gamma^*)$ et φ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme*(1) *de $[\alpha,\beta]$ sur $[a,b]$ tel que $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$. Alors*

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma\circ\varphi} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

1. C'est-à-dire une bijection bi-différentiable dont la dérivée et la dérivée de la réciproque sont continues.

Lorsque le difféomorphisme est décroissant, l'intégrale est changée en son opposée. Ainsi, une intégrale curviligne est déterminée par γ^* et le sens de parcours : on peut donc identifier un chemin de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux à une classe d'équivalence modulo les $\mathcal{C}^1$-difféomorphismes croissants.

Le résultat suivant permet de décrire topologiquement le complémentaire d'un lacet.

Proposition 1.8. *Soit γ un lacet de $\mathbb{C}$. Alors l'ouvert $U_\gamma := \mathbb{C} \smallsetminus \gamma^*$ possède une unique composante connexe non bornée.*

Démonstration. Comme γ^* est compact, il existe $R > 0$ tel que $\gamma^* \subset \overline{D(0,R)}$. L'ouvert connexe $V := \mathbb{C} \smallsetminus \overline{D(0;R)}$ vérifie $V \subset U_\gamma$, il est donc contenu dans une et une seule composante connexe de U_γ, qui est donc non bornée. Les autres composantes connexes de U_γ, qui sont contenues dans $\overline{D(0;R)}$, sont donc bornées. □

Théorème et définition 1.9. *Soient γ un lacet et $z \in \mathbb{C} \smallsetminus \gamma^*$. Alors le nombre*

$$I(z;\gamma) := \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\mathrm{d}w}{w-z}$$

est un entier relatif appelé indice de z par rapport à γ.

Démonstration. Soit $[a,b]$ l'intervalle de définition de γ. Posons

$$g(x) := \exp\int_a^x \frac{\gamma'(t)\,\mathrm{d}t}{\gamma(t)-z} \qquad (a \leqslant x \leqslant b).$$

On a donc, sauf en un nombre fini de points $x \in [a,b]$,

$$\frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{\gamma'(x)}{\gamma(x)-z},$$

donc $g(x)/\{\gamma(x)-z\}$ est constante et il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $g(x) = \lambda\{\gamma(x)-z\}$ pour $x \in [a,b]$. En particulier $1 = g(a) = g(b)$. Comme $g(b) = \exp\{2\pi i I(z;\gamma)\}$, cela implique bien $I(z;\gamma) \in \mathbb{Z}$. □

On peut interpréter l'indice comme le nombre algébrique de tours que fait la courbe fermée γ^* autour de z.

Définition 1.10. *On dit qu'un lacet γ entoure un point z de $\mathbb{C}$ si $I(z;\gamma) \neq 0$. On note*

$$I(\gamma) := \{z \in \mathbb{C} \smallsetminus \gamma^* : I(z;\gamma) \neq 0\} \tag{1·3}$$

l'ensemble des points du plan complexe qui sont entourés par γ.

Théorème 1.11. *Soit γ un lacet de $\mathbb{C}$. La fonction $z \mapsto I(z;\gamma)$, de $U_\gamma := \mathbb{C} \smallsetminus \gamma^*$ dans $\mathbb{Z}$ est constante sur chaque composante connexe de U_γ et nulle sur l'unique composante connexe non bornée.*

Démonstration. Comme l'indice est à valeurs entières, il suffit de montrer que $I(z;\gamma)$ dépend continûment de z. Or, cela résulte immédiatement du fait que l'application $(z,t) \mapsto \gamma'(t)/\{\gamma(t)-z\}$ est continue sur chaque produit $U_\gamma \times]t_j, t_{j+1}[$ tel que $\gamma' \in \mathcal{C}(]t_j,t_{j+1}[)$. On obtient $I(z;\gamma) = 0$ sur la composante connexe non bornée grâce à la majoration

$$|I(z;\gamma)| \leqslant L(\gamma)/\{2\pi d(z,\gamma^*)\}$$

en faisant tendre $|z|$ vers l'infini. □

Corollaire 1.12. *On a*

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|w-a|=r}\frac{\mathrm{d}w}{w-z}=\begin{cases}1 & \text{si } |z-a|<r,\\ 0 & \text{si } |z-a|>r.\end{cases}\tag{1·4}$$

Démonstration. L'ensemble $\mathbb{C}\smallsetminus C(a;r)$ ne possède que deux composantes connexes. Sur la composante connexe bornée, l'indice d'un point quelconque est égal à celui de a et vaut donc

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|w-a|=r}\frac{\mathrm{d}w}{w-a}=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{ir\mathrm{e}^{it}\,\mathrm{d}t}{r\mathrm{e}^{it}}=1.$$

□

2. Primitives

Définition 2.1. *Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f: U\to\mathbb{C}$. On dit que $F\in\mathcal{H}(U)$ est une primitive de f sur U si $F'(z)=f(z)$ pour tout $z\in U$.*

Proposition 2.2. *Soient U un domaine de $\mathbb{C}$, $\gamma:[a,b]\to U$ un chemin de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, f une fonction continue sur γ^* et F une primitive de f sur U. Alors*

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z=F\big(\gamma(b)\big)-F\big(\gamma(a)\big).\tag{2·1}$$

En particulier, le membre de gauche de (2·1) *est nul pour tout lacet γ de U.*

Démonstration. Il suffit de remarquer que $(F\circ\gamma)'(t)=f\circ\gamma(t)\cdot\gamma'(t)$ pour tout $t\in[a,b]$ sauf un nombre fini de valeurs où la fonction est continue. □

Exemples. Pour tout entier $n\neq-1$, $z^{n+1}/(n+1)$ est une primitive de z^n sur $\mathbb{C}$ ($n\geqslant 0$) ou $\mathbb{C}^*$ ($n\leqslant -2$). En revanche, on retrouve grâce (1·2) que $1/z$ n'a pas de primitive sur $\mathbb{C}^*$ — ce que l'on avait précédemment établi à la Proposition III.2.6.

Nous allons maintenant établir la réciproque de la dernière assertion de la Proposition 2.2. Nous utiliserons la notion suivante.

Définition 2.3. *On dit qu'un ouvert U de $\mathbb{C}$ est étoilé par rapport à un point a si le segment $[a,z]$ est contenu dans U pour tout z de U. On dit que U est étoilé s'il est étoilé par rapport à l'un de ses points.*

Il est immédiat qu'un ouvert étoilé est connexe par arcs : pour tout couple (w,z) de U^2, la ligne brisée $[w,a,z]$ est contenue dans U. On note, par ailleurs, qu'un ouvert est convexe si, et seulement si, il est étoilé par rapport à chacun de ses points.

Théorème 2.4. *Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f\in\mathcal{C}(U)$.*

(i) Si U est étoilé et si $\int_{\partial\Delta}f(z)\,\mathrm{d}z=0$ pour tout triangle plan Δ contenu dans U, alors f admet une primitive dans U.

(ii) Si $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z=0$ pour tout lacet de U, alors f admet localement une primitive sur U, autrement dit pour tout $z_0\in U$, il existe $r>0$ et $F\in\mathcal{H}(D(z_0;r))$tels que $f=F'$ sur $D(z_0;r)$. Si de plus U est connexe, alors f admet une primitive sur U.

Démonstration. Montrons (i). Si U est étoilé par rapport à a, la fonction $F(z):=\int_{[a,z]}f(w)\,\mathrm{d}w$ est bien définie dans U et vérifie, pour $|h|$ assez petit,

$$F(z+h)-F(z)=\int_{[z,z+h]}f(w)\,\mathrm{d}w=h\int_0^1 f(z+th)\,\mathrm{d}t.$$

Comme f est continue, on obtient bien, en faisant tendre h vers 0, que F est une primitive de f.

Montrons ensuite (ii). Soient $z_0 \in U$ et $r > 0$ tel que $D(z_0; r) \subset U$. Alors $D(z_0; r)$ est étoilé par rapport à z_0, donc f possède bien une primitive dans $D(z_0; r)$.

Si U est connexe et $a \in U$, on peut définir globalement $F(z) := \int_\gamma f(w)\,\mathrm{d}w$ où γ est un chemin quelconque joignant a à z. En effet, cette valeur ne dépend pas du chemin choisi puisque, si $\delta : [\alpha, \beta] \to U$ est un autre chemin et si l'on définit un lacet en concaténant γ et δ^- on a

$$0 = \int_{\gamma * \delta^-} f(w)\,\mathrm{d}w = \int_\gamma f(w)\,\mathrm{d}w - \int_\delta f(w)\,\mathrm{d}w.$$

Considérons alors $r > 0$ tel que $D(z; r) \subset U$. On a, pour $|h| < r$,

$$F(z+h) - F(z) = \int_{\gamma * [z, z+h]} f(w)\,\mathrm{d}w - \int_\gamma f(w)\,\mathrm{d}w = \int_{[z, z+h]} f(w)\,\mathrm{d}w$$

et l'on conclut comme précédemment que $F' = f$. □

À fins de référence ultérieure, nous énonçons maintenant une conséquence immédiate de la Proposition 2.2 et du Théorème 2.4.

Théorème 2.5. *Soient U un domaine de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{C}(U)$. Alors f admet une primitive sur U si, et seulement si, $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$ pour tout lacet γ de U. Si U est étoilé, il suffit que $\int_{\partial\Delta} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$ pour tout triangle plan Δ contenu dans U.*

Le résultat suivant fournit, compte tenu de (1·2), une nouvelle preuve de la Proposition III.2.1, selon laquelle il n'existe pas de détermination de $\log z$ sur $\mathbb{C}^*$.

Pour les deux énoncés suivants et la remarque qu'ils encadrent, nous anticipons momentanément sur la suite du cours en admettant que la dérivée d'une fonction holomorphe est nécessairement continue — cf. Théorème 3.10.

Proposition 2.6. *Soient U un domaine de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{H}(U, \mathbb{C}^*)$. Les trois conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) Il existe une détermination de $\log f(z)$ sur U.

(ii) f'/f admet une primitive sur U.

(iii) $\int_\gamma \{f'(z)/f(z)\}\,\mathrm{d}z = 0$ pour tout lacet γ de U.

Démonstration. D'après la Proposition III.2.4(i), toute détermination de $\log f(z)$ sur U est une primitive de f'/f. Donc (i) implique (ii). De plus, (ii) et (iii) sont équivalents en vertu du Théorème 2.5. Il reste donc seulement à établir que (ii) implique (i). Or, nous avons montré à la Proposition III.2.4(ii) que si g est une primitive de f'/f sur U, alors $\mathrm{e}^g = cf$ pour une certaine constante complexe c. On a $c \neq 0$ puisque l'exponentielle ne s'annule pas sur $\mathbb{C}$. La fonction définie par $F(z) := g(z) - b$ où b est une solution quelconque de l'équation $\mathrm{e}^b = c$ est donc la détermination de $\log f(z)$ cherchée. □

Remarque. Comme on a pour toute fonction f de $\mathcal{H}(U, \mathbb{C}^*)$ et tout lacet γ de U

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z = \int_{f(\gamma)} \frac{\mathrm{d}w}{w} = 2\pi i I\big(0; f(\gamma)\big),$$

la propriété (iii) équivaut à $0 \notin I(f(\gamma))$.

Corollaire 2.7. *Soient U un domaine de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{H}(U, \mathbb{C}^*)$. Alors il existe une détermination de $\log f(z)$ sur U si, et seulement si, , pour chaque lacet γ de U, le lacet $f(\gamma)$ n'entoure pas l'origine. En particulier, il existe une détermination de $\log z$ sur U si, et seulement si, U ne contient aucun lacet entourant l'origine.*

Démonstration. Cela résulte immédiatement de la remarque précédente. □

3. Le théorème local de Cauchy

La démonstration du théorème de Cauchy,[2] dont nous allons donner ici une version locale plus simple mais suffisante pour la plupart des applications, repose sur le résultat suivant.

Théorème 3.1 (Goursat[3]). *Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{H}(U)$. Alors, pour tout triangle plan Δ contenu dans U, on a*

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,\mathrm{d}z = 0. \tag{3·1}$$

Démonstration. Soit Δ un triangle contenu dans U, de sommets a, b, c. Notons $I := \int_{\partial\Delta} f(z)\,\mathrm{d}z$. Nous pouvons former quatre triangles égaux en considérant les milieux des côtés de Δ, et choisir un sens de parcours tel que I soit la somme des quatre intégrales relatives aux nouveaux triangles. L'une de ces intégrales est alors de module $\geqslant |I|/4$. En itérant le procédé, nous construisons ainsi une suite $\{\Delta_n\}_{n=1}^{\infty}$ de triangles emboîtés tels que

$$\left|\int_{\partial\Delta_n} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \geqslant \frac{|I|}{4^n}.$$

D'après la propriété de Borel–Lebesgue, l'intersection $\cap_n \Delta_n$ est réduite à un singleton $\{z_0\}$. Comme f est holomorphe, on a

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + o(|z - z_0|) \qquad (z \to z_0).$$

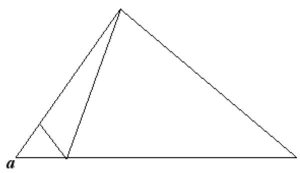
La somme des deux premiers termes est un polynôme en z, qui admet donc une primitive sur U. On a donc

$$\int_{\partial\Delta_n} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\partial\Delta_n} o(|z - z_0|)\,\mathrm{d}z = o(L(\partial\Delta_n)^2) \qquad (n \to \infty).$$

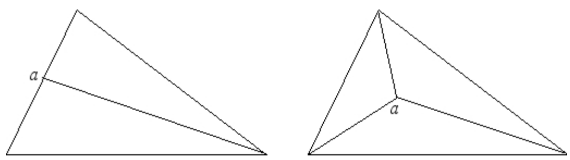
Comme $L(\partial\Delta_n) = L(\partial\Delta)/2^n$, on obtient $|I| = o(1)$, et donc $I = 0$. □

Corollaire 3.2. *Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $a \in U$. La conclusion* (3·1) *du théorème de Goursat persiste sous l'hypothèse plus faible $f \in \mathcal{H}(U \smallsetminus \{a\}) \cap \mathcal{C}(U)$.*

Démonstration. Si $\Delta \subset U \smallsetminus \{a\}$, on peut appliquer le Théorème 3.1. Lorsque a est l'un des sommets de Δ, On peut appliquer le Théorème 3.1 aux trois triangles obtenus en choisissant deux points proches de a sur les côtés adjacents de Δ. En faisant tendre ces points vers a, et en utilisant la continuité, on obtient encore la conclusion.



Enfin, lorsque a est sur un côté ou intérieur à Δ, on se ramène au cas précédent en considérant les deux ou trois triangles obtenus en traçant les segments joignant a aux sommets. □



2. Augustin-Louis Cauchy, 1789–1857.
3. Édouard Jean-Baptiste Goursat, 1858–1936.

Théorème 3.3 (Théorème local de Cauchy). *Soient U un domaine étoilé, γ un lacet de U et $f \in \mathcal{H}(U)$. Alors*

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Démonstration. D'après le théorème de Goursat, le résultat est établi lorsque γ est le bord d'un triangle plan contenu dans U. Comme U est étoilé, le Théorème 2.5 implique donc que f possède une primitive dans U. La conclusion résulte alors d'une nouvelle application du Théorème 2.5. □

Théorème 3.4 (Formule de Cauchy pour un domaine étoilé). *Soient U un ouvert étoilé de $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{H}(U)$, γ un lacet de U, et $z \in U \smallsetminus \gamma^*$. Alors on a*

$$f(z)I(z;\gamma) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)\,\mathrm{d}w}{w-z}. \tag{3·2}$$

Démonstration. Considérons la fonction $g : U \to \mathbb{C}$ définie par

$$g(w) := \begin{cases} \dfrac{f(w)-f(z)}{w-z} & \text{si } z \neq w \\ f'(z) & \text{si } z = w. \end{cases}$$

Alors $g \in \mathcal{H}(U \smallsetminus \{z\}) \cap \mathcal{C}(U)$. D'après le Corollaire 3.2, on a donc $\int_{\partial\Delta} g(w)\,\mathrm{d}w = 0$ pour tout triangle plan Δ contenu dans U. D'après le Théorème 2.4(i), g possède donc une primitive dans U. La Proposition 2.2 implique alors $\int_\gamma g(w)\,\mathrm{d}w = 0$, ce qui équivaut à la formule annoncée. □

Nous allons maintenant tirer un certain nombre de conséquences de cette remarquable représentation intégrale.

Corollaire 3.5. *Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{H}(U)$. Pour tous $a \in U$, $r > 0$ tels que $\overline{D(a;r)} \subset U$, on a*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|w-a|=r} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w \qquad (|z-a| < r). \tag{3·3}$$

Démonstration. Soit $R > r$ tel que $D(a;R) \subset U$. Alors $D(a;R)$ est étoilé et, d'après (1·4), on a $I\big(z;C(a;r)\big) = 1$ pour tout z de $D(a;r)$. □

Corollaire 3.6 (Formule de la valeur moyenne). *Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{H}(U)$. Alors on a, pour tout $a \in U$ et tout $r > 0$ tel que $\overline{D(a;r)} \subset U$,*

$$f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a + r\mathrm{e}^{it})\,\mathrm{d}t. \tag{3·4}$$

On dit qu'une fonction satisfaisant à (3·4) en tout point a d'un ouvert U tel que $D(a;r) \subset U$ possède la *propriété de moyenne*. Une fonction holomorphe sur un ouvert y possède donc la propriété de moyenne. Mais la classe des fonctions possédant la propriété de moyenne ne se réduit pas aux fonctions holomorphes : si f est holomorphe sur U, alors $\Re e\, f$ et $\Im m\, f$ possèdent la propriété de moyenne sur U.

Corollaire 3.7 (Principe du maximum généralisé). *(i) Une fonction possédant la propriété de moyenne sur un domaine y satisfait au principe du maximum, i.e. f est constante au voisinage de tout point où elle possède un maximum local.*

(ii) Si U est un domaine borné de $\mathbb{C}$ et si $f \in \mathcal{C}(\overline{U})$ est une fonction possédant la propriété de moyenne sur U. Alors

$$|f(z)| \leqslant M := \sup_{w \in \partial U} |f(w)| \qquad (z \in U). \tag{3·5}$$

Si f n'est pas constante sur U, l'inégalité (3·5) est stricte.

Démonstration. (i) Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$, $a \in U$, et $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction possédant la propriété de moyenne. Montrons que, si $|f(a)|$ est un maximum local, alors f est constante sur un voisinage de a. Si $f(a) = 0$, il n'y a rien à démontrer. Dans le cas contraire, on peut supposer $f(a) > 0$, quitte à multiplier f par $\mathrm{e}^{-i \arg f(a)}$. Soit $r > 0$ tel que $\overline{D(a;r)} \subset U$. Il découle de (3·4) que

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + r\mathrm{e}^{it})\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Re e\, f(a + r\mathrm{e}^{it})\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a + r\mathrm{e}^{it})|\,\mathrm{d}t \leqslant f(a).$$

Ainsi

$$\int_0^{2\pi} \big\{f(a) - \Re e\, f(a + r\mathrm{e}^{it})\big\}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \big\{f(a) - |f(a + r\mathrm{e}^{it})|\big\}\,\mathrm{d}t = 0.$$

Comme les intégrandes sont $\geqslant 0$, il sont identiquement nuls. Cela implique que $|f|$ et $\Re e\, f$ sont constantes au voisinage de a. Il s'ensuit que $f(z) = \Re e\, f(z) = f(a)$ pour $|z - a| \leqslant r$.

(ii) Soit $M_0 := \sup_{z \in \overline{U}} |f(z)|$. S'il existe $a \in U$ tel que $|f(a)| = M_0$, alors f est constante au voisinage de a et, comme U est connexe, f est constante sur U : en effet, le fermé non vide $E := \{z \in U : f(z) = f(a)\}$ est ouvert d'après l'assertion (i). Il s'ensuit que $M_0 = M$. S'il n'existe pas un tel a, alors M_0 est atteint sur le bord ∂U, et l'on a bien (3·5). □

Remarques. (i) On peut en fait établir que si f vérifie la propriété de moyenne sur un domaine U et possède un maximum local en un point de U, alors f est constante sur U. Nous ne prouverons ici pas cette assertion, dont la démonstration nécessite certains résultats de la théorie des fonctions harmoniques.

(ii) Il découle immédiatement du Corollaire 3.7 que si $f \in \mathcal{H}\big(D(0;R)\big)$, alors $M(r) := \sup_{|z|=r} |f(z)|$ est une fonction croissante sur $[0, R[$.

Corollaire 3.8. *Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{H}(U)$. Alors $f \in \mathcal{A}(U)$ et l'on a pour tout a de U et tout $r > 0$ tel que $\overline{D(a;r)} \subset U$,*

$$f(z) = \sum_{n \geqslant 0} a_n (z - a)^n \qquad (|z - a| < r)$$

avec

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w-a|=r} \frac{f(w)\,\mathrm{d}w}{(w - a)^{n+1}} \qquad (n \geqslant 0). \tag{3·6}$$

Démonstration. Soit $z \in D(a;r)$. Alors $z \in D(a;\varrho)$ avec $\varrho < r$. D'après (3·3), on a donc

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w-a|=r} \frac{f(w)}{w - z}\,\mathrm{d}w = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w-a|=r} \frac{f(w)}{w - a} \frac{\mathrm{d}w}{1 - (z - a)/(w - a)}.$$

On conclut en développant la seconde fraction en puissances de $(z-a)/(w-a) \in D(0;\varrho/r)$ et en justifiant la permutation de l'intégration et de la sommation grâce à la convergence uniforme. □

Corollaire 3.9. *Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{H}(U)$. Alors on a pour tout $a \in U$, tout $r > 0$ tel que $\overline{D(a;r)} \subset U$, et tout entier $n \geqslant 0$,*

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{|w-a|=r} \frac{f(w)\,\mathrm{d}w}{(w-a)^{n+1}}. \tag{3·7}$$

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de la formule de Taylor pour les fonctions analytiques (Corollaire II.2.6) et de la formule (3·6). □

Remarque. Une formule plus générale, étendant (3·7), est établie à l'Exercice 64

Théorème 3.10. *Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{H}(U)$. Alors $f' \in \mathcal{H}(U)$.*

Démonstration. Cela découle immédiatement du Corollaire 3.8 puisque la dérivée d'une fonction analytique est analytique (Corollaire II.2.6). □

Définition 3.11. *On dit qu'une fonction est entière si elle appartient à $\mathcal{H}(\mathbb{C})$.*

Théorème 3.12. *Toute fonction entière est développable sur $\mathbb{C}$ en une série entière de rayon de convergence infini.*

Démonstration. C'est une conséquence immédiate du Corollaire 3.8. □

Corollaire 3.13 (Inégalités de Cauchy). *Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{H}(U)$. Alors on a, pour tout $a \in U$, tout $R > 0$ tel que $\overline{D(a;R)} \subset U$, et tout entier $n \geqslant 0$,*

$$\frac{|f^{(n)}(a)|R^n}{n!} \leqslant M(R) := \max_{|z-a|=R} |f(z)|.$$

La formule de Gutzner (Exercice 49) fournit en fait un résultat légèrement plus précis. En particulier, elle implique que les inégalités de Cauchy sont strictes si f n'est pas un monôme.

4. Conséquences de l'analyticité des fonctions holomorphes

Théorème 4.1 (Théorème de l'application ouverte). *Soit U un domaine de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{H}(U)$. Alors $f(U)$ est un domaine de $\mathbb{C}$ ou un point.*

Démonstration. Comme l'image continue d'un connexe est connexe, il suffit de montrer que $f(U)$ est ouvert si f n'est pas constante. Soit $a \in U$. Nous allons montrer qu'il existe un $\delta > 0$ tel que

$$D\big(f(a);\delta\big) \subset f(U). \tag{4·1}$$

Comme a est un zéro de la fonction analytique $g(z) := f(z) - f(a)$, il existe $r > 0$ tel que $D(a;r) \subset U$ et $f(z) \neq f(a)$ pour $0 < |z-a| \leqslant r$. Soit $m := \inf_{|z-a|=r} |f(z) - f(a)|$. Si $w \in \mathbb{C} \smallsetminus f(U)$ et $|w - f(a)| < m/2$, nous déduisons des inégalités de Cauchy pour la fonction $h(z) = 1/\big\{f(z) - w\big\}$, holomorphe sur U, que l'on a

$$|h(a)| = \frac{1}{|f(a)-w|} \leqslant \sup_{|z-a|=r} \frac{1}{|f(z)-w|} \leqslant \sup_{|z-a|=r} \frac{1}{|f(z)-f(a)| - |f(a)-w|} \leqslant \frac{2}{m},$$

une contradiction. Ainsi (4·1) a bien lieu avec $\delta = m/2$. □

Le résultat suivant peut être considéré comme une réciproque du théorème de Cauchy.

Théorème 4.2 (Morera[4]). *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{C}(U)$ une fonction telle que $\int_{\partial\Delta} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$ pour tout triangle Δ contenu dans U. Alors $f \in \mathcal{H}(U)$.*

Démonstration. Il suffit de montrer que f est holomorphe sur un voisinage de tout point de U. Soient $a \in U$ et $r > 0$ tels que $D(a;r) \subset U$. Alors $\int_{\partial\Delta} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$ pour tout triangle $\Delta \subset D(a;r)$. Comme le disque est étoilé, on en déduit, d'après le Théorème 2.5, que f admet une primitive sur $D(a;r)$. Cette primitive étant indéfiniment dérivable sur $D(a;r)$ en vertu du Théorème 3.10, cela implique bien que $f \in \mathcal{H}\big(D(a;r)\big)$. □

Corollaire 4.3. *Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$, $a \in U$ et $f \in \mathcal{H}(U \smallsetminus \{a\}) \cap \mathcal{C}(U)$. Alors $f \in \mathcal{H}(U)$.*

Démonstration. D'après le Corollaire 3.2, on obtient, grâce à la continuité de f, que $\int_{\partial\Delta} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$ pour tout triangle $\Delta \subset U$. Le Théorème 4.2 permet alors de conclure. □

Théorème 4.4 (Liouville[5]). *Une fonction entière bornée est constante.*

Démonstration. Cela découle immédiatement du Théorème 3.12 et des inégalités de Cauchy. □

On peut généraliser le théorème de Liouville sous la forme suivante.

Théorème 4.5. *Une fonction entière à croissance polynomiale est un polynôme. Plus précisément, si $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ vérifie $M(R) := \sup_{|z|\leqslant R} |f(z)| \leqslant C(1 + R^\delta)$ avec $C > 0$, $\delta > 0$, alors f est un polynôme de degré $\leqslant [\delta]$.*

Démonstration. D'après le Théorème 3.12, on a $f(z) = \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ et les inégalité de Cauchy impliquent, en faisant tendre R vers l'infini, que $a_n = 0$ pour $n > \delta$.□

Théorème 4.6 (d'Alembert[6]–Gauss). *Soit P un polynôme non constant à coefficients complexes. Alors P possède au moins une racine sur $\mathbb{C}$.*

Démonstration. En effet, dans le cas contraire, $1/P(z)$ serait une fonction entière bornée.□

Remarque. Si $P(z_0) = 0$, alors $P(z) = P(z) - P(z_0) = (z - z_0)Q(z)$ où $Q \in \mathbb{C}[X]$. On déduit donc du théorème de d'Alembert–Gauss que tout polynôme de degré d possède sur $\mathbb{C}$ exactement d racines, comptées avec leur ordre de multiplicité.

Théorème 4.7 (Principe de symétrie de Schwarz[7]). *Soit U un domaine non vide de $\mathbb{C}$, symétrique par rapport à l'axe réel. On pose $U^+ := \{z \in U : \Im m\, z > 0\}$, $U_0 := U \cap \mathbb{R}$. Si $f \in \mathcal{H}(U^+) \cap \mathcal{C}(U^+ \cup U_0)$ et si $f(U_0) \subset \mathbb{R}$, alors il existe un unique prolongement holomorphe de f à U. Ce prolongement vérifie $f(\overline{z}) = \overline{f(z)}$ pour tout z de U.*

Démonstration. Montrons l'existence du prolongement, l'unicité résultant du principe du prolongement analytique. Posons pour $z \in U^- := \{z \in U : \Im m\, z < 0\}$

$$g(z) := \overline{f(\overline{z})}.$$

On vérifie immédiatement que $g \in \mathcal{H}(U^-)$ et que $g'(z) = \overline{f'(\overline{z})}$. La fonction F définie sur U par

$$F(z) := \begin{cases} f(z) & \text{si } z \in U^+ \cup U_0, \\ g(z) & \text{si } z \in U^-, \end{cases}$$

4. Giacinto Morera, 1856–1909.
5. Joseph Liouville, 1809-1882.
6. Jean le Rond d'Alembert, 1717-1783.
7. Hermann Amandus Schwarz, 1843–1921.

est donc continue sur U (puisque f est réelle sur U_0) et holomorphe sur $U^+ \cup U^-$. On montre alors par un argument analogue à celui de la preuve du Corollaire 3.2 que $\int_{\partial\Delta} F(z)\,\mathrm{d}z = 0$ pour tout triangle $\Delta \subset U$. Cela implique $F \in \mathcal{H}(U)$ d'après le théorème de Morera. □

Théorème 4.8 (Lemme de Schwarz). *Soient $R > 0$ et $f \in \mathcal{H}\big(D(0;R)\big)$. On suppose que $f(0) = 0$ et $\sup_{|z|<R} |f(z)| \leqslant M$. Alors :*

(i) $|f(z)| \leqslant M|z|/R$ pour $|z| < R$;

(ii) $|f'(0)| \leqslant M/R$;

(iii) Si $|f'(0)| = M/R$, ou si $|f(z_0)| = |z_0|M/R$ pour une valeur de $z_0 \in D(0;R) \smallsetminus \{0\}$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| = M/R$ et $f(z) = \lambda z$ pour tout z de $D(0;R)$.

Démonstration. Écrivons de développement en série entière de f dans $D := D(0;R)$, soit $f(z) = \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$. On a $a_0 = 0$, donc $f(z) = zg(z)$ où g est holomorphe. On a $|g(z)| \leqslant M/\varrho$ pour $|z| = \varrho < R$, donc, d'après le principe du maximum appliqué à g, $|g(z)| \leqslant M/\varrho$ pour $|z| \leqslant \varrho$. En faisant tendre ϱ vers R, on obtient que $|g(z)| \leqslant M/R$, d'où (i). Cela implique aussi (ii) puisque $g(0) = a_1 = f'(0)$. Pour établir (iii), nous observons que, si $|f'(0)| = M/R$ alors $|g(0)| = M/R$ et que, si $z_0 \neq 0$ est tel que $|f(z_0)| = |z_0|M/R$, alors $|g(z_0)| = M/R$. Dans les deux cas, g est constante, en vertu du principe du maximum. □

5. Le théorème général de Cauchy

Commençons par établir un lemme relatif à l'holomorphie d'une intégrale dépendant d'un paramètre.

Lemme 5.1. *Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$, γ un chemin de $\mathbb{C}$ et $g \in \mathcal{C}(U \times \gamma^*, \mathbb{C})$ une fonction dont toutes les fonctions partielles $g_w : z \mapsto g(z,w)$ sont holomorphes. Alors la fonction $h : U \to \mathbb{C}$ définie par*

$$h(z) := \int_\gamma g(z,w)\,\mathrm{d}w$$

est holomorphe.

Démonstration. D'après le théorème de Morera (Théorème 4.2), il suffit de montrer que

$$\int_{\partial\Delta} h(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

pour tout triangle $\Delta \subset U$. Or, compte tenu de l'hypothèse $g_w \in \mathcal{H}(U)$ pour tout w de γ^*, cela résulte immédiatement du théorème de Fubini. □

Le résultat suivant permet d'associer à toute fonction holomorphe une fonction g à laquelle le Lemme 5.1 est applicable.

Lemme 5.2. *Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{H}(U)$. La fonction g définie sur $U \times U$ par*

$$g(z,w) := \begin{cases} \dfrac{f(z) - f(w)}{z - w} & \text{si } z \neq w, \\ f'(z) & \text{si } z = w, \end{cases} \tag{5·1}$$

est continue sur $U \times U$.

Démonstration. Il est clair que g est continue hors de la diagonale. Lorsque (z,w) est dans un voisinage convenable de $(a,a) \in U \times U$, on a d'après la formule de Taylor–Lagrange (Exercice 44) $f(z) - f(w) = (z-w)\int_0^1 f'(w + t(z-w))\,\mathrm{d}t$, d'où

$$g(z,w) - g(a,a) = \int_0^1 \{f'(w + t(z-w)) - f'(a)\}\,\mathrm{d}t \to 0 \qquad ((z,w) \to (a,a)).$$

□

Théorème 5.3 (Formule de Cauchy). *Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$, γ un lacet de U tel que $I(\gamma) \subset U$ et $f \in \mathcal{H}(U)$. Alors on a*

$$I(z;\gamma)f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w \qquad (z \in U \smallsetminus \gamma^*). \tag{5·2}$$

Démonstration. Soit $g : U \times U \to \mathbb{C}$ la fonction définie par (5·1). D'après les Lemmes 5.2 et 5.1, la fonction $h : U \to \mathbb{C}$ définie par

$$h(z) := \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma g(z,w)\,\mathrm{d}w$$

est holomorphe sur U.

Considérons alors $V := \{z \in \mathbb{C} \smallsetminus \gamma^* : I(z;\gamma) = 0\}$ et observons d'emblée que l'hypothèse $I(\gamma) \subset U$ implique $\mathbb{C} \smallsetminus V = \gamma^* \cup I(\gamma) \subset U$, d'où $U \cup V = \mathbb{C}$. Soit alors $k : V \to \mathbb{C}$ la fonction définie par

$$k(z) := \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)\,\mathrm{d}w}{w-z}.$$

D'après le Lemme 5.1, on a $k \in \mathcal{H}(V)$. De plus, $k(z) = h(z)$ pour tout z de $U \cap V$. Cela permet donc de définir une fonction entière φ par

$$\varphi(z) = \begin{cases} h(z) & \text{si } z \in U, \\ k(z) & \text{si } z \in V. \end{cases}$$

Or, d'après le Théorème 1.11, V contient l'unique composante connexe non bornée de $\mathbb{C} \smallsetminus \gamma^*$. Comme $k(z) \to 0$ lorsque $|z| \to \infty$, la même propriété vaut pour φ, et il s'ensuit que φ est bornée. D'après le théorème de Liouville (Théorème 4.4), φ est donc constante, et en fait identiquement nulle puisque $\lim_{|z|\to\infty} |\varphi(z)| = 0$. Cela implique immédiatement le résultat annoncé. □

Théorème 5.4 (Théorème de Cauchy). *Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$, γ un lacet de U tel que $I(\gamma) \subset U$ et $f \in \mathcal{H}(U)$. Alors*

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0. \tag{5·3}$$

Démonstration. Soit $a \in U$. En appliquant la formule de Cauchy à $h(z) = (z-a)f(z)$, qui vérifie évidemment $h(a) = 0$, on obtient immédiatement (5·3). □

En employant la méthode de l'Exercice 64, on peut généraliser la formule de Cauchy (5·2) sous la forme

$$I(z;\gamma)\frac{f^{(n)}(z)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)\,\mathrm{d}w}{(w-z)^{n+1}} \tag{5·4}$$

lorsque U est un ouvert quelconque, $f \in \mathcal{H}(U)$ et γ un lacet de U tel que $I(\gamma) \subset U$.

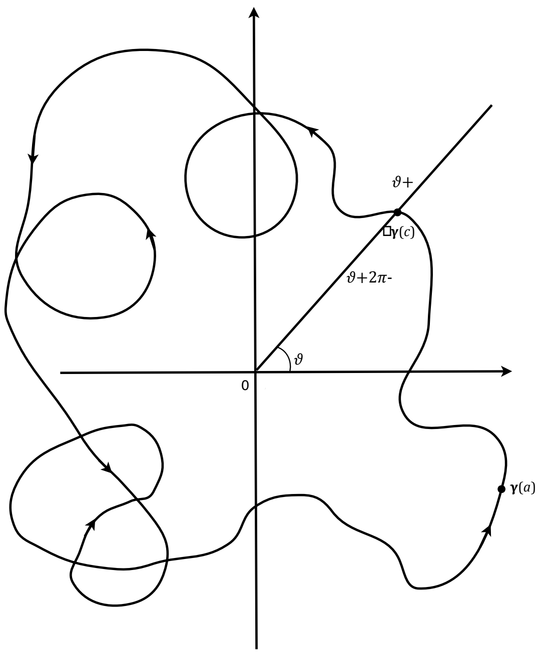
L'emploi de la formule de Cauchy nécessite une méthode de calcul de l'indice. Le résultat suivant suffit pour la plupart des situations apparaissant dans la pratique. Un résultat plus général est cependant établi dans le problème énoncé p. 104.

Proposition 5.5. *Soient $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ un lacet de $\mathbb{C}$ et $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$ un nombre complexe tel que, pour un nombre $\vartheta \in [0, 2\pi[$ convenable, la demi-droite $\{z_0 + re^{i\vartheta} : r \geqslant 0\}$ rencontre γ en un seul point $w = \gamma(c)$, avec $a < c < b$. On suppose de plus que, lorsque l'argument est choisi à valeurs dans $]\vartheta, \vartheta + 2\pi[$, on a*

$$\arg\{\gamma(c+) - z_0\} = \vartheta, \quad \arg\{\gamma(c-) - z_0\} = \vartheta + 2\pi.$$

Alors $I(z_0; \gamma) = 1$.

Démonstration. On peut supposer sans perte de généralité que $z_0 = 0$.



Soit alors $\gamma_1 : [c, b + c - a]$ le lacet défini par

$$\gamma_1(t) := \begin{cases} \gamma(t) & \text{si } c \leqslant t \leqslant b, \\ \gamma(t - b + a) & \text{si } b \leqslant t \leqslant b + c - a. \end{cases}$$

On a $\gamma_1^* = \gamma^*$ et, puisque le changement de paramètre est croissant,

$$I(0;\gamma) = I(0;\gamma_1) = \frac{1}{2\pi i} \int_c^{b+c-a} \frac{\gamma_1'(t)\,\mathrm{d}t}{\gamma_1(t)} = \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{1}{2\pi i} \int_{c+\varepsilon}^{b+c-a-\varepsilon} \frac{\gamma_1'(t)\,\mathrm{d}t}{\gamma_1(t)}.$$

Or cette dernière intégrale peut être évaluée en utilisant la détermination du logarithme associée à la définition de l'argument donnée dans l'énoncé. Elle vaut donc

$$\frac{\log \gamma_1(b + c - a - 0) - \log \gamma_1(c + 0)}{2\pi i} = 1.$$

□

6. Simple connexité

L'hypothèse $I(\gamma) \subset U$ apparaissant dans le théorème de Cauchy signifie que γ n'entoure aucun point de $\mathbb{C} \smallsetminus U$, autrement dit que γ n'entoure aucun « trou » de U. La définition suivante, qui correspond intuitivement à la notion de domaine sans trou, fournit une classe de domaines où le théorème de Cauchy s'applique sans condition sur le lacet γ.

Définition 6.1. *On dit qu'un ouvert U de $\mathbb{C}$ est simplement connexe s'il est connexe et si $I(\gamma) \subset U$ pour tout lacet γ de U, autrement dit si $I(z;\gamma) = 0$ pour tout z de $\mathbb{C} \smallsetminus U$ et tout lacet γ de U.*

Remarque. Il est immédiat d'après le Théorème 1.11 qu'une condition suffisante pour qu'un ouvert U soit simplement connexe est que $\mathbb{C} \smallsetminus U$ ne possède aucune composante connexe bornée. On peut montrer que la réciproque est vraie, mais nous n'utiliserons pas ce résultat dans ce cours.

Il est immédiat qu'une couronne $\{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\}$ n'est pas simplement connexe : $I(0;\gamma) = 1$ pour tout cercle $|z| = \varrho$ avec $r < \varrho < R$. Le résultat suivant fournit une condition suffisante pratique.

Théorème 6.2. *Un domaine étoilé est simplement connexe. En particulier, un ouvert convexe est simplement connexe.*

Démonstration. Supposons que U est un domaine étoilé par rapport à $z_0 \in U$ et que $z \in \mathbb{C} \smallsetminus U$. Soit $\gamma : [a,b] \to U$ un lacet de U. Pour tout t de $[a,b]$ et tout $s \in [0,1]$, le point $\gamma_s(t) := z_0 + s\{\gamma(t) - z_0\}$ est dans U, donc γ_s est un lacet de U. L'indice $I(z;\gamma_s)$ est à valeurs entières et dépend continûment de s. Il est donc constant sur $[0,1]$. Comme $I(z;\gamma_s)$ tend vers 0 avec s, on en déduit que $I(z;\gamma) = 0$. □

Exemples. (i) L'ouvert $\mathbb{C} \smallsetminus \mathbb{R}$ possède deux composantes connexes, toutes deux non bornées. Bien que n'ayant aucune composante bornée, il n'est donc pas simplement connexe car un ouvert simplement connexe doit être un domaine.

(ii) Le plan privé d'une demi-droite est simplement connexe car il est étoilé : par exemple, $\mathbb{C} \smallsetminus \mathbb{R}^-$ est étoilé par rapport à 1.

(iii) Une bande $\{z \in \mathbb{C} : |\Im m\, z| < \alpha\}$ est simplement connexe car convexe. Il est à noter que le complémentaire n'est pas connexe, mais que ses deux composantes connexes sont non bornées.

Théorème 6.3. *Soit U un domaine de $\mathbb{C}$. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) U est simplement connexe.

(ii) Toute fonction holomorphe sur U satisfait à la formule de Cauchy (5·2).

(iii) Pour toute fonction holomorphe sur U et tout lacet γ de U, on a $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$.

(iv) Toute fonction holomorphe sur U possède une primitive.

(v) Pour toute fonction f de $\mathcal{H}(U, \mathbb{C}^*)$, il existe une détermination de $\log f$ sur U.

(vi) Pour tout entier $n \geqslant 1$ et toute fonction f de $\mathcal{H}(U, \mathbb{C}^*)$, il existe une détermination de $f^{1/n}$ sur U.

(vii) Pour toute fonction f de $\mathcal{H}(U, \mathbb{C}^*)$, il existe une détermination de $\sqrt{f}$ sur U.

Démonstration. (i) ⇒ (ii) est une conséquence immédiate du Théorème 5.3 puisque la condition $I(\gamma) \subset U$ est réalisée pour tout lacet de U.

(ii) ⇒ (iii) : il suffit d'appliquer la formule de Cauchy au point a pour la fonction $h(z) = (z - a)f(z)$, qui est nulle en a.

(iii) ⇒ (iv) : nous avons vu au Théorème 2.5 que (iii) et (iv) sont équivalentes non seulement pour les fonctions holomorphes mais aussi pour les fonctions continues.

(iv) ⇒ (v) : comme f ne s'annule pas, $f'/f \in \mathcal{H}(U)$, donc possède une primitive d'après l'assertion (iv). D'après la Proposition 2.6, cette primitive est, à une constante additive près, une détermination de $\log f$.

(v) ⇒ (vi) : c'est immédiat puisque $\exp\{(\log f)/n\}$ est une détermination de $f^{1/n}$.

(vi) $\Rightarrow$ (vii) est évident.

(vii) $\Rightarrow$ (i). Une récurrence immédiate montre que, pour tout entier $n \geqslant 1$ et pour toute fonction $f \in \mathcal{H}(U, \mathbb{C}^*)$, il existe une détermination de $f^{1/2^n}$. Soit alors $a \in \mathbb{C} \setminus U$. La fonction $(z-a)$ est holomorphe et non nulle sur U. Si f_n est une détermination holomorphe de sa racine 2^n-ième, on a $f_n^{2^n}(z) = z - a$, d'où

$$1 = 2^n f_n'(z) f_n^{2^n-1}(z) = (z-a)2^n f_n'(z)/f_n(z).$$

Cela implique, pour tout lacet γ de U,

$$I(a;\gamma) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z-a} = \frac{2^n}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f_n'(z)\,\mathrm{d}z}{f_n(z)} = 2^n I(0; f_n \circ \gamma) \in 2^n\mathbb{Z}.$$

Ainsi $I(a;\gamma)$ est divisible par 2^n pour tout entier $n \geqslant 1$, donc $I(a;\gamma) = 0$. □

Remarque. Il résulte du point (v) et de la Proposition 2.6(iii) qu'un domaine U est simplement connexe si, et seulement si, on a $0 \notin I(f(\gamma))$ pour tout lacet γ de U et toute fonction f de $\mathcal{H}(U, \mathbb{C}^*)$. On pourra vérifier, à titre d'exemple, que l'image par $z \mapsto \mathrm{e}^z$ d'un rectangle parallèle aux axes n'entoure jamais l'origine.

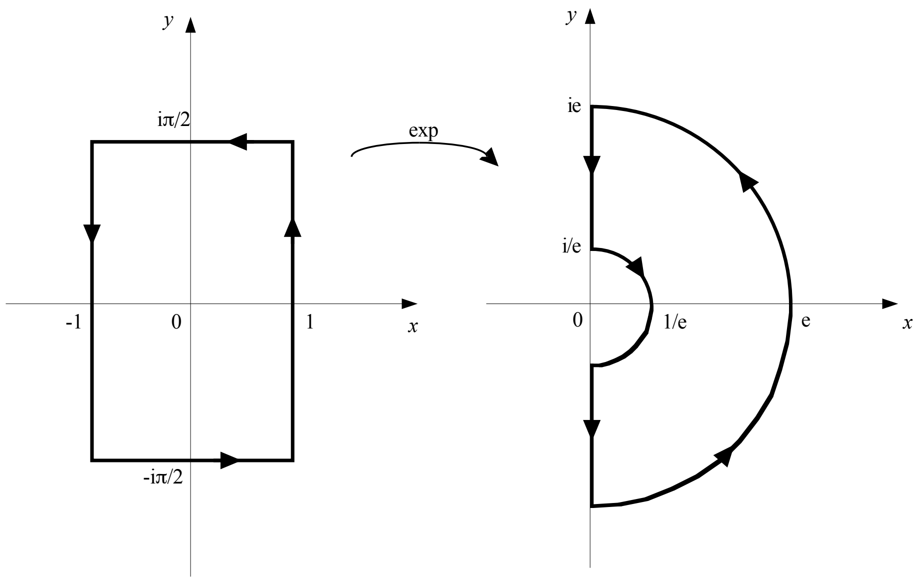


Image d'un rectangle par l'exponentielle.

Université de Lorraine
Faculté des sciences et technologies
Licence de mathématiques 2012/2013
Analyse complexe (LMI6.33)

VI

Développement de Laurent, fonctions méromorphes, théorie des résidus

1. Fonctions holomorphes dans une couronne

Nous désignons par

$$D(z_0; R_1, R_2) := \{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z - z_0| < R_2\}$$

la couronne de centre z_0 et de rayons R_1 et R_2. Lorsque $R_1 = 0$, $R_2 = R$, on dit que

$$D^*(z_0; R) := D(z_0; 0, R) = D(z_0; R) \smallsetminus \{z_0\}$$

est le disque *épointé* de centre z_0 et de rayon R.

Définition 1.1. *On appelle série de Laurent*[1] *en $z_0 \in \mathbb{C}$ la somme d'une série entière en $z - z_0$ et d'une série entière en $1/(z - z_0)$.*

Exercice. Vérifier qu'une série de Laurent converge absolument si, et seulement si, $z \in D(z_0; R_1, R_2)$ où R_2 est le rayon de convergence de la série en $(z - z_0)$ et $1/R_1$ celui de la série en $1/(z - z_0)$.

Théorème 1.2. *Soient $z_0 \in \mathbb{C}$, R_1, R_2 des nombres réels tels que $R_2 > R_1 \geqslant 0$, $D := D(z_0; R_1, R_2)$ et $f \in \mathcal{H}(D)$. Alors f est développable dans D de manière unique en une série de Laurent convergente*

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n.$$

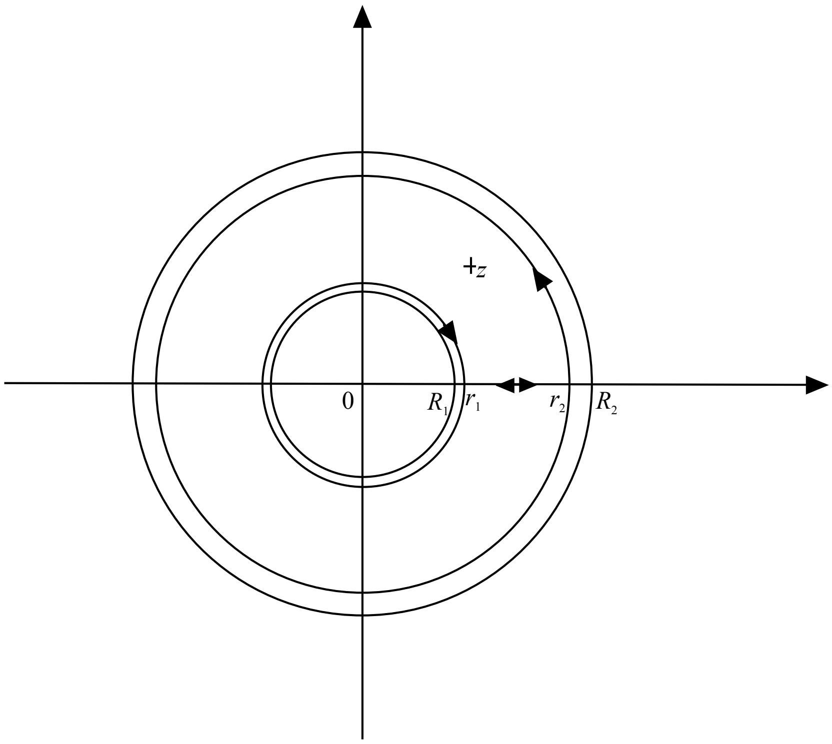
Pour tout $r \in]R_1, R_2[$, on a

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z - z_0| = r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \, \mathrm{d}z \qquad (n \in \mathbb{Z}). \tag{1·1}$$

Démonstration. Supposons sans perte de généralité que $z_0 = 0$. Soit $z \in D$. Il existe des nombres réels r_1 et r_2 tels que $R_1 < r_1 < |z| < r_2 < R_2$. On considère le lacet

$$\gamma := C(0; r_2) * [r_2, r_1] * C(0; r_1)^- * [r_1, r_2].$$

1. Pierre Alphonse Laurent, 1813–1853.



On a clairement $I(\gamma) = D(0; r_1, r_2) \smallsetminus [r_1, r_2] \subset D$, car le calcul de l'indice $I(w; \gamma)$ d'un point quelconque w peut être effectué par application du Corollaire V.1.12. D'après la formule de Cauchy, on a donc

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z} \, \mathrm{d}w \qquad (z \in D \smallsetminus \gamma^*).$$

Comme les intégrales sur $[r_1, r_2]$ et $[r_2, r_1]$ se compensent, il suit

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w|=r_2} \frac{f(w)}{w - z} \, \mathrm{d}w - \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w|=r_1} \frac{f(w)}{w - z} \, \mathrm{d}w \qquad (z \in D \smallsetminus \gamma^*),$$

et la formule est encore valable par continuité lorsque $z \in]r_1, r_2[$. Semblablement, le théorème de Cauchy appliqué à la fonction $z \mapsto f(z)/z^{n+1}$, holomorphe sur D, implique

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|w|=r_2} \frac{f(w)}{w^{n+1}} \, \mathrm{d}w - \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w|=r_1} \frac{f(w)}{w^{n+1}} \, \mathrm{d}w = 0 \qquad (n \in \mathbb{Z}),$$

donc la définition de a_n donnée dans l'énoncé est bien indépendante du rayon r du cercle d'intégration.

Pour $|w| = r_2$, $r_1 < |z| < r_2$, on a

$$\frac{1}{w - z} = \frac{1}{w(1 - z/w)} = \sum_{n \geqslant 0} \frac{z^n}{w^{n+1}},$$

donc

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|w|=r_2} \frac{f(w)}{w - z} \, \mathrm{d}w = \sum_{n \geqslant 0} a_n z^n.$$

Semblablement, on a pour $|w| = r_1$, $r_1 < |z| < r_2$,

$$\frac{1}{w-z} = \frac{-1}{z(1-w/z)} = -\sum_{n\geqslant 0} \frac{w^n}{z^{n+1}},$$

donc

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|w|=r_1} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w = -\sum_{n\leqslant -1} a_n z^n.$$

On obtient donc bien l'existence du développement de Laurent. L'unicité en résulte par intégration terme à terme puisque, d'après la formule de Cauchy,

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r} z^n\,\mathrm{d}z = \begin{cases} 1 & \text{si } n = -1, \\ 0 & \text{si } n \neq -1, \end{cases}$$

d'où, si $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n z^n$,

$$a_m = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r} \frac{f(z)}{z^{m+1}}\,\mathrm{d}z = \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r} \frac{f(z)}{z^{m-n+1}}\,\mathrm{d}z = b_m \qquad (R_1 < r < R_2,\ m \in \mathbb{Z}).$$

□

Corollaire 1.3 (Inégalités de Cauchy pour une fonction holomorphe dans une couronne). *Soient $R_2 > R_1 \geqslant 0$, $D := D(0; R_1, R_2)$ et $f \in \mathcal{H}(D)$. Si $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ désigne la suite des coefficients de la série de Laurent de f dans D, on a, pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$,*

$$|a_n| r^n \leqslant M_f(r) := \sup_{|z|=r} |f(z)| \qquad (R_1 < r < R_2). \tag{1·2}$$

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de la formule (1·1). □

Remarque. $M_f(r)$ ne coïncide pas ici, comme dans le cas des fonctions holomorphes dans un disque, avec le maximum sur le disque $|z| \leqslant r$, cette dernière quantité étant en général infinie.

2. Points singuliers isolés, fonctions méromorphes

Définition 2.1 (Point singulier). *Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{H}(U)$. On dit que $a \in \partial U$ est un point singulier de f si f ne peut être prolongée analytiquement en une fonction holomorphe sur un ouvert contenant a. Dans le cas contraire, on dit que a est un point régulier de f. On dit que a est un point singulier isolé de f s'il existe $r > 0$ tel que $D^*(a; r) \subset U$.*

Exemples. (i) Si $f(z) := 1/(1-z)$, $U := D(0; 1)$, alors 1 est un point singulier de f, et -1 est un point régulier. Sur $U := D(0; 2)$, le point 1 est singulier isolé.

(ii) 0 est un point singulier isolé de $\mathrm{e}^{1/z}$ sur $\mathbb{C}^*$.

(iii) 0 n'est un point singulier isolé de $\log z$ pour aucun ouvert U de $\mathbb{C}$ puisqu'il n'existe de détermination du logarithme sur aucun disque épointé de centre 0 (Proposition III.2.6).

(iv) 0 n'est pas un point singulier isolé de $1/\sin(1/z)$ puisque la suite de points singuliers isolés $\{1/n\pi\}_{n=1}^{\infty}$ converge vers 0.

Définition 2.2. *Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$, $a \in U$, $f \in \mathcal{H}(U \smallsetminus \{a\})$, et $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-a)^n$ le développement de Laurent de f dans un voisinage de a. Si l'ensemble $\{n \in \mathbb{Z} : a_n \neq 0\}$*

possède un plus petit élément $-m \in \mathbb{Z}^{-*}$, on dit que f possède un pôle d'ordre m en $z = a$. On dit aussi que la singularité de $f(z)$ en $z = a$ est polaire. Dans le cas contraire, on dit que f possède une singularité essentielle en $z = a$.

Lorsqu'un pôle est d'ordre 1, on dit que c'est un *pôle simple* .

Une fonction f définie sur un voisinage épointé V de a possède un pôle d'ordre m en $z = a$ si, et seulement si, on peut écrire

$$f(z) = g(z) + P\Big(\frac{1}{z-a}\Big) \qquad (z \in V)$$

où g est régulière en a et P est un polynôme de degré m. On peut toujours choisir P tel que $P(0) = 0$. On dit alors que P est la *partie polaire* de f au point a. Une autre condition nécessaire et suffisante pour que f possède un pôle d'ordre m en a est que l'on puisse écrire

$$f(z) = \frac{h(z)}{(z-a)^m} \qquad (z \in V) \tag{2·1}$$

où h est régulière en a. Exemple : $f(z) = 1/(\mathrm{e}^z - 1)$ en $z = 0$.

Dans tous les autres cas, la singularité est essentielle.

Théorème 2.3 (Riemann[2]). *Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$, $a \in U$, et $f \in \mathcal{H}(U \smallsetminus \{a\})$. Alors a est un point régulier de f si, et seulement si, $\lim_{z\to a}(z-a)f(z) = 0$. C'est en particulier le cas si f est bornée au voisinage de a.*

Démonstration. Si f est régulière en a, elle est bornée au voisinage de a, donc $(z-a)f(z)$ tend vers 0 lorsque z tend vers a.

Réciproquement, dans un voisinage épointé de a, la fonction f est représentée par son développement de Laurent

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-a)^n.$$

Si $(z-a)f(z) \to 0$ lorsque $z \to a$, l'inégalité de Cauchy (1·2) implique par passage à la limite lorsque $r \to 0$ que $a_n = 0$ pour $n < 0$ et donc que f est régulière en $z = a$. □

Ainsi, un point a au voisinage duquel $|f|$ est à croissance modérée est nécessairement un point régulier. On dit parfois que f possède une singularité éliminable en $z = a$. Exemple : $(\sin z)/z$ en $z = 0$.

Corollaire 2.4. *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$, $a \in U$, et $f \in \mathcal{H}(U \smallsetminus \{a\})$. Si a est une singularité de f, alors*

$$\limsup_{z\to a} |f(z)| = \infty. \tag{2·2}$$

Démonstration. C'est une simple reformulation du Théorème 2.3. □

Remarque. On peut en fait renforcer (2·2) en

$$\limsup_{z\to a} |(z-a)f(z)| > 0.$$

Corollaire 2.5 (Casorati[3]–Weierstrass[4]). *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$, $a \in U$, et $f \in \mathcal{H}(U \smallsetminus \{a\})$. Si a est une singularité essentielle de f, alors, pour tout $b \in \mathbb{C}$, on a*

$$\liminf_{z\to a} |f(z) - b| = 0.$$

2. Bernhard Riemann, 1826–1866
3. Felice Casorati, 1835–1900.
4. Karl Theodor Wilhelm Weierstrass, 1815–1897.

En d'autres termes, $f\big(D^*(a;r)\big)$ est dense dans $\mathbb{C}$ pour tout $r>0$ assez petit.

Démonstration. Raisonnons par l'absurde. Si $|f(z)-b| \geqslant \varepsilon > 0$ dans un voisinage de a, alors $g(z) = 1/\{f(z)-b\}$ est bornée au voisinage de a, donc $z=a$ est un point régulier de g. Si $m \geqslant 0$ est l'ordre du zéro de g en $z=a$, alors $f(z) = b + 1/g(z)$ est holomorphe ou possède une singularité d'ordre au plus m en a, ce qui contredit l'hypothèse. □

Remarque. Le théorème de Picard,(5) que nous ne démontrerons pas dans ce cours, est beaucoup plus précis : *si a est une singularité essentielle isolée de f, alors $\mathbb{C} \smallsetminus f\big(D^*(a;r)\big)$ contient au plus un point.*

Exemple. La fonction $f : z \mapsto \mathrm{e}^{1/z}$ prend toute valeur non nulle dans tout voisinage épointé de l'origine puisque $f\big(1/\{\log b + 2i\pi k\}\big) = b$ lorsque log est une détermination convenable du logarithme et $k \in \mathbb{Z}$ est de valeur absolue assez grande.

Définition 2.6 (Fonction méromorphe). *Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et A une partie discrète(6) de U. On dit qu'une fonction $f \in \mathcal{H}(U \smallsetminus A)$ est méromorphe sur U si chaque point de A est soit un point régulier, soit un pôle de f. L'ensemble des singularités de f est appelé l'ensemble polaire de f. On note $\mathcal{M}(U)$ l'espace des fonctions méromorphes sur U.*

Exemple. $z \mapsto 1/\sin(\pi z) \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ et admet $\mathbb{Z}$ pour ensemble polaire.

Il est évident que tout quotient de fonctions holomorphes sur U est une fonction méromorphe sur U. La réciproque est également vraie, autrement dit : *une fonction est méromorphe sur un ouvert de $\mathbb{C}$ si, et seulement si, elle y est égale au quotient de deux fonctions holomorphes.* Nous admettons momentanément cette assertion, en remarquant toutefois que la relation (2·1) en établit la version locale.

Proposition 2.7. *Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et f, g des fonctions méromorphes sur U. Alors, fg, $1/f$ et f' sont méromorphes sur U.*

Démonstration. Les deux premières assertions résultent immédiatement, par exemple, de la représentation (2·1). Il en va en fait de même de la troisième puisque l'on peut écrire, dans un voisinage de toute singularité a de f,

$$f'(z) = \frac{h'(z)(z-a) - mh(z)}{(z-a)^{m+1}}. \tag{2·3}$$

□

Proposition 2.8. *Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et f une fonction méromorphe sur U. Alors l'ensemble polaire de f'/f est la réunion de l'ensemble des zéros et des pôles de f. Il est constitué de pôles simples.*

Démonstration. Si a n'est ni un zéro ni un pôle de f, alors f'/f est régulière en $z=a$. Si a est un zéro ou un pôle de f, on a (2·1) au voisinage de a avec $m \in \mathbb{Z}^*$ et $h(a) \neq 0$. On déduit alors immédiatement de (2·3) que l'on a pour $r>0$ assez petit et $z \in D^*(a;r)$

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-m}{z-a} + \frac{h'(z)}{h(z)}. \tag{2·4}$$

□

Le nombre entier $-m$ de la dernière formule est un élément important de la description du comportement de la fonction méromorphe f. Cela justifie la définition suivante.

5. Émile Picard, 1856–1941.
6. C'est-à-dire dont tous les points sont isolés.

Définition 2.9. *Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{M}(U)$. On appelle ordre de f en un point a de U, et l'on note $\omega(f;a)$ la borne inférieure de l'ensemble des indices n tels que le coefficient a_n du développement de Laurent de f en a soit non nul.*

On a ainsi $\omega(f;a) < 0$ si, et seulement si, a est un pôle pour f, $\omega(f;a) \geqslant 0$ si, et seulement si, a est un point régulier de f, et $\omega(f;a) > 0$ si, et seulement si, a est un zéro de f.

3. Théorème des résidus

Définition 3.1 (Résidus). *Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$, a un point de U et $f \in \mathcal{H}(U \smallsetminus \{a\})$. On appelle résidu de f au point a et on note* $\text{Rés}(f;a)$ *le coefficient d'indice -1 dans le développement de Laurent de f en $z = a$.*

On a donc pour $r > 0$ assez petit

$$\text{Rés}(f;a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-a|=r} f(z)\,\mathrm{d}z,$$

ainsi qu'on peut le voir en intégrant terme à terme la série de Laurent — cf. Théorème 1.2, formule (1·1) avec $n = -1$. L'énoncé suivant généralise cette remarque et justifie l'intérêt de la notion de résidu.

Proposition 3.2. *Soient $a \in \mathbb{C}$, $R_2 > R_1 \geqslant 0$, $D := D(a; R_1, R_2)$, $f \in \mathcal{H}(D)$ et $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-a)^n$ le développement de Laurent de f au point a. Pour tout lacet γ de D, on a*

$$I(a;\gamma)a_{-1} = I(a;\gamma)\,\text{Rés}\,(f;a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Démonstration. La fonction définie sur D par

$$g(z) := f(z) - \frac{a_{-1}}{z-a} = \sum_{n\neq -1} a_n(z-a)^n$$

possède sur D la primitive

$$G(z) := \sum_{n\neq -1} \frac{a_n}{n+1}(z-a)^{n+1}.$$

D'après le Théorème V.2.5, son intégrale sur γ est donc nulle. □

Théorème 3.3 (Théorème des résidus). *Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$, A une partie discrète de U, $f \in \mathcal{H}(U \smallsetminus A)$ et γ un lacet de $U \smallsetminus A$ tel que $I(\gamma) \subset U$. Alors on a*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{a\in I(\gamma)\cap A} \text{Rés}(f;a)I(a;\gamma). \tag{3·1}$$

Démonstration. Montrons d'abord que la somme apparaissant au membre de droite de (3·1) est finie. Comme $I(\gamma)$ est borné (Théorème V.1.11), $\overline{I(\gamma)}$ est compact. Cela implique que $\overline{I(\gamma)} \cap A$ est un ensemble fini. Il en va donc de même de $I(\gamma) \cap A$. Pour chaque a de $I(\gamma) \cap A$, désignons par $h_a(z)$ la partie singulière du développement de Laurent de f au point a, soit

$$h_a(z) := \sum_{n\leqslant -1} a_n(z-a)^n.$$

Cette série converge pour $|z-a|$ arbitrairement petit, elle définit donc une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \smallsetminus \{a\}$. Ainsi, $h_a \in \mathcal{H}(U \smallsetminus \{a\})$ et $g := f - \sum_{a \in I(\gamma)\cap A} h_a \in \mathcal{H}(V)$ avec $V := (U \smallsetminus A) \cup \big(I(\gamma) \cap A\big)$. On a clairement $I(\gamma) \subset V$. Le théorème de Cauchy appliqué à g fournit donc

$$0 = \int_\gamma g(z)\,\mathrm{d}z = \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z - \sum_{a \in I(\gamma)\cap A} \int_\gamma h_a(z)\,\mathrm{d}z.$$

La conclusion annoncée résulte alors de la Proposition 3.2. □

Remarque. Le théorème de Cauchy et la formule de Cauchy sont des cas particuliers du théorème des résidus. On obtient le théorème de Cauchy en choisissant $A = \varnothing$, et la formule de Cauchy en appliquant, lorsque $f \in \mathcal{H}(U)$, le théorème des résidus à la fonction $f_a : z \mapsto f(z)/(z-a)$ sur l'ouvert U avec $A := \{a\}$. On a en effet $\text{Rés}(f_a; a) = f(a)$.

L'énoncé suivant explicite le calcul d'un résidu dans les cas simples.

Théorème 3.4. *Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$, a un point de U et $f \in \mathcal{H}(U \smallsetminus \{a\})$.*

(i) Si a est un pôle simple de f, on a

$$\text{Rés}(f;a) = \lim_{z\to a}(z-a)f(z). \tag{3·2}$$

En particulier si $f(z) = g(z)/h(z)$ où g et h sont holomorphes dans un voisinage de a et si a est un zéro simple de h, alors

$$\text{Rés}(f;a) = g(a)/h'(a). \tag{3·3}$$

(ii) Si l'on a $f(z) = g(z)/(z-a)^m$ sur un voisinage épointé de a où $m \in \mathbb{N}^*$ et g est holomorphe au voisinage de a et satisfait à $g(a) \neq 0$, alors

$$\text{Rés}(f;a) = \frac{g^{(m-1)}(a)}{(m-1)!}. \tag{3·4}$$

Démonstration. (i) La formule (3·2) est immédiate à partir du développement de Laurent. La formule (3·3) résulte d'un simple développement limité.

(ii) C'est une conséquence immédiate de la formule de Taylor pour g. □

Remarque. Dans le cas général, le calcul peut ne pas être très simple. La technique des développements limités est applicable. Voir par exemple l'Exercice 88

Exemples. (i) $f(z) = \mathrm{e}^z/\{z(z-1)^3\}$. On a clairement $\text{Rés}\,(f;0) = -1$. Pour calculer le résidu en 1, on pose $z = 1+u$ et on effectue un développement limité au voisinage de $u = 0$:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{\mathrm{e}^{1+u}}{(1+u)u^3} = \frac{\mathrm{e}\{1+u+\frac12 u^2 + O(u^3)\}\{1-u+u^2+O(u^3)\}}{u^3} \\ &= \frac{\mathrm{e}\{1+\frac12 u^2+O(u^3)\}}{u^3} = \frac{\mathrm{e}}{u^3} + \frac{\mathrm{e}}{2u} + O(1). \end{aligned}$$

On a donc $\text{Rés}\,(f;1) = \frac12 \mathrm{e}$.

(ii) $f(z) := \mathrm{e}^{1/z}/\{z(1-z)\}$. On a, au voisinage de $z=0$ (et en fait pour $0<|z|<1$),

$$f(z) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{z^{-n-1}}{n!} \sum_{k\geqslant 0} z^k.$$

Le terme de degré -1 vaut donc

$$\text{Rés}\,(f;0) = \sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{n!} = \mathrm{e}.$$

4. Nombre des zéros et des pôles d'une fonction méromorphe

On note $Z(f)$ l'ensemble des zéros et $P(f)$ celui des pôles d'une fonction méromorphe f.

Théorème 4.1. *Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{M}(U)$ et γ un lacet de $U \smallsetminus (Z(f) \cup P(f))$ tel que $I(\gamma) \subset U$. Alors*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z = \sum_{a\in I(\gamma)} \omega(f;a)I(a;\gamma).$$

Démonstration. C'est une conséquence immédiate du théorème des résidus, de la Proposition 2.8 et de la formule (2·4). □

En particulier, si γ est tel que $I(a;\gamma) = 0$ ou 1 pour tout a, on a

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z = I(0; f\circ\gamma) = Z_f - P_f \tag{4·1}$$

où Z_f représente le nombre des zéros, et P_f celui des pôles, de f dans $I(\gamma)$. Cette formule porte le nom de *principe de l'argument* : en effet, le membre de droite représente le quotient par 2π de la variation d'argument de $f\circ\gamma(t)$ le long de l'intervalle de définition $[a, b]$ de γ en suivant les valeurs par continuité : voir en particulier le problème p. 104. En particulier, si f est holomorphe, l'intégrale de (4·1) représente le nombre des zéros de f dans $I(\gamma)$.

Le résultat suivant, qui découle simplement du Théorème 4.1, est d'une grande utilité pratique.

Théorème 4.2 (Rouché[(7)]). *Soient U un domaine de $\mathbb{C}$, f et g deux fonctions holomorphes sur U et γ un lacet de U tel que $I(z;\gamma) = 1$ pour tout $z \in I(\gamma)$ et $I(\gamma) \subset U$. Si $|g| < |f| + |f+g|$ sur γ^*, alors f et $f+g$ ont le même nombre de zéros (comptés avec multiplicité) dans $I(\gamma)$.*

Démonstration. On a nécessairement $f \neq 0$ et $f+g \neq 0$ sur γ^*. D'après (4·1), on a donc

$$Z_{f+g} - Z_f = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma h(z)\,\mathrm{d}z \tag{4·2}$$

avec

$$h(z) := \frac{f'(z)+g'(z)}{f(z)+g(z)} - \frac{f'(z)}{f(z)}.$$

Or, la condition $|g| < |f| + |f+g|$ sur γ^* équivaut à $1 + g/f \notin \mathbb{R}^-$ sur γ^*.[(8)] La fonction $1+g/f$ possède donc un logarithme sur un voisinage ouvert de γ^*, dont la dérivée est h. D'après la Proposition V.2.2, l'intégrale de (4·2) est donc nulle. □

Exemples. (i) On peut retrouver aisément le théorème de d'Alembert–Gauss (Théorème V.4.6) à l'aide du théorème de Rouché : si $P(z) := \sum_{0\leqslant j\leqslant n} a_j z^j$ est un polynôme de degré n, alors $|P(z) - a_n z^n| < |a_n z^n|$ sur un cercle de rayon R assez grand, donc P a le même nombre de racines dans $D(0;R)$ que $a_n z^n$, c'est-à-dire n.

(ii) Considérons le polynôme $P(z) = 2z^5 - 6z^2 + z + 1$. Comme $|2z^5 + z + 1| \leqslant 4 < |6z^2|$ pour $|z| = 1$, on voit que $P(z)$ a exactement 2 racines dans le disque unité. Pour $|z| = 2$, on a $|-6z^2 + z + 1| \leqslant 27 < 64 = |2z^5|$, donc P a 5 racines dans le disque $D(0;2)$, dont 3 dans la couronne $D(0;1,2)$.

7. Eugène Rouché, 1832–1910. Le théorème de Rouché, qui date de 1862, suppose classiquement $|g| < |f|$ sur γ^*. La forme présentée ici est due à Glicksberg (1976).

8. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $|z| - 1 \leqslant |z+1|$ par l'inégalité triangulaire. L'égalité équivaut à $|z| \geqslant 1$ et $|z|^2 + 1 - 2|z| = |z|^2 + 1 + 2\Re e\, z$, d'où $\Re e\, z = -|z|$, i.e. $z \in]-\infty, -1]$.

(iii) Soient U un ouvert contenant $\overline{D}(0;1)$ et $f \in \mathcal{H}(U)$. Si $|f(z)| < 1$ pour $|z| = 1$, alors l'équation $f(z) = z$ possède exactement une racine dans le disque unité.

(iv) Soit $\lambda > 1$. Alors l'équation $z\mathrm{e}^{\lambda - z} = 1$ possède exactement une solution dans $D(0;1)$, et cette solution est réelle, dans $]0,1[$. En effet, $|\mathrm{e}^{z-\lambda}| < 1$ pour $|z|=1$, donc la solution est unique, et la conclusion résulte du fait qu'il existe, en vertu du théorème des valeurs intermédiaires, une solution réelle positive.

Théorème 4.3 (Lagrange,[9] 1770). *Si f est holomorphe dans un voisinage de l'origine et $f(0) \neq 0$, alors l'équation $vf(z) = z$ possède, pour $|v|$ et r assez petits, une unique solution $z = z(v)$ dans $D(0;r)$ et l'on a*

$$z(v) = \sum_{n \geqslant 1} a_n v^n$$

avec

$$a_n := \frac{1}{n!}\left[\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}} f(z)^n\right]_{z=0} \qquad (n \geqslant 1).$$

Démonstration. Il existe $r > 0$ tel que $|f(z)| < 2|f(0)|$ pour $|z| \leqslant r$, d'où $|z| > |vf(z)|$ pour $|z| = r$ et $|v| < r/\{2|f(0)|\}$. Le théorème de Rouché implique donc que z et $z - vf(z)$ ont le même nombre de zéros dans $D(0;r)$. Si $Z := z(v)$ est l'unique solution de l'équation $z - vf(z) = 0$, on a $z - vf(z) = (z - Z)g(z)$ avec $g(Z) = 1 - vf'(Z)$. La formule de Cauchy implique donc

$$\begin{aligned} Z = z(v) &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r} \frac{1 - vf'(z)}{z - vf(z)} z \,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r} (1 - vf'(z)\sum_{n \geqslant 0} \frac{v^n f(z)^n}{z^n}\,\mathrm{d}z \\ &= \sum_{n \geqslant 0} a_n v^n. \end{aligned}$$

avec

$$a_0 := \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r} \mathrm{d}z = 0, \qquad a_n := \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r} \left\{\frac{f(z)^n}{z^n} - f'(z)\frac{f(z)^{n-1}}{z^{n-1}}\right\}\mathrm{d}z \quad (n \geqslant 1).$$

D'après la formule de Cauchy pour la dérivée n-ième (Corollaire V.3.9), cela implique la formule annoncée pour $n = 1$ et, pour $n \geqslant 2$,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{(n-1)!}\left[\frac{\mathrm{d}^{n-1} f^n(z)}{\mathrm{d}z^{n-1}}\right]_{z=0} - \frac{1}{(n-2)!}\left[\frac{\mathrm{d}^{n-2} f'(z) f^{n-1}(z)}{\mathrm{d}z^{n-2}}\right]_{z=0} \\ &= \frac{1}{(n-1)!}\left[\frac{\mathrm{d}^{n-1} f^n(z)}{\mathrm{d}z^{n-1}}\right]_{z=0} - \frac{1}{n(n-2)!}\left[\frac{\mathrm{d}^{n-1} f^n(z)}{\mathrm{d}z^{n-1}}\right]_{z=0} \\ &= \frac{1}{n!}\left[\frac{\mathrm{d}^{n-1} f^n(z)}{\mathrm{d}z^{n-1}}\right]_{z=0}. \end{aligned}$$

□

On peut ainsi développer, lorsque $t \to \infty$, en série entière en $1/t$ la solution tendant vers 0 de l'équation $P(z) = tz$ où P est un polynôme donné.

Exemple. Si $z^2 + 1 = tz$ et $z \to \infty$ avec t, alors

$$z = \tfrac{1}{2}\big(t - \sqrt{t^2 - 4}\big) = t - \tfrac{1}{2}t\sum_{n \geqslant 1}(-1)^n \binom{1/2}{n}\Big(\frac{2}{t}\Big)^{2n} = \tfrac{1}{2}\sum_{n \geqslant 2}\binom{2n}{n}\frac{1}{(2n-1)t^{2n-1}}.$$

Pour le développement de la plus grande racine, voir l'Exercice 94

9. Joseph Louis Lagrange, 1736–1813.

5. Calcul d'intégrales par la méthode des résidus

5·1. Principe général

La théorie des résidus permet de calculer un certain nombre d'intégrales réelles, du type

$$\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$$

où I est un intervalle borné ou non. L'idée générale consiste à réaliser I comme une réunion d'une famille croissante de segments J dépendant d'un ou plusieurs paramètres et qui sont des parties de lacets sur lesquels l'intégrale de $f(z)$ peut être calculée par le théorème des résidus et tels que les contributions complémentaires peuvent être soit calculées exactement, soit évaluées asymptotiquement.

Le lemme suivant sera souvent utile.

Lemme 5.1 (Règle $\boldsymbol{zf(z)}$). *Soient ϑ_1, ϑ_2, R_0 des nombres réels tels que $\vartheta_1 < \vartheta_2$, $R_0 > 0$, et*

$$S_1 := S_1(\vartheta_1, \vartheta_2; R_0) := \{z \in \mathbb{C} : \vartheta_1 \leqslant \arg z \leqslant \vartheta_2,\ |z| \geqslant R_0\},$$
$$S_2 := S_2(\vartheta_1, \vartheta_2; R_0) := \{z \in \mathbb{C} : \vartheta_1 \leqslant \arg z \leqslant \vartheta_2,\ |z| \leqslant R_0\}.$$

Pour $(j = 1, 2)$, on désigne par f une fonction intégrable définie sur $S_j(\vartheta_1, \vartheta_2, R_0)$ et l'on pose $\gamma_{j,R} := S_j \cap C(0; R)$ $(R > 0)$.

(i) Si $\lim\limits_{\substack{|z|\to\infty \\ z\in S_1}} zf(z) = 0$, *alors* $\lim\limits_{R\to\infty} \displaystyle\int_{\gamma_{1,R}} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$.

(ii) Si $\lim\limits_{\substack{z\to 0 \\ z\in S_2}} zf(z) = 0$, *alors* $\lim\limits_{R\to 0} \displaystyle\int_{\gamma_{2,R}} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$.

Démonstration. Soit $M_j(R) := \sup_{z\in\gamma_{j,R}} |f(z)|$. Alors, dans le cas (i) $RM_1(R)$ tend vers 0 lorsque $R \to \infty$ et, dans le cas (ii), $RM_2(R) \to 0$ lorsque $R \to 0$. On conclut en remarquant que les intégrales sont majorées respectivement par $(\vartheta_2 - \vartheta_1)RM_1(R)$ et $(\vartheta_2 - \vartheta_1)RM_2(R)$. □

5·2. Intégrales de fractions rationnelles en sinus et cosinus

Théorème 5.2. *Soit $R(x, y) := P(x, y)/Q(x, y)$ une fraction rationnelle en deux variables, telle que $Q(x, y)$ ne s'annule pas sur le cercle unité $x^2 + y^2 = 1$. Alors*

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\vartheta, \sin\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta = 2\pi i \sum_{w\in D(0;1)} \text{Rés}\,(h; w)$$

où h est la fonction méromorphe définie par

$$h(z) := \frac{1}{iz} R\big(\tfrac{1}{2}(z + 1/z), \tfrac{1}{2i}(z - 1/z)\big).$$

Démonstration. En paramétrant le cercle unité, on a bien

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\vartheta, \sin\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta = \oint_{|z|=1} h(z)\,\mathrm{d}z.$$

La formule annoncée découle donc immédiatement du théorème des résidus. □

Exemple. Calculons $I(a) := \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\vartheta/\{a+\cos\vartheta\}$ pour $a>1$. On a

$$h(z) = \frac{1}{iz}\frac{1}{a+\frac{1}{2}(z+1/z)} = \frac{-2i}{z^2+2az+1}.$$

Le seul pôle dans $D(0;1)$ est donc $b := -a+\sqrt{a^2-1}$, de résidu $-i/(b+a) = -i/\sqrt{a^2-1}$. Il suit

$$I(a) = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}.$$

5·3. Intégrales impropres relatives à des fractions rationnelles

Désignons par

$$H := \{z \in \mathbb{C} : \Im m\, z > 0\}$$

le demi-plan supérieur.

Théorème 5.3. *Soient P et Q des polynômes à coefficients complexes tels que $\deg Q \geqslant \deg P + 2$ et $Q(x) \neq 0$ pour $x \in \mathbb{R}$. Alors on a*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{w\in H} \text{Rés}\,(P/Q; w)\,.$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème des résidus au contour dont le support géométrique est le bord du demi-disque $D(0;R)\cap H$ et de faire tendre R vers l'infini. Le résultat découle du Lemme 5.1. □

Exemple. Soit à calculer l'intégrale

$$I := \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^6}.$$

Les pôles de $f(z) := 1/(1+z^6)$ dans H sont $z_1 := \mathrm{e}^{i\pi/6}$, $z_2 := i$, et $z_3 := \mathrm{e}^{5i\pi/6}$, de résidus $1/(6z_j^5) = -\frac{1}{6}z_j$ $(1 \leqslant j \leqslant 3)$. Il suit

$$I = \tfrac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^6} = -\tfrac{1}{6}i\pi\big\{z_1+z_2+z_3\big\} = \tfrac{1}{6}\pi\big\{1+2\sin(\pi/6)\big\} = \tfrac{1}{3}\pi.$$

Introduisons la notation

$$\int_\gamma |f(z)|\,|\mathrm{d}z| := \int_a^b |f\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t$$

lorsque $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ est un chemin de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux et $f \in \mathcal{C}(\gamma^*;\mathbb{C})$. Il est clair que l'on a

$$\Big|\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\Big| \leqslant \int_\gamma |f(z)|\,|\mathrm{d}z|. \tag{5·1}$$

Le lemme suivant sera utile.

Lemme 5.4 (Jordan[10]). *Soit $\gamma_R := C(0;R)\cap H$. Pour $a>0$, $R>0$, on a*

$$\int_{\gamma_R} \big|\mathrm{e}^{iaz}\big|\,|\mathrm{d}z| < \pi/a.$$

10. Camille Jordan, 1838–1922.

Démonstration. On a

$$\int_{\gamma_R} \left|\mathrm{e}^{iaz}\right| |\mathrm{d}z| = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-aR\sin\vartheta} R\,\mathrm{d}\vartheta = 2R\int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{-aR\sin\vartheta}\,\mathrm{d}\vartheta.$$

Il suffit donc d'employer la minoration bien connue $\sin\vartheta \geqslant 2\vartheta/\pi$ pour $0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi/2$. □

Théorème 5.5. *Soient P et Q des polynômes à coefficients complexes tels que $\deg Q \geqslant \deg P + 1$ et $Q(x) \neq 0$ pour $x \in \mathbb{R}$. Alors, pour tout $a > 0$, on a*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \mathrm{e}^{iax}\,\mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{w\in H} \text{Rés}\,(f;w)\,,$$

où f est la fonction méromorphe définie par $f(z) := \mathrm{e}^{iaz}P(z)/Q(z)$.

Démonstration. La convergence est assurée grâce à une intégration par parties puisque l'exponentielle a une primitive bornée et la fraction rationnelle une dérivée majorée en $O(1/x^2)$ à l'infini. Le résultat indiqué découle alors du théorème des résidus appliqué au bord du demi-disque $D(0;R)$, le lemme de Jordan permettant de majorer la contribution de l'arc de cercle. □

Exemples. (a) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2\mathrm{e}}$.

En effet, en posant $f(z) := \mathrm{e}^{iz}/(1+z^2)$, on déduit du théorème précédent que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi i\,\text{Rés}\,(f;i) = \pi/\mathrm{e},$$

d'où le résultat en prenant la partie réelle.

(b) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x\sin x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2\mathrm{e}}$. Même raisonnement, appliqué à $f(z) := \mathrm{e}^{iz}z/(1+z^2)$.

Nous présentons à l'Exercice 103 une variation de la technique permettant de traiter le cas où la fraction rationnelle possède un pôle réel compensé par un zéro du numérateur.

5·4. *Intégrales impropres relatives à des fonctions multiformes*

Théorème 5.6. *Soient P et Q des polynômes à coefficients complexes tels que $\deg Q \geqslant \deg P + 2$ et $Q(x) \neq 0$ pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$ et $Q(0) \neq 0$ ou $Q'(0) \neq 0$. Alors, pour tout $\alpha \in]0,1[$, on a*

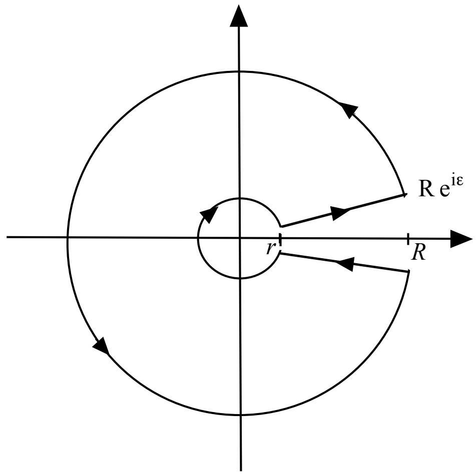
$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha}P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{-\pi\mathrm{e}^{-i\pi\alpha}}{\sin(\pi\alpha)} \sum_{w\in\mathbb{C}\smallsetminus\mathbb{R}^+} \text{Rés}\,(f;w)\,,$$

où f est la fonction méromorphe définie sur $\mathbb{C}\smallsetminus\mathbb{R}^+$ par $f(z) := z^{\alpha}P(z)/Q(z)$ lorsque la détermination du logarithme est choisie de sorte que $0 < \arg z < 2\pi$.

Démonstration. La convergence de l'intégrale est immédiate. Pour $R > r > 0$, $\varepsilon > 0$, on considère le lacet

$$\gamma = \gamma(\varepsilon, r, R) := \left[r\mathrm{e}^{i\varepsilon}, R\mathrm{e}^{i\varepsilon}\right] * C(\varepsilon, R) * \left[r\mathrm{e}^{i(2\pi-\varepsilon)}, R\mathrm{e}^{i(2\pi-\varepsilon)}\right]^{-} * C(\varepsilon, r)^{-},$$

où $C(\varepsilon, \varrho)$ $(\varrho > 0)$ est l'arc de cercle $\{\varrho\mathrm{e}^{i\vartheta} : \varepsilon \leqslant \vartheta \leqslant 2\pi - \varepsilon\}$. On peut choisir r et ε assez petits et R assez grand pour que γ entoure tous les pôles de f, sauf éventuellement l'origine.



Le théorème des résidus fournit alors, avec la fonction f introduite dans l'énoncé,

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{w\in\mathbb{C}\smallsetminus\mathbb{R}^+} \text{Rés}\,(f;w)\,.$$

Lorsque $\varepsilon \to 0$, l'intégrale sur la partie rectiligne supérieure tend vers vers

$$\int_r^R \frac{x^\alpha P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x$$

alors que l'intégrale sur la partie rectiligne inférieure tend vers

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_R^r \frac{\mathrm{e}^{\alpha\{\ln x+(2\pi-\varepsilon)i\}}P\big(x\mathrm{e}^{(2\pi-\varepsilon)i}\big)}{Q\big(x\mathrm{e}^{(2\pi-\varepsilon)i}\big)}\mathrm{e}^{(2\pi-\varepsilon)i}\,\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{2\pi i\alpha}\int_r^R \frac{x^\alpha P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x.$$

On obtient donc

$$(1-\mathrm{e}^{2\pi i\alpha})\int_r^R \frac{x^\alpha P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x - \oint_{|z|=r} f(z)\,\mathrm{d}z + \oint_{|z|=R} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{w\in\mathbb{C}\smallsetminus\mathbb{R}^+} \text{Rés}\,(f;w)$$

où les intégrales sur les cercles sont définies comme les limites des intégrales sur $C(\varepsilon;\varrho)$ lorsque $\varepsilon\to 0$. Or, on a $|f(z)| = |z|^\alpha\,|P(z)/Q(z)|$ donc il existe des constantes C_1 et C_2 telles que

$$\sup_{|z|=r}|f(z)| \leqslant C_1 r^{\alpha-1} \quad (r\to 0), \qquad \sup_{|z|=R}|f(z)| \leqslant C_2 R^{\alpha-2} \qquad (R\to\infty).$$

Cela montre, grâce à la règle $zf(z)$, que les intégrales circulaires tendent vers 0 lorsque $r\to 0$ et $R\to\infty$. □

Exemple.

$$\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}\,\mathrm{d}x}{1+x} = \frac{-\pi\mathrm{e}^{-i\pi\alpha}}{\sin\pi\alpha}\,\text{Rés}\,(f;-1) = \frac{\pi}{\sin\pi\alpha}.$$

Théorème 5.7. *Soient P et Q des polynômes à coefficients complexes tels que $\deg Q \geqslant \deg P + 2$ et $Q(x)\neq 0$ pour $x\in\mathbb{R}^+$. Alors on a*

$$(5{\cdot}2) \qquad \int_0^\infty \frac{P(x)(\ln x+\pi i)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x = -\tfrac{1}{2}\sum_{w\in\mathbb{C}\smallsetminus\mathbb{R}^+} \text{Rés}\,(f;w)\,,$$

où f est la fonction méromorphe définie sur $\mathbb{C} \smallsetminus \mathbb{R}^+$ par $f(z) := (\log z)^2 P(z)/Q(z)$ lorsque la détermination du logarithme est choisie de sorte que $0 < \arg z < 2\pi$.

Démonstration. On intègre sur le même contour que dans la démonstration du Théorème 5.6. La différence des intégrales sur les parties rectilignes tendent vers

$$\int_0^\infty \frac{P(x)}{Q(x)} \big\{(\ln x)^2 - (\ln x + 2\pi i)^2\big\} \, \mathrm{d}x = -4\pi i \int_0^\infty \frac{P(x)(\ln x + \pi i)}{Q(x)} \, \mathrm{d}x.$$

On montre comme précédemment que les intégrales sur les cercles tendent encore vers 0. □

En pratique, on utilise le Théorème 5.7 pour calculer des intégrales du type

$$\int_0^\infty \frac{P(x) \ln x}{Q(x)} \, \mathrm{d}x.$$

Lorsque P et Q sont à coefficients réels, il suffit de séparer les parties réelle et imaginaire de la formule (5·2). Dans le cas général, on peut remarquer que la technique employée pour prouver le Théorème 5.7 fournit

$$\int_0^\infty \frac{P(x)}{Q(x)} \, \mathrm{d}x = - \sum_{w \in \mathbb{C} \smallsetminus \mathbb{R}^+} \text{Rés}\,(g; w)\,,$$

où g est la fonction méromorphe définie sur $\mathbb{C} \smallsetminus \mathbb{R}^+$ par $g(z) := (\log z) P(z)/Q(z)$ lorsque la détermination du logarithme est choisie de sorte que $0 < \arg z < 2\pi$.

Exemple. Soit à calculer l'intégrale

$$I := \int_0^\infty \frac{\ln x}{(1+x)^3} \, \mathrm{d}x.$$

Le résidu de $z \mapsto (\log z)^2/(1+z)^3$ en $z = -1$ est égal au coefficient de t^2 dans le développement de $\{\log(t-1)\}^2$ au voisinage de 0. Or $\log(t-1) = i\pi - t - \frac{1}{2}t^2 - \cdots$. Nous obtenons donc que le résidu cherché vaut $1 - i\pi$, d'où

$$I = -\tfrac{1}{2}.$$

Université de Lorraine
Faculté des sciences et technologies
Licence de mathématiques 2012/2013
Analyse complexe (LMI6.33)

VII

Suites, séries et produits de fonctions méromorphes

1. Suites et séries de fonctions holomorphes

La convergence uniforme garantit la conservation de la continuité, mais elle n'est en général pas réalisée dans les situations standard de l'analyse complexe. Une série entière, par exemple, converge sur le disque ouvert de convergence, mais la convergence n'y est en général pas uniforme. Rappelons la définition de la norme de la convergence uniforme sur une partie K de $\mathbb{C}$, i.e.

$$\|f\|_K := \sup_{z\in K} |f(z)|,$$

pour $f \in \mathbb{C}^K$. Nous utiliserons la notion suivante.

Définition 1.1 (Convergence uniforme sur tout compact). *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$. On dit qu'une suite $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ de fonctions complexes définies sur U converge uniformément sur tout compact de U vers une fonction $f : U \to \mathbb{C}$ si, pour tout compact $K \subset U$, la suite des restrictions $f_n|_K$ converge uniformément vers $f|_K$, autrement dit si l'on a*

$$(\forall K \subset U) \qquad \lim_{n\to\infty} \|f_n(z) - f(z)\|_K = 0.$$

Exemple. Toute série entière converge uniformément vers sa somme sur tout compact du disque ouvert de convergence.

Comme tout compact peut être recouvert par un nombre fini de disques compacts, on voit immédiatement que la notion peut être simplifiée d'un point de vue pratique.

Proposition 1.2. *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$. Une suite $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ de fonctions complexes définies sur U converge uniformément sur tout compact de U si, et seulement si, elle converge uniformément sur tout disque compact de U.*

Le théorème suivant est d'un emploi constant en analyse complexe.

Théorème 1.3 (Weierstrass). *Soit $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite de fonctions holomorphes convergeant uniformément sur tout compact d'un ouvert U vers une fonction f. Alors*

(i) $f \in \mathcal{H}(U)$.

(ii) Pour tout entier $k \geqslant 0$, $f_n^{(k)} \to f^{(k)}$ uniformément sur tout compact de U.

Démonstration. (i) Nous allons donner deux démonstrations.

Pour la première, nous utilisons le théorème de Morera (Théorème V.4.2) : on déduit en effet de l'hypothèse que $\int_{\partial\Delta} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$ pour tout triangle $\Delta \subset U$. Comme $f \in \mathcal{C}(U)$, on obtient bien $f \in \mathcal{H}(U)$.

Pour la seconde, nous employons la formule de Cauchy : pour tout $a \in U$, tout $r > 0$ tel que $\overline{D(a;r)} \subset U$ et tout $z \in D(a;r)$, on a

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w-a|=r} \frac{f_n(w)\,\mathrm{d}w}{w-z} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w-a|=r} \frac{f(w)\,\mathrm{d}w}{w-z}.$$

Cela implique immédiatement l'analyticité de f, et donc son holomorphie.

(ii) Avec les notations précédentes, on a, pour tout a de U et tout $r > 0$ tel que $D(a;r) \subset U$,

$$f_n^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \oint_{|w-a|=r} \frac{f_n(w)\,\mathrm{d}w}{(w-z)^{k+1}} \qquad (|z-a| \leqslant \tfrac{1}{2}r,\ k \geqslant 0)$$

et la relation est également valable en remplaçant f_n par f. Il s'ensuit que

$$\|f_n^{(k)} - f^{(k)}\|_{\overline{D}(a;r/2)} \leqslant \frac{2^{k+1}k!}{r^k} \|f_n - f\|_{\overline{D}(a;r)}.$$

La conclusion résulte donc de la Proposition 1.2. □

Remarques. (i) La conclusion du théorème est en défaut dans le cas des fonctions de variable réelle : si, par exemple, $f_n(x) := \sin(n^2x)/n$, alors f_n tend uniformément vers 0 sur $\mathbb{R}$ alors que $f_n'(0) \to \infty$.

(ii) Il est par ailleurs à noter que la convergence sur U tout entier ne se transmet pas aux dérivées : $\sum_{n\geqslant 1} z^n/n^2$ converge uniformément dans $D(0;1)$ mais pas la série des dérivées.

Corollaire 1.4. *Soit $\sum_{n\geqslant 0} f_n(z)$ une série de fonctions holomorphes convergeant uniformément sur tout compact d'un ouvert U. Alors la somme est dérivable à tout ordre, ses dérivées sont obtenues par dérivation terme à terme, et la convergence est uniforme sur tout compact de U.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer le Théorème 1.3 aux sommes partielles. □

2. Séries de fonctions méromorphes

Définition 2.1. *Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ une suite de fonctions méromorphes sur U. On dit que la série $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge uniformément sur tout compact de U si, pour tout compact K inclus dans U, il n'y a qu'un nombre fini de fonctions f_n possédant des pôles dans K et si la série amputée de ce nombre fini de termes converge uniformément sur K.*

Exemple. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2(z-n)}$.

Théorème 2.2. *Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ une série de fonctions méromorphes sur U convergeant uniformément sur tout compact de U vers une fonction f. Alors :*

(i) $f \in \mathcal{M}(U)$ et $P(f) \subset \cup_n P(f_n)$.

(ii) $f'(z) = \sum_{n\geqslant 0} f_n'(z)$ $(z \in U \smallsetminus \cup_n P(f_n))$ et la convergence est uniforme sur tout compact de U.

Démonstration. Soit K un compact de U et $N = N(K)$ un indice tel que $f_n \in \mathcal{H}(K)$[1] pour $n > N$. En écrivant $f = \sum_{0\leqslant n\leqslant N} f_n + \sum_{n>N} f_n$, on déduit immédiatement du Théorème 1.3 que $f \in \mathcal{M}(K)$ (avec le même sens que précédemment), que

1. C'est-à-dire que f_n est holomorphe sur un voisinage de K.

$P(f|_K) \subset \cup_{0\leqslant n\leqslant N} P(f_n|_K)$ et que, lorsque $z \notin \cup_n P(f_n)$, $f'(z)$ peut être obtenu par dérivation terme à terme. □

Le théorème suivant fournit le développement classique d'une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ en une série de fonctions méromorphes.

Théorème 2.3 (Formule d'Euler). *On a*

$$\frac{\pi^2}{(\sin \pi z)^2} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2} \qquad (z \in \mathbb{C} \smallsetminus \mathbb{Z}).$$

Démonstration. Le membre de gauche est une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ dont les pôles sont les entiers, la partie principale au point n étant $1/(n-z)^2$, puisque $1/(\sin z)^2 - 1/z^2$ est borné au voisinage de l'origine. Ainsi la fonction méromorphe

$$f(z) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2} \tag{2·1}$$

admet les mêmes pôles et les mêmes parties principales que $(\pi/\sin \pi z)^2$. Considérons alors la fonction entière

$$g(z) := \frac{\pi^2}{(\sin \pi z)^2} - f(z).$$

On a clairement $g(z+1) = g(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, donc $g(\mathbb{C}) = g(\mathcal{B})$ avec

$$\mathcal{B} := \{z \in \mathbb{C} : 0 \leqslant \Re e\, z \leqslant 1\}.$$

Or, pour $z = x+iy \in \mathcal{B}$, on a $|\sin \pi z|^2 = (\sin \pi x)^2 + (\operatorname{sh} \pi y)^2$, donc $1/\sin \pi z \to 0$ lorsque $|y| \to \infty$ et l'inégalité $1/|z-n|^2 \leqslant \{(|n|-1)^2 + y^2\}$ montre que la convergence est normale et donc que $f(z) \to 0$ lorsque $|y| \to \infty$, $z \in \mathcal{B}$. Cela implique que g est bornée dans $\mathcal{B}$, donc dans $\mathbb{C}$, donc constante d'après le théorème de Liouville, et finalement nulle puisque $g(iy) \to 0$ lorsque $y \to \infty$. □

Corollaire 2.4 (Formule de la cotangente). *On a*

$$\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n\geqslant 1} \frac{2z}{z^2-n^2} \qquad (z \in \mathbb{C} \smallsetminus \mathbb{Z}). \tag{2·2}$$

Démonstration. Remarquons d'abord que $\pi \cot \pi z$ est une primitive de $-\pi^2/(\sin \pi z)^2$ et que

$$F(z) := \frac{1}{z} + \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \Big\{\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}\Big\} = \frac{1}{z} + \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \frac{z}{n(z-n)}$$

est une primitive de $-f(z)$, lorsque f est définie par (2·1). Il s'ensuit qu'il existe une constante C telle que

$$\pi \cot \pi z - \frac{1}{z} = C + \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \frac{z}{n(z-n)} \qquad (z \in \mathbb{C} \smallsetminus \mathbb{Z}).$$

En faisant tendre z vers 0, on obtient aisément que $C = 0$. Nous laissons les détails en exercice. Nous obtenons alors la formule (2·2) en regroupant les termes d'indice n et $-n$ dans la série $F(z)$. □

Le théorème suivant montre que l'on peut toujours « reconstruire » une fonction méromorphe sur un ouvert à partir de la donnée de ses pôles et des parties principales correspondantes.

Théorème 2.5 (Mittag-Leffler[2]). *Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$, A une partie discrète de U, et, pour chaque a de A, un polynôme P_a de terme constant nul. Alors il existe une fonction méromorphe $f \in \mathcal{M}(U)$ dont A est l'ensemble des pôles et telle que, pour chaque a de A la partie singulière de f en a soit $P_a(1/(z-a))$.*

Démonstration. Comme il n'y a qu'un nombre fini de points de A dans chaque compact de U, on peut ranger les points de A en une suite $\{a_k\}_{k\geqslant 0}$ telle que $|a_k|$ soit une fonction croissante de k et $|a_k| \to \infty$ si A est infini. Posons $R_k(z) := P_{a_k}(1/(z-a_k))$. Alors R_k est holomorphe sur le disque $D(0; |a_k|/2)$. Cela implique que la série de Taylor de R_k à l'origine converge uniformément vers R_k sur ce disque et, en particulier qu'il existe un polynôme Q_k tel que $|R_k(z) - Q_k(z)| \leqslant 1/2^k$ pour $|z| \leqslant |a_k|/2$.

Montrons que la fonction

$$f(z) := R_0(z) + \sum_{k\geqslant 1} \{R_k(z) - Q_k(z)\}$$

possède les propriétés requises. Nous observons tout d'abord que cette série converge uniformément sur tout compact de U puisque le terme général est de module $\leqslant 1/2^k$ sur $D(0;R)$ dès que $R < \frac{1}{2}|a_k|$: si k_R est le plus grand des indices k tels que $|a_k| \leqslant 2R$, la série amputée des termes d'indices $\leqslant k_R$ converge donc uniformément sur $D(0;R)$. Il est par ailleurs évident que f a la partie principale prescrite en chaque point de A et n'a pas d'autre pôle sur U. □

3. Produits infinis de fonctions holomorphes

Commençons par définir la notion de produit infini d'une suite de nombres complexes.

Définition 3.1. *Soit $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ une suite complexe. On dit que le produit infini $\prod_{n\geqslant 0} a_n$ converge si la suite des produits partiels $p_n := \prod_{0\leqslant k\leqslant n} a_k$ possède une limite a non nulle. On écrit alors*

$$\prod_{n\geqslant 0} a_n = a.$$

Exemple. $\prod_{n\geqslant 2}(1 - 1/n^2) = \frac{1}{2}$. La convergence est immédiate. Pour trouver la valeur, on remarque que, si $\{b_n\}_{n=2}^{\infty}$ désigne la suite des produits partiels, alors

$$b_n = \prod_{2\leqslant k\leqslant n} \frac{(k-1)(k+1)}{k^2} = \frac{(n-1)!\frac{1}{2}(n+1)!}{(n!)^2} = \frac{n+1}{2n}.$$

Proposition 3.2. *Soit $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \in (\mathbb{C}^*)^{\mathbb{N}}$. Le produit infini $\prod_{n\geqslant 0} a_n$ converge si, et seulement si, les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

(i) $a_n \to 1$ $(n \to \infty)$;

(ii) il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que la série $\sum_{n>N} \log a_n$ converge.

Démonstration. Montrons que la condition est nécessaire. Si le produit infini converge, alors $a_n = p_n/p_{n-1} \to 1$, donc la condition (i) est réalisée. Pour n assez grand, disons $n > N$, on a donc $|a_n - 1| < 1$ et l'on peut définir $\log a_n$ en choisissant la détermination principale. Soit a la valeur du produit infini et λ une détermination du logarithme définie dans un voisinage de a. On a $\lambda(p_n) = \ln|p_n| + i\vartheta_n$ avec $\vartheta_n \to \arg a$, donc

$$\lambda(p_n) - \lambda(p_{n-1}) = \ln|p_n/p_{n-1}| + i\{\vartheta_n - \vartheta_{n-1}\} = \log a_n$$

pour n assez grand. La convergence de la suite $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ étant équivalente à celle de la série $\sum_{n\geqslant 1}\{\lambda(p_n) - \lambda(p_{n-1})\}$, il s'ensuit que la série $\sum_{n>N} \log a_n$ converge.

2. Gösta Mittag–Leffler, 1846–1927.

Réciproquement, sous la condition (ii), on peut écrire

$$p_n = \prod_{0\leqslant k\leqslant N} a_k \exp\Big\{ \sum_{N<k\leqslant n} \log a_k \Big\},$$

ce qui montre immédiatement la convergence de $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$. □

Remarque. La formule $\log \prod_{n\geqslant 0} a_n = \sum_{n\geqslant 0} \log a_n$ est en général fausse.

Définition 3.3. *Soit $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \in (\mathbb{C}^*)^{\mathbb{N}}$. On dit que le produit infini $\prod_{n\geqslant 0} a_n$ est absolument convergent s'il existe un entier N tel que la série $\sum_{n>N} \log a_n$ soit absolument convergente.*

Proposition 3.4. *(i) Un produit infini absolument convergent est convergent.*

(ii) Soit $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \in (\mathbb{C}^*)^{\mathbb{N}}$. Une condition nécessaire et suffisante pour que le produit infini $\prod_{n\geqslant 0} a_n$ soit absolument convergent est que la série $\sum_{n\geqslant 0}(1-a_n)$ soit absolument convergente.

Démonstration. La première assertion résulte immédiatement de la Proposition 3.2. Pour établir la seconde, il suffit d'observer que, si $\sum_{n\geqslant N} |\log a_n| < \infty$, alors $|1-a_n| \leqslant \frac12$ pour n assez grand, d'où

$$\tfrac12|1-a_n| \leqslant |\log a_n| \leqslant \tfrac32|1-a_n|,$$

l'encadrement étant établi grâce au développement de $\log(1+z)$ en série entière : pour $|z| \leqslant \frac12$, on a

$$|\log(1+z)-z| \leqslant \sum_{n\geqslant 2} \frac{|z|^n}{n} \leqslant |z| \sum_{n\geqslant 2} \frac{2^{1-n}}{n} = |z|\{2\ln 2 - 1\} \leqslant \tfrac12|z|. \tag{3·1}$$

□

Remarque. Le produit $\prod_n a_n$ et la série $\sum_n(1-a_n)$ peuvent être de nature différentes. Exemple $a_n = 1+(-1)^n/\sqrt{n}$: la série converge mais on déduit de la formule

$$a_n = \exp(\log a_n) = \exp\left\{ \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + O\Big(\frac{1}{n^{3/2}}\Big)\right\} \qquad (n \geqslant 2)$$

que $\prod_{n\geqslant 2} a_n$ diverge vers 0.

Définition 3.5. *Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ une suite de fonctions holomorphes définie sur U.*

On dit que le produit infini $\prod_{n\geqslant 0}\{1+u_n\}$ converge simplement sur U si, pour tout z de U, il existe au plus un nombre fini d'indices n tels que $1+u_n(z) = 0$ et si le produit infini relatif aux indices restants est convergent.

On dit que le produit infini $\prod_{n\geqslant 0}\{1+u_n\}$ converge uniformément (resp. converge normalement) sur une partie V de U si $\sup_{z\in V} |u_n(z)] \to 0$ et si le produit infini

$$\prod_{n>N} \{1+u_n(z)\}$$

converge uniformément (resp. converge normalement) sur V lorsque N est tel que $|u_n(z)| \leqslant \frac12$ pour $n > N$, $z \in V$.

Il découle immédiatement de la Proposition 3.4 que le produit infini $\prod_{n\geqslant 0}\{1+u_n\}$ converge normalement sur V si, et seulement si, il en va de même de la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$. En revanche, l'assertion correspondante n'a pas lieu pour la convergence uniforme : nous avons vu qu'elle n'a même pas lieu pour la convergence simple.

Théorème 3.6. *Soient U un domaine de $\mathbb{C}$ et $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ une suite de fonctions holomorphes sur U. Si la série $\sum_{n\geqslant 0}|u_n(z)|$ converge uniformément sur tout compact de U, alors la fonction*

$$f(z) := \prod_{n\geqslant 0}\{1+u_n(z)\}$$

est holomorphe sur U, l'ensemble de ses zéros (comptés avec multiplicité) est la réunion de ceux des facteurs du produit, et l'on a

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{n\geqslant 0}\frac{u_n'(z)}{1+u_n(z)} \qquad (z\in U \smallsetminus Z(f)),$$

la convergence de cette série de fonctions méromorphes étant uniforme sur tout compact.

Démonstration. Soit K un compact de U. Il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que $|u_n(z)|\leqslant \frac{1}{2}$ pour $n>N$ et $z\in K$. La majoration contenue dans (3·1) implique donc immédiatement la convergence absolue de la série

$$g_N(z) := \sum_{n>N}\log\{1+u_n(z)\},$$

et l'on a $g_N\in\mathcal{H}\big(\mathring{K}\big)$ d'après le théorème de Weierstrass (Théorème 1.3). Cela implique que $\exp g_N(z)$ est holomorphe sur $\mathring{K}$, et donc aussi

$$f(z) := \prod_{n\leqslant N}\{1+u_n(z)\}\mathrm{e}^{g_N(z)}.$$

Cela établit la première assertion. Le théorème de Weierstrass permettant de dériver g_N terme à terme, on obtient, pour tout compact K de U

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{n\leqslant N}\frac{u_n'(z)}{1+u_n(z)} + g_N'(z) = \sum_{n\geqslant 0}\frac{u_n'(z)}{1+u_n(z)} \qquad (z\in \mathring{K}\smallsetminus Z(f)),$$

la convergence étant uniforme. □

Remarque. On étend aisément le théorème précédent au cas de produits infinis de fonctions méromorphes : on demande alors que, pour tout compact K, seul un nombre fini de fonctions $1+u_n(z)$ possède des zéros ou des pôles dans K et que la série $\sum|u_n|$ amputée de ces termes exceptionnels converge uniformément sur K. Le produit infini définit alors une fonction méromorphe sur U et la formule de dérivation logarithmique reste valable.

Le théorème suivant fournit un exemple classique de développement en produit infini.

Théorème 3.7. *On a*

$$\sin\pi z = \pi z\prod_{n\geqslant 1}(1-z^2/n^2) \qquad (z\in\mathbb{C}). \tag{3·2}$$

Démonstration. Désignons par $f(z)$ le membre de droite de (3·2). Cette quantité est bien définie, en vertu du Théorème 3.6 car la série $\sum_{n\geqslant 1}z^2/n^2$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}$. La fonction f est donc entière et l'on a

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z} + \sum_{n\geqslant 1}\frac{2z}{z^2-n^2} = \frac{\pi}{\operatorname{tg}\pi z},$$

d'après la formule de la cotangente (Corollaire 2.4). Comme le membre de droite est égal à la dérivée logarithmique de $z \mapsto \sin \pi z$, on a $f(z) = c \sin \pi z$ pour une certaine constante complexe c. En faisant tendre z vers 0, on obtient $c = 1$. □

Le théorème suivant montre que l'on peut toujours reconstruire une fonction entière à partir de ses zéros et des multiplicités correspondantes. Établissons d'abord un lemme technique.

Lemme 3.8. *Posons* $E_p(z) := (1 - z) \exp\Big\{ \sum_{1 \leqslant j \leqslant p} z^j/j \Big\}$ $(p \in \mathbb{N}^*, z \in \mathbb{C})$. *Alors* $|1 - E_p(z)| \leqslant |z|^{p+1}$ *pour* $|z| \leqslant 1$.

Démonstration. Posons $F_p(z) := 1 - E_p(z)$. On a

$$F_p'(z) = \Big\{ 1 - (1 - z) \sum_{1 \leqslant j \leqslant p} z^{j-1} \Big\} \exp\Big\{ \sum_{1 \leqslant j \leqslant p} z^j/j \Big\} = z^p \exp\Big\{ \sum_{1 \leqslant j \leqslant p} z^j/j \Big\}.$$

Comme $F_p(0) = 0$, cela implique que F_p possède un zéro d'ordre $p + 1$ à l'origine. Or, les coefficients du développement de Taylor à l'origine de $F_p'(z)$ sont positifs ou nuls, il en va donc de même de ceux de $F_p(z)$ et donc de ceux de $G_p(z) := F_p(z)/z^{p+1}$. Il s'ensuit que, pour $|z| \leqslant 1$, on a

$$|G_p(z)| \leqslant G_p(1) = F_p(1) = 1.$$

□

Théorème 3.9 (Factorisation de Weierstrass). *Soient f une fonction entière et $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ la suite de ses zéros non nuls, comptés avec multiplicité.*[3] *Alors il existe un entier $h \in \mathbb{N}$ et une fonction entière g et une suite d'entiers positifs $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ telle que*

$$f(z) = \mathrm{e}^{g(z)} z^h \prod_{n \geqslant 0} E_{p_n}(z/z_n).$$

Démonstration. On peut supposer sans perte de généralité que $f(0) \neq 0$: dans le cas contraire, on applique le résultat à $f(z)/z^h$ où $h = \omega(f; 0)$. La série entière

$$\sum_{n \geqslant 0} (z/z_n)^{p_n+1}$$

converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}$ dès que p_n tend vers l'infini assez vite : en effet, pour chaque $R > 0$, il n'y a qu'un nombre fini $N = N_R$ d'entiers n tels que $|z_n| \leqslant 2R$, donc, lorsque $z \in D(0; R)$, on a

$$\sum_{n \geqslant 0} |R/z_n|^{p_n+1} \leqslant \sum_{0 \leqslant n \leqslant N_R} |R/z_n|^{p_n+1} + \sum_{n > N_R} 2^{-p_n-1} \leqslant \sum_{0 \leqslant n \leqslant N_R} |R/z_n|^{p_n+1} + 1$$

si, par exemple, $p_n \geqslant n - 1$ pour tout n, et

$$\sum_{n > N_R + t} |R/z_n|^{p_n+1} \leqslant 2^{-t} \qquad (t \in \mathbb{N}^*).$$

En vertu du Théorème 3.6, le produit infini

$$P(z) := \prod_{n \geqslant 0} E_{p_n}(z/z_n)$$

3. Cela signifie que chaque zéro a apparaît $\omega(f; a)$ fois dans la suite.

définit une fonction entière de z qui possède les mêmes zéros et ordres de multiplicités que f. Cela montre que f/P ne possède que des singularités éliminables et peut donc être prolongées en une fonction entière. Cette fonction est sans zéro par construction. Comme $\mathbb{C}$ est simplement connexe, on peut l'écrire sous la forme e^g où g est entière — cf. Théorème V.6.3(v). □

Corollaire 3.10. *Toute fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ est quotient de deux fonctions entières.*

Démonstration. Soient f une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$, $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ la suite de ses pôles, et $\{m_n\}_{n=0}^{\infty}$ celle des multiplicités correspondantes. Si h est le produit de Weierstrass associé à ces deux suites, alors fh est entière. □

Nous verrons à l'Exercice 110 que l'on peut aisément étendre la construction de la fonction $P(z)$ de la démonstration précédente à un ouvert quelconque pour y établir l'existence d'une fonction holomorphe dont les zéros et les multiplicités sont donnés. Cela permet d'étendre le théorème précédent au cas d'un ouvert quelconque.

4. La fonction Gamma d'Euler

4·1. Définitions

La définition originale de la fonction date de 1729, dans une lettre d'Euler à Goldbach(4) :

$$\Gamma(z) := \frac{1}{z}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1+1/n)^z}{1+z/n} \qquad (z \neq 0, -1, -2, \ldots). \tag{4·1}$$

Il est facile de voir que le produit converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{C} \smallsetminus (-\mathbb{N}^*)$ et définit donc une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$.

Euler en déduit rapidement la formule intégrale

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \qquad (\Re e\, z > 0). \tag{4·2}$$

Ici et dans la suite on définit implicitement la partie réelle et la partie imaginaire d'un nombre complexe z par

$$z = x + iy.$$

Théorème 4.1 (Euler). *Soit*

$$\Gamma_n(z) := \int_0^n \Big(1 - \frac{t}{n}\Big)^n t^{z-1}\,\mathrm{d}t \qquad (x > 0).$$

Alors on a

$$\Gamma_n(z) = \frac{n^z n!}{z(z+1)\cdots(z+n)}, \tag{4·3}$$

et

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty}\Gamma_n(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \qquad (x > 0).$$

---

4. Christian Goldbach, 1690–1764.

Démonstration. Le changement de variables $u = t/n$ permet d'écrire

$$\Gamma_n(z) = n^z \int_0^1 (1-u)^n u^{z-1}\,\mathrm{d}u.$$

On calcule ensuite l'intégrale par intégrations par parties successives :

$$\begin{aligned}\int_0^1 (1-u)^n u^{z-1}\,\mathrm{d}u &= \left[\frac{u^z(1-u)^n}{z}\right]_0^1 + \frac{n}{s}\int_0^1 (1-u)^{n-1}u^z\,\mathrm{d}u \\ &= \cdots = \frac{n!}{z(z+1)\cdots(z+n-1)}\int_0^1 u^{z+n-1}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{n!}{z(z+1)\cdots(z+n)}.\end{aligned}$$

On conclut en remarquant d'une part que

$$\Gamma_n(z) = \frac{n^z n!}{z(z+1)\cdots(z+n)} = \frac{1}{z}(1+1/n)^{-z}\prod_{1\leqslant j\leqslant n}\frac{(1+1/j)^z}{1+z/j} \to \Gamma(z) \qquad (n\to\infty),$$

et d'autre part que

$$\lim_{n\to\infty}\Gamma_n(z) = \int_0^\infty t^{z-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

Cette dernière formule, qui résulte immédiatement du théorème de Lebesgue peut également être établie élémentairement[5] et nous omettons les détails. □

Le résultat suivant montre que le prolongement méromorphe peut être retrouvé facilement en choisissant (4·2) comme définition de Γ.

Théorème 4.2 (Équation fonctionnelle). *Pour $x > 0$, on a $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.*

Démonstration. Une intégration par parties fournit immédiatement le résultat. □

Corollaire 4.3. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\Gamma(n+1) = n!$.*

La propriété suivante conduit à une autre définition de Γ. On dit qu'une fonction réelle positive est logarithmiquement convexe sur un intervalle de $\mathbb{R}$ si son logarithme est convexe.

Théorème 4.4. *La fonction Γ est logarithmiquement convexe sur $\mathbb{R}^{+*}$.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer l'inégalité de Cauchy–Schwarz

$$\Gamma'(x)^2 = \left(\int_0^\infty \mathrm{e}^{-u}(\ln u)u^{x-1}\,\mathrm{d}u\right)^2 \leqslant \Gamma(x)\Gamma''(x).$$

□

Emil Artin (1898–1962) a montré que l'équation fonctionnelle et la convexité logarithmique caractérisent Γ. Nous verrons plus loin une application remarquable de ce résultat.

5. Le point de vue historique interdit d'employer ici le théorème de Lebesgue, mais on peut cependant utiliser le fait que $(1-t/n)^n \leqslant \mathrm{e}^{-t}$ pour $0 \leqslant t \leqslant n$.

Théorème 4.5 (Artin[6]). *Soit* $\Phi :]0,\infty[\to]0,\infty[$ *une fonction dérivable telle que* $\ln \Phi$ *soit convexe et* $x\Phi(x) = \Phi(x+1)$ *pour tout* $x > 0$. *Alors on a* $\Phi(x) = \Phi(1)\Gamma(x)$ *pour tout* $x > 0$.

Démonstration. $H := \Phi/\Gamma$ est 1-périodique et $H(1) = \Phi(1)$. Comme Φ'/Φ et Γ'/Γ sont croissantes on a pour $x \geqslant 0$, $n \geqslant 1$,

$$\frac{\Phi'(n)}{\Phi(n)} - \frac{\Gamma'(n+1)}{\Gamma(n+1)} \leqslant \frac{H'(n+x)}{H(n+x)} = \frac{\Phi'(n+x)}{\Phi(n+x)} - \frac{\Gamma'(n+x)}{\Gamma(n+x)} \leqslant \frac{\Phi'(n+1)}{\Phi(n+1)} - \frac{\Gamma'(n)}{\Gamma(n)}.$$

Mais Φ et Γ vérifient toutes les deux l'équation fonctionnelle

$$\frac{f'(x+1)}{f(x+1)} = \frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{1}{x},$$

donc

$$\frac{\Phi'(n)}{\Phi(n)} - \frac{\Gamma'(n+1)}{\Gamma(n+1)} = \frac{H'(n)}{H(n)} - \frac{1}{n}, \quad \frac{\Phi'(n+1)}{\Phi(n+1)} - \frac{\Gamma'(n)}{\Gamma(n)} = \frac{H'(n)}{H(n)} + \frac{1}{n}.$$

Il s'ensuit que

$$\frac{H'(1)}{H(1)} - \frac{1}{n} = \frac{H'(n)}{H(n)} - \frac{1}{n} \leqslant \frac{H'(x)}{H(x)} \leqslant \frac{H'(n)}{H(n)} + \frac{1}{n} = \frac{H'(1)}{H(1)} + \frac{1}{n}.$$

En faisant tendre n vers l'infini, on obtient l'existence d'une constante k telle que $H'(x)/H(x) = k$ pour tout $x \geqslant 0$, d'où $H(x) = H(1)\mathrm{e}^{kx}$. Comme H est périodique, on doit avoir $k = 0$. □

Le théorème de Bohr–Mollerup, proposé à l'exercice 117, permet de se passer de l'hypothèse de dérivabilité dans le théorème d'Artin. Une autre caractérisation est établie à l'exercice 118.

4·2. Formule du produit de Weierstrass

La technique des produits de Weierstrass développée au Théorème 3.9 s'applique remarquablement bien à la fonction Gamma.

Théorème 4.6 (Weierstrass). *On a pour* $x > 0$

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z\mathrm{e}^{\gamma z} \prod_{j=1}^{\infty} \Big(1 + \frac{z}{j}\Big)\mathrm{e}^{-z/j}, \tag{4·4}$$

où γ *désigne la constante d'Euler.*

De plus, cette formule définit un prolongement analytique de $1/\Gamma(z)$ *en une fonction entière.*

Démonstration. Posons $H_n := \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} 1/j$ $(n \geqslant 1)$, de sorte que

$$H_n = \ln n + \gamma + o(1) \qquad (n \to \infty).$$

D'après (4·3), on a

$$\Gamma_n(z) = \frac{n^z}{z} \prod_{1 \leqslant j \leqslant n} \frac{\mathrm{e}^{z/j}\mathrm{e}^{-z/j}}{1 + z/j} = \frac{\mathrm{e}^{z(\ln n - H_n)}}{z} \prod_{1 \leqslant j \leqslant n} \frac{\mathrm{e}^{z/j}}{1 + z/j}.$$

---

6. Emil Artin, 1898–1962.

On en déduit le résultat indiqué en faisant $n \to \infty$ puisque le terme général du produit est $1 + O(1/j^2)$ pour chaque z fixé dans $\mathbb{C} \smallsetminus (-\mathbb{N})$. □

Corollaire 4.7. *On a* $\gamma = -\Gamma'(1)$.

Démonstration. La formule (4·4) fournit par dérivation logarithmique

$$\frac{-\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \gamma + \frac{1}{z} + \sum_{j\geqslant 1} \frac{1}{z+j} - \frac{1}{j}.$$

Pour $z = 1$ la série est télescopique et vaut -1. □

4·3. Fonction Bêta

La fonction Bêta, ou intégrale eulérienne de seconde espèce est définie par

$$B(x,y) := \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t \qquad (x > 0,\, y > 0).$$

Théorème 4.8. *On a*

$$B(x,y) = \Gamma(x)\Gamma(y)/\Gamma(x+y) \qquad (x > 0,\, y > 0). \tag{4·5}$$

Première démonstration : changement de variables.

On a

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \int_0^\infty t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \int_0^\infty u^{y-1}\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u.$$

Avec le changement de variables $u = tv$ et le théorème de Fubini, on obtient

$$\begin{aligned}
\Gamma(x)\Gamma(y) &= \int_0^\infty t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t \int_0^\infty t^y v^{y-1}\mathrm{e}^{-vt}\,\mathrm{d}v \\
&= \int_0^\infty v^{y-1}\,\mathrm{d}v \int_0^\infty t^{x+y-1}\mathrm{e}^{-(v+1)t}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty \frac{v^{y-1}}{(1+v)^{x+y}}\Gamma(x+y)\,\mathrm{d}v \\
&= \Gamma(x+y)\int_0^\infty \Big(\frac{v}{1+v}\Big)^{y-1}\Big(\frac{1}{1+v}\Big)^{x-1}\frac{\mathrm{d}v}{(1+v)^2} \\
&= \Gamma(x+y)\int_0^1 w^{y-1}(1-w)^{x-1}\,\mathrm{d}w = \Gamma(x+y)B(x,y).
\end{aligned}$$

□

Seconde démonstration : utilisation du théorème d'Artin.

Soient $y > 0$ fixé et $f(x) := \Gamma(x+y)B(x,y)/\Gamma(y)$. Nous devons donc montrer que $f(x) = \Gamma(x)$. On a $f(1) = yB(1,y) = 1$ et

$$f(x+1) = \frac{(x+y)\Gamma(x+y)}{\Gamma(y)}B(x+1,y).$$

Comme

$$\begin{aligned}
B(x+1,y) &= \int_0^1 t^x(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \Big(\frac{t}{1-t}\Big)^x(1-t)^{x+y-1}\,\mathrm{d}t \\
&= \Big[\frac{(1-t)^{x+y}}{-(x+y)}\Big(\frac{t}{1-t}\Big)^x\Big]_0^1 + \frac{x}{x+y}\int_0^1 (1-t)^{x+y}\Big(\frac{t}{1-t}\Big)^{x-1}\frac{\mathrm{d}t}{(1-t)^2} \\
&= \frac{x}{x+y}B(x,y),
\end{aligned}$$

on en déduit que

$$f(x+1) = xf(x).$$

Enfin l'inégalité de Hölder permet d'écrire, pour $1/p + 1/q = 1$,

$$B(x/p + z/q, y) = \int_0^1 t^{(x-1)/p+(z-1)/q}(1-t)^{(y-1)/p+(y-1)/q}\,\mathrm{d}t \leqslant B(x,y)^{1/p}B(z,y)^{1/q},$$

ce qui établit que $x \mapsto B(x,y)$, et donc aussi $x \mapsto f(x)$ est bien logarithmiquement convexe.

Le théorème d'Artin nous permet de déduire de ce qui précède que $f(x) = \Gamma(x)$. □

Corollaire 4.9. *On a pour $x > 0$, $y > 0$*

$$\Gamma(x)\Gamma(y)/\Gamma(x+y) = 2\int_0^{\pi/2} (\sin\vartheta)^{2x-1}(\cos\vartheta)^{2y-1}\,\mathrm{d}\vartheta.$$

En particulier $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

Démonstration. Il suffit de faire le changement de variables $t = (\sin\vartheta)^2$ dans (4·5). □

On note également que $\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^\infty t^{-1/2}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^\infty \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u$ d'où

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \sqrt{\pi}. \tag{4·6}$$

Corollaire 4.10 (Formule de Stirling[7] réelle). *On a*

$$\Gamma(x+1) \sim x^x\mathrm{e}^{-x}\sqrt{2\pi x} \qquad (x \to \infty). \tag{4·7}$$

Démonstration. Nous employons ici une méthode classique du calcul asymptotique consistant à mettre en évidence grâce à un changement de variable adéquat le domaine prépondérant d'une intégrale dépendant d'un paramètre.

La fonction $t^x\mathrm{e}^{-t}$, dont $\Gamma(x+1)$ est l'intégrale sur $\mathbb{R}$, atteint son maximum en $t = x$. Le changement de variables $t = x(1+u)$ fournit

$$\begin{aligned} \Gamma(x+1) &= \int_{-1}^\infty \{x(1+u)\}^x\mathrm{e}^{-x(1+u)}x\,\mathrm{d}u \\ &= x^{x+1}\mathrm{e}^{-x}\int_{-1}^\infty \{(1+u)\mathrm{e}^{-u}\}^x\,\mathrm{d}u \\ &= x^x\mathrm{e}^{-x}\sqrt{2x}\int_{-\sqrt{x/2}}^\infty \mathrm{e}^{-v^2h\left(v\sqrt{2/x}\right)}\,\mathrm{d}v, \end{aligned} \tag{4·8}$$

où l'on a posé $u = v\sqrt{2/x}$ et

$$h(w) := \frac{2}{w^2}\{w - \ln(1+w)\},$$

de sorte que $h(0) = 1$. Soit

$$g_x(v) := \mathbf{1}_{[-\sqrt{x/2},\infty[}(v)\mathrm{e}^{-v^2h\left(v\sqrt{2/x}\right)}.$$

7. James Stirling, 1692–1770.

On a pour tout nombre réel v fixé

$$\lim_{x\to\infty} g_x(v) = \mathrm{e}^{-v^2}.$$

De plus, en remarquant que

$$h(w) = \frac{2}{w^2}\int_0^w \frac{t\,\mathrm{d}t}{1+t} = 2\int_0^1 \frac{z\,\mathrm{d}z}{1+zw},$$

on voit que $h(w) \geqslant 1$ pour $w \leqslant 0$ et que $h(w)$ est décroissante pour $w \geqslant 0$, d'où

$$h\left(v\sqrt{2/x}\right) \geqslant h\left(v\sqrt{2}\right) \geqslant \frac{v\sqrt{2}-\ln(1+v\sqrt{2})}{v^2} \qquad (x \geqslant 1).$$

Il s'ensuit que

$$g_x(v) \leqslant \mathrm{e}^{-v^2}\mathbf{1}_{]-\infty,0[}(v) + (1+v\sqrt{2})\mathrm{e}^{-v\sqrt{2}}\mathbf{1}_{[0,\infty[}(v).$$

Cela nous permet d'appliquer le théorème de Lebesgue : on obtient

$$\lim_{x\to\infty}\int_{\mathbb{R}} g_x(v)\,\mathrm{d}v = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-v^2}\,\mathrm{d}v = \sqrt{\pi},$$

d'après (4·6). On en déduit la formule souhaitée en reportant dans (4·8). □

Corollaire 4.11 (Formule de duplication de Legendre[8]). *On a pour $x > 0$*

$$\Gamma\Big(\frac{x}{2}\Big)\Gamma\Big(\frac{x+1}{2}\Big) = \sqrt{\pi}2^{1-x}\Gamma(x).$$

Démonstration. Considérons la fonction $f(x) := 2^{x-1}\pi^{-1/2}\Gamma\big(\tfrac12 x\big)\Gamma\big(\tfrac12(x+1)\big)$. On a $f(1) = 1$ d'après (4·6) et

$$f(x+1) = 2^x\pi^{-1/2}\Gamma\big(\tfrac12(x+1)\big)\Gamma\big(\tfrac12 x+1\big) = 2^x\pi^{-1/2}\Gamma\big(\tfrac12(x+1)\big)\tfrac12 x\Gamma\big(\tfrac12 x\big) = xf(x).$$

Enfin, f est logarithmiquement convexe puisque

$$\ln f(x) = x\ln 2 - \tfrac12\ln\pi + \ln\Big\{\Gamma\big(\tfrac12(x+1)\big)\Gamma\big(\tfrac12 x+1\big)\Big\}.$$

D'après le théorème d'Artin, on a $f(x) = \Gamma(x)$. □

Une généralisation de ce résultat à $\prod_{j=0}^{n-1}\Gamma\left((x+j)/n\right)$ $(n \geqslant 2)$ est proposée à l'exercice 126.

4·4. Formule de Stirling complexe

Commençons par énoncer un cas particulier de la formule d'Euler-Maclaurin. On définit $\langle x\rangle := x - [x]$ comme la partie fractionnaire du nombre réel x et $B_1(x) := \langle x\rangle - \frac12$.

Théorème 4.12 (Formule d'Euler–Maclaurin à l'ordre 0). *Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ et $f \in \mathcal{C}^1[a,b]$. On a*

$$\sum_{a<n\leqslant b} f(n) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \tfrac12\{f(b)-f(a)\} + \int_a^b B_1(t)f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

8. Adrien-Marie Legendre, 1752–1833.

Démonstration. On a pour $a < n \leqslant b$

$$\int_{n-1}^{n} B_1(t)f'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{n-1}^{n} (t-n+\tfrac{1}{2})f'(t)\,\mathrm{d}t = \big[(t-n+\tfrac{1}{2})f(t)\big]_{n-1}^{n} - \int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t$$
$$= \tfrac{1}{2}\big\{f(n-1)+f(n)\big\} - \int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

On obtient le résultat annoncé en sommant sur n. □

Nous n'utiliserons pas la version générale de la formule d'Euler–Maclaurin. Nous nous contentons ici d'en donner un énoncé précis.

Considérons la suite $\{b_r(x)\}_{r=0}^{\infty}$ des polynômes définis sur $[0,1]$ par les conditions

$$\begin{cases} b_0(x) \equiv 1, \\ b_r'(x) \equiv r\,b_{r-1}(x) \qquad (r \geqslant 1), \\ \displaystyle\int_0^1 b_r(x)\mathrm{d}x = 0 \qquad (r \geqslant 1). \end{cases}$$

On vérifie facilement que ces hypothèses impliquent l'identité

$$\sum_{r=0}^{\infty} b_r(x)\,\frac{y^r}{r!} = \frac{y\,e^{xy}}{e^y-1}$$

qui permet de calculer les b_r. On a

$$\begin{array}{ll} b_0(x) = 1 & b_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x \\ b_1(x) = x - \frac{1}{2} & b_4(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30} \\ b_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6} & b_5(x) = x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{6}x \end{array}.$$

On définit alors la r-ième fonction de Bernoulli $B_r(x)$ comme la fonction périodique de période 1 qui coïncide avec b_r sur $[0,1[$. On pose

$$B_r := B_r(0).$$

B_r est le r-ième nombre de Bernoulli. Il est facile de voir que $B_{2r+1} = 0$ pour $r \geqslant 1$. On a les valeurs numériques

r	0	1	2	4	6	8	10
B_r	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{30}$	$\frac{1}{42}$	$-\frac{1}{30}$	$\frac{5}{66}$

Le théorème suivant est célèbre et fort utile.

Théorème 4.13 (Formule sommatoire d'Euler–Maclaurin[9]). *Pour tout entier $k \geqslant 0$ et toute fonction f de classe C^{k+1} sur $[a,b]$, $a,b \in \mathbb{Z}$, on a*

$$\sum_{a<n\leqslant b} f(n) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \sum_{r=0}^{k} \frac{(-1)^{r+1}B_{r+1}}{(r+1)!}\,(f^{(r)}(b) - f^{(r)}(a))$$
$$+ \frac{(-1)^k}{(k+1)!}\int_a^b B_{k+1}(t)\,f^{(k+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

9. Colin Maclaurin, 1698–1746.

Théorème 4.14 (Formule de Stirling complexe). *Pour tout $z \in \mathbb{C} \smallsetminus \mathbb{R}^-$, on a*

$$\log \Gamma(z) = (z - \tfrac{1}{2}) \log z - z + \tfrac{1}{2} \ln(2\pi) - \int_0^\infty \frac{B_1(t)\,\mathrm{d}t}{z+t},$$

où le logarithme complexe est pris en détermination principale.

Remarques. (i) La formule du produit de Weierstrass montre que $\Gamma(z)$ ne s'annule pas et a pour seuls pôles les entiers négatifs.

(ii) L'intégrale est $O(1/z)$. En fait, on a pour tout entier $R \geqslant 1$

$$-\int_0^\infty B_1(t) \frac{\mathrm{d}t}{z+t} = \sum_{r=1}^{R} \frac{(-1)^r B_{r+1}}{r(r+1)z^r} + \frac{(-1)^{R+1}}{R+1} \int_0^\infty \frac{B_{R+1}(t)\,\mathrm{d}t}{(t+z)^{R+1}}.$$

Démonstration. Appliquons la formule sommatoire d'Euler–Maclaurin à l'ordre 0 à la fonction $f(t) := f(t+z)$ avec $a = 0$ et $b = N$. Nous obtenons

$$\begin{aligned}\sum_{1 \leqslant n \leqslant N} \log(n+z) &= \int_0^N \log(t+z)\,\mathrm{d}t + \tfrac{1}{2}\big\{\log(N+z) - \log z\big\} + \int_0^N \frac{B_1(t)\,\mathrm{d}t}{t+z} \\ &= (z+N)\log(z+N) - (z+N) - z\log z + z + \tfrac{1}{2}\log(z+N) \\ &\quad - \tfrac{1}{2}\log z + \int_0^N \frac{B_1(t)\,\mathrm{d}t}{t+z} \\ &= (z+N+\tfrac{1}{2})\log(z+N) - N - (z+\tfrac{1}{2})\log z + \int_0^N \frac{B_1(t)\,\mathrm{d}t}{t+z}.\end{aligned}$$

Soustrayons la formule de Stirling classique pour $\ln N!$ sous la forme

$$\ln N! = (N+\tfrac{1}{2})\log N - N + \tfrac{1}{2}\log(2\pi) + o(1) \qquad (N \to \infty).$$

Nous obtenons

$$\begin{aligned}\sum_{1 \leqslant n \leqslant N} \log\Big(1+\frac{z}{n}\Big) &= (N+\tfrac{1}{2})\log\Big(1+\frac{z}{N}\Big) + z\log(z+N) - (z+\tfrac{1}{2})\log z - \tfrac{1}{2}\log(2\pi) \\ &\quad + \int_0^N \frac{B_1(t)\,\mathrm{d}t}{t+z} + o(1) \\ &= z\big(1+\log N\big) - (z+\tfrac{1}{2})\log z - \tfrac{1}{2}\log(2\pi) + \int_0^\infty \frac{B_1(t)\,\mathrm{d}t}{t+z} + o(1).\end{aligned}$$

Il suit, en posant $H_N := \sum_{1 \leqslant n \leqslant N} 1/n$, et, par exemple, pour $z \in \mathbb{R}^+$,

$$\begin{aligned}&\log\Big\{z\mathrm{e}^{\gamma z} \prod_{1 \leqslant n \leqslant N} \Big(1+\frac{z}{n}\Big)\mathrm{e}^{-z/n}\Big\} \\ &\quad = \log z + z(\gamma - H_N + 1 + \ln N) - (z+\tfrac{1}{2})\log z - \tfrac{1}{2}\ln(2\pi) + \int_0^\infty \frac{B_1(t)\,\mathrm{d}t}{t+z} + o(1) \\ &\quad = -(z-\tfrac{1}{2})\log z + z - \tfrac{1}{2}\ln(2\pi) + \int_0^\infty \frac{B_1(t)\,\mathrm{d}t}{t+z} + o(1).\end{aligned}$$

En faisant tendre $N \to \infty$, obtient bien le résultat annoncé, d'abord pour $z \in \mathbb{R}^+$, puis pour tout z par prolongement analytique. $\square$

Le résultat suivant exprime que le comportement de $\Gamma(z)$ lorsque x est fixé et $|y| \to \infty$ est très différent de celui de $\Gamma(x)$ lorsque $x \to \infty$: la fonction est très petite et très oscillante.

Corollaire 4.15 (Comportement dans les bandes verticales). *Soient x_1, x_2 des nombres réels tels que $x_1 < x_2$. On a uniformément lorsque $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$, $|y| \to \infty$,*

$$\Gamma(z) = \Big\{1 + O\Big(\frac{1}{y}\Big)\Big\}\sqrt{2\pi}|y|^{x-\frac12}\mathrm{e}^{-\pi|y|/2}\mathrm{e}^{ih_x(y)} \tag{4·9}$$

où l'on a posé $h_x(y) := y\ln|y| - y + \frac12\pi(x-\frac12)\operatorname{sgn}(y)$.

Démonstration. On a $\arg z = \operatorname{sgn}(y)\frac12\pi - x/y + O(1/y^2) \in]-\pi,\pi[$, et $\log z = \ln|z| + i\arg z$, avec

$$\ln|z| = \tfrac12\ln(x^2+y^2) = \ln|y| + O(1/y^2).$$

Une intégration par parties utilisant le fait que $\int_u^v B_1(t)\,\mathrm{d}t = O(1)$ fournit

$$\int_0^\infty \frac{B_1(t)\,\mathrm{d}t}{t+z} = O\Big(\frac{1}{|z|}\Big).$$

Il suit

$$\begin{aligned}(z-\tfrac12)\log z &= (x-\tfrac12+iy)\Big(\ln|y| + i\Big\{\tfrac12\pi\operatorname{sgn} y - \frac{x}{y}\Big\}\Big) + O\Big(\frac{1}{y^2}\Big)\\ &= (x-\tfrac12)\ln|y| - \tfrac12\pi|y| + x + ih_x(y) + O(1/y).\end{aligned}$$

□

Corollaire 4.16 (Formule d'inversion de Mellin[10]). *Pour $x > 0$, on a*

$$\mathrm{e}^{-x} = \frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty}\Gamma(z)x^{-z}\,\mathrm{d}z \qquad (x>0). \tag{4·10}$$

Démonstration. On a pour $x > 0$

$$\Gamma(x-iy) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{x-iy}\frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^u+xu}\mathrm{e}^{-iyu}\,\mathrm{d}u = \widehat{f}_x(y),$$

où $f_x(u) := \exp\{-\mathrm{e}^u + xu\}$. Le Corollaire 4.15 garantit que $\widehat{f}_x \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$,[11] donc la formule d'inversion de Fourier s'applique. On obtient

$$\begin{aligned} f_x(u) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\widehat{f}_x(y)\mathrm{e}^{iyu}\,\mathrm{d}y\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\Gamma(x-iy)\mathrm{e}^{-(x-iy)u}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\Gamma(x+iy)\mathrm{e}^{-(x+iy)u}\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

On en déduit le résultat annoncé en posant $x = \mathrm{e}^u$. □

Corollaire 4.17 (Formule des compléments). *Pour $z \in \mathbb{C}\smallsetminus\mathbb{Z}$, on a*

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}\cdot \tag{4·11}$$

10. Robert Hjalmar Mellin, 1854–1933.
11. L'hypothèse $x > 0$ est essentielle ici.

Démonstration. Considérons la fonction méromorphe

$$f(z) := \frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(1-z)\sin\pi z} = \frac{z(1-z)\mathrm{e}^{\gamma}}{\sin\pi z}\prod_{j\geqslant 1}\Big(1+\frac{1}{j}+\frac{z(1-z)}{j^2}\Big)\mathrm{e}^{-1/j},$$

où le développement résulte de la formule de Weierstrass. Tous les zéros de $\sin\pi z$ étant compensés par ceux du produit infini,(12) f est entière. De plus

$$f(z+1) = \frac{-1}{\Gamma(z+1)\Gamma(-z)\sin\pi z} = \frac{1}{\Gamma(z)(-z)\Gamma(-z)\sin\pi z} = \frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(1-z)\sin\pi z} = f(z),$$

donc f est 1-périodique. Pour $x\in[0,1]$ et $|y|\to\infty$, on a en vertu de (4·9)

$$\frac{1}{|f(z)|} \sim |y|^{x-\frac12}\mathrm{e}^{-\pi|y|/2}\sqrt{2\pi}|y|^{\frac12-x}\mathrm{e}^{-\pi|y|/2}\sqrt{2\pi}|\sin\pi z| \sim 2\pi\mathrm{e}^{-\pi|y|}|\sin\pi z|.$$

Or, $\sin\pi z = \sin\pi x\,\mathrm{ch}\,\pi y + i\,\mathrm{sh}\,\pi y\cos\pi x$, donc

$$|\sin\pi z|^2 = \sin^2\pi x\,\mathrm{ch}^2\,\pi y + \mathrm{sh}^2\,\pi y\cos^2\pi x \sim \tfrac14\mathrm{e}^{2\pi|y|}.$$

Il s'ensuit que $\lim_{|y|\to\infty}|f(z)| = 1/\pi$, donc f est bornée dans la bande verticale $0\leqslant x\leqslant 1$. Par périodicité elle est donc bornée dans $\mathbb{C}$, elle est donc constante en vertu du théorème de Liouville. Comme on a également

$$f(z) = \frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(1-z)\sin\pi z} = \frac{z}{\Gamma(1+z)\Gamma(1-z)\sin\pi z} \to \frac{1}{\pi} \qquad (z\to 0),$$

il vient

$$f(z) = 1/\pi \qquad (z\in\mathbb{C}).$$

□

Deux autres démonstrations de la formule des compléments sont proposées aux exercices 129 et 130.

Remarques. (i) Lorsqu'on déplace la droite d'intégration de (4·10) vers la gauche jusqu'à $-\infty$, l'intégrale sur la droite déplacée est

$$\ll \int_{\mathbb{R}} |z|^{x-\frac12}\mathrm{e}^{-\pi|y|/2}x^{-x}\,\mathrm{d}y.$$

Pour $|x|$ assez grand, on a $|z|/x>1$, donc le théorème de Lebesgue nous permet d'affirmer que cette intégrale tend vers 0 lorsque $x\to-\infty$. Or, on déduit de (4·11) que lorsque $z\to 0$

$$\Gamma(z-n) = \frac{\pi}{\Gamma(n+1-z)\sin\{\pi(z-n)\}} \sim \frac{(-1)^n}{n!z},$$

donc

$$\mathrm{Rés}(\Gamma;-n) = (-1)^n/n!.$$

Le théorème des résidus nous permet donc de retrouver le développement en série

$$\mathrm{e}^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^n.$$

(ii) La formule d'Euler (3·2) pour le développement en produit infini de $\sin\pi z$ est une conséquence immédiate de la formule des compléments et de celle de Weierstrass puisque

$$\begin{aligned}\frac{\sin\pi z}{\pi z} &= \frac{1}{z\Gamma(z)\Gamma(1-z)} = \frac{-1}{z^2\Gamma(z)\Gamma(-z)}\\ &= \mathrm{e}^{\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\Big(1+\frac{z}{n}\Big)\mathrm{e}^{-z/n}\mathrm{e}^{-\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\Big(1+\frac{-z}{n}\Big)\mathrm{e}^{z/n} = \prod_{n=1}^{\infty}\Big(1-\frac{z^2}{n^2}\Big).\end{aligned}$$

12. $1+1/j+z(1-z)/j^2 = (z+j)(j+1-z)/j^2$.

Université de Lorraine
Faculté des sciences et technologies
Licence de mathématiques 2012/2013
Analyse complexe (LMI6.33)

VIII

Topologie de l'espace des fonctions holomorphes, transformations holomorphes

1. Métrique de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact

Nous avons défini au chapitre précédent la notion de convergence uniforme sur tout compact d'une suite de fonctions holomorphes définies sur un ouvert du plan complexe. Nous allons à présent la replacer dans le cadre de la topologie des espaces métriques.

Soit donc U un ouvert de $\mathbb{C}$. Nous observons d'abord que, pour tout compact K de U, l'application

$$f \mapsto \|f\|_K := \sup_{z\in K} |f(z)|,$$

définie sur $\mathcal{C}(U)$, vérifie tous les axiomes d'une norme sauf l'implication

$$\|f\|_K = 0 \Rightarrow f = 0.$$

On dit que cette application est une *semi-norme*.[1] Ensuite, nous définissons une *suite exhaustive de compacts* sur U comme une suite $\{K_j\}_{j=1}^{\infty}$ de compacts de U ayant les propriétés suivantes :

(i) $K_j \subset \overset{\circ}{K}_{j+1} \quad (j \geqslant 1)$;

(ii) $\cup_{j\geqslant 1} K_j = U$.

Tout ouvert de $\mathbb{C}$ possède au moins une suite exhaustive de compacts : on peut choisir par exemple

$$K_j := \overline{D(0;j)} \cap \big\{z \in \mathbb{C} : d(z, \mathbb{C} \smallsetminus U) \geqslant 1/j\big\} \qquad (j \geqslant 1).$$

Posons alors $p_j(h) := \min\big(1, \|h\|_{K_j}\big)$ $(j \geqslant 1)$ et

$$d(f,g) := \sum_{j\geqslant 1} \frac{p_j(f-g)}{2^j} \qquad (f, g \in \mathcal{C}(U)).$$

Théorème 1.1. *L'application $(f,g) \mapsto d(f,g)$ est une distance sur $\mathcal{C}(U)$. On la désigne sous le nom de métrique de la convergence uniforme sur tout compact. Une suite $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$*

1. Lorsque K est infini, et contient donc au moins un point d'accumulation, le principe du prolongement analytique implique que $f \mapsto \|f\|_K$ est bien une norme sur $\mathcal{H}(U)$.

de $\mathcal{C}(U)$ converge uniformément sur tout compact de U vers une fonction $f \in \mathcal{C}(U)$ si, et seulement si, $\lim_{n\to\infty} d(f_n, f) = 0$.

Démonstration. Le point essentiel de la démonstration consiste à observer que tout compact K de U est inclus dans l'un des K_j : cela résulte immédiatement de la propriété de Borel–Lebesgue et de la conjonction des conditions (i) et (ii) relatives à l'exhaustivité sous la forme $U \subset \cup_{j\geqslant 1} \overset{\circ}{K}_j$. On vérifie alors aisément que d est une distance sur $\mathcal{C}(U)$ et que la convergence uniforme sur tout compact équivaut à la d-convergence. Nous laissons les détails en exercice. □

Corollaire 1.2. *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$. L'application $f \mapsto f'$ de $\mathcal{H}(U)$ dans lui-même est continue pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact.*

Démonstration. Le résultat annoncé découle immédiatement du théorème de Weierstrass (Théorème VII.1.3) puisque, dans un espace métrique, la continuité d'une application équivaut à sa continuité séquentielle. □

Corollaire 1.3. *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$. Les espaces $\mathcal{C}(U)$ et $\mathcal{H}(U)$ sont complets pour la métrique de la convergence uniforme sur tout compact.*

Démonstration. Le résultat est classique dans le cas de $\mathcal{C}(U)$. Dans celui de $\mathcal{H}(U)$, il est encore une conséquence immédiate du théorème de Weierstrass — Théorème VII.1.3(i). □

Proposition 1.4. *Soient U un domaine de $\mathbb{C}$ et $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ une suite de fonctions de $\mathcal{H}(U, \mathbb{C}^*)$ convergeant vers f sur tout compact de U. Alors, ou bien f est identiquement nulle, ou bien $f \in \mathcal{H}(U, \mathbb{C}^*)$.*

Démonstration. On a $f \in \mathcal{H}(U)$, d'après le théorème de Weierstrass. Supposons que f n'est pas identiquement nulle et qu'il existe cependant un point a de U tel que $f(a) = 0$. D'après le principe des zéros isolés (Corollaire IV.3.3), il existe un disque fermé $\overline{D(a;r)}$ dans lequel a est le seul zéro de f. Posant $\varepsilon_r := \min_{|z-a|=r} |f(z)| > 0$, on a $\sup_{|z-a|=r} |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon_r$ pour n assez grand. On déduit donc du théorème de Rouché que f_n et f ont alors le même nombre de zéros dans $D(a;r)$, ce qui implique que f_n s'annule et fournit la contradiction souhaitée. □

Corollaire 1.5. *Soient U un domaine de $\mathbb{C}$ et $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ une suite de fonctions holomorphes injectives définies sur U et convergeant vers f sur tout compact de U. Alors, ou bien f est constante, ou bien f est injective.*

Démonstration. Supposons que f n'est pas constante et montrons que si a et b sont des points distincts de U, alors $f(a) \neq f(b)$. Considérons à cette fin l'ouvert $V := U \smallsetminus \{a\}$ la suite $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ de fonctions de $\mathcal{H}(V, \mathbb{C}^*)$ définies par $g_n(z) := f_n(z) - f_n(a)$. D'après la Proposition 1.4, la fonction $z \mapsto f(z) - f(a)$, limite sur tout compact des g_n, est soit identiquement nulle soit partout non nulle sur V. Or, comme f n'est pas constante, la première éventualité est exclue. □

2. Le théorème de Montel

La notion introduite dans la définition suivante peut apparaître comme délicate pour des raisons essentiellement terminologiques.

Définition 2.1. *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$. Une partie A de $\mathcal{C}(U)$ est dite bornée si, et seulement si, pour tout compact K de U, on a $\sup_{f\in A} \|f\|_K < \infty$.*

Il est évident que $\mathcal{C}(U)$ tout entier coïncide avec sa boule unité pour la métrique de la convergence uniforme sur tout compact. La justification de l'emploi de l'adjectif « borné » dans le présent contexte trouve son origine dans la propriété suivante : une partie A d'un espace vectoriel normé est bornée si, et seulement si, pour tout voisinage V de 0 il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A \subset \lambda V$, autrement dit si A est absorbé par tout voisinage de 0. Dans le cas d'un espace vectoriel topologique, on conserve la même définition. Ainsi, dans la Définition 2.1, le sens du mot borné est celui qui correspond à la structure d'espace vectoriel topologique de $\mathcal{C}(U)$ et non à celle de l'espace métrique défini au paragraphe 1.

Proposition 2.2. *Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et A une partie bornée de $\mathcal{C}(U)$. Alors $\overline{A}$ est également bornée dans $\mathcal{C}(U)$.*

Démonstration. Comme la topologie de $\mathcal{C}(U)$ est métrisable, il existe, pour toute fonction g de $\overline{A}$, une suite $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ de fonctions de A convergeant vers g. Si $M_K := \sup_{f \in A} \|f\|_K$, on a donc trivialement $\|g\|_K \leqslant M_K$. □

Proposition 2.3. *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$. L'application $f \mapsto f'$ de $\mathcal{H}(U)$ dans lui-même transforme toute partie bornée en une partie bornée.*

Démonstration. Soient A une partie bornée de $\mathcal{H}(U)$, K un compact de U et

$$M_K := \sup_{f \in A} \|f\|_K.$$

D'après la propriété de Borel–Lebesgue, K est recouvert par un nombre fini de disques fermés $\overline{D}(a_j; r_j)$ inclus dans U. Pour chaque indice j, il existe $R_j > r_j$ tel que

$$\overline{D}(a_j; r_j) \subset D(a_j; R_j) \subset U.$$

La formule de Cauchy implique donc, pour chaque indice j et chaque $f \in A$,

$$|f'(z)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w-a_j|=R_j} \frac{f(w)\,\mathrm{d}w}{(w-z)^2} \right| \leqslant \frac{M_K R_j}{(R_j - r_j)^2} \qquad \big(z \in \overline{D}(a_j, r_j)\big).$$

Cela fournit immédiatement la propriété désirée. □

Théorème 2.4 (Montel[2]). *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$. Un sous-ensemble de $\mathcal{H}(U)$ est compact si, et seulement si, il est fermé et borné.*

Démonstration. Montrons d'abord que la condition est nécessaire. Comme un compact est toujours fermé, il suffit d'établir que, si A est une partie compacte de $\mathcal{H}(U)$ et si K est une partie compacte que U, alors $\sup_{f \in A} \|f\|_K < \infty$. Soit j tel que $K \subset K_j$. Il existe une partie finie G de A telle que $A \subset \cup_{g \in G} B(g; 1/2^{j+1})$. Cela implique que, pour toute f de A, il existe $g \in G$ telle que

$$\frac{\min(1, \|f - g\|_{K_j})}{2^j} < \frac{1}{2^{j+1}},$$

d'où $\|f - g\|_K \leqslant \frac{1}{2}$ et

$$\sup_{f \in A} \|f\|_K \leqslant \tfrac{1}{2} + \max_{g \in G} \|g\|_K.$$

2. Paul Montel, 1876–1975.

Montrons maintenant que la condition est suffisante. Nous utilisons à cette fin le critère de Bolzano–Weierstrass : nous allons montrer que toute suite $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ d'une partie fermée bornée A de $\mathcal{H}(U)$ admet une suite extraite convergente pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact.

Soit donc $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ une suite quelconque de A. Nous devons montrer qu'il existe une sous-suite $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}_\infty}$ telle que, pour tout compact K de U, $\|f_m - f_n\|_K \to 0$ lorsque m et n tendent vers l'infini en restant dans $\mathbb{N}_\infty$. Considérons la suite $\{a_p\}_{p=0}^{\infty}$ des points de U à coordonnées rationnelles. Comme $\{f_n(a_0)\}_{n=0}^{\infty}$ est bornée, il existe une partie infinie $\mathbb{N}_0$ de $\mathbb{N}$ telle que $\{f_n(a_0)\}_{\mathbb{N}_0}$ converge. La suite $\{f_n(a_1)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ étant bornée, il existe une partie infinie $\mathbb{N}_1$ de $\mathbb{N}_0$ telle que $\{f_n(a_1)\}_{n\in\mathbb{N}_1}$ converge. par itération, nous obtenons ainsi l'existence d'une suite décroissante de parties infinies de $\mathbb{N}$,

$$\mathbb{N} \supset \mathbb{N}_0 \supset \mathbb{N}_1 \supset \cdots \supset \mathbb{N}_k \supset \cdots,$$

telle que $\{f_n(a_p)\}_{n\in\mathbb{N}_k}$ converge pour $p \leqslant k$.

Définissons à présent une suite strictement croissante d'entiers $\{n_k\}_{k=0}^{\infty}$ telle que $n_k \in \mathbb{N}_k$ pour tout $k \geqslant 0$: il suffit de choisir $n_0 := \inf \mathbb{N}_0$ et

$$n_{k+1} := \inf \Big(\mathbb{N}_{k+1} \cap [n_k + 1, \infty[\Big) \qquad (k \geqslant 0).$$

En posant, pour simplifier l'écriture, $g_k := f_{n_k}$, on voit que $\{g_k(a_p)\}_{k=0}^{\infty}$ converge pour tout p.

Soit maintenant K un compact de U. Nous allons montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N := N(\varepsilon, K)$ tel que $\|g_m - g_n\|_K \leqslant \varepsilon$ dès que $\min(m, n) \geqslant N$. Comme A est borné, on a, en vertu de la Proposition 2.3,

$$M_K := \sup_{n\geqslant 0} \|g_n'\|_K < \infty.$$

Soient alors $\eta := \varepsilon/(3M_K)$ et $\cup_{b\in B} D(b; \eta_b)$ un recouvrement de K par un nombre fini de disques de rayon $\leqslant \eta$ et de centres à coordonnées rationnelles. Pour m, $n \in \mathbb{N}$, $z \in K$, il existe $b \in B$ tel que $|z - b| \leqslant \eta$ et donc

$$|g_m(z) - g_n(z)| \leqslant |g_m(z) - g_m(b)| + |g_m(b) - g_n(b)| + |g_n(b) - g_n(z)| \leqslant \tfrac{2}{3}\varepsilon + |g_m(b) - g_n(b)|,$$

où nous avons employé la majoration

$$|g_\ell(z) - g_\ell(b)| \leqslant |z - b|\, \|g_\ell'\|_K \leqslant \eta M_K \leqslant \tfrac{1}{3}\varepsilon \qquad (\ell = m, n).$$

Comme B est fini, il existe $N = N(\varepsilon, K)$ tel que $\sup_{b\in B} |g_m(b) - g_n(b)| \leqslant \varepsilon/3$ pour m, $n \geqslant N$. Cela montre bien que la suite $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ est de Cauchy dans $\mathcal{C}(K)$ et achève ainsi la démonstration. □

Remarque. On sait qu'un espace vectoriel normé est de dimension finie si, et seulement si, sa boule unité fermée est compacte. Comme $\mathcal{H}(U)$ est de dimension infinie et possède, d'après le théorème de Montel, une boule unité fermée compacte, nous pouvons en déduire que sa topologie ne provient pas d'une norme.

Corollaire 2.5. *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$. Toute suite bornée de fonctions de $\mathcal{H}(U)$ ayant au plus une valeur d'adhérence pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact est convergente.*

Démonstration. Soit A l'ensemble des valeurs prises par la suite. Le résultat est immédiat si A est fini. Dans le cas contraire, $\overline{A}$ est compact et la suite a au moins une valeur d'adhérence. Elle est donc convergente en vertu d'une propriété générale des compacts dans un espace métrique. □

Corollaire 2.6 (Vitali[3]). *Soit U un domaine de $\mathbb{C}$ et $\{f_n\}_{n=0}^\infty$ une suite de $\mathcal{H}(U)$ bornée pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact et telle que, pour une suite convenable $\{z_p\}_{p=0}^\infty$ de points de U ayant au moins un point d'accumulation, la suite $\{f_n(z_p)\}_{n=0}^\infty$ converge pour tout $p \geqslant 0$.*

Alors $\{f_n\}_{n=0}^\infty$ converge dans $\mathcal{H}(U)$ pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact.

Démonstration. Toute limite de la suite $\{f_n\}_{n=0}^\infty$ est holomorphe d'après le théorème de Weierstrass et est déterminée sur un ensemble ayant au moins un point d'accumulation. D'après le principe du prolongement analytique, cette suite possède donc au plus une valeur d'adhérence. La conclusion découle alors du Corollaire 2.5. □

Remarque. La conclusion du théorème de Vitali est aisément mise en défaut dans le cas d'une suite non bornée : la suite $\{z \mapsto (2z)^n\}_{n=0}^\infty$ converge vers 0 sur $D(0; \frac{1}{2})$ mais ne converge pas dans $\mathcal{H}\big(D(0;1)\big)$.

Corollaire 2.7. *Soit U un domaine de $\mathbb{C}$ et $\{f_n\}_{n=0}^\infty$ une suite de $\mathcal{H}(U)$ bornée pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact et telle que, pour un élément a convenable de U, toutes les suites $\{f_n^{(p)}(a)\}_{n=0}^\infty$ $(p \geqslant 0)$ soient convergentes. Alors $\{f_n\}_{n=0}^\infty$ converge dans $\mathcal{H}(U)$ pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact.*

Démonstration. Si g est une valeur d'adhérence de $\{f_n\}_{n=0}^\infty$, on a $g^{(p)}(a) = \lim_{n\to\infty} f_n^{(p)}(a)$ pour tout p en vertu du théorème de Weierstrass. Le principe du prolongement analytique fournit donc encore l'unicité d'une telle fonction g. □

3. Transformations holomorphes, représentations conformes

La fonction exponentielle transforme une droite D en un cercle, une demi-droite ou une spirale logarithmique, selon que D est verticale, horizontale ou oblique. Une homographie peut transformer une droite en un cercle privé d'un point, et un demi-plan en un disque.

Nous nous intéressons ici aux contraintes selon lesquelles une fonction holomorphe transforme une figure géométrique donnée. Nous en avons déjà rencontré une : le théorème de l'application ouverte — Théorème V.4.1.

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$, et γ un chemin différentiable de U. On dit que $\gamma : [a,b] \to U$ passe par $w \in U$ à vitesse non nulle s'il existe $t \in]a,b[$ tel que $\gamma(t) = w$, $\gamma'(t) \neq 0$. Si γ et δ sont deux chemins différentiables passant par $w = \gamma(t) = \delta(s)$ à vitesse non nulle, on dira que les courbes γ^* et δ^* se croisent en w avec un angle ϑ si

$$\arg \gamma'(t) - \arg \delta'(s) \equiv \vartheta \pmod{2\pi}.$$

Cette définition est en accord avec la représentation géométrique. Elle est invariante par changement de paramétrage sous la condition que la vitesse reste non nulle.

Théorème 3.1. *Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{H}(U)$, $w \in U$ et γ, δ deux chemins différentiables passant par w à vitesse non nulle. Si $f'(w) \neq 0$, alors γ et δ se croisent en w avec le même angle que $f \circ \gamma$ et $f \circ \delta$ au même point.*

Démonstration. On peut supposer sans restreindre la généralité que $w = \gamma(0) = \delta(0)$. Les vecteurs vitesses $\gamma'(0)$ et $\delta'(0)$ subissent, lorsque l'on applique f aux courbes, la

3. Giuseppe Vitali, 1875-1932.

transformation linéaire $\mathrm{d}_w f$. Or, du fait de l'holomorphie de f, cette application n'est autre que l'opérateur de multiplication par $f'(w) \neq 0$: c'est une similitude directe, qui conserve les angles. La vérification par le calcul est immédiate :

$$(f \circ \gamma)'(0) = f'(w)\gamma'(0), \quad (f \circ \delta)'(0) = f'(w)\delta'(0),$$
$$\arg\{(f \circ \gamma)'(0)\} - \arg\{(f \circ \delta)'(0)\} = \arg \gamma'(0) - \arg \delta'(0).$$

□

On dit qu'une application du plan complexe est *conforme* en un point w si elle conserve les angles de croisement de tout couple de chemins différentiables se croisant en w. Il résulte de l'énoncé précédent qu'une fonction holomorphe est conforme en tout point où sa dérivée est non nulle. On appelle *transformation conforme* sur un ouvert U une fonction holomorphe à dérivée partout non nulle.

Théorème 3.2. *Soient U un ouvert non vide de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{H}(U)$.*

(i) Si f est injective, f est conforme.

(ii) Si f est bijective, son application réciproque est également holomorphe.

Démonstration. Montrons le point (i). Supposons que $f'(w) = 0$. Alors on a, pour $|z|$ assez petit et un entier $k > 1$ convenable,

$$f(w + z) - f(w) = z^k \psi(z)$$

où ψ est une fonction holomorphe au voisinage de $z = 0$ telle que $\psi(0) \neq 0$. Il existe donc un disque $D_r := D(0; r)$ avec $r > 0$ dans lequel $\psi(z)$ ne s'annule pas. Comme tout disque est simplement connexe, il existe une fonction $h \in \mathcal{H}(D_r)$ telle que $\psi(z) = h(z)^k$ pour $z \in D_r$. La fonction $z \mapsto \varphi(z) := zh(z)$ n'est pas constante. D'après le théorème de l'application ouverte (Théorème V.4.1), l'image $\varphi(D_r)$ contient un disque $D(0; \varrho)$ avec $\varrho > 0$. Pour $v \in D^*(0; \varrho)$, l'équation $f(z + w) = f(w) + v^k$ possède alors au moins k solutions distinctes, à savoir les solutions dans D_r de $zh(z) = v\mathrm{e}^{2\pi ij/k}$ pour $0 \leqslant j < k$. Cela contredit l'injectivité de f.

Pour établir (ii), nous observons d'abord que l'application réciproque g de f est continue en vertu du théorème de l'application ouverte. Soit $w \in f(U)$. Posant $v := g(w)$, de sorte que $w = f(v)$, et $\eta(h) := g(w + h) - g(w)$, on a alors $\eta(h) \to 0$ lorsque $h \to 0$, d'où

$$h = f \circ g(w + h) - f \circ g(w) = f(v + \eta) - f(v) = \eta f'(v) + o(\eta)$$

et donc
$$\frac{\eta(h)}{h} = \frac{g(w + h) - g(w)}{h} = \frac{1}{f'(v) + o(1)} \qquad (h \to 0).$$

Ainsi g est différentiable en w et $g' = 1/f' \circ g$. □

Une application holomorphe dont la réciproque est également holomorphe est dite *bi-holomorphe.*

Définition 3.3. *Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{C}$. On appelle isomorphisme holomorphe de U sur V une bijection holomorphe de U sur V. Lorsque $U = V$, on dit qu'une bijection holomorphe de U sur lui-même est un automorphisme holomorphe.*

Le Théorème 3.2 implique évidemment que tout isomorphisme est bi-holomorphe.

Il est facile de déterminer tous les automorphismes de $\mathbb{C}$.

Théorème 3.4. *Une fonction entière f est un automorphisme de $\mathbb{C}$ si, et seulement si, on a $f(z) = az + b$ avec $a \neq 0$.*

Démonstration. Observons d'abord qu'un polynôme de degré 1 est trivialement un automorphisme de $\mathbb{C}$.

Établissons la réciproque. Comme f est entière, $z = 0$ est un point singulier isolé de la fonction $g(z) := f(1/z)$. Si cette singularité est essentielle, alors, en vertu du théorème de Casorati–Weierstrass (Corollaire VI.2.5), $g(D \smallsetminus \{0\})$ est dense dans $\mathbb{C}$ et rencontre donc l'ouvert $g(\mathbb{C} \smallsetminus \overline{D})$. Cela contredit l'injectivité de f. Il s'ensuit que $z = 0$ est une singularité polaire de g, autrement dit que $|f(z)|$ est à croissance polynomiale. Cela implique que f est un polynôme, donc nécessairement de degré 1 puisque le théorème de Rouché garantit que l'équation $f(z) = w$ possède en général $\deg f$ solutions. □

Le problème de la représentation conforme consiste, d'une manière générale, à déterminer dans quelles conditions deux ouverts donnés sont isomorphes. Le résultat suivant fournit un contre-exemple important.

Théorème 3.5. *Le plan $\mathbb{C}$ et le disque unité ouvert ne sont pas isomorphes.*

Démonstration. Si $f : \mathbb{C} \to D(0;1)$ était un isomorphisme holomorphe, alors f serait une fonction entière bornée, donc constante, donc non injective. □

Le théorème suivant garantit que les conditions minimales nécessaires pour qu'un domaine du plan soit isomorphe au disque unité sont aussi suffisantes.

Théorème 3.6 (Riemann). *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un domaine du plan soit isomorphe au disque unité ouvert est qu'il soit distinct de $\mathbb{C}$ et simplement connexe.*

Démonstration. La condition est évidemment nécessaire puisque, si $f : D := D(0;1) \to U$ est un isomorphisme et si $h \in \mathcal{H}(U;\mathbb{C})$, alors $z \mapsto f'(z)h \circ f(z)$ est une fonction holomorphe sur D, donc possède une primitive g, puisque D est simplement connexe. Or, l'identité $g'(z) = f'(z)h \circ f(z)$ $(z \in D)$ équivaut à $h(w) = F'(w)g' \circ F(w)$ $(w \in U)$ avec $F := f^{-1}$. Ainsi h possède une primitive, et l'on conclut grâce au Théorème V.6.3(iv).

Nous allons à présent montrer que la condition est suffisante. La démonstration se décompose en trois étapes essentielles.

Étape 1 : il existe au moins une fonction holomorphe bornée et injective sur U. En effet, soit $a \in \mathbb{C} \smallsetminus U$. Alors il existe sur U une détermination holomorphe, disons $g(z)$, de $\log(z - a)$. Cette fonction g est injective sur U car $g(z) = g(w)$ implique $z - a = \mathrm{e}^{g(z)} = \mathrm{e}^{g(w)} = w - a$, donc $z = w$.

Soit $z_0 \in U$. Comme $g'(z_0) = 1/(z_0 - a)$ est non nulle, g est injective au voisinage de z_0 et prend donc sur D toutes les valeurs d'un disque convenable de centre $g(z_0)$, disons $D(g(z_0); r)$. Alors $V := 2\pi i + D\big(g(z_0); r\big)$ ne rencontre pas $g(U)$ puisque, dans le cas contraire, on aurait $g(z) = g(w) + 2\pi i$ pour des valeurs distinctes z et w de U, ce qui impliquerait $z = w$ par exponentiation. La fonction h définie sur U par

$$h(z) := \frac{1}{g(z) - g(z_0) - 2\pi i}, \tag{3·1}$$

et dont le module ne dépasse pas $1/r$, répond donc à la question.

Étape 2 : pour tout $b \in U$, l'ensemble A_b des fonctions holomorphes sur U qui sont injectives ou constantes, de module n'excédant pas 1 et nulles en b, est un compact non vide de $\mathcal{H}(U)$, sur lequel l'application $\varphi : f \mapsto |f'(b)|$ atteint son maximum. On a en effet $A_b = E \cap F \cap G$ où E est l'ensemble des fonctions holomorphes injectives ou constantes sur U, et

$$F := \mathcal{H}(U) \cap \Big\{f : U \to \mathbb{C} : \sup_U |f(z)| \leqslant 1\Big\}, \quad G := \mathcal{H}(U) \cap \{f : U \to \mathbb{C} : f(b) = 0\}.$$

D'après le Corollaire 1.5, E est fermé dans $\mathcal{H}(U)$, et F est compact d'après le théorème de Montel. Comme G est évidemment fermé, on obtient bien que A_b est compact. Il reste à établir que A_b n'est pas vide : la fonction

$$z \mapsto r\frac{h(z) - h(b)}{1 - r^2 h(z)\overline{h(b)}},$$

où h est définie par (3·1), est une injection de A_b.[4]

Étape 3 : si f est un élément de A_b tel que $\varphi(f) = |f'(b)|$ soit maximal, alors $f(U) = D$. Le théorème de l'application ouverte implique que $f(U)$ est un ouvert contenu dans $\overline{D}$, donc dans D. Il suffit donc de montrer que $f(U) \supset D$. Raisonnons par l'absurde et supposons l'existence d'un point $w \in D \setminus f(U)$. Alors la fonction g définie par

$$g(z) := \frac{f(z) - w}{1 - f(z)\overline{w}}$$

ne s'annule pas sur U, donc y possède une racine carrée holomorphe, disons $z \mapsto \gamma(z)$. Nous allons montrer que la fonction définie par

$$F(z) := \frac{\gamma(z) - \gamma(b)}{1 - \gamma(z)\overline{\gamma(b)}}$$

est alors un élément de A_b tel que $|F'(b)| > |f'(b)|$, ce qui est absurde. On a en effet successivement

$$\begin{aligned}
&\gamma(b)^2 = g(b) = -w, \quad |\gamma(b)| = |w|,\\
&2\gamma(z)\gamma'(z) = \frac{(1 - |w|^2)f'(z)}{\{1 - f(z)\overline{w}\}^2}, \quad 2\gamma(b)\gamma'(b) = (1 - |w|^2)f'(b),\\
&F'(z) = \frac{\{1 - |\gamma(b)|^2\}\gamma'(z)}{\{1 - \gamma(z)\overline{\gamma(b)}\}^2}, \quad F'(b) = \frac{\gamma'(b)}{1 - |\gamma(b)|^2} = \frac{\gamma'(b)}{1 - |w|},\\
&|F'(b)| = \frac{1 + |w|}{2\sqrt{|w|}}|f'(b)| > |f'(b)|.
\end{aligned}$$

□

Exemples. (i) $f(z) := (1+z)/(1-z)$ est un isomorphisme du disque unité sur le demi-plan $\Re e\, z > 0$. En effet, on a $w = f(z) \Leftrightarrow z = (w-1)/(w+1)$, donc

$$|z| < 1 \Leftrightarrow |w + 1|^2 - |w - 1|^2 = 4\Re e\, w > 0.$$

(ii) $g(z) = z^2$ est un isomorphisme du demi-plan $\Re e\, z > 0$ sur $\mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$. L'application

$$z \mapsto \Big(\frac{z+1}{z-1}\Big)^2 - 1 = \frac{4z}{(z-1)^2}$$

est donc un isomorphisme du disque unité sur $\mathbb{C} \setminus]-\infty, -1]$.

Corollaire 3.7. *Deux domaines simplement connexes distincts de $\mathbb{C}$ sont isomorphes. Deux domaines simplement connexes de $\mathbb{C}$ sont homéomorphes.*

Démonstration. La première propriété est immédiate puisqu'un domaine simplement connexe distinct de $\mathbb{C}$ est isomorphe au disque unité. Cela implique donc la seconde assertion sauf si l'un des deux domaines est $\mathbb{C}$. Or il est facile de construire un homéomorphisme de $\mathbb{C}$ sur D, par exemple l'application $z \mapsto z/\{|z| + 1\}$. □

Remarque. Cette propriété de nature purement topologique n'a jamais pu être établie directement.

4. Nous utilisons ici le fait que, pour $a \in D(0; 1)$ l'application $z \mapsto (z - a)/(1 - \overline{a}z)$ applique le disque unité sur lui-même.

Université de Lorraine
Faculté des sciences et technologies
Licence de mathématiques 2012/2013
Analyse complexe (LMI6.33)

Exercices sur les nombres complexes, les fonctions holomorphes et les séries entières

1. Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que trois nombres complexes a, b, c soient dans cet ordre les affixes des sommets d'un triangle équilatéral orienté dans le sens positif est que l'on ait $a + jb + j^2c = 0$, où $j := \mathrm{e}^{2\pi i/3}$.

2. Résoudre sur $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - (3 - 2i)z + (5 - i) = 0$.

3. Résoudre sur $\mathbb{C}$ les équations $z^3 + 1 = 0$ et $z^4 - i = 0$.

4. *Équation du troisième degré.* On considère l'équation $z^3 - 15z - 4 = 0$ sur $\mathbb{C}$.
(a) Montrer que, si $z = u + v$, alors $z^3 - 3uvz - \big(u^3 + v^3\big) = 0$.
(b) Déterminer u^3 et v^3 de sorte que $3uv = 15$ et $u^3 + v^3 = 4$.
(c) (i) Calculer $(2 + i)^3$. En déduire toutes les valeurs possibles de u dans $\mathbb{C}$ satisfaisant au système d'équations (b) et tel que $\Im m\,(u^3) > 0$.
(ii) En déduire toutes les valeurs possibles pour le couple (u, v).
(iii) Résoudre sur $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 - 15z - 4 = 0$.

5. On sait que toute similitude (composée d'une rotation et d'une homothétie) directe du plan est représentée par l'opérateur de multiplication par un nombre complexe non nul α. Soit $ABCDE$ un pentagone régulier centré en 0. On désigne par A' le milieu de AB, B' le milieu de BC, etc. À quel nombre complexe α correspond la similitude directe σ du plan qui transforme $ABCDE$ en $A'B'C'D'E'$?

6. Soient $n \geqslant 1$ et $P(z) = z^n + a_1z^{n-1} + \cdots + a_{n-1}z + a_n$ un polynôme à coefficients complexes dont les coefficients a_j $(1 \leqslant j \leqslant n)$ ne sont pas tous nuls. On pose

$$Q(z) := z^n - |a_1|z^{n-1} - \cdots - |a_{n-1}|z - |a_n|$$

et l'on considère la fonction f définie sur $]0, \infty[$ par $f(x) := Q(x)/x^n$.
(a) Montrer que f est strictement croissante. En déduire que l'équation $f(x) = 0$ possède sur $\mathbb{R}^{+*}$ une unique solution β.
(b) Soit α une racine complexe de P. Montrer que, si $\alpha \neq 0$, alors $Q(|\alpha|) \leqslant 0$ et donc $f(|\alpha|) \leqslant 0$. En déduire que $|\alpha| \leqslant \beta$.
(c) Application. Soit $P(z) := z^4 + \frac{1}{3}z + \frac{2}{3}\cdot$ Montrer que toutes les racines complexes de P sont de module inférieur ou égal à 1.

7. (a) Pour $|z| = 1$, montrer que, pour tout $a, b \in \mathbb{C}$ tels que $\overline{b}z + \overline{a} \neq 0$, on a

$$\left|\frac{az+b}{\overline{b}z+\overline{a}}\right| = 1.$$

(b) Vérifier que si l'un des deux nombres complexes s et w est de module 1, alors

$$\left|\frac{s-w}{1-\overline{s}w}\right| = 1, \qquad (\overline{s}w \neq 1).$$

8. (a) Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, holomorphe en z_0. On pose $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$ où P et Q sont à valeurs réelles. Montrer que

$$|f'(z_0)| = \|\operatorname{grad} P(x_0, y_0)\| = \|\operatorname{grad} Q(x_0, y_0)\|$$

où la norme est la norme euclidienne de $\mathbb{R}^2$.

(b) On suppose que f est holomorphe sur un domaine non vide U, et qu'il existe une fonction $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$ telle que $P(x, y) = \varphi \circ Q(x, y)$ pour tous x, y tels que $z = x+iy \in U$. Montrer qu'alors f est constante.

9. Déterminer une fonction $f(x + iy) = P(x, y) + iQ(x, y)$ holomorphe sur $\mathbb{C}$ satisfaisant à $f(0) = 0$ et $P(x, y) = x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3$.

Même question avec $P(x, y) = x \cos x \operatorname{ch} y + y \sin x \operatorname{sh} y$.

10. (a) Montrer que les équations de Cauchy–Riemann s'écrivent en coordonnées polaires

$$\varrho P'_\varrho = Q'_\vartheta, \qquad \varrho Q'_\varrho = -P'_\vartheta.$$

(b) Déterminer $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^*)$ telle que $|g(z)| = 1$. Application : déterminer $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ telle que $|f(z)| = |z|^2 \mathrm{e}^x$.

11. Dans cet exercice, on suppose que les fonctions holomorphes considérées sont de classe $\mathcal{C}^2$.[1]

(a) Montrer que, pour toute fonction f holomorphe, on a $(\overline{f})'_{\overline{z}}(z) = \overline{f'_z}(z) = \overline{f'(z)}$.

(b) Soient $f_1, \ldots, f_n$ des fonctions holomorphes sur un domaine U de $\mathbb{C}$ telles que $\sum_{1 \leqslant j \leqslant n} |f_j|^2$ est constante. En appliquant l'opérateur $\partial^2/\partial\overline{z}\partial z$, montrer que chacune des f_j est constante.

12. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

(a) $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} n^k z^n \quad (k \in \mathbb{R})$; (b) $\displaystyle\sum_{n \geqslant 2} (\ln n)^k z^n \quad (k \in \mathbb{R})$;

(c) $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \mathrm{e}^{-n^\alpha} z^n \quad (\alpha \in \mathbb{R})$; (d) $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \mathrm{e}^{-n^\alpha} (n!)^\beta z^n \quad (\alpha,\, \beta \in \mathbb{R})$.

13. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geqslant 0} z^{n^2}$.

1. C'est en fait toujours vrai, et ce sera établi ultérieurement dans le cours.

14. Sachant que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ vaut R, déterminer celui des séries entières suivantes : $\sum_{n\geqslant 0} a_n^2 z^n$, $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^{2n+1}$, $\sum_{n\geqslant 0}\{a_n/(1+|a_n|)\}z^n$.

15. Sachant que les séries entières $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} b_n z^n$ possèdent respectivement R et r comme rayons de convergence, trouver des minorants de ceux des séries entières $\sum_{n\geqslant 0}(a_n+b_n)z^n$, $\sum_{n\geqslant 0} a_n b_n z^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} c_n z^n$ avec $c_n := \sum_{\ell+m=n} a_\ell b_m$.

16. Déterminer le comportement sur le cercle de convergence de la série entière

$$\sum_{n\geqslant 1} n^{-\alpha}(\ln 2n)^{-\beta} z^n$$

pour toutes valeurs des paramètres réels α et β.

17. *Transformation de Borel.* Soit $f(z) := \sum_{n\geqslant 0} c_n z^n$ une fonction développable en série entière dans un disque de rayon $R > 0$.

(a) Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} c_n z^n/n!$ a un rayon de convergence infini. Sa somme, notée $F(z)$, est appelée la transformée de Borel de f.

(b) Soit $0 < r < R$. Montrer qu'il existe une constante M telle que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on ait

$$\sup_{N\geqslant 0}\left|\sum_{n=0}^{N}\frac{c_n}{n!}z^n\right| \leqslant M\mathrm{e}^{|z|/r}.$$

(c) Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$, on a

$$f(z) = \int_0^\infty F(tz)\,\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t.$$

Université de Lorraine
Faculté des sciences et technologies
Licence de mathématiques 2012/2013
Analyse complexe (LMI6.33)

Exercices sur les séries entières et les fonctions exponentielle et logarithme

18. Utiliser le théorème d'Abel pour montrer que si $\sum_n a_n$, $\sum_n b_n$ et $\sum_n c_n$ sont trois séries numériques convergeant respectivement vers a, b, c et si $c_n = \sum_{0\leqslant j\leqslant n} a_j b_{n-j}$ pour tout entier $n \geqslant 0$, alors $c = ab$.

19. *Théorème de Tauber (1897).* On se propose ici d'établir la réciproque suivante du théorème d'Abel : si $f(z) = \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge pour $|z| < 1$, si $f(z)$ tend vers une limite finie ℓ lorsque $z \to 1-$ et si $\sum_{1\leqslant n\leqslant N} na_n = o(N)$ lorsque $N \to \infty$, alors $\sum_{n\geqslant 0} a_n = \ell$.

On pose

$$G(x) := (\mathrm{e}^{-x} - 1)/x, \quad g(x) := -G'(x) = \{(1+x)\mathrm{e}^{-x} - 1\}/x^2 \qquad (x > 0),$$
$$H(x) := \mathrm{e}^{-x}/x, \quad h(x) := -H'(x) = (1+x)\mathrm{e}^{-x}/x^2 \qquad (x > 0),$$
$$\varepsilon_N(x) := \frac{1}{N} \sum_{n\leqslant xN} na_n \qquad (x > 0,\ N \geqslant 1).$$

(a) Montrer que pour tout entier $N \geqslant 1$ on a

$$f\big(\mathrm{e}^{-1/N}\big) - \sum_{0\leqslant n\leqslant N} a_n = -\varepsilon_N(1) + \int_0^1 g(x)\varepsilon_N(x)\,\mathrm{d}x + \int_1^\infty h(x)\varepsilon_N(x)\,\mathrm{d}x.$$

(b) Montrer que $\sup_N |\varepsilon_N(x)| = O(x)$ pour $x > 0$. Conclure en appliquant le théorème de la convergence dominée.

20. *Sous groupes additifs de* $\mathbb{R}$.

Soit G un sous groupe additif de $\mathbb{R}$. Montrer l'équivalence des trois propriétés suivantes.
(i) Tout point de G est point d'accumulation.
(ii) 0 est un point d'accumulation de G.
(iii) G est partout dense dans $\mathbb{R}$.

21. *Sous groupes discrets de* $\mathbb{R}$. Soit G un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ qui n'est pas partout dense. Montrer qu'il existe un élément a de G tel que $G = a\mathbb{Z}$, et donc que G est discret.[1]

22. *Pas de Rolle sur* $\mathbb{C}$. Montrer que le théorème de Rolle ne s'applique pas aux fonctions d'une variable réelle à valeurs complexes en donnant l'exemple d'une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ qui prend la même valeur en 0 et en 1, mais dont la dérivée ne s'annule jamais.

1. On rappelle qu'une partie d'un espace métrique est dite discrète si chacun de ses points est isolé.

23. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\cos z = \frac{1}{2}$.

24. En employant la formule du binôme, montrer que $e^z = \lim_{n\to\infty}(1 + z/n)^n$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, la convergence étant uniforme sur tout compact.

25. Déterminer et représenter graphiquement chacun des trois ensembles suivants :

$A := \{z \in \mathbb{C} : \sum_{n\geqslant 1} 1/\sin nz \text{ converge}\}$.

$B := \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{sh} z| < |\operatorname{ch} z|\}$.

$C := \{z \in \mathbb{C} : \lim_{n\to\infty} e^{-nz^2} = 0\}$.

26. La fonction définie par $f(0) = 0$ et $f(z) = \exp\{-1/z^8\}$ si $z \neq 0$ est-elle holomorphe sur $\mathbb{C}$?

27. Distinguer le vrai du faux en justifiant votre réponse par un raisonnement ou un contre-exemple.

(i) Les seuls zéros de $\sin z$ sur $\mathbb{C}$ sont les multiples entiers de π.

(ii) La fonction $z \mapsto \operatorname{ch} z$ ne s'annule pas sur $\mathbb{C}$.

(iii) Tous les points fixes de $z \mapsto \operatorname{tg} z$ sont réels.

(iv) La série $\sum_{n\geqslant 1}(\sin nz)/2^n$ converge pour tout nombre complexe z.

28. *Dérangements.* On note $d(n)$ le nombre de *dérangements* d'un ensemble à n éléments, i.e. le nombre des permutations de cet ensemble qui sont sans point fixe.

(a) Montrer que $n! = \sum_{0\leqslant k\leqslant n} d(k)\binom{n}{k}$.

(b) En multipliant les deux membres de l'égalité précédente par $z^n/n!$, trouver une identité concernant le produit de deux séries entières.

(c) En déduire la valeur de $f(z) := \sum_{n\geqslant 0} d(n)z^n/n!$ puis celle de $d(n)$.

29. On désigne par log la détermination principale du logarithme complexe. Sur quel ouvert U de $\mathbb{C}$ la fonction $z \mapsto f(z) := \log(z^2+1) - \log(z+i) - \log(z-i)$ est-elle définie ? Donner la valeur de f sur chaque composante connexe de U. On pourra considérer les points $z_t := te^{3i\pi/4}$ et $w_t := te^{-3i\pi/4}$ lorsque $t \to \infty$.

30. *Une condition nécessaire pour l'existence d'une racine carrée.* Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{C}^*$. On pose $\varphi(z) = z^2$ pour $z \in \mathbb{C}^*$ et

$$V := \varphi^{-1}(U) = \{z \in \mathbb{C}^* : z^2 \in U\}.$$

Montrer que si V est connexe, alors il n'existe pas de fonction continue f sur U telle que $f(z)^2 = z$ pour $z \in U$. On pourra raisonner par l'absurde en supposant l'existence de f et en introduisant $g(z) := f(z^2)/z$.

Remarque. Lorsque $U := \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$, on sait qu'il existe une fonction racine carrée. On vérifie alors que $V = \mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}$ est non connexe.

31. *Une condition nécessaire pour l'existence d'un logarithme.* Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{C}^*$. On pose

$$V := \{z \in \mathbb{C} : e^z \in U\}.$$

Montrer que si V est connexe, alors il n'existe pas de fonction continue f sur U telle que $e^{f(z)} = z$ pour $z \in U$. On pourra raisonner par l'absurde en supposant l'existence de f et en introduisant $g(z) := f(e^z) - z$.

32. Soit U un domaine de $\mathbb{C}^*$. On suppose qu'il existe une fonction $f \in \mathcal{H}(U)$ telle que $\Re e\, f(z) = \ln |z|$ pour tout z de U. Peut-on en déduire que f est une détermination du logarithme sur U ? Que $f'(z) = 1/z$ sur U ? Qu'il existe une détermination du logarithme sur U ?

33. Soit $U := \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$. On considère la détermination principale du logarithme complexe sur U.
(a) Calculer $\log(1 - \mathrm{e}^{2\pi i\vartheta})$ pour $0 < \vartheta < 1$.
(b) Écrire le développement en série entière de $\log(1 - z)$ autour de 0.
(c) En appliquant le théorème d'Abel à $\log(1 - r\mathrm{e}^{2\pi i\vartheta})$ lorsque $r \to 1-$, calculer

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{\cos 2\pi n\vartheta}{n} \quad \text{et} \quad \sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin 2\pi n\vartheta}{\pi n}$$

pour $0 < \vartheta < 1$.

34. La série entière de la détermination principale de $\sqrt{1+z}$ à l'origine converge-t-elle normalement dans le disque unité fermé ?

35. Déterminer l'ensemble U des nombres complexes z pour lesquels l'expression

$$\log\left(z + \sqrt{1+z^2}\right)$$

est bien définie lorsque log et $\sqrt{\cdot}$ désignent les déterminations principales du logarithme et de la racine carrée dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$. On note cette fonction $\operatorname{argsh} z$.
(a) Calculer la dérivée de argsh sur U.
(b) Montrer que $\operatorname{sh}(\operatorname{argsh} z) = z$ pour $z \in U$.
(c) Écrire le développement en série entière de $\operatorname{argsh} z$ autour de $z = 0$.

36. Déterminer un ouvert U de $\mathbb{C}$, que l'on choisira aussi grand que possible, sur lequel on peut définir une fonction holomorphe f telle que $\cos f(z) = z$ et $f([-1,1]) \subset \mathbb{R}$.

37. Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{H}(U, \mathbb{C}^*)$. Montrer que si $g \in \mathcal{C}(U, \mathbb{C}^*)$ vérifie $g^2 = f$, alors $g \in \mathcal{H}(U)$.

38. À quelle condition sur le nombre complexe z a-t-on $\log \mathrm{e}^z = z$ lorsque log désigne la détermination principale du logarithme complexe ?

39. Montrer que $|\log(1+z)| \leqslant \ln\{1/(1-|z|)\}$ pour $|z| < 1$. En déduire que, pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, il existe $R = R(\alpha, \beta) > 0$ tel que $(1+z)^{\alpha\beta} = \left\{(1+z)^\alpha\right\}^\beta$ pour tout $z \in D(0; R)$.

40. *Pourquoi la notation z^α $(z \in \mathbb{C}, \alpha \notin \mathbb{Z})$ est dangereuse.* Expliquer précisément où est l'erreur dans la suite d'égalités

$$2 = \mathrm{e}^{\log 2} = \mathrm{e}^{2i\pi\frac{\log 2}{2i\pi}} = (\mathrm{e}^{2i\pi})^{\frac{\log 2}{2i\pi}} = 1^{\frac{\log 2}{2i\pi}} = 1.$$

41. Développer la détermination principale $\log z$ en série entière autour du point $z_0 = -1 + i$. Déterminer le rayon de convergence R de cette série. Est-il vrai que sa somme vaut $\log z$ dans $D(z_0; R)$ tout entier ?

42. (a) Déterminer l'image de $U := \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ par l'application $f : z \mapsto (z-1)/(z+1)$. En déduire l'existence d'une détermination holomorphe de $\log f$ sur U.

(b) Montrer que la fonction $g : U \to \mathbb{C}$ définie par $g(z) := (z+1) \exp\left\{\frac{1}{2} \log f(z)\right\}$ est une détermination holomorphe de la racine carrée de $z^2 - 1$ sur U. Y a-t-il plusieurs telles déterminations ? Si oui, combien ?

Université de Lorraine
Faculté des sciences et technologies
Licence de mathématiques 2012/2013
Analyse complexe (LMI6.33)

Exercices sur les fonctions analytiques complexes

43. Soit $f(z) = \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une fonction développable en série entière dans un voisinage de l'origine. On pose $A_n := \sum_{0\leqslant k\leqslant n} a_k$. Montrer que la série entière $\sum_{n\geqslant 0} A_n z^n$ a un rayon de convergence non nul et calculer sa somme en fonction de $f(z)$.

44. *Formule de Taylor–Lagrange.* Soit f une fonction analytique dans un ouvert U de $\mathbb{C}$.

(a) Soit $z_0 \in U$. Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que l'on ait, pour tout $z \in D(z_0; r)$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f(z) = \sum_{0\leqslant j\leqslant n} \frac{f^{(j)}(z_0)}{j!}(z - z_0)^j + \frac{(z - z_0)^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1 - t)^n f^{(n+1)}(z_0 + t(z - z_0))\, \mathrm{d}t.$$

(b) En déduire que, si $|f^{(n+1)}(z)| \leqslant M_{n+1}$ pour $|z - z_0| < r$, alors on a en tout point de ce disque

$$\left| f(z) - \sum_{0\leqslant j\leqslant n} \frac{f^{(j)}(z_0)}{j!}(z - z_0)^j \right| \leqslant M_{n+1} \frac{|z - z_0|^{n+1}}{(n + 1)!}.$$

45. Montrer que l'intégrale $F(z) := \displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t^2} \sin(2tz) \frac{\mathrm{d}t}{t}$ définit une fonction analytique dans un voisinage convenable de l'origine. Montrer que $F(z)$ est une primitive de $\sqrt{\pi}\, \mathrm{e}^{-z^2}$.

46. Montrer que les séries de fonctions suivantes définissent des fonctions analytiques dans des ouverts convenables de $\mathbb{C}$:

$$(a) \quad \sum_{n\geqslant 0} \frac{\cos nz}{n!}; \qquad (b) \quad \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{(-1)^n}{z + n}; \qquad (c) \quad \sum_{n\geqslant 0} \mathrm{e}^{-z^2\sqrt{n}}.$$

47. Montrer que les fonctions

$$f(z) := \int_0^\infty \frac{t\mathrm{e}^{-tz}}{1 - \mathrm{e}^{-t}}\, \mathrm{d}t, \qquad g(z) := \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(z + n)^2}$$

sont analytiques dans leurs domaines de définition respectifs. Montrer que g prolonge f.

48. Résoudre sur $\mathbb{C}$ l'équation différentielle $f'(z) = (z - 1)^2 f(z)$ de deux manières :

(a) En cherchant *a priori* f comme une fonction analytique que l'on développera en série entière autour d'un point convenable ;

(b) En multipliant l'expression $f'(z) - (z-1)^2 f(z)$ par un facteur qui en fait une dérivée exacte.

49. *Formule de Gutzner.*
Soit $f(z) = \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une fonction analytique dans le disque $D(0;R)$.
(a) Montrer que pour tout $r \in]0,R[$, on a

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\vartheta})|^2 \,\mathrm{d}\vartheta = \sum_{n\geqslant 0} |a_n|^2 r^{2n}.$$

(b) On pose $M(r) := \sup_{|z|\leqslant r} |f(z)|$ $(0 < r < R)$. Montrer que

$$\sum_{n\geqslant 0} |a_n|^2 r^{2n} \leqslant M(r)^2.$$

50. Soient U un domaine de $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{A}(U)$ et $a \in U$. Montrer que si $|f|$ ou $\arg f$ est constant au voisinage de a, alors f est constante sur U.

51. Soient $D := D(0;1)$ et $f \in \mathcal{A}\big(D, \mathbb{C}^*\big)$. Montrer qu'il existe une suite $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ de points de D telle que $|z_n| \to 1$ et $\{f(z_n)\}_{n=1}^{\infty}$ est bornée. On pourra appliquer le principe du maximum à $1/f$.

52. Soient U un domaine borné du plan et $f \in \mathcal{C}(\overline{U}, \mathbb{C}) \cap \mathcal{A}(U, \mathbb{C}^*)$. Montrer que si $|f|$ est constant sur ∂U, alors f est constante.

53. *Lemme des trois cercles de Hadamard.* On dit qu'une fonction réelle $x \mapsto g(x)$ définie et positive sur un intervalle I est *log-convexe* si $\ln g(x)$ est une fonction convexe de $\ln x$, autrement dit si, pour tous $x > 0$, $y > 0$, $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $a+b = 1$, on a $g(x^a y^b) \leqslant g(x)^a g(y)^b$.
Soit f une fonction analytique sur un ouvert U contenant la couronne fermée

$$\overline{D}(0;r,R) := \{z \in \mathbb{C} : r \leqslant |z| \leqslant R\}$$

avec $0 < r < R$. On pose $M(\varrho) := \sup_{|z|=\varrho} |f(z)|$ $(r \leqslant \varrho \leqslant R)$. En appliquant le principe du maximum à $z^m f(z)^n$, montrer que $M(\varrho)$ est log-convexe sur $[r,R]$. On pourra faire intervenir le nombre réel α défini par $r^\alpha M(r) = R^\alpha M(R)$.

54. *Maximum sur le bord d'un ouvert non borné.*
(a) Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ non borné et différent de $\mathbb{C}$ et $g \in \mathcal{C}(\overline{U}) \cap \mathcal{A}(U)$ telle que

$$\lim_{\substack{|z|\to\infty \\ z\in\overline{U}}} g(z) = 0.$$

En appliquant le principe du maximum à g sur $U_R := U \cap D(0,R)$ lorsque $R \to \infty$, montrer que, pour tout $z \in U$, on a $|g(z)| \leqslant \sup_{w\in\partial U} |g(w)|$.
(b) Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$, non borné, contenant 0 et différent de $\mathbb{C}$, et $f \in \mathcal{C}(\overline{U}) \cap \mathcal{A}(U)$ une fonction bornée.
(i) Soit $z \in U \smallsetminus \{0\}$. Montrer que $|f(z)| \leqslant \max\Big\{|f(0)|, \sup_{w\in\partial U} |f(w)|\Big\}$. On pourra choisir $\varepsilon \in]0, |z|[$ tel que $D(0,\varepsilon) \subset U$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, appliquer le résultat de la question précédente à la fonction g définie sur $U^* := U \smallsetminus \overline{D}(0,\varepsilon)$ par $g(w) := \varepsilon f(w)^n / w$.
(ii) Montrer que, pour $z \in U$, on a $|f(z)| \leqslant \sup_{w\in\partial U} |f(w)|$.

55. *Polynômes unitaires de norme minimale.* Soit P un polynôme à coefficients complexes, unitaire et de degré $n \geqslant 1$. On pose $\|P\|_\infty := \sup_{-1\leqslant x\leqslant 1} |P(x)|$. En appliquant le résultat de l'exercice 54 à la fonction

$$f(z) := \frac{1}{z^n} P\Big(\frac{z+1/z}{2}\Big)$$

sur l'ouvert non borné $U := \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$, montrer que $\|P\|_\infty \geqslant \dfrac{1}{2^n}\cdot$

56. *Théorème de Phragmén-Lindelöf.* On note z^α la détermination principale de cette fonction sur $\mathbb{C} \smallsetminus \mathbb{R}^-$.

Étant donnés des paramètres réels x_1 et x_2 vérifiant $x_1 < x_2$, on définit la demi-bande $B = B(x_1, x_2) := \{z \in \mathbb{C} : x_1 < \Re e\ z < x_2,\ \Im m\ z > 1\}$ et l'on se donne une fonction $f \in \mathcal{A}(B) \cap \mathcal{C}(\overline{B})$ telle que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $C_\varepsilon > 0$ vérifiant

$$|f(x+iy)| \leqslant C_\varepsilon \exp(\varepsilon y) \qquad (x+iy \in B).$$

(a) Montrer que, si $\sup_{\partial B} |f(z)| \leqslant M$, alors $\sup_{z\in B} |f(z)| \leqslant M$. On introduira, pour Y assez grand, le domaine rectangulaire $B_Y := B \cap \{z \in \mathbb{C} : \Im m\ z < Y\}$ et l'on considérera la fonction $F : B_Y \to \mathbb{C}$ définie par $F(z) = f(z)\exp(2\varepsilon i z)$.

(b) Soit $z \mapsto k(z)$ une fonction polynomiale de degré 1 à coefficients réels, et $\Phi : B \to \mathbb{C}$ la fonction définie par $\Phi(z) = (-iz)^{k(z)}$. Montrer que, pour $z = x + iy \in B$, on a $\ln|\Phi(z)| = k(x)\ln y + O(1)$.

(c) On suppose que

$$f(x_1+iy) = O(y^{k(x_1)}), \qquad f(x_2+iy) = O(y^{k(x_2)}) \qquad (y \geqslant 1).$$

Montrer que l'on a

$$f(x+iy) = O(y^{k(x)})$$

uniformément pour $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$. On pourra appliquer, en utilisant l'estimation établie au point (b), le résultat prouvé en (a) à la fonction $G(z) = f(z)/\Phi(z)$.

57. *Points singuliers et réguliers.* Soit $f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n z^n$ une série entière, de rayon de convergence $R > 0$. On dit qu'un point z_0 de module R est *régulier* s'il existe une fonction analytique g définie sur un voisinage V de z_0 qui coïncide avec f dans l'intersection de V et du disque de convergence. Un point du cercle de convergence qui n'est pas régulier est dit *singulier*.

(a) Si les a_n sont positifs, montrer que $z_0 = R$ est un point singulier en adoptant le plan suivant :

(i) Montrer que, s'il existe $r \in]0, R[$ et une fonction g développable en série entière sur $D(R; r)$ et coïncidant avec f dans $D(0; R) \cap D(R; r)$ alors la série de Taylor de f autour du point $R - r/4$ possède un rayon de convergence $\geqslant 3r/4$.

(ii) Écrire cette série de Taylor au point $R + r/4$ comme une série double à termes positifs.

(iii) Déduire une contradiction en appliquant le lemme d'interversion des séries doubles (Lemme II.2.3).

(b) Est-il possible que $\sum_{n=0}^\infty a_n z_0^n$ converge et que z_0 soit un point singulier ? Est-il possible que $\sum_{n=0}^\infty a_n z_0^n$ diverge et que z_0 soit un point régulier ?

(c) Montrer que l'ensemble des points singuliers du disque est fermé.

(d) Soit $f(z) = \sum_{n=0}^\infty z^{2^n}$. Montrer que, pour tous $p \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\lim_{r\to 1-} |f(r\mathrm{e}^{2\pi i p/2^k})| = \infty$. En déduire que tous les points du cercle unité sont singuliers pour f.

Université de Lorraine
Faculté des sciences et technologies
Licence de mathématiques 2012/2013
Analyse complexe (LMI6.33)

Exercices sur la formule de Cauchy et ses conséquences

58. Montrer que pour tout lacet γ de $U := \mathbb{C} \setminus [0,1]$, on a

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z(z-1)} = 0.$$

59. La fonction holomorphe $f(z) := z/(z^2+1)$ admet-elle une primitive sur le domaine $U := \{z \in \mathbb{C} : |z| > 2\}$?

60. (a) Soit γ_R le chemin fermé dont le support géométrique est le bord du demi-disque supérieur de rayon $R > 1$ centré à l'origine. Calculer $\int_{\gamma_R} \mathrm{e}^{iz}\,\mathrm{d}z/(z^2+1)$.

(b) En déduire la valeur de $I := \int_0^\infty (\cos t)\,\mathrm{d}t/(1+t^2)$.

61. Soient U et V deux domaines de $\mathbb{C}$ tels que $U \cap V$ soit connexe. Montrer que toute fonction $f \in \mathcal{C}(U \cup V, \mathbb{C})$ qui vérifie $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$ pour tout lacet γ de U ou de V vérifie également cette même relation lorsque γ est un lacet de $U \cup V$. Montrer par un contre-exemple simple que le résultat est en défaut si $U \cap V$ n'est pas connexe.

62. Soit $\alpha > 0$. Montrer que la fonction f définie par $f(z) := (\mathrm{e}^{iz} - \mathrm{e}^{i\alpha z})/z$ est entière. En intégrant $f(z)\,\mathrm{d}z$ le long du bord du quart de disque $\{x \geqslant 0, y \geqslant 0, x^2+y^2 \leqslant R^2\}$ et en faisant tendre R vers l'infini, trouver la valeur de l'intégrale

$$I(\alpha) := \int_0^\infty \frac{\cos t - \cos \alpha t}{t}\,\mathrm{d}t.$$

63. (a) Calculer le rayon de convergence en $z = 0$ de la série de Taylor de la fonction $f(z) := z/\{\mathrm{e}^z - 1\}$.

(b) Même question pour $g(z) := z^2/\{\operatorname{ch} z - \cos z\}$. On pourra utiliser la formule $\cos p - \cos q = -2\sin\{\frac{1}{2}(p+q)\}\sin\{\frac{1}{2}(p-q)\}$ pour p, $q \in \mathbb{C}$.

64. *Formule de Cauchy pour la dérivée n-ième.* Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{H}(U)$, γ un lacet de U tel que $I(\gamma) \subset U$, $z \in U \setminus \gamma^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$

(a) Montrer que la fonction g définie sur U par

$$g(w) := \begin{cases} (w-z)^{-n-1}\Big\{f(w) - \displaystyle\sum_{0 \leqslant j \leqslant n} \frac{f^{(j)}}{j!}(z)(w-z)^j\Big\} & \text{si } w \neq z, \\ \dfrac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!} & \text{si } w = z, \end{cases}$$

est holomorphe sur U.

(b) Montrer que

$$I(z;\gamma)\frac{f^{(n)}(z)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)\,\mathrm{d}w}{(w-z)^{n+1}}.$$

65. Soient $r > 0$ et $a, b \in D(0,r)$. Calculer

$$I(a,b) := \oint_{|z|=r} \frac{\mathrm{e}^z\,\mathrm{d}z}{(z-a)^2(z-b)^2}.$$

66. *Intégrales de Fresnel.*[1] (a) En intégrant la fonction $z \mapsto \mathrm{e}^{-z^2}$ sur le bord du triangle de sommets $0, R, (1+i)R$, montrer la convergence de l'intégrale impropre $I := \int_0^\infty \mathrm{e}^{-it^2}\,\mathrm{d}t$ et calculer sa valeur. On rappelle que $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

(b) En déduire les valeurs des intégrales de Fresnel

$$C := \int_0^\infty \cos(t^2)\,\mathrm{d}t, \quad \text{et} \quad S := \int_0^\infty \sin(t^2)\,\mathrm{d}t.$$

67. Soit f une fonction entière telle que $|f(z)| \leqslant \sqrt{|z|}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Montrer que $f = 0$.

68. Démontrer le principe du maximum comme une conséquence du théorème de l'application ouverte.

69. Démontrer le théorème de Liouville en utilisant la formule de Cauchy pour montrer que la dérivée d'une fonction entière bornée est identiquement nulle.

70. Soient $D := D(0;1)$ et $f \in \mathcal{H}(D, \mathbb{C}^*)$. Montrer qu'il existe une suite $\{z_n\}_{n=1}^\infty$ de points de D vérifiant d'une part $\lim_{n\to\infty} |z_n| = 1$ et d'autre part $\sup_{n\geqslant 1} |f(z_n)| < \infty$, i.e. $\{f(z_n)\}_{n=1}^\infty$ bornée. On pourra appliquer la formule de la valeur moyenne à $1/f$ sur un cercle de centre 0 et de rayon $r < 1$.

71. Soit f une fonction holomorphe dans un domaine contenant le disque unité fermé $\overline{D}(0;1)$. En calculant de deux façons différentes les intégrales

$$\oint_{|z|=1} \Big(2 + z + \frac{1}{z}\Big)\frac{f(z)}{z}\,\mathrm{d}z, \qquad \oint_{|z|=1} \Big(2 - z - \frac{1}{z}\Big)\frac{f(z)}{z}\,\mathrm{d}z,$$

montrer les formules

$$\int_0^1 f(\mathrm{e}^{2\pi i\vartheta})\cos^2(\pi\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta = \tfrac{1}{2}f(0) + \tfrac{1}{4}f'(0), \quad \int_0^1 f(\mathrm{e}^{2\pi i\vartheta})\sin^2(\pi\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta = \tfrac{1}{2}f(0) - \tfrac{1}{4}f'(0).$$

1. Augustin Jean Fresnel, 1788-1827.

72. *Lemme de la partie réelle.* Soit f une fonction holomorphe dans un ouvert contenant le disque fermé $\overline{D(0;R)}$. On suppose que $f(0)=0$ et que $\Re e\, f(z) \leqslant A$ pour $|z|=R$, avec $A>0$.

(a) En appliquant le principe du maximum à $\mathrm{e}^{f(z)}$, montrer que $\Re e\, f(z) \leqslant A$ pour $|z| \leqslant R$.

(b) Montrer que la fonction $g(z) := f(z)/\{2A - f(z)\}$ est bien définie pour $|z| \leqslant R$ et vérifie $|g(z)| \leqslant 1$ dans ce disque.

(c) En appliquant le lemme de Schwarz à g, montrer que

$$|f(z)| \leqslant \frac{2A|z|}{R-|z|} \qquad (|z|<R).$$

73. Montrer qu'une fonction entière de partie réelle bornée est constante.

74. Soit $U := \{z \in \mathbb{C} : \Im m\, z > 0\}$ et $f \in \mathcal{H}(U)$. On suppose que f est prolongeable par continuité à l'intervalle $]0,1[$ et que $f(x)=0$ pour $0<x<1$. Que peut-on dire de f ?

75. (a) Déterminer toutes les fonctions holomorphes sur $D := D(1;1)$ telles que l'on ait $f(1+1/n) = 1/n^2$ pour tout entier $n \geqslant 2$.

(b) Montrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $f \in \mathcal{H}(D)$ et $f(1/n) = 1/n^2$ $(n \geqslant 2)$;

(ii) $\exists g \in \mathcal{H}(D) : f(z) = z^2 + g(z)\sin(\pi/z)$ $(z \in D)$.

76. Soit $w \in \mathbb{C}^*$. On veut montrer que l'équation $\mathrm{e}^z = wz$ possède au moins une solution sur $\mathbb{C}$. À cette fin, on raisonne l'absurde et l'on suppose que la fonction f définie par $f(z) := \mathrm{e}^z - wz$ ne s'annule pas sur $\mathbb{C}$.

(a) Montrer qu'il existe $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ telle que $f = \mathrm{e}^g$.

(b) En appliquant le lemme de la partie réelle, montrer que g est un polynôme de degré au plus 1.

(c) Conclure.

77. (a) Soient $R>0$, $D_R := D(0;R)$ et $f \in \mathcal{H}(D_R;\mathbb{C}^*)$. En appliquant la formule de Cauchy à une détermination de $\log f$ sur D_R, montrer que l'on a, pour tout $r \in]0,R[$,

$$\ln|f(0)| = \int_0^1 \ln|f(r\mathrm{e}^{2\pi i\vartheta})|\,\mathrm{d}\vartheta.$$

(b) En appliquant le résultat précédent à $f(z) := (1-z)/(2i)$ avec $R<1$, établir la formule

$$\int_0^1 \ln\sin(\pi\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta = -\ln 2.$$

78. *Points singuliers et réguliers (suite).* On rappelle les définitions, données à l'exercice 57, des points réguliers et singuliers pour la somme d'une série entière de rayon de convergence fini. Montrer qu'une telle série entière possède au moins un point singulier.

79. Soient $a > 0$, $b > 0$. Déterminer un lacet de $\mathbb{C}$ dont le support géométrique est l'ellipse d'équation $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$. En calculant de deux manières différentes l'intégrale $I := \int_\gamma \mathrm{d}z/z$, montrer que

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\vartheta}{a^2 \cos^2 \vartheta + b^2 \sin^2 \vartheta} = \frac{2\pi}{ab}.$$

80. Soit f une fonction holomorphe dans un voisinage de l'origine telle que la série $\sum_{n \geqslant 0} f^{(n)}(0)$ soit convergente. Montrer que f se prolonge en une fonction entière.

81. On cherche à établir un théorème du type : *si f et g sont holomorphes et composables et si $g \circ f$ est constante, alors f ou g est constante.* Faut-il pour cela supposer que le domaine de définition de f est connexe ? Que celui de g est connexe ? Démontrer le théorème sous une hypothèse adéquate.

82. Soient U un ouvert simplement connexe et $f \in \mathcal{H}(U)$ une fonction possédant un nombre fini de zéros $z_1, \ldots, z_N$ sur U. Montrer qu'il existe des nombres entiers positifs $a_1, \ldots, a_N$ et une fonction $g \in \mathcal{H}(U)$ telle que $f(z) = \mathrm{e}^{g(z)} \prod_{j=1}^{N} (z - z_j)^{a_j}$ $(z \in U)$.

Université de Lorraine
Faculté des sciences et technologies
Licence de mathématiques 2012/2013
Analyse complexe (LMI6.33)

Exercices sur les développements de Laurent et la théorie des résidus

83. Donner le développement de Laurent de $f(z) := 1/\{(z-1)(2-z)\}$: (a) dans la couronne $D(0;1,2)$; (b) dans la couronne $|z| > 2$.

84. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ satisfaisant aux quatre conditions suivantes.

(i) f est holomorphe en tout point excepté un pôle double en $z = 0$, et deux pôles simples en $z = \pm i$. De plus $\text{Rés}\,(f; -i) = 2i$.

(ii) On a $f(z) = f(-z)$ pour $z \in \mathbb{C} \smallsetminus \{0, \pm i\}$.

(iii) $f(1) = 1$.

(iv) La fonction $z \mapsto f(1/z)$ possède un zéro d'ordre 2 en $z = 0$.

85. Soient $P := \{z \in \mathbb{C} : \Re e\, z \geqslant 0\}$ et $f \in \mathcal{H}(D^*(0;1), P)$.

(i) Montrer que 0 n'est pas une singularité essentielle de f.

(ii) Montrer que 0 est un point régulier de f.

86. Soit $r \in]0, 2\pi[$. Calculer

$$I_n(z) := \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w|=r} w^{n-1} \frac{\mathrm{e}^{wz}}{1 - \mathrm{e}^{w}}\,\mathrm{d}w \qquad (n \in \mathbb{N},\ z \in \mathbb{C}).$$

87. *Formule de Viète.*[1] Soit $P(z) = \sum_{j=0}^{n} c_j z^j \in \mathbb{C}[z]$. On suppose que $c_0 \neq 0$ et on désigne par $\{z_j\}_{j=1}^{n}$ les racines, distinctes ou non, de P. En considérant l'intégrale curviligne

$$\oint_{|z|=R} \frac{P'(z)}{zP(z)}\,\mathrm{d}z$$

avec R assez grand, établir la formule $\sum_{j=1}^{n} 1/z_j = -c_1/c_0$.

Montrer plus généralement que, pour toute fonction $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, on a

$$\sum_{j=1}^{n} g(1/z_j) = ng(0) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g^{(k)}(0) f^{(k-1)}(0)}{k!(k-1)!}$$

avec $f := P'/P$.

1. François Viète, 1540–1603.

88. Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et g, $h \in \mathcal{H}(U)$. On pose $f(z) := g(z)/h(z)$.

(a) Montrer que si $a \in U$ est un zéro double de h, alors

$$\text{Rés}\,(f;a) = \frac{2g'(a)}{h''(a)} - \frac{2g(a)h'''(a)}{3h''(a)^2}.$$

(b) Application. Calculer $\text{Rés}\,(f;0)$ pour $g(z) = \mathrm{e}^z/(\operatorname{sh} z)^2$.

89. Soit D le disque unité ouvert et f une fonction holomorphe dans un ouvert contenant $\overline{D}$, telle que $|f(z)| < 1$ pour $|z| = 1$.

(a) Montrer que f possède un unique point fixe $z_0 \in D$.

(b) Plus généralement, montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$ l'équation $f(z) = z^n$ possède exactement n solutions dans D.

90. Soient $a > \mathrm{e}$, et $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le nombre de zéros de $f(z) := \mathrm{e}^z - az^n$ situés dans le disque unité fermé.

91. Soit $\lambda \in]1, \infty[$. Montrer que la fonction $f(z) := \lambda - z - \mathrm{e}^{-z}$ possède un unique zéro, nécessairement réel, dans le demi-plan $\Re e\, z \geqslant 0$.

92. Soit D le disque unité ouvert et a, $b \in D$. Montrer que l'équation

$$z^2\Big(\frac{z-a}{1-\bar{a}\,z}\Big)^3 = b$$

possède exactement cinq racines dans D.

93. *Généralisation du théorème de Lagrange.* Soit f une fonction holomorphe dans un voisinage de l'origine, telle que $f(0) \neq 0$. Pour $|v|$ et r assez petits, on désigne par $z(v)$ la solution de l'équation $vf(z) = z$ dans $D(0;r)$. Montrer que pour toute fonction g holomorphe au voisinage de 0 et $|v|$ assez petit, on a

$$g\big(z(v)\big) = g(0) + \sum_{n\geqslant 1} b_n v^n$$

avec

$$b_n := \frac{1}{n!}\left[\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}}\Big\{g'(z)f(z)^n\Big\}\right]_{z=0} \qquad (n \geqslant 1).$$

94. *Développement en série de Lagrange de la plus grande racine d'un polynôme.*

Soit $P(z) := \sum_{0\leqslant j\leqslant k} a_j z^j$ un polynôme à coefficients réels, de degré $k \geqslant 1$ et tel que $a_k > 0$. On pose $\widehat{P}(z) = z^k P(1/z) = a_k + a_{k-1}z + \cdots + a_0 z^k$.

(a) Montrer que pour $t > P(0)$, l'équation $P(x) = t$ possède au moins une racine réelle positive. On désigne par $x(t)$ la plus grande de ces racines réelles.

(b) Montrer que, pour t assez grand, $y(t) = 1/x(t)$ est solution de $\widehat{P}(y)^{1/k}t^{-1/k} = y$.

(c) En appliquant le résultat de l'Exercice 93 avec $f(z) := \widehat{P}(z)^{1/k}$ et $g(z) := \widehat{P}(z)^{-1/k}$, où la racine k-ième est prise en détermination principale, montrer que l'on a pour t assez grand

$$x(t) = \Big(\frac{t}{\widehat{P}(0)}\Big)^{1/k} - \frac{\widehat{P}'(0)}{k\widehat{P}(0)} - \sum_{n\geqslant 1}\frac{c_n}{t^{n/k}}$$

avec

$$c_n := \frac{1}{n\cdot(n+1)!}\left[\frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}z^{n+1}}\widehat{P}(z)^{n/k}\right]_{z=0}$$

95. *Une application du théorème de Rouché au calcul asymptotique.*

(a) Montrer que, pour tout $t > 0$, l'équation $x\mathrm{e}^x = t$ possède une solution unique $x = x(t)$.

(b) Montrer que, pour t assez grand, $y(t) := x(t) - \ln t + \ln\ln t \in]0, 1[$.

(c) Montrer que, pour t assez grand, $y(t)$ est l'unique solution dans le disque $|z| < \pi$ de l'équation $1 - \mathrm{e}^{-z} + \lambda z - \mu = 0$, où l'on a posé $\lambda := 1/\ln t$, $\mu := (\ln\ln t)/\ln t$.

(d) Montrer que

$$y(t) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=\pi} \frac{z(\mathrm{e}^{-z} + \lambda)}{1 - \mathrm{e}^{-z} + \lambda z - \mu}\,\mathrm{d}z.$$

(e) Montrer que l'on a, pour t assez grand,

$$x(t) = \ln t - \ln\ln t + \sum_{k\geqslant 1} \frac{P_k(\ln\ln t)}{(\ln t)^k}$$

où P_k est un polynôme de degré k. Calculer P_1.

96. Calculer $I := \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\vartheta}{1 + \cos^2\vartheta}$.

97. Établir les relations suivantes en appliquant le théorème des résidus.

(a) $$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{\{a + b\cos x\}^2} = \frac{2\pi a}{(a^2 - b^2)^{3/2}} \qquad (0 < b < a),$$

(b) $$\int_0^{2\pi} \frac{(\sin x)^2\,\mathrm{d}x}{a + b\cos x} = \frac{2\pi}{a + \sqrt{a^2 - b^2}} \qquad (0 < b < a),$$

(c) $$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(2x)\,\mathrm{d}x}{1 - 2a\cos x + a^2} = \frac{2\pi a^2}{1 - a^2} \qquad (|a| < 1).$$

98. Soient $a > 0$, $b > 0$. Calculer $I(a,b) := \displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)}$.

99. Soient $a > 0$, $b > 0$. Calculer $I(a,b) := \displaystyle\int_0^\infty \frac{x\sin ax}{x^2 + b^2}\,\mathrm{d}x$.

100. Montrer que

$$\int_0^\infty \frac{x}{1 + x^5}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi/5}{\sin(2\pi/5)}$$

en intégrant $f(z) := z/(1 + z^5)$ le long du bord du secteur circulaire

$$S_R := \{r\mathrm{e}^{i\varphi} : 0 \leqslant r \leqslant R,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi/5\} \qquad (R > 0).$$

101. Soient $a > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que l'on a

$$\int_0^\infty \frac{\cos(\lambda x)}{\operatorname{ch} x + \operatorname{ch} a}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi\sin(\lambda a)}{\operatorname{sh}(\pi\lambda)\operatorname{sh} a}$$

en intégrant la fonction $f : z \mapsto \mathrm{e}^{i\lambda z}/(\operatorname{ch} z + \operatorname{ch} a)$ le long du périmètre du rectangle de sommets $\pm R$, $\pm R + 2\pi i$ avec $R > 0$ assez grand.

102. Calculer $I := \displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$.

103. (a) Soient $z_0 \in \mathbb{C}$, ϑ_1, ϑ_2 des nombres réels tels que $0 \leqslant \vartheta_1 < \vartheta_2 \leqslant 2\pi$, $\varepsilon > 0$ et γ_ε l'arc de cercle $\{z \in \mathbb{C} : \vartheta_1 \leqslant \arg(z - z_0) \leqslant \vartheta_2,\ |z - z_0| = \varepsilon\}$. Montrer que pour toute fonction méromorphe f ayant un pôle simple en z_0 on a

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\gamma_\varepsilon} f(z)\,\mathrm{d}z = i(\vartheta_2 - \vartheta_1)\,\mathrm{Rés}\,(f; z_0)\,.$$

(b) Calculer

$$I := \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$$

en appliquant, pour $R > \varepsilon > 0$, le théorème des résidus à $g(z) := \mathrm{e}^{iz}/z$ sur le bord de la demi-couronne $D(0; \varepsilon, R) \cap \{z : \Im m\, z > 0\}$.

104. Calculer $I := \int_0^\infty (\ln x)\,\mathrm{d}x/\{x^2 - 1\}$ en généralisant convenablement la propriété établie à l'Exercice 103(a) et en intégrant, lorsque la détermination du logarithme est définie sur $\mathbb{C} \smallsetminus \mathbb{R}^+$ avec $\arg z \in]0, 2\pi[$, la fonction méromorphe $f(z) := (\log z)^2/(z^2 - 1)$ sur le lacet $\gamma = \gamma_1^- * \gamma_2 * \gamma_3 * \gamma_4^- * \gamma_5^- * \gamma_6^-$ où

$$\begin{cases} \gamma_1^* := \lim\limits_{\eta \to 0+} \{\varepsilon \mathrm{e}^{i\vartheta} : \eta \leqslant \vartheta \leqslant 2\pi - \eta\} \\ \gamma_2^* := \lim\limits_{\eta \to 0+} [\varepsilon + i\eta, R + i\eta] \\ \gamma_3^* := \lim\limits_{\eta \to 0+} \{R\mathrm{e}^{i\vartheta} : \eta \leqslant \vartheta \leqslant 2\pi - \eta\}, \\ \gamma_4^* := \lim\limits_{\eta \to 0+} [1 + \varepsilon - i\eta, R - i\eta], \\ \gamma_5^* := \lim\limits_{\eta \to 0+} \{1 + \varepsilon \mathrm{e}^{i\vartheta} : \pi + \eta \leqslant \vartheta \leqslant 2\pi - \eta\}, \\ \gamma_6^* := \lim\limits_{\eta \to 0+} [\varepsilon - i\eta, 1 - \varepsilon - i\eta] \end{cases}$$

lorsque $0 \leqslant \varepsilon < 1$, $R > 2$.

105. *Formule de Jensen.*[2]

(a) Soit $R > 0$ et $D_R := D(0; R)$. Montrer que si $f \in \mathcal{H}\big(D_R, \mathbb{C}^*\big)$, alors il existe sur D_R une détermination holomorphe de $\log f$. En déduire que l'on a pour tout $r < R$

$$\ln|f(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f(r\mathrm{e}^{i\varphi})|\,\mathrm{d}\varphi.$$

(b) Montrer que $\int_0^{2\pi} \ln|1 - \mathrm{e}^{i\vartheta}|\,\mathrm{d}\vartheta = 0$. On pourra appliquer la formule établie en (a) avec $f(z) = 1 - z$ pour $R < 1$ et opérer un passage à la limite que l'on justifiera soigneusement.

(c) On suppose maintenant que, pour $r \in]0, R[$ fixé, f possède exactement n zéros comptés avec multiplicité, disons $a_1, \ldots, a_n$ dans $\overline{D(0, r)}$ et que $f(0) \neq 0$. On pose

$$N(\varrho) := |\{j \in [1, n] : |a_j| \leqslant \varrho\}| \qquad (0 \leqslant \varrho \leqslant r).$$

Montrer la formule de Jensen

$$\ln|f(0)| + \ln\Big(\frac{r^n}{|a_1 \cdots a_n|}\Big) = \ln|f(0)| + \int_0^r \frac{N(\varrho)}{\varrho}\,\mathrm{d}\varrho = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f(r\mathrm{e}^{i\varphi})|\,\mathrm{d}\varphi.$$

2. Johan Ludwig William Valdemar Jensen, 1859–1925.

On pourra définir m tel que $\max_{j\leqslant m}|a_j| < r = |a_k|$ $(m < k \leqslant n)$, introduire la fonction $F(z) := f(z)\prod_{j=1}^{m}\frac{r^2-\overline{a_j}z}{r(a_j-z)}\prod_{j=m+1}^{n}\frac{a_j}{a_j-z}$, comparer $\ln|F(z)|$ à $\ln|f(z)|$ pour $|z| = r$ et utiliser la relation établie en (b).

106. Soit $\alpha > 1$. Montrer que l'on a

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha+1} = \frac{\pi/\alpha}{\sin(\pi/\alpha)}$$

en intégrant, après l'avoir correctement définie, la fonction $z \mapsto f(z) := 1/(1+z^\alpha)$ le long du lacet γ_R constitué du segment $[0, R]$, de l'arc de cercle $\{R\mathrm{e}^{i\vartheta} : 0 \leqslant \vartheta \leqslant 2\pi/\alpha\}$, et du segment $\left[R\mathrm{e}^{2\pi i/\alpha}, 0\right]$.

107. Établir la validité des deux relations suivantes pour $a > 0$, $n \geqslant 0$.

(a) $$\int_0^\infty \frac{\sin(nx)}{x(a^2+x^2)}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi(1-\mathrm{e}^{-an})}{2a^2},$$

(b) $$\int_0^\infty \frac{\cos(nx)}{a^4+x^4}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2a^3}\mathrm{e}^{-na/\sqrt{2}}\sin\Big(\frac{na}{\sqrt{2}}+\frac{\pi}{4}\Big).$$

108. La fonction $z \mapsto \log z$ désignant la détermination principale du logarithme sur $\mathbb{C}\smallsetminus\mathbb{R}^-$, on pose pour $a > 0$

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+a^2)\log z}.$$

On se donne des paramètres positifs ε, R tels que $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}a$, $a^2 < R^2+\varepsilon^2$ et l'on considère le chemin fermé $\gamma(\varepsilon, R)$ constitué des segments $[-R \pm i\varepsilon, -\varepsilon \pm i\varepsilon]$ joints par deux arcs de cercle de centre 0 et ne coupant pas la demi-droite réelle négative. En intégrant f le long de $\gamma(\varepsilon, R)$, montrer que

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(a^2+x^2)\{(\ln x)^2+\pi^2\}} = \frac{2\pi}{a\{4(\ln a)^2+\pi^2\}} - \frac{1}{1+a^2}.$$

Université de Lorraine
Faculté des sciences et technologies
Licence de mathématiques 2012/2013
Analyse complexe (LMI6.33)

Exercices sur les suites, séries et produits infinis de fonctions méromorphes

109. Soient U un domaine de $\mathbb{C}$ et $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite de fonctions de $\mathcal{H}(U)$ convergeant uniformément sur tout compact de U vers une fonction f.

(a) Montrer que si f_n ne s'annule pas sur U pour n assez grand, alors soit f est identiquement nulle, soit f ne s'annule pas sur U. On pourra considérer, pour chaque zéro z de f, l'ordre de multiplicité $\omega(z;f)$, que l'on écrira comme une intégrale sur un contour adéquat.

(b) Montrer que si f_n est injective pour n assez grand, alors f est injective.

110. Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ distinct de $\mathbb{C}$, $A := \{a_n\}$ une suite finie ou non d'éléments de U deux à deux distincts, sans point d'accumulation, et $\{m_n\}_{n=0}^{\infty}$ une suite d'entiers positifs.

Le but de cet exercice consiste à montrer qu'il existe une fonction $f \in \mathcal{H}(U)$ dont A est l'ensemble des zéros et telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n soit un zéro d'ordre m_n de f.

(a) Établir le résultat demandé lorsque A est fini.

(b) Montrer que, pour tout z de U il existe $w \in \mathbb{C} \setminus U$ tel que $d(z, \mathbb{C} \setminus U) = |z - w|$.

(c) Dans cette question, on suppose que la suite A est infinie et bornée. On désigne par $A^* = \{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ la suite dont les valeurs sont les éléments de A et où chaque a_n apparaît exactement m_n fois. Pour chaque $n \geqslant 0$, soit $b_n \in \mathbb{C} \setminus U$ tel que $\mathrm{d}(\alpha_n, \mathbb{C} \setminus U) = |\alpha_n - b_n|$.

(i) Montrer que $\lim_{n\to\infty} |\alpha_n - b_n| = 0$.

(ii) Montrer que le produit infini

$$\prod_{n\geqslant 0} E_n\Big(\frac{\alpha_n - b_n}{z - b_n}\Big)$$

converge uniformément sur tout compact de U et conclure.

(d) On suppose à présent que A est infini et non borné. Soit $w \in U \setminus A$. On pose $c_n := 1/\{a_n - w\}$ $(n \geqslant 0)$.

(i) Montrer que $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ est bornée et sans point d'accumulation dans l'ouvert $V := \{1/(z - w) : z \in U\}$. En déduire l'existence d'une fonction $g \in \mathcal{H}(V)$ telle que $Z(g) = \{c_n : n \geqslant 0\}$, chaque zéro c_n étant de multiplicité m_n.

(ii) Montrer que la fonction $f \in \mathcal{H}(U \setminus \{w\})$ définie par $f(z) = g(1/(z - w))$ peut être prolongée en une fonction holomorphe sur U. Conclure.

111. Déterminer le plus grand ouvert U où la série $\sum_{n=0}^{\infty} z^n/(1+z^{2n})$ converge. La somme de cette série est-elle holomorphe dans U ?

112. Soit f une fonction holomorphe sur $D(0;1)$ telle que $f(0) = 0$. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} f(z^n)$ converge uniformément sur tout compact de $D(0;1)$. On pourra utiliser, pour $r \in \,]0,1[$, le lemme de Schwarz sur le disque $D(0;r)$.

113. Soit U un domaine de $\mathbb{C}$ et $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ une suite de fonctions holomorphes sur U convergeant uniformément sur tout compact de U vers une fonction f.

(a) Montrer que, si f n'est pas identiquement nulle, alors tout zéro w de f est limite d'une suite $\{w_n\}_{n\in I}$ telle que $f_n(w_n) = 0$ pour $n \in I$. On pourra utiliser le théorème de Rouché.

(b) Montrer que, si tous les zéros des f_n sont réels et si f n'est pas identiquement nulle, alors f n'a que des zéros réels.

114. Soit a un nombre réel. Montrer que

$$\frac{i\pi\,\mathrm{sh}(2\pi a)}{\sin\pi(z+ia)\sin\pi(z-ia)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\Big(\frac{1}{z+n-ia} - \frac{1}{z+n+ia}\Big).$$

En déduire que

$$\frac{\pi\,\mathrm{sh}(2\pi a)}{\mathrm{ch}(2\pi a) - \cos(2\pi z)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{a}{(z+n)^2+a^2}.$$

115. Établir la validité des développements suivants en séries de fonctions méromorphes

$$\pi\,\mathrm{tg}(\pi z) = -2z\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{z^2-(n+\frac12)^2},$$

$$\frac{\pi}{\sin(\pi z)} = \frac{1}{z} + \sum_{n\geqslant 1}(-1)^n\frac{2z}{z^2-n^2},$$

$$\frac{\pi}{\cos(\pi z)} = \sum_{n\geqslant 0}(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{z^2-(n+\frac12)^2}.$$

116. Montrer que la formule

$$h(z) = z\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1+z/(2n)}{1+z/(2n-1)}$$

définit une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$. Quels sont ses zéros, ses pôles ? Que vaut $h(1)$? Calculer $h'(z)/h(z) + h'(z+1)/h(z+1)$ et en déduire que $h(z)h(z+1) = 2z/\pi$.

117. *Le théorème de Bohr–Mollerup.*

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe telle que $\varphi(1) = 0$, $\varphi(x+1) = \varphi(x) + \ln x$ $(x > 0)$.

(a) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, la fonction $\psi_n(x) := \{\varphi(n+1+x) - \varphi(n+1)\}/x$ est croissante sur $[-1, 0[\cup]0, 1]$.

(b) En déduire que $0 \leqslant \varphi(x) - \ln\big(n!\,n^x/\prod_{j=0}^{n}(j+x)\big) \leqslant 1/n$ $\quad (0 < x \leqslant 1,\ n \geqslant 1)$.

(c) Montrer que φ est uniquement déterminée et satisfait la formule d'Euler

$$\mathrm{e}^{\varphi(x)} = \lim_{n\to\infty} n!\,n^x\prod_{j=0}^{n}(j+x)^{-1} \qquad (x > 0).$$

118. *Une autre caractérisation de* Γ.

(a) Montrer que $\Gamma'(x)/\Gamma(x) < \ln x$ $(x > 0)$. En déduire que $x \mapsto \mathrm{e}^x x^{-x}\Gamma(x)$ est décroissante pour $x > 0$.

(b) Montrer que Γ est uniquement déterminée par la propriété de décroissance de (a) et les conditions $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

119. *Preuve de Gauss de la formule d'Euler.*

(a) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 0$ et tout nombre complexe s tel que $\sigma > 0$,

$$\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} = -\sum_{0 \leqslant j \leqslant n} \frac{1}{(s+j)} + \frac{\Gamma'(s+n)}{\Gamma(s+n)}.$$

(b) Montrer que $\Gamma'(s)/\Gamma(s) = \ln s + O(1/s)$ pour $s \in \mathbb{R}$, $s > 1$.

(c) En déduire la formule d'Euler $\Gamma(s) = \lim_{n\to\infty} n^s\, n! \prod_{0 \leqslant j \leqslant n} 1/(s+j)$.

120. Soient $\{a_j\}_{j=1}^k$ et $\{b_j\}_{j=1}^k$ deux suites finies de nombres complexes telles que

$$b_j \notin \mathbb{Z}\ (1 \leqslant j \leqslant k), \qquad \sum_{1 \leqslant j \leqslant k} a_j = \sum_{1 \leqslant j \leqslant k} b_j.$$

Montrer que

$$\prod_{n=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{k} \frac{n-a_j}{n-b_j} = \prod_{j=1}^{k} \frac{\Gamma(1-b_j)}{\Gamma(1-a_j)}.$$

121. Soient $k \geqslant 2$ et $\varepsilon_k = \mathrm{e}^{2\pi i/k}$. Montrer en utilisant le résultat de l'exercice 120 que

$$\prod_{n=1}^{\infty} \Bigl(1 - \frac{x}{n^k}\Bigr) = \prod_{j=0}^{k-1} \Gamma\bigl(1 - \varepsilon_k^j x^{1/k}\bigr)^{-1} \quad (x > 0).$$

122. Montrer que $\displaystyle\int_{-1}^{1} (1+t)^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t = 2^{x+y-1}\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \quad (x > 0,\ y > 0).$

123. *L'intégrale de Dirichlet.*

Montrer que pour $f \in \mathcal{C}[0,1]$, $\alpha_j > 0$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$, $\beta = \sum_{j=1}^n \alpha_j$, on a

$$\int_{\sum_{j=1}^n t_j \leqslant 1} f\Bigl(\textstyle\sum_{j=1}^n t_j\Bigr) \displaystyle\prod_{j=1}^{n} \frac{\mathrm{d}t_j}{t_j^{1-\alpha_j}} = \frac{\prod_{j=1}^n \Gamma(\alpha_j)}{\Gamma(\beta)} \int_0^1 f(u)u^{\beta-1}\,\mathrm{d}u.$$

124. Calculer l'intégrale double $\int_\Delta x^\alpha y^\beta\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, où α, β sont des paramètres positifs et Δ est le domaine $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x^\mu + y^\nu \leqslant 1$ $(\mu > 0,\ \nu > 0)$.

125. Calculer $\int_z^{z+1} \log\Gamma(w)\,\mathrm{d}w$ pour tout $z \in \mathbb{C} \smallsetminus \mathbb{R}^-$.

126. *La formule de Legendre–Gauss.*

(a) En utilisant la formule de Legendre, montrer que $\int_0^1 \ln\Gamma(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln(2\pi)$.

(b) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$ on a

$$\prod_{j=0}^{n-1} \Gamma\Bigl(\frac{x+j}{n}\Bigr) = (2\pi)^{\frac{1}{2}(n-1)} n^{\frac{1}{2}-x}\Gamma(x) \qquad (x > 0).$$

127. (a) En utilisant directement la définition de $\Gamma(z)$ sous forme intégrale, montrer que

$$-\Gamma'(1) = \ln x - \frac{1}{x}\int_0^\infty (\ln t)\mathrm{e}^{-t/x}\,\mathrm{d}t \qquad (x > 1).$$

(b) En utilisant l'approximation $\ln t = \sum_{n \leqslant t} 1/n - \gamma + O(1/t)$ $(t > 1)$, établir la formule

$$\Gamma'(1) = -\gamma.$$

128. *Formules de Gauss et Dirichlet.*

(a) Montrer que $\gamma = \int_0^1 \frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t - \int_1^\infty \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$ puis que

$$\gamma = \int_0^\infty \Big(\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-t}} - \frac{1}{t}\Big)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

(b) Montrer que pour $\Re e\, z > 0$ on a $\dfrac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = -\gamma - \dfrac{1}{z} - \displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{z}{n(z+n)}$. En utilisant (a) et en écrivant $1/(z+n) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t(z+n)}\,\mathrm{d}t$ ($\Re e\, z > 0$), montrer la formule de Gauss

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \int_0^\infty \Big(\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t} - \frac{\mathrm{e}^{-zt}}{1-\mathrm{e}^{-t}}\Big)\,\mathrm{d}t \qquad (\Re e\, z > 0).$$

(c) Montrer que $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^\infty \Big(\frac{1}{(1+x)^2\ln(1+x)} - \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\Big)\,\mathrm{d}x = 0$. En déduire grâce au résultat de (b) la formule de Dirichlet

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \int_0^\infty \Big(\mathrm{e}^{-x} - (1+x)^{-z}\Big)\frac{\mathrm{d}x}{x} \qquad (\Re e\, z > 0).$$

129. *Une autre démonstration de la formule des compléments.*

(a) Pour $\alpha \in]0,1[$, montrer l'existence de l'intégrale $I(\alpha) := \int_0^\infty t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t/(1+t)$ et calculer sa valeur. On pourra soit utiliser la méthode des résidus, soit traiter d'abord le cas $\alpha = p/q \in \mathbb{Q}$, $q \in 4\mathbb{N}^*$, par le changement de variable $t = u^q$ et conclure par un argument de continuité.

(b) Déduire de (a) la formule des compléments : $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \pi/\sin(\pi z)$ ($z \in \mathbb{C} \smallsetminus \mathbb{Z}$).

130. (a) Soit $T_N(\xi)$ le polynôme déterminé par la relation $\sin(2N+1)x = T_N(\sin x)$. Montrer que

$$T_N(\xi) = (2N+1)\xi\prod_{k=1}^N \Big(1 - \xi^2\Big/\sin^2\frac{\pi k}{2N+1}\Big).$$

(b) Choisir $\xi = \sin\frac{\pi x}{2N+1}$ et faire tendre N vers l'infini en justifiant soigneusement le passage à la limite pour obtenir la formule d'Euler $\sin(\pi x) = \pi x\prod_{k=1}^\infty \big(1 - x^2/k^2\big)$.

(c) En déduire, grâce à la formule du produit de Weierstrass, la formule des compléments pour $\Gamma(x)$.

131. (a) Montrer les formules

$$\int_0^\infty t^{z-1}\cos t\,\mathrm{d}t = \Gamma(z)\cos\big(\tfrac{1}{2}\pi z\big) \qquad (0 < \Re e\, z < 1),$$
$$\int_0^\infty t^{z-1}\sin t\,\mathrm{d}t = \Gamma(z)\sin\big(\tfrac{1}{2}\pi z\big) \qquad (-1 < \Re e\, z < 1).$$

(b) En déduire la valeur des intégrales de Fresnel $I = \int_0^\infty \cos(t^2)\,\mathrm{d}t$, $J = \int_0^\infty \sin(t^2)\,\mathrm{d}t$.

132. *Sur le volume de la boule unité de $\mathbb{R}^n$ et les fonctions sphériques.*

On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est *sphérique* s'il existe une fonction $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ telle que $f(\boldsymbol{x}) = g(\|\boldsymbol{x}\|)$, où $\|\boldsymbol{x}\|$ désigne la norme euclidienne de $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$. On désigne par μ la mesure sur $\mathbb{R}^+$ image de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$ par l'application $\boldsymbol{x} \mapsto \|\boldsymbol{x}\|$, de sorte que $\int_0^\infty g(t)\,\mathrm{d}\mu(t) = \int_{\mathbb{R}^n} g(\|\boldsymbol{x}\|)\,\mathrm{d}x$ pour toute fonction $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ telle que le second membre ait un sens.

(a) Montrer que, pour tout $y \in \mathbb{R}^+$, on a $\mu([0, y]) = y^n V_n$ avec $V_n = \mu([0, 1])$. En déduire que $\mathrm{d}\mu(y) = nV_n y^{n-1}\,\mathrm{d}y$ sur $[0, \infty[$.

(b) En choisissant une fonction sphérique f convenable, montrer que

$$V_n = \pi^{n/2}/\Gamma(1 + n/2).$$

(c) Montrer que $\int_{\mathbb{R}^n} \big(1 + \|\boldsymbol{x}\|^2\big)^{-\frac{1}{2}(n+1)}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \pi^{\frac{1}{2}(n+1)}/\Gamma\big(\frac{1}{2}(n+1)\big)$.

Université Henri Poincaré–Nancy 1 mai 2003
Licence de mathématiques 2002/2003
Analyse complexe

Devoir

I. *Lemme de Schwarz–Pick.*

Soient $D = D(0;1)$ le disque unité ouvert de $\mathbb{C}$. On désigne sous le nom de *facteur de Blaschke* associé à $a \in D$ la fonction $\varphi_a : D \to \mathbb{C}$ définie par

$$\varphi_a(z) := \frac{z-a}{1-\overline{a}z}.$$

(a) Montrer que, pour tout a de D, la fonction φ_a est une application holomorphe injective. Calculer z en fonction de $w := \varphi_a(z)$. En déduire que $\varphi_a(D) = D$. Calculer $\varphi_a'(0)$ et $\varphi_a'(a)$.

(b) Soient $a \in D$ et $f : D \to D$ une fonction holomorphe. On note $b := f(a)$. En considérant la fonction $g := \varphi_b \circ f \circ \varphi_{-a}$, montrer que

$$|f'(a)| \leqslant \frac{1-|b|^2}{1-|a|^2}.$$

Décrire les cas d'égalité.

II. Déterminer le résidu en $z = 0$ des fonctions méromorphes

$$\alpha(z) := \frac{1}{z^3\sin(z^3)}, \qquad \beta(z) := z\cos(1/z), \qquad \gamma(z) := \frac{\sqrt{1-z^2}}{z^4(1-z^3)},$$

où la racine carrée complexe est prise en détermination principale.

III *(Exercice 99).* Soient $a > 0$ et $b > 0$. Calculer $I(a,b) := \displaystyle\int_0^\infty \frac{x\sin(ax)}{x^2+b^2}\,\mathrm{d}x$.

IV. (a) Montrer que, si les fonctions $z \mapsto f(z)$ et $z \mapsto f(1/z)$ sont entières, alors f est constante.

(b) Montrer que, si la fonction $z \mapsto f(z)$ est entière et $z \mapsto f(1/z)$ est méromorphe sur $\mathbb{C}$, alors f est un polynôme.

(c) Montrer que, si les fonctions $z \mapsto f(z)$ et $z \mapsto f(1/z)$ sont méromorphes sur $\mathbb{C}$, alors f est une fraction rationnelle.

Université Henri Poincaré–Nancy 1 — mai 2004
Licence de mathématiques 2003/2004
Analyse complexe

Devoir

I. *Sommes de signes.*

Soit $\psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ satisfaisant à :

- $\psi(a) \notin \mathbb{Z}, \quad \psi(b) - \psi(a) \in \mathbb{Z}$,
- $\psi^{-1}(\mathbb{Z})$ est fini,
- $t \in \psi^{-1}(\mathbb{Z}) \Rightarrow \psi$ est dérivable en t et $\psi'(t) \neq 0$.

Le but de cette partie est d'établir la formule

$$\psi(b) - \psi(a) = \sum_{t \in \psi^{-1}(\mathbb{Z})} \operatorname{sgn}\{\psi'(t)\}. \tag{2}$$

(a) Montrer que l'on peut se limiter à établir (2) lorsque $0 < \psi(a) < 1$ et $\psi(b) = N + \psi(a)$ où $N \in \mathbb{N}$. Dans toute la suite de cette partie, on supposera donc ces hypothèses supplémentaires réalisées.

(b) Soit $\nu \in \mathbb{Z} \cap \psi([a,b])$ et soient $x_1 < x_2 \ldots < x_k$ les solutions dans $[a,b]$ de l'équation $\psi(x) = \nu$.

(i) Montrer que, si $j \in [1, k-1]$ est tel que $\psi'(x_j) > 0$, alors

$$\psi(x_{j+1} - h) - \psi(x_{j+1}) > 0 \qquad (0 < h < x_{j+1} - x_j).$$

En déduire que $\psi'(x_{j+1}) < 0$.

(ii) Montrer que $\operatorname{sgn}\{\psi'(x_j)\} = (-1)^{j-1} \operatorname{sgn}\{\psi'(x_1)\}$ pour $1 \leqslant j \leqslant k$.

(c) Déduire de ce qui précède que la relation (2) est valide lorsque $N = 0$.

(d) En appliquant la conclusion de la question précédente à la fonction f définie sur $[a, b+1]$ par

$$f(t) := \begin{cases} \psi(t) & \text{si } a \leqslant t \leqslant b \\ \psi(a) + N(b+1-t) & \text{si } b < t \leqslant b+1, \end{cases}$$

établir la validité de (2) dans le cas général.

II. *Détermination continue de l'argument sur un chemin.*

Étant donnés un chemin $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ et un nombre complexe $z_0 \in \mathbb{C} \smallsetminus \gamma^*$, on dit qu'une fonction $\varphi \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$ est une détermination continue de l'argument de $\gamma - z_0$ sur $[a,b]$ si l'on a

$$\gamma(t) - z_0 = |\gamma(t) - z_0| \mathrm{e}^{i\varphi(t)}, \quad t \in [a,b].$$

On se propose ici d'établir l'existence d'une telle détermination pour tout chemin γ et tout $z_0 \in \mathbb{C} \smallsetminus \gamma^*$. À cette fin, on introduit l'ensemble A des $s \in [a,b]$ tels qu'il existe une détermination continue de l'argument de $\gamma - z_0$ sur $[a,s]$.

(a) Montrer que A est non vide.

(b) Montrer que A est fermé dans $[a,b]$.

(c) Montrer que, si $s \in A$, il existe une détermination de $\log(z - z_0)$ dans un disque de rayon assez petit autour de $\gamma(s)$. En déduire que A est un ouvert de $[a,b]$

(d) Conclure.

III. *Principe de l'argument.*

Soient $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ un lacet, $z_0 \in \mathbb{C} \smallsetminus \gamma^*$ et $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ une détermination continue de l'argument de $\gamma - z_0$ sur $[a, b]$. On pose

$$\varrho(t) = |\gamma(t) - z_0| \qquad (a \leqslant t \leqslant b).$$

(a) Montrer que, pour tout $t_0 \in [a, b]$, il existe une détermination du logarithme telle que dans un voisinage suffisamment petit de t_0 dans $[a, b]$ on ait

$$\log\{\gamma(t) - z_0\} = \ln \varrho(t) + i\varphi(t).$$

En déduire que ϱ et φ sont de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[a, b]$.

(b) Montrer que l'on a

$$I(z_0; \gamma) = \frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{2\pi}.$$

IV. *Une formule générale pour calculer l'indice.*

Soient $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ un lacet, $z_0 \in \mathbb{C} \smallsetminus \gamma^*$ et $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ une détermination continue de l'argument de $\gamma - z_0$ sur $[a, b]$.

Soit alors $\vartheta \in \mathbb{R}$. On considère la demi-droite $\Delta = z_0 + \mathrm{e}^{i\vartheta}\mathbb{R}^+$. On suppose que $\gamma(a) = \gamma(b) \notin \Delta$ et que, pour tout $t \in \gamma^{-1}(\Delta)$, on a $\Im m\,\{\gamma'(t)\mathrm{e}^{-i\vartheta}\} \neq 0$.

On définit le déterminant de deux nombres complexes $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ comme le déterminant des vecteurs associés, soit

$$\text{dét}(z, z') := xy' - yx' = \Im m\,(\overline{z}z').$$

Étant donné $t_0 \in [a, b]$ tel que $\gamma(t_0) \in \Delta$, on dira que Δ coupe γ en $\gamma(t_0)$ dans le sens direct si la base de vecteurs associés à $\mathrm{e}^{i\vartheta}$ et $\gamma'(t_0)$ est de sens direct, autrement dit si $\text{dét}(\mathrm{e}^{i\vartheta}, \gamma'(t_0)) > 0$. Dans le cas contraire, on dira que Δ coupe γ en $\gamma(t_0)$ dans le sens indirect.

(a) Montrer que, pour chaque t de $\gamma^{-1}(\Delta)$, on a

$$\text{dét}(\mathrm{e}^{i\vartheta}, \gamma'(t)) = \varphi'(t)\varrho(t).$$

En déduire que γ coupe Δ en t dans le sens direct si, et seulement si, $\operatorname{sgn}\{\varphi'(t)\} = 1$.

(b) Pour $t \in \gamma^{-1}(\Delta)$, on pose $\sigma(t) := \operatorname{sgn}\{\varphi'(t)\}$. Ainsi, $\sigma(t) = 1$ si Δ coupe γ en $\gamma(t)$ dans le sens direct, et $\sigma(t) = -1$ dans le cas contraire.

En utilisant la formule (2) pour la fonction $\psi(t) := (\varphi(t) - \vartheta)/2\pi$, le principe de l'argument établi à la partie III, et le résultat de la question précédente, montrer que

$$I(z_0; \gamma) = \sum_{t \in \gamma^{-1}(\Delta)} \sigma(t).$$

V. *Une application.*

On définit les chemins $\gamma_k : [0, 1] \to \mathbb{C}$ $(1 \leqslant k \leqslant 6)$ par les relations suivantes :

$$\gamma_1(t) := 2\mathrm{e}^{i5\pi t/3} \qquad (t \in [0, 1])$$

$$\gamma_2(t) := (-2 + 8t)\mathrm{e}^{2i\pi/3} \qquad (t \in [0, 1])$$

$$\gamma_3(t) := 6\mathrm{e}^{(2+5t)i\pi/3} \qquad (t \in [0, 1])$$

$$\gamma_4(t) := (6 - 10t)\mathrm{e}^{i\pi/3} \qquad (t \in [0, 1])$$

$$\gamma_5(t) := 4\mathrm{e}^{(4-t)i\pi/3} \qquad (t \in [0, 1])$$

$$\gamma_6(t) := 6t - 4 \qquad (t \in [0, 1])$$

Dessiner le lacet $\gamma := \gamma_1 * \gamma_2 * \gamma_4 * \gamma_4 * \gamma_5 * \gamma_6$ et calculer $I(-1 - i; \gamma)$.

Université Henri Poincaré–Nancy 1 | Mardi 11 juin 2002
Licence de mathématiques 2001/2002 | Durée : 3h
Analyse complexe

Sujet d'examen

La consultation des notes manuscrites *de cours et travaux dirigés est autorisée, à l'exclusion de tout autre document. L'usage d'une calculatrice est interdit.*

Le barème est donné à titre indicatif.

I. (4 pts) Soit $f(z) = \sqrt{1+z}$, où $\sqrt{\ }$ désigne la détermination principale de la racine carrée.

(i) Quel est le domaine de définition de f ? On le notera U.

(ii) Soit $a \in U$. Montrer que pour tout z suffisamment voisin de a, on a

$$\sqrt{1+z} = \sqrt{1+a}\sqrt{1+\frac{z-a}{1+a}}.$$

(iii) Développer la fonction f en série entière autour du point $z = i$.

(iv) Déterminer le rayon de convergence r de la série entière.

(v) Est-ce que sa somme est égale à $\sqrt{1+z}$ dans $D(i;r)$ tout entier ? Justifier.

II. (3 pts). Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $r > 1$, et soit $f : D(0;r) \to \mathbb{C}$ la fonction holomorphe définie par

$$f(z) = \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n.$$

Déterminer la couronne de convergence de la série de Laurent

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_{|n|} z^n$$

et trouver la fonction qu'elle définit (en fonction de f).

III. (3 pts) Trouver le nombre de zéros (comptés avec multiplicités) de chacune des fonctions suivantes, dans les domaines indiqués.

(i) $f(z) = z^5 + \frac{1}{3}z^3 + \frac{1}{4}z^2 + \frac{1}{3}$ dans $D(0;1)$.

(ii) $f(z) = 9z^5 + 5z - 3$ dans $D(0;5) \setminus \overline{D(0;\frac{1}{2})}$.

IV. (4 pts) Vérifier par la méthode des résidus les résultats suivants.

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{(p+\cos t)^2} = \frac{2\pi p}{(p^2-1)^{3/2}} \qquad (p > 1),$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}\,\mathrm{d}x}{(x^2+4)^2} = \frac{\pi}{32}.$$

V. (3 pts) Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$, et soit D une droite de $\mathbb{C}$. Montrer que toute fonction continue sur U et holomorphe sur $U \setminus D$ est holomorphe sur U.

Indication : on pourra utiliser le théorème de Morera.

VI. (3 pts) Soit U un domaine de $\mathbb{C}$, soit A un fermé discret de U, et soit f une fonction holomorphe et injective sur $U \setminus A$. Montrer que :

(i) aucun point de A n'est une singularité essentielle de f ;

(ii) si un point de A est un pôle de f alors il est simple ;

(iii) si tous les points de A sont des points singuliers éliminables, alors f se prolonge en une fonction holomorphe injective sur U.

Université Henri Poincaré–Nancy 1 — Mardi 5 avril 2005
Licence de Mathématiques 2004/2005 — Durée : 3h
Analyse complexe

Sujet d'examen partiel

Aucun document n'est autorisé. L'usage d'une calculatrice est interdit. Sauf mention contraire, les notations sont celles du cours.

Les quatre parties peuvent être traitées indépendamment, quitte à admettre certains résultats indiqués dans l'énoncé.

Il sera tenu le plus grand compte de la rédaction et de la présentation. Seules les explications claires et précises seront prises en compte à la correction.

I. *Question de cours.* Soit U un domaine de $\mathbb{C}$. La formulation du principe du maximum comprend deux parties. La première stipule qu'une fonction f de $\mathcal{A}(U)$ qui n'est pas constante sur U n'a pas de maximum local sur U. La seconde énonce que, lorsque U est borné et f se prolonge par continuité à $\overline{U}$, alors on a sous les hypothèses précédentes

$$|f(z)| < \sup_{w \in \partial U} |f(w)| \qquad (z \in U).$$

Expliquer en détail comment la seconde partie découle de la première.

II. Soient D le disque unité ouvert et $\mathcal{M}$ la classe des fonctions f analytiques sur D et satisfaisant à $\sup_{z\in D} |f(z)| \leqslant 1$, $f(\frac{1}{2}) = 0$. On se propose de déterminer $\alpha := \sup_{f\in\mathcal{M}} |f(i/2)|$.

(a) On pose $B(z) := (z - \frac{1}{2})/(1 - z/2)$. Montrer que $|B(z)| = 1$ lorsque $|z| = 1$.

(b) Montrer que, pour $z \in D$, on a $|f(z)| \leqslant |B(z)|$. On pourra commencer par établir que $h = f/B$ se prolonge en une fonction de $\mathcal{A}(D)$.

(c) Déterminer α.

III. Soient U un domaine de $\mathbb{C}$ contenant l'origine et $F \in \mathcal{H}(U)$ une fonction telle que $F(0) = 1$.

(a) Montrer qu'il existe un nombre réel $R > 0$ tel que, si log désigne la détermination principale du logarithme complexe, alors la fonction $z \mapsto \log\{F(z)\}$ soit holomorphe sur $D(0; R)$.

(b) Montrer que, pour $0 < r < R$, on a $\int_0^{2\pi} \log\{F(re^{i\vartheta})\}\,\mathrm{d}\vartheta = 0$. En déduire que, si la fonction $z \mapsto \arg F(z)$ est constante sur le cercle $C(0; r)$, alors cette constante est nulle.

(c) Montrer que, si, pour tout r de $]0, R[$, la fonction $z \mapsto \arg F(z)$ est constante sur $C(0; r)$, alors F est constante sur U.

IV. Soit U un domaine de $\mathbb{C}$ et f, $g \in \mathcal{H}(U)$. On pose $\varphi(z) := |f(z)| + |g(z)|$ $(z \in U)$.

(a) Montrer que, pour tout $z_0 \in U$ il existe $R = R(z_0) > 0$ tel que l'inégalité

$$(*) \qquad \varphi(z_0) \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi\big(z_0 + re^{i\vartheta}\big)\,\mathrm{d}\vartheta$$

ait lieu pour tout $r \in [0, R]$.

(Voir suite au dos.)

(b) On suppose à présent que φ possède un maximum local en un point z_0 de U.

(i) Montrer que $(*)$ est une égalité.

(ii) En appliquant la formule de la valeur moyenne à f et g en z_0, montrer que, pour $r \in [0, R]$, on a

$$2\pi|f(z_0)| = \left|\int_0^{2\pi} f\big(z_0 + r\mathrm{e}^{i\vartheta}\big)\,\mathrm{d}\vartheta\right| = \int_0^{2\pi} \big|f\big(z_0 + r\mathrm{e}^{i\vartheta}\big)\big|\,\mathrm{d}\vartheta.$$

En déduire en particulier que, si $f(z_0) = 0$, alors f est identiquement nulle sur U.

(iii) On suppose à présent $f(z_0) \neq 0$. En écrivant

$$\left|\int_0^{2\pi} f\big(z_0 + r\mathrm{e}^{i\vartheta}\big)\,\mathrm{d}\vartheta\right| = \mathrm{e}^{-i\varphi_r}\int_0^{2\pi} f\big(z_0+r\mathrm{e}^{i\vartheta}\big)\,\mathrm{d}\vartheta = \int_0^{2\pi} \Re e\left\{\mathrm{e}^{-i\varphi_r} f\big(z_0+r\mathrm{e}^{i\vartheta}\big)\right\}\mathrm{d}\vartheta$$

pour tout $r \in [0, R]$ et pour une valeur convenable du nombre réel φ_r, montrer que l'on peut choisir une détermination de l'argument telle que l'on ait $\arg f(z) = \varphi_r$ pour $z \in C(z_0; r)$ et $0 \leqslant r \leqslant R$. En appliquant alors le résultat établi à la partie III(c) à la fonction $z \mapsto F(z) := f(z_0 + z)/f(z_0)$, en déduire que f est constante sur U, puis, par symétrie, qu'il en va de même pour g.

(c) On suppose maintenant l'existence d'une fonction $h \in \mathcal{H}(U)$ telle que $\varphi(z) = |h(z)|$ pour tout $z \in U$. En appliquant le résultat établi à la question (b) aux fonctions f/h et g/h pour un sous-ouvert convenable V de U, montrer que f et g sont proportionnelles.

Université Henri Poincaré–Nancy 1 — samedi 28 mai 2005
Licence de Mathématiques 2004/2005 — durée : 3h
Analyse complexe

Sujet d'examen

Aucun document n'est autorisé. L'usage d'une calculatrice est interdit. Sauf mention contraire, les notations sont celles du cours.

Les quatre parties sont indépendantes.

Il sera tenu le plus grand compte de la rédaction et de la présentation. Seules les explications claires et précises seront prises en compte à la correction.

I. *Question de cours.* Énoncer le théorème de Rouché.
Application. Calculer le nombre des racines du polynôme $P(z) := z^7 - 5z^5 + z^4 - 2$ dans la couronne $D(0; 1, 2)$.

II. Soient D le disque unité ouvert, $D^* := D^*(0; 1)$ le disque unité épointé et $f : D^* \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe injective.

(a) Montrer que 0 n'est pas une singularité essentielle de f. On raisonnera par l'absurde en considérant l'ensemble $f\big(D(0; \frac{1}{2}, 1)\big) \cap f\big(D^*(0; \frac{1}{2})\big)$ et en appliquant le théorème de Casorati–Weierstrass.

(b) On suppose à présent que 0 est un pôle d'ordre $k \geqslant 1$ de f et l'on écrit $f(z) = g(z)/z^k$ où $g \in \mathcal{H}(D)$ est telle que $g(0) \neq 0$.

(i) Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que g ne s'annule pas sur $D_r := D(0; r)$.

(ii) En déduire qu'il existe une fonction $h \in \mathcal{H}(D_r)$ telle que l'on ait $g(z) = h(z)^k$ pour $z \in D_r$.

(iii) On pose $M_h := \sup_{|z| \leqslant r/2} |h(z)|$. Montrer que, pour $w \in \mathbb{C}$, $|w| > 2M_h/r$, l'équation $h(z) = wz$ possède exactement une racine dans $D(0; r/2)$.

(iv) Soit $w_0 := 3M_h/r$. Pour $j = 0, \ldots, k-1$, on note z_j la racine dans $D(0; r/2)$ de l'équation $h(z) = zw_0\mathrm{e}^{2\pi ij/k}$. Montrer que z_j est racine de l'équation $f(z) = w_0^k$.

(v) Montrer que l'on a nécessairement $k = 1$.

III. Soit f une fonction entière. On pose $f(z) = P(z) + iQ(z)$ $(z \in \mathbb{C})$ avec $P(z) := \Re e\, f(z)$, $Q(z) := \Im m\, f(z)$. On fait l'hypothèse que l'on a $Q(z) \geqslant 0$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

(a) Montrer que l'on peut définir une fonction g sur $\mathbb{C}$ par la formule

$$g(z) := \frac{f(z)}{i + f(z)} \quad (z \in \mathbb{C}).$$

(b) Montrer que l'on a $|g(z)| \leqslant 1$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

(c) Que peut-on en déduire pour f ?

IV. Soit $a \in \mathbb{R}$. On se propose ici d'établir la formule

$$I(a) := \int_0^\infty \frac{\sin(2ax)}{\operatorname{sh} x}\, \mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\pi \operatorname{th}(\pi a)$$

en intégrant la fonction $z \mapsto f(z) := \mathrm{e}^{2iaz}/\operatorname{sh} z$ sur le contour $\gamma := \gamma_1 * \cdots * \gamma_8$ où l'on a posé, pour $R > \pi > \varepsilon > 0$,

$$\gamma_1 := [-R, -\varepsilon], \qquad \gamma_2 := \{\varepsilon \mathrm{e}^{i\vartheta} : 0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi\}^-$$
$$\gamma_3 := [\varepsilon, R], \qquad \gamma_4 := [R, R + 2\pi i]$$
$$\gamma_5 := [R + 2\pi i, \varepsilon + 2\pi i], \qquad \gamma_6 := \{2\pi i + \varepsilon \mathrm{e}^{i\vartheta} : \pi \leqslant \vartheta \leqslant 2\pi\}^-$$
$$\gamma_7 := [-\varepsilon + 2\pi i, -R + 2\pi i] \qquad \gamma_8 := [-R + 2\pi i, -R].$$

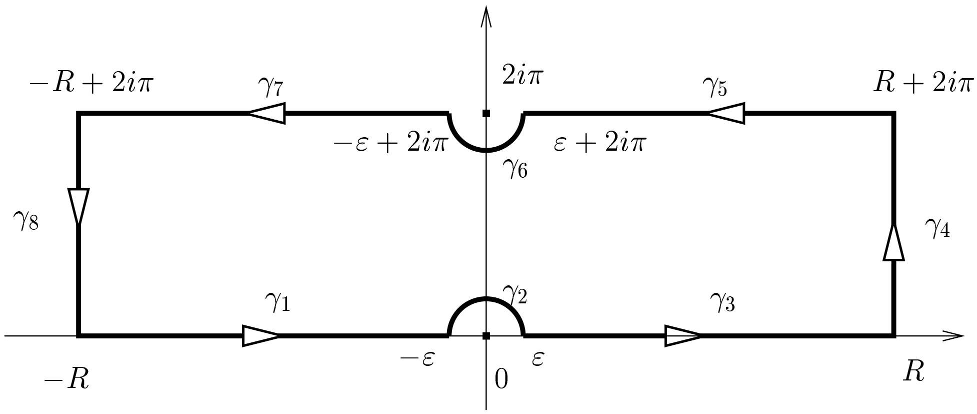


FIGURE. *Le contour γ.*

(a) Déterminer les pôles de f sur $\mathbb{C}$ et calculer les résidus correspondants.

(b) Calculer $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$ pour $R > \pi > \varepsilon > 0$.

(c) Calculer $\lim\limits_{R\to\infty} \int_{\gamma_4} f(z)\,\mathrm{d}z$ et $\lim\limits_{R\to\infty} \int_{\gamma_8} f(z)\,\mathrm{d}z$.[1]

(d) Montrer que $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z = -i\pi$ et $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \int_{\gamma_6} f(z)\,\mathrm{d}z = -i\pi\mathrm{e}^{-4a\pi}$.

(e) Pour $R > \pi > \varepsilon > 0$, simplifier l'expression

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_3} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_5} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_7} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

(f) Conclure.

1. On rappelle que $|\operatorname{sh} z|^2 = (\operatorname{sh} x)^2 + (\sin y)^2$ pour $z = x + iy$, avec x, $y \in \mathbb{R}$.

Université de Lorraine
Faculté des sciences et technologies
Licence de mathématiques 2004/2005
Analyse complexe

vendredi 1er juillet 2005
durée : 2h

Sujet d'examen

Aucun document n'est autorisé. L'usage d'une calculatrice est interdit.

Les cinq parties sont indépendantes. Les notations utilisées sont celles du cours.

Il sera tenu le plus grand compte de la rédaction et de la présentation. Seules les explications claires et précises seront prises en compte à la correction.

I. *Question de cours.* Énoncer le principe du prolongement analytique.

II. Déterminer le rayon de convergence de la série de Taylor à l'origine de la fonction $z \mapsto z/\sin z$.

III. Montrer la convergence de l'intégrale

$$I := \int_0^\infty \frac{\sin(\pi x)}{x(1-x^2)}\,\mathrm{d}x$$

et calculer sa valeur en intégrant une fonction méromorphe convenablement choisie sur le bord orienté du domaine $U(R,\varepsilon)$ défini par les conditions suivantes

$$U(R,\varepsilon): \qquad \Im m\, z > 0, \quad \varepsilon < |z| < R, \quad |z+1| > \varepsilon, \quad |z-1| > \varepsilon,$$

avec $0 < \varepsilon < 1/4$ et $R > 2$. On vérifiera que $3 < I < 4$.

IV. Soit $f \in \mathcal{H}\big(\mathbb{C} \smallsetminus \mathbb{Z}, D(0;1)\big)$. Montrer que f est constante.

V. Dans tout cet exercice, on désigne par log la détermination principale du logarithme complexe.

(a) Montrer que la fonction

$$f(z) := \log(1+z+z^2) + \log(1-z) - \log(1-z^3)$$

est bien définie sur le disque unité ouvert $D := D(0;1)$.

(b) Calculer $f'(z)$ pour $z \in D$. En déduire la valeur de $f(z)$ pour $z \in D$.

(c) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n := -2$ si $n \equiv 0 \pmod 3$, $a_n := 1$ si $n \equiv \pm 1 \pmod 3$. Montrer que, pour $z \in D$, on a

$$\log(1+z+z^2) := \sum_{n \geqslant 1} a_n \frac{z^n}{n}\cdot$$

(d) On pose $A_n := \sum_{1 \leqslant m \leqslant n} a_m$ $(n \geqslant 1)$. Montrer que $0 \leqslant A_n \leqslant 2$ pour tout entier $n \geqslant 1$.

(e) Montrer que

$$\ln 3 = \sum_{n \geqslant 1} \frac{a_n}{n}\cdot$$

Université Henri Poincaré–Nancy 1 Vendredi 21 avril 2006
Licence de Mathématiques 2004/2005 Durée : 3h
Analyse complexe

Sujet d'examen partiel

Aucun document n'est autorisé. L'usage d'une calculatrice est interdit. Sauf mention contraire, les notations sont celles du cours.

Les cinq parties sont indépendantes hormis les questions I(b) et II(b)

Il sera tenu le plus grand compte de la rédaction et de la présentation. Seules les explications claires et précises seront prises en compte à la correction.

I. Soit $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ la suite définie par $c_0 = c_1 = 1$ et $c_{n+2} = c_n + c_{n+1}$. On note ϱ le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} c_n z^n$ et, pour $|z| < \varrho$, on désigne par $F(z)$ la somme de la série.

(a) Montrer que l'on a $1 \leqslant c_n \leqslant 2^n$ pour tout entier $n \geqslant 0$. En déduire que $\varrho \geqslant \frac{1}{2}$.

(b) Montrer que pour $|z| < \varrho$, la somme $F(z)$ vérifie une équation simple issue des relations entre les coefficients. En déduire que $F(z)$ est une fraction rationnelle dont on précisera les pôles.

II. Soit $Q \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme à coefficients complexe, de degré $n \geqslant 1$ et dont les n racines, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ vérifient $0 < |\alpha_1| < |\alpha_2| < \cdots < |\alpha_n|$. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non nul. On pose $f(z) := P(z)/Q(z)$.

(a) Montrer que f est bien définie sur un ouvert U contenant l'origine que l'on précisera.

(b) Écrire le développement en éléments simples de f sur U. Montrer que $f \in \mathcal{A}(U)$.

(c) Soit

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \tag{1}$$

le développement en série entière de $f(z)$ au voisinage de l'origine. Déduire du résultat obtenu en (b) une expression de a_k en fonction de k. Montrer que le rayon de convergence R de la série (1) est égal à $|\alpha_1|$.

(d) Déduire du résultat obtenu en (b) que f est holomorphe sur le disque ouvert $D(0, |\alpha_1|)$. Retrouver la valeur de R en appliquant un théorème général du cours que l'on citera précisément.

(e) Application. Déterminer le rayon de convergence ϱ de la série considérée dans la partie I.

III. Soient U un domaine de $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{H}(U)$, F un fermé de U. Montrer que si $\Re e\, f$ atteint son maximum sur F en un point intérieur de F, alors f est constante sur U. On pourra introduire la fonction $g := \exp f$.

IV. (a) Montrer qu'il existe une fonction $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \smallsetminus \mathbb{R}^-)$ telle que $f(x) = x^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$.

(b) Montrer que $U := \mathbb{C} \smallsetminus \mathbb{R}^-$ est symétrique par rapport à la droite réelle. En déduire que l'on a nécessairement $f(\overline{z}) = \overline{f(z)}$ pour tout $z \in U$.

(c) Retrouver ce résultat par le calcul.

(*suite au verso*)

V. On désigne par log la détermination principale du logarithme complexe.

(a) Donner le domaine de définition U de la fonction

$$f(z) := \log(z+i) - \log(z-i).$$

(b) Calculer les deux limites $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$.

(c) Calculer $f'(z)$ pour $z \in U$ et en déduire la valeur de

$$\lim_{x\to\infty} \int_{-x}^{x} \left\{ \frac{1}{t+i} - \frac{1}{t-i} \right\} \mathrm{d}t.$$

(d) Retrouver le résultat précédent en introduisant la fonction $t \mapsto \arctan t$.

Université Henri Poincaré–Nancy 1 — Vendredi 2 juin 2006
Licence de Mathématiques 2004/2005 — Durée : 3h
Analyse complexe

Sujet d'examen

Aucun document n'est autorisé. L'usage d'une calculatrice est interdit. Sauf mention contraire, les notations sont celles du cours.

Les trois parties sont indépendantes. Une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation. Seules les explications claires et précises seront prises en compte à la correction.

I. *Question de cours.* Énoncer le principe des zéros isolés pour une fonction analytique. On précisera bien les hypothèses. Peut-on en déduire que, si une fonction f de $\mathcal{H}(D(0;1))$ s'annule en $1-1/n$ pour tout entier $n \geqslant 1$, alors f est identiquement nulle ? On pourra considérer la fonction $z \mapsto \sin\{\pi/(1-z)\}$. Commenter.

II. Soient $R > 0$ et $f \in \mathcal{H}\big(D(0;R)\big)$. Pour $0 \leqslant r < R$, on pose

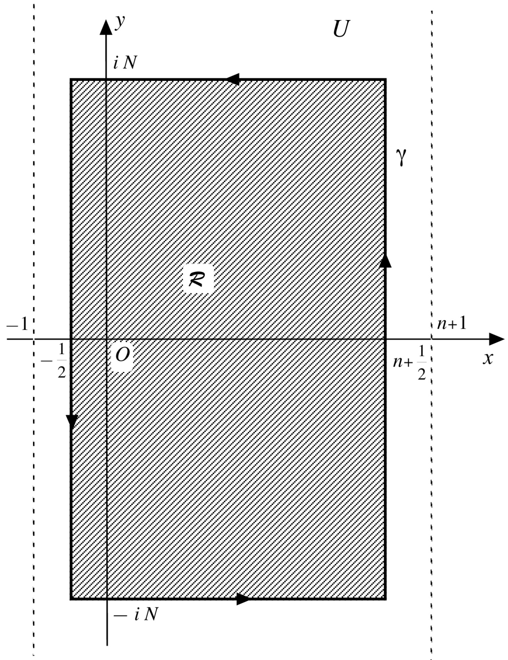
$$M(r) := \max_{|z|=r} |f(z)|. \qquad (*)$$

(a) Montrer que $r \mapsto M(r)$ est une fonction croissante (au sens large) de $r \in [0, R[$.

(b) Montrer que si f n'est pas constante, alors $r \mapsto M(r)$ est strictement croissante.

III. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose

$$F(z) := \frac{\sin(\pi z)}{\pi z} \frac{(-1)^n n!}{\prod_{1\leqslant j\leqslant n}(z-j)}.$$



(a) Montrer que F est prolongeable en une fonction entière.

(b) Montrer que l'on a $F(k) = \binom{n}{k}$ pour tout entier $k \geqslant 0$.

(c) Montrer que F ne s'annule pas sur l'ouvert $U := \{z \in \mathbb{C} : -1 < \Re e\, z < n+1\}$.

(d) Montrer que l'on peut définir sur U une détermination holomorphe de $\sqrt{F(z)}$, que l'on notera $H(z)$.

(e) Montrer que $F(x)$ est réel positif pour $-\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant n + \frac{1}{2}$. En déduire que $H(x)$ est réel pour ces mêmes valeurs de x. Par un argument de continuité, montrer que l'on peut choisir la détermination $H(z)$ de $\sqrt{F(z)}$ de sorte qu'elle soit réelle positive sur $[-\frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}]$.

(f) On pose $G(z) := \pi H(z)/\sin(\pi z)$ $(z \in U)$. Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{R}$ le rectangle de sommets $-\frac{1}{2} \pm iN$, $n + \frac{1}{2} \pm iN$, et γ le bord orienté de $\mathcal{R}$, parcouru dans le sens direct. Montrer que l'on a

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma G(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{0\leqslant k\leqslant n} (-1)^k \sqrt{\binom{n}{k}}. \qquad (**)$$

(Suite au verso.)

(g) Montrer que l'on a $|\sin z|^2 = (\sin x)^2 + (\operatorname{sh} y)^2$ pour tout nombre complexe $z = x + iy$ ($x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$).

(h) On désigne par I_N^- et I_N^+ les contributions respectives des segments horizontaux

$$S_N^- := [-\tfrac{1}{2} - iN, n + \tfrac{1}{2} - iN], \quad S_N^+ := [-\tfrac{1}{2} + iN, n + \tfrac{1}{2} + iN],$$

à l'intégrale de $(**)$. Montrer que $|z - j| \geqslant N$ pour $0 \leqslant j \leqslant n$ et $z \in S_N^- \cup S_N^+$. En déduire que I_N^- et I_N^+ tendent vers 0 lorsque $N \to \infty$.

(i) Montrer que $|G(n - z)| = |G(z)|$ pour tout $z \in U$.

(j) Montrer que, pour tout entier $j \geqslant 1$, on a

$$\frac{j}{j + \frac{1}{2}} \leqslant \sqrt{\frac{j}{j+1}}.$$

En déduire que, pour $z = -\frac{1}{2} + iy$, $y \in \mathbb{R}$, on a

$$\left|\frac{n!}{\prod_{1 \leqslant j \leqslant n}(z - j)}\right| \leqslant \prod_{1 \leqslant j \leqslant n} \frac{j}{j + \frac{1}{2}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

(k) On désigne par J_N et K_N les contributions respectives des segments verticaux $[-\frac{1}{2} - iN, -\frac{1}{2} + iN]$ et $[n + \frac{1}{2} - iN, n + \frac{1}{2} + iN]$ à l'intégrale de $(**)$. Montrer que

$$\max\{|J_N|, |K_N|\} \leqslant \int_{-N}^{N} |G(-\tfrac{1}{2} + iy)| \,\mathrm{d}y \leqslant \frac{A}{(n+1)^{1/4}}$$

où A est une constante que l'on précisera (on ne demande pas de valeur numérique).

(l) Montrer l'existence et déterminer la valeur de

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} (-1)^k \sqrt{\binom{n}{k}}.$$

Université Henri Poincaré–Nancy 1 — Vendredi 30 juin 2006
Licence de Mathématiques 2004/2005 — Durée : 3h
Analyse complexe

Sujet d'examen

Aucun document n'est autorisé. L'usage d'une calculatrice est interdit. Sauf mention contraire, les notations sont celles du cours.

Les trois parties sont indépendantes. Une attention particulière sera portée à la rédaction et à la présentation. Seules les explications claires et précises seront prises en compte à la correction.

I. *Question de cours.* Énoncer le lemme de Schwarz pour une fonction holomorphe en précisant bien les cas d'égalité.

Soient $D := D(0;1)$ et $f \in \mathcal{H}\big(D, D\big) \cap \mathcal{C}\big(\overline{D}\big)$ une fonction telle que $f(0) = 0$ et $|f(z)| = 1$ pour $|z| = 1$. La fonction $z \mapsto f(z)/z$ est-elle nécessairement constante ? Expliquer. On pourra considérer le cas particulier $f(z) := z^2$.

II. Soient $D := D(0;1)$ et $h \in \mathcal{H}\big(D, \mathbb{C}\big) \cap \mathcal{C}\big(\overline{D}\big)$ une fonction vérifiant $|h(z) - z| < 1$ pour tout nombre complexe z tel que $|z| = 1$. Déterminer le nombre de zéro(s), compté(s) avec multiplicité, de $h(z)$ dans D.

III. Soit h une fonction holomorphe satisfaisant aux hypothèses de l'exercice II.

(a) Montrer que $h(D) \subset D(0;2)$.

(b) Montrer que $|h'(\frac{1}{2})| \leqslant 8$. On pourra introduire la fonction $g : D(0;\frac{1}{2}) \to \mathbb{C}$ définie par $g(w) := h(\frac{1}{2} + w) - h(\frac{1}{2})$ et montrer que g est à valeurs dans $D(0;4)$.

IV. Le but de cet exercice est de calculer l'intégrale

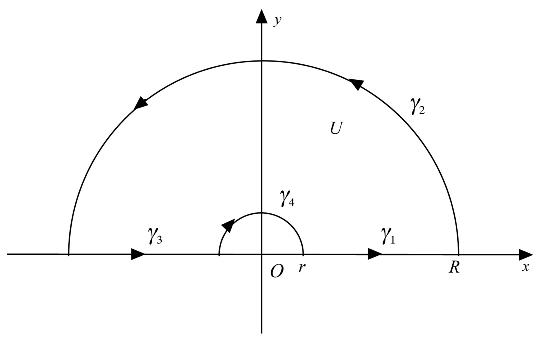
$$I := \int_0^{+\infty} \frac{(\ln t)^2}{1 + t^2} \, \mathrm{d}t$$

par une méthode d'intégration complexe. Dans toute la suite, on désigne par log la détermination holomorphe du logarithme complexe sur $\mathbb{C} \smallsetminus (i\mathbb{R}^-)$ définie par $-\frac{1}{2}\pi < \arg z < \frac{3}{2}\pi$.

(a) Montrer que la fonction $f(z) := \dfrac{(\log z)^2}{1 + z^2}$ est méromorphe sur $\mathbb{C} \smallsetminus (i\mathbb{R}^-)$.

(b) Déterminer l'ensemble polaire de f et calculer le ou les résidus correspondants.

(c) Soient r, R deux nombres réels tels que $0 < r < 1 < R$, U la demi-couronne $\{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R, \Im m\, z > 0\}$ et $\gamma = \gamma_1 * \gamma_2 * \gamma_3 * \gamma_4$ le bord orienté de U, représenté sur la figure ci-contre. Calculer l'intégrale



$$(*) \qquad J(r,R) := \int_\gamma f(z) \, \mathrm{d}z.$$

(*Voir suite au verso.*)

(d) Soit $J_2(R)$ la contribution à l'intégrale $(*)$ du demi-cercle γ_2 de rayon R. Étudier $\lim_{R\to\infty} J_2(R)$.

(e) Soit $J_4(r)$ la contribution à l'intégrale $(*)$ du demi-cercle γ_4 de rayon r. Étudier $\lim_{r\to 0+} J_4(r)$.

(f) On pose

$$J_{13}(r,R) := \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_3} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Calculer la valeur de

$$\lim_{\substack{R\to+\infty \\ r\to 0+}} \Re e\, J_{13}(r,R)$$

en fonction de I. On rappelle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{d}t/(1+t^2) = \tfrac{1}{2}\pi$.

(g) Déterminer la valeur de I.

Université Henri Poincaré–Nancy 1 — Jeudi 29 mars 2007
Licence de Mathématiques 2006/2007 — Durée : 3h
Analyse complexe

Sujet d'examen partiel

Aucun document n'est autorisé. L'usage d'une calculatrice est interdit. Sauf mention contraire, les notations sont celles du cours.

Les trois exercices sont indépendants.

Il sera tenu le plus grand compte de la rédaction et de la présentation. Seules les explications claires et précises seront prises en compte à la correction.

I. Énoncer la formule de Cauchy pour un ouvert étoilé. Montrer comment ce résultat permet de calculer l'intégrale

$$I := \oint_{|z|=1} \frac{\sin z}{z^2}\,\mathrm{d}z.$$

II. On désigne par $\sqrt{\cdot}$ la détermination principale de la racine carrée sur $\mathbb{C} \smallsetminus \mathbb{R}^-$.

(a) Déterminer le domaine de définition U de la fonction $f(z) := \sqrt{z^2}$.

(b) Donner une expression explicite de $f(z)$ pour tout z de U.

(c) Peut-on prolonger f par continuité sur un ouvert plus grand ?

III. Soient a, b deux nombres réels tels que $a < b$. On définit l'ouvert

$$U := \{z \in \mathbb{C} : a < \Re e\, z < b\}.$$

Soit $f \in \mathcal{H}(U) \cap \mathcal{C}\big(\overline{U}\big)$ une fonction bornée sur $\overline{U}$. Pour tout réel $x \in [a, b]$, on pose $M(x) := \sup_{y \in \mathbb{R}} |f(x + iy)|$.

Le but de ce problème consiste à établir que, pour tout $x \in [a, b]$, on a

$$M(x)^{b-a} \leqslant M(a)^{b-x} M(b)^{x-a} \tag{1}$$

(a) On suppose dans cette question que $M(a) \leqslant 1$ et $M(b) \leqslant 1$. Soit $\varepsilon > 0$. On définit sur $\overline{U}$ la fonction

$$f_\varepsilon(z) := f(z)\mathrm{e}^{\varepsilon z^2}.$$

(i) Montrer que $f_\varepsilon \in \mathcal{H}(U) \cap \mathcal{C}\big(\overline{U}\big)$.

(ii) Montrer que f_ε est bornée sur $\overline{U}$ et que $\lim\limits_{y \to \pm\infty} \sup\limits_{a \leqslant x \leqslant b} |f_\varepsilon(x + iy)| = 0$.

(iii) On pose $M_\varepsilon(x) := \sup_{y \in \mathbb{R}} |f_\varepsilon(x + iy)|$. En appliquant le principe du maximum à la fonction f_ε sur le rectangle $U_T := U \cap \{z \in \mathbb{C} : |\Im m\, z| \leqslant T\}$ et en faisant tendre T vers l'infini, montrer que, pour tout $z \in U$, on a

$$|f_\varepsilon(z)| \leqslant \max\big(M_\varepsilon(a), M_\varepsilon(b)\big).$$

(iv) En déduire que, pour tout $z \in \overline{U}$, on a $|f(z)| \leqslant 1$.

(b) On abandonne ici l'hypothèse $\max(M(a), M(b)) \leqslant 1$. Soient $\mu(a) > 0$, $\mu(b) > 0$ tels que $\mu(a) \geqslant M(a)$, $\mu(b) \geqslant M(b)$. Soit g la fonction définie sur $\overline{U}$ par

$$g(z) := \mu(a)^{(b-z)/(b-a)} \mu(b)^{(z-a)/(b-a)}.$$

(i) Montrer que g est une fonction entière sans zéro et que $1/g$ est bornée sur $\overline{U}$. Calculer $|g(a + iy)|$ et $|g(b + iy)|$ pour $y \in \mathbb{R}$.

(ii) Montrer la formule

$$M(x)^{b-a} \leqslant \mu(a)^{b-x} \mu(b)^{x-a} \qquad (a \leqslant x \leqslant b)$$

en appliquant à la fonction f/g le résultat établi en (a).

(c) Établir la formule (1) dans le cas général.

Université Henri Poincaré–Nancy 1 — Mardi 22 mai 2007
Licence de Mathématiques 2006/2007 — Durée : 3h
Analyse complexe

Sujet d'examen

Aucun document n'est autorisé. L'usage d'une calculatrice est interdit. Sauf mention contraire, les notations sont celles du cours.

Les deux parties sont indépendantes.

Il sera tenu le plus grand compte de la rédaction et de la présentation. Seules les explications claires et précises seront prises en compte à la correction.

I. Dans tout ce problème, on définit implicitement, lorsque $z \in \mathbb{C}$, les nombres réels x et y par la formule $z = x + iy$. On désigne par log la détermination principale du logarithme complexe sur $\mathbb{C} \smallsetminus \mathbb{R}^-$. Pour tout $\varepsilon \in]0, \frac{1}{4}[$ on définit

$$V_\varepsilon := \{z \in \mathbb{C} : -\varepsilon/2 < x < 1 + \varepsilon/2,\ |z| > \varepsilon,\ |z-1| > \varepsilon\}$$
$$U_\varepsilon := V_\varepsilon \cap \{z \in \mathbb{C} : 0 < x < 1,\ y > 0\}.$$

On notera que $\overline{U_\varepsilon} \subset V_\varepsilon$.

(a) Montrer que, pour tout nombre complexe z, on a

$$\sin(\pi z) = \sin(\pi x)\operatorname{ch}(\pi y) + i\cos(\pi x)\operatorname{sh}(\pi y).$$

En déduire que $\sin(\pi z) \in \mathbb{C} \smallsetminus \mathbb{R}^-$ pour tout z de V_ε.

(b) Montrer que, pour tout ε de $]0, \frac{1}{4}[$, la fonction $f(z) := \log\{\sin(\pi z)\}$ est bien définie et holomorphe sur V_ε.

(c) Soit $\varepsilon > 0$, $T > 0$. On pose

$$\mathcal{R}_{\varepsilon,T} := U_\varepsilon \cap \{z \in \mathbb{C} : y < T\}$$

et l'on note $\gamma(\varepsilon, T)$ le bord de $\mathcal{R}_{\varepsilon,T}$, orienté positivement. Calculer

$$\int_{\gamma(\varepsilon,T)} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

(d) Soient $I_{\varepsilon,T} := \displaystyle\int_{[i\varepsilon, iT]} f(z)\,\mathrm{d}z$,

$$J_{\varepsilon,T} := \int_{[1+i\varepsilon, 1+iT]} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Calculer $L_T := \lim_{\varepsilon\to 0}\{J_{\varepsilon,T} - I_{\varepsilon,T}\}$.

(e) En approchant $\operatorname{ch}(\pi T)$ et $\operatorname{sh}(\pi T)$ par $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\pi T}$, montrer que, lorsque T vers l'infini, on a

$$f(x + iT) = \pi T - \ln 2 - i\pi(x - \tfrac{1}{2}) + O\big(\mathrm{e}^{-2\pi T}\big)$$

uniformément pour $0 \leqslant x \leqslant 1$. En déduire l'existence et la valeur de

$$\lim_{T\to\infty}\Big\{L_T - \int_{[iT, 1+iT]} f(z)\,\mathrm{d}z\Big\}.$$

(*suite au verso.*)

(f) Soient $C_0(\varepsilon) := \{\varepsilon \mathrm{e}^{i\vartheta} : 0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi/2\}$, $C_1(\varepsilon) := \{1 + \varepsilon \mathrm{e}^{i\vartheta} : \pi/2 \leqslant \vartheta \leqslant \pi\}$. On pose

$$M_j(\varepsilon) := \int_{C_j(\varepsilon)} f(z)\,\mathrm{d}z \qquad (j \in \{0, 1\}).$$

Calculer $\lim_{\varepsilon\to 0} M_j(\varepsilon)$ pour $j = 0$ et $j = 1$.

(g) Donner la valeur de $K := \int_0^1 \ln\{\sin(\pi x)\}\,\mathrm{d}x$.

II. Déterminer si les assertions suivantes sont vraies ou fausses en fournissant soit une démonstration complète, soit une réfutation complète, appuyée sur un raisonnement ou sur un contre-exemple.

(a) Tout ouvert convexe est simplement connexe.

(b) $\mathbb{C}^*$ est un ouvert étoilé.

(c) Soit $D := D(0;1)$. Si $f \in \mathcal{H}(D, D)$, alors on a $|f(z)| \leqslant |z|$ pour tout z de D.

(d) Il n'existe pas de détermination du logarithme complexe telle que $\log i = i\frac{17}{3}\pi$.

(e) Le rayon de convergence de la série de Taylor à l'origine de la fonction méromorphe $f(z) := z^2/\{2(\cos z)^2 - \cos z - 1\}$ est égal à $2\pi/3$.

(f) Toute fonction entière 1-périodique est constante.

(g) Toute fonction entière 1-périodique et i-périodique est constante.

(h) Soit $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ telle que $|f(z)| \geqslant |f(0)|$ pour $|z| \leqslant \frac{1}{10}$. Alors f est constante.

(i) Le polynôme $P(z) := z^5 + 5z^3 + z - 2$ a toutes ses racines dans le disque unité.

(j) La fonction $z \mapsto \exp\left(1/z^2\right)$ possède un pôle d'ordre deux à l'origine.

(k) Pour tout $a > 0$, on a $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{\cos x}{x^2 + a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi \mathrm{e}^a}{a}$.

Université Henri Poincaré–Nancy 1 — Mardi 19 juin 2007
Licence de Mathématiques 2006/2007 — Durée : 3h
Analyse complexe

Sujet d'examen

Aucun document n'est autorisé. L'usage d'une calculatrice est interdit. Sauf mention contraire, les notations sont celles du cours.

Les trois parties peuvent être traitées indépendamment.

Il sera tenu le plus grand compte de la rédaction et de la présentation. Seules les explications claires et précises seront prises en compte à la correction.

I. En intégrant, pour $R > 0$, la fonction $f(z) := (\cos z)/\operatorname{ch} z$ le long du bord du rectangle de sommets $\pm R$, $\pm R + i\pi$, déterminer la valeur de l'intégrale

$$I := \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

II. Énoncer le principe de symétrie de Schwarz.

III. Soient $\mathbb{H} := \{z = x + iy \in \mathbb{C} : y > 0\}$ et $U^+ := \mathbb{H} \smallsetminus [0, i]$.

(a) Montrer que la fonction $f(z) := i\sqrt{-z^2 - 1}$, où la racine carrée est prise en détermination principale, est bien définie et holomorphe sur U^+.

(b) Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Calculer

$$\lim_{\substack{z \to x \\ z \in \mathbb{H}}} f(z)$$

et vérifier que cette limite est réelle. On pourra distinguer les cas $x > 0$ et $x < 0$.

(c) Soit $U := \mathbb{C} \smallsetminus [-i, i]$. Montrer que f se prolonge en une fonction $g \in \mathcal{H}(U, \mathbb{C})$, telle que $g(z)^2 = z^2 + 1$ pour tout $z \in U$.

(d) Montrer g et $-g$ sont les seules fonctions holomorphes sur U ayant pour carré la fonction $z \mapsto z^2 + 1$.

(e) La fonction g est-elle paire ? Est-elle impaire ?

(f) Soit $V := \mathbb{C} \smallsetminus [-1, 1]$. Montrer que $g(U) \subset V$. Montrer que, si $w \in V$, alors les deux racines carrées de $w^2 - 1$ sont dans U. En déduire que $g(U) = V$.

(g) La fonction g est-elle injective ?

(h) Montrer que l'expression $J(z) := g(-ig(iz))$ définit une fonction holomorphe sur V. Calculer $J(z)^2$. En déduire que, soit l'on a $J(z) = z$ pour tout z de V, soit l'on a $J(z) = -z$ pour tout z de V.

(i) Calculer $J(2i)$. En déduire une expression de la fonction réciproque h de g en termes de g.

Université Henri Poincaré–Nancy 1 — Vendredi 26 mars 2010
Licence de Mathématiques 2009/2010 — Durée : 2h
Analyse complexe (LCMA6.33)

Sujet d'examen

Aucun document n'est autorisé. L'usage d'une calculatrice est interdit. Sauf mention contraire, les notations sont celles du cours.

Les quatre parties sont indépendantes.

Il sera tenu le plus grand compte de la rédaction et de la présentation. Seules les explications claires et précises seront prises en compte à la correction.

I. Énoncer le principe des zéros isolés (l'une ou l'autre des formulations présentées en cours est acceptée).

II. Soient U un domaine de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{A}(U)$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$F_n := \{z \in U : f^{(n)}(z) = 0\}.$$

(a) Est-il vrai que F_n est fermé dans U pour tout entier n ?

(b) Montrer que, si F_n possède un intérieur non vide pour au moins un entier n, alors f est un polynôme.

(c) On dit que $z \in U$ est un point spécial de f si au moins un des coefficients de la série de Taylor de f en z est nul. Exprimer l'ensemble G des points spéciaux de f en fonction des F_n. Montrer que, si G contient un disque ouvert non vide, alors f est un polynôme. (On rappelle le principe de Baire, selon lequel, dans un espace métrique, une réunion dénombrable de fermés d'intérieurs vides est également d'intérieur vide.)

III. Soient a, $b \in \mathbb{C}$, $a \neq b$, et $U := \mathbb{C} \smallsetminus [a, b]$.

(a) Montrer que la fonction

$$f(z) := \frac{1}{(z-a)(z-b)}$$

possède une primitive sur U.

(b) En déduire que

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

pour tout lacet de U.

(c) Soit γ un lacet de U. Montrer que l'application $J : [0, 1] \to \mathbb{C}$ définie par $J(s) := I(a + s(b-a); \gamma)$ $(0 \leqslant s \leqslant 1)$ est continue. En déduire que $I(a; \gamma) = I(b; \gamma)$.

(d) Retrouver le résultat établi en (b) en appliquant la formule de Cauchy.

IV. Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{H}(U)$.

(a) Déduire des inégalités de Cauchy que si $D(a; R) \subset U$ alors le rayon de convergence de la série de Taylor de f en a est au moins égal à R.

(b) Application. Calculer le rayon de convergence de la série de Taylor à l'origine de $f(z) := z/\sin z$.

(c) Même question pour le rayon de convergence en $z = 2\pi$ de la série de Taylor de la fonction $f(z) = (\sin z)^2/\{2(\cos z)^2 - \cos z - 1\}$.

Université Henri Poincaré–Nancy 1 — Vendredi 11 juin 2010
Licence de Mathématiques 2009/2010 — Durée : 2h
Analyse complexe (LCMA6.33)

Sujet d'examen

Aucun document n'est autorisé. L'usage d'une calculatrice est interdit. Sauf mention contraire, les notations sont celles du cours.

Les quatre parties peuvent être traitées indépendamment.

Il sera tenu le plus grand compte de la rédaction et de la présentation. Seules les explications claires et précises seront prises en compte à la correction.

I. Énoncer le lemme de Schwarz en précisant bien les cas d'égalité.

II. (a) Montrer que

$$\binom{3n}{n} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=R} \frac{(1+z)^{3n}}{z^{n+1}}\,\mathrm{d}z \qquad (n \in \mathbb{N},\ R > 0).$$

(b) Montrer que $|(1+z)^3| \leqslant \frac{27}{4}|z|$ pour $|z| = \frac{1}{2}$. En déduire une majoration de $\binom{3n}{n}$ $(n \geqslant 1)$ impliquant la convergence de la série

$$S := \sum_{n\geqslant 0} \binom{3n}{n}\frac{1}{8^n}.$$

(c) Soit $P(z) := z^3 + 3z^2 - 5z + 1$. Montrer que

$$S = \frac{-4}{i\pi}\oint_{|z|=1/2} \frac{\mathrm{d}z}{P(z)}.$$

(d) Montrer que $P(1) = 0$ et calculer la valeur de S.

III. Soient U un domaine de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{H}(U)$ une fonction non identiquement nulle.

(a) Dans cette question, on suppose qu'il existe $a \in U$ tel que $f'(a) = 0$. On se propose de montrer qu'alors f n'est pas injective.

(i) Montrer que, dans un voisinage convenable de a, on peut écrire

$$f(z) - f(a) = (z-a)^m H(z)$$

où m est un nombre entier > 1 et H est une fonction holomorphe telle que $H(a) \neq 0$.

(ii) Montrer que, pour $r > 0$ assez petit, il existe dans $D(a;r)$ une détermination holomorphe $h(z)$ de $H(z)^{1/m}$.

(iii) Montrer que, pour $r > 0$ assez petit et $v \in \mathbb{C}$ tel que $|v| < \frac{1}{2}r|h(a)|$, l'équation $(z-a)h(z) = v$ possède une unique solution dans $D(a;r)$.

(iv) Conclure.

(b) On suppose à présent que f est injective.

(i) Montrer que f est une bijection de U sur $V := f(U)$ et que $g := f^{-1} \in \mathcal{C}(V, U)$.

(ii) En déduire que $g \in \mathcal{H}(V)$ et que, pour tout $b = f(a) \in V$, on a $g'(b) = 1/f'(a)$. On pourra considérer, pour $h \to 0$, la quantité $h = f(a + \eta(h)) - f(a)$, où $\eta(h) := g(b+h) - g(b) = g(b+h) - a$.

(Voir suite au verso.)

IV. Étant donné des ouverts U, V de $\mathbb{C}$, on dit qu'une fonction holomorphe $f : U \to V$ est un *isomorphisme* si elle est bijective et si sa fonction réciproque est holomorphe. On note $\mathrm{Iso}(U, V)$ l'ensemble des isomorphismes de U sur V. Ainsi, il découle de la question III(b) qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction f de $\mathcal{H}(U)$ soit un isomorphisme de U sur $V := f(U)$ est qu'elle soit injective.[1]

(a) Soient $D := D(0; 1)$ et $f \in \mathrm{Iso}(D, D)$ telle que $f(0) = 0$. Montrer que $|f(z)| \leqslant |z|$ pour tout $z \in D$ et que, si $g := f^{-1}$, alors $|g(z)| \leqslant |z|$ pour tout z de D. En déduire qu'il existe un nombre réel ϑ tel que $f(z) = z\mathrm{e}^{i\vartheta}$ $(z \in D)$.

(b) Soit $a \in D$ et φ_a l'application de $\mathcal{H}(D)$ définie par $\varphi_a(z) := (z - a)/(1 - \overline{a}z)$. Montrer que $\varphi_a \in \mathrm{Iso}(D, \varphi_a(D))$ et calculer $\psi_a := \varphi_a^{-1}$.

(c) En utilisant l'identité $|u + v|^2 = |u|^2 + 2\Re e\,(u\overline{v}) + |v|^2$ $(u, v \in \mathbb{C})$, montrer que $|z - a|^2 - |1 - \overline{a}z|^2 = (1 - |a|^2)(|z|^2 - 1)$ pour tous a, z de $\mathbb{C}$. En déduire que $\varphi_a(D) \subset D$, puis, en appliquant cette dernière identité à $-a$, que $\varphi_a(D) = D$. .

(d) En considérant $f \circ \varphi_a^{-1}$ pour $a \in D$ convenable, montrer que $f \in \mathrm{Iso}(D, D)$ si, et seulement si, il existe $a \in D$ et $\vartheta \in \mathbb{R}$ tels que $f(z) = \mathrm{e}^{i\vartheta}\varphi_a(z)$ $(z \in D)$.

1. On ne demande pas de démontrer cette cette assertion.

Université Henri Poincaré–Nancy 1 | Vendredi 1er avril 2011
Licence de Mathématiques 2010/2011 | Durée : 2h
Analyse complexe (LMI 6.33)

Sujet d'examen partiel

Aucun document n'est autorisé. L'usage d'une calculatrice est interdit. Sauf mention contraire, les notations sont celles du cours.

Les quatre parties sont indépendantes.

Il sera tenu le plus grand compte de la rédaction et de la présentation. Seules les explications claires et précises seront prises en compte à la correction.

I. Calculer le rayon de convergence de la série entière

$$\sum_{n\geqslant 1}\Big(1+\frac{(-1)^n}{n}\Big)^{n^2} z^n.$$

II. (a) Énoncer le théorème de l'application ouverte.

(b) Application. Soient U un domaine de $\mathbb{C}$, et $f \in \mathcal{H}(U)$, $g \in \mathcal{H}(U, \mathbb{C}^*)$. Montrer que si $f(z)\overline{g(z)}$ est réel pour tout z de U, alors il existe une constante réelle c telle que $f = cg$.

III. Soient $a \in \mathbb{C}^*$ et $r \in]0, |a|[$.

(a) Montrer que l'intégrale

$$I(a) := \int_0^{2\pi} \ln |re^{i\vartheta} - a| \,\mathrm{d}\vartheta$$

est bien définie.

(b) Montrer que l'on peut définir une détermination holomorphe de

$$g(z) := \log(1 - z/a)$$

sur un ouvert U, que l'on précisera, contenant le disque $D(0; r)$.

(c) Calculer $I(a)$ en appliquant la formule de Cauchy à g pour un point convenable.

(d) Retrouver le résultat précédent en montrant que la fonction f définie par $f(z) := g(z)/z$ est holomorphe sur U.

IV. Soient U un domaine de $\mathbb{C}$ contenant l'origine et $f \in \mathcal{H}(U)$.

(a) Énoncer le principe des zéros isolés.

(b) Montrer que, si $f(1/n) = f(1/2n)$ pour tout entier n assez grand, alors f est constante sur U.

(c) Soit $g : [0, 1] \to [0, \frac{1}{2}]$ définie par $g(x) := x/(1+x)$. Calculer $g^n(x) = g\circ\cdots\circ g(x)$ pour tout $x \in [0, 1]$. En déduire que, si $f(z) = f\big(z/(1 + z)\big)$ pour tout z de U alors f est constante sur U.

(d) Montrer que, si $f(1/n) = 1/(n + 1) = g(1/n)$ pour tout entier n assez grand, alors $-1 \notin U$ et $f(z) = z/(z + 1)$ sur U.

(e) Est possible d'avoir $f(1/n) = 1/2^n$ pour tout entier n assez grand ?

Université de Lorraine
Faculté des sciences et technologies
Licence 2010/2011
Analyse complexe (LMI 6.33)

Mercredi 8 juin 2011
Durée : 2h

Sujet d'examen

Aucun document n'est autorisé. L'usage d'une calculatrice est interdit. Sauf mention contraire, les notations sont celles du cours.

Les quatre parties sont indépendantes.

Il sera tenu le plus grand compte de la rédaction et de la présentation. Seules les explications claires et précises seront prises en compte à la correction.

I. Énoncer le théorème de Rouché.

Application. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| \geqslant 4$. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $z \log(2+z) = \lambda \operatorname{sh} z$ dans le disque unité ouvert $D(0;1)$ lorsque log désigne la détermination principale du logarithme complexe. On pourra utiliser sans démonstration les inégalités $\frac{1}{2}\pi + \ln 3 < 3$ et $\sin y \geqslant \frac{4}{5}y$ $(0 \leqslant y \leqslant 1)$, et établir que $|\operatorname{sh} z| \geqslant \frac{4}{5}|z|$ lorsque $z = x + iy$, $|y| \leqslant 1$.

II. Soient $D := D(0;1)$, U un domaine de $\mathbb{C}$ contenant $\overline{D}$, et $f \in \mathcal{H}(U)$ une fonction holomorphe telle que $|f(z)| \geqslant 1$ lorsque $|z| = 1$. On suppose de plus qu'il existe un nombre complexe $z_0 \in D := D(0;1)$ tel que $|f(z_0)| < 1$.

(a) Montrer que $0 \in f(D)$. On pourra raisonner par l'absurde et appliquer le principe du maximum à $g := 1/f$.

(b) Soit $w \in D^*(0;1)$. En appliquant le théorème de Rouché aux fonctions f et $g : z \mapsto -w$, montrer que $w \in f(D)$.

(c) Énoncer le théorème établi dans cet exercice.

III. (a) Soit $a > 0$. Établir la convergence de l'intégrale

$$I(a) := \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{e}^{iax}}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x.$$

(b) Calculer $I(a)$.

IV. Soient $D := D(0;1)$ et $f \in \mathcal{H}(D)$. On suppose que $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, et que $M := \sup_{z \in D} |f(z)| < \infty$. Enfin, on se donne $b \in \mathbb{C} \smallsetminus f(D)$.

(a) Montrer qu'il existe $h \in \mathcal{H}(D)$ telle que $h(0) = 1$, $h(z)^2 = 1 - f(z)/b$ $(z \in D)$.

(b) On écrit $h(z) = \sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$ où la série converge dans D. Déterminer a_0 et a_1.

(c) Montrer que $|h(z)|^2 \leqslant 1 + M/|b|$ pour tout z de D. En déduire, grâce au calcul de l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi} \oint_{|z|=r} |h(z)|^2\,\mathrm{d}z \qquad (0 < r < 1),$$

que l'on a $|b| \geqslant 1/(4M)$.

(d) En déduire que $D(0;1/(4M)) \subset f(D)$.

Université de Lorraine
Faculté des sciences et technologies
Licence 2011/2012
Analyse complexe (LMI 6.33)

Mercredi 21 mars 2012
Durée : 2h

Sujet d'examen

Aucun document n'est autorisé. L'usage d'une calculatrice est interdit. Sauf mention contraire, les notations sont celles du cours.

Les quatre parties sont indépendantes.

Il sera tenu le plus grand compte de la rédaction et de la présentation. Seules les explications claires et précises seront prises en compte à la correction.

I. Énoncer les principes du maximum et du minimum pour une fonction analytique définie sur un ouvert de $\mathbb{C}$. On précisera bien la partie du premier énoncé correspondant au cas d'un ouvert borné.

II. Soit k un paramètre réel positif ou nul. On pose $P_k(z) := z^2 - i(k+2)z - 2k$ ($z \in \mathbb{C}$). Calculer explicitement les quantités

$$M(k) := \max_{|z| \leqslant 1} |P_k(z)|, \qquad m(k) := \min_{|z| \leqslant 1} |P_k(z)|.$$

Ces fonctions dépendent-elles continûment de k ?

III. Soient $R > 1$, $D_R := D(0; R)$, et $f \in \mathcal{A}(D_R)$. On suppose que $|f(z)| \leqslant 2$ lorsque $|z| = 1$, $\Im m\, z \geqslant 0$, et $|f(z)| \leqslant 3$ lorsque $|z| = 1$, $\Im m\, z \leqslant 0$.

(a) On pose $g(z) := f(z)f(-z)$ ($|z| < R$). Montrer que $|g(z)| \leqslant 6$ pour $|z| \leqslant 1$.

(b) Montrer que $|f(0)| \leqslant \sqrt{6}$. Dans quel cas cette majoration est-elle stricte ?

IV(a) Déterminer le domaine de définition U de la fonction

$$g(z) := \frac{1}{2i} \log\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)$$

où le logarithme complexe est pris en détermination principale. On vérifiera que $D(0; 1) \subset U$.

(b) Soit $\vartheta \in \mathbb{R}$. Calculer $g(\mathrm{e}^{2\pi i\vartheta})$ lorsque $|\vartheta| < \frac{1}{4}$, puis lorsque $|\vartheta - \frac{1}{2}| < \frac{1}{4}$. On pourra poser $\varphi := \pi(\vartheta + \frac{1}{4})$, remarquer que $\tan\varphi > 0$ dans le premier cas alors que $\tan\varphi < 0$ dans le second, et exprimer le résultat en fonction de $|\tan\varphi|$ et $\varepsilon := \operatorname{sgn}(\pi/2 - \varphi) = \operatorname{sgn}(1/4 - \vartheta)$.

(c) Calculer $g'(z)$ pour $z \in U$ et donner le développement en série entière de g dans le disque unité ouvert.

(d) Calculer les sommes des séries trigonométriques

$$C(\vartheta) := \sum_{n \geqslant 0} \frac{(-1)^n \cos\{2\pi\vartheta(2n+1)\}}{2n+1}, \qquad S(\vartheta) := \sum_{n \geqslant 0} \frac{(-1)^n \sin\{2\pi\vartheta(2n+1)\}}{2n+1},$$

lorsque $\vartheta \in]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[\cup]\frac{1}{4}, \frac{3}{4}[$.

Université de Lorraine
Faculté des sciences et technologies
Licence 2011/2012
Analyse complexe (LMI 6.33)

Mercredi 16 mai 2012
Durée : 1h

Sujet d'examen partiel

Aucun document n'est autorisé. L'usage d'une calculatrice est interdit. Sauf mention contraire, les notations sont celles du cours.

Les deux exercices sont indépendants.

Il sera tenu le plus grand compte de la rédaction et de la présentation. Seules les explications claires et précises seront prises en compte à la correction.

I. (a) Soient a, $b \in \mathbb{C}$, $a \neq b$. Montrer que $(z-a)/(z-b) \in \mathbb{R}^-$ si, et seulement si, $z \in [a,b]$. En déduire que l'on peut définir une détermination holomorphe de $\sqrt{(z-a)(z-b)}$ sur $U := \mathbb{C} \smallsetminus [a,b]$.

(b) Soit $R \geqslant 2$. Déduire de ce qui précède que l'intégrale

$$I := \oint_{|z|=R} \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{4z^2-8z+3}},$$

où la racine carrée est définie selon le procédé introduit en (a), ne dépend pas de R.

(c) Montrer que, pour la détermination holomorphe trouvée en (a), on a $\lim_{|z|\to\infty} \sqrt{4z^2-8z+3}/(2z) = 1$. En déduire la valeur de I.

II. Trouver l'erreur dans le raisonnement suivant, déterminer une conclusion exacte et l'établir :

$$\textit{On a } \binom{2n}{n} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=R} \frac{(1+z)^{2n}}{z^{n+1}}\,\mathrm{d}z \textit{ pour tous } n \in \mathbb{N},\ R>0, \textit{ donc}$$

$$\sum_{n\geqslant 0} \binom{2n}{n}\frac{1}{5^n} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=R} \sum_{n\geqslant 0} \frac{(1+z)^{2n}}{(5z)^n}\frac{\mathrm{d}z}{z} = \frac{5}{2\pi i}\oint_{|z|=R} \frac{\mathrm{d}z}{3z-1-z^2}.$$

En faisant tendre R vers l'infini, on obtient, grâce à la règle $zf(z)$,

$$\sum_{n\geqslant 0} \binom{2n}{n}\frac{1}{5^n} = 0.$$

Université de Lorraine
Faculté des sciences et technologies
Licence 2011/2012
Analyse complexe (LMI 6.33)

Jeudi 14 juin 2012
Durée : 2h

Sujet d'examen

Aucun document n'est autorisé. L'usage d'une calculatrice est interdit. Sauf mention contraire, les notations sont celles du cours.

Les trois parties sont indépendantes.

Il sera tenu le plus grand compte de la rédaction et de la présentation. Seules les explications claires et précises seront prises en compte à la correction.

I. (a) Énoncer le théorème de Liouville.

(b) Montrer que, si f est une fonction entière non constante et $\alpha \in \mathbb{C} \setminus f(\mathbb{C})$, alors $\alpha \in \overline{f(\mathbb{C})}$.

II. En intégrant $f(z) := z^2/(1+z^5)$ le long du bord du secteur circulaire $S_R := \{r\mathrm{e}^{i\vartheta} : 0 \leqslant r \leqslant R,\ 0 \leqslant \vartheta \leqslant 2\pi/5\}$, calculer

$$K := \int_0^\infty \frac{x^2}{1+x^5}\,\mathrm{d}x.$$

Déduire du résultat obtenu que $K > \frac{1}{3}$.

III. Soit $a \in]0,1[\cup]1,\infty[$. On se propose de calculer

$$L(a) := \int_0^\pi \frac{x \sin x}{1+a^2-2a\cos x}\,\mathrm{d}x$$

en intégrant la fonction $f(z) := z/(a-\mathrm{e}^{-iz})$ le long du bord γ_n du rectangle $\mathcal{R}_n$ de sommets $\pm\pi$, $\pm\pi + in$, lorsque le paramètre entier positif n tend vers l'infini.

(a) Montrer que l'intégrale $L(a)$ est bien définie.

(b) Montrer que

$$\int_{\gamma_n} f(z)\,\mathrm{d}z = -2iL(a) + 2\pi i J_n(a) + o(1) \qquad (n \to \infty)$$

où l'on a posé

$$J_n(a) := \int_0^n \frac{\mathrm{d}y}{a+\mathrm{e}^y} = \int_0^n \frac{\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y}{1+a\mathrm{e}^{-y}}.$$

(c) Calculer $J_n(a)$ en effectuant un changement de variables adéquat.

(d) Montrer l'existence et calculer la valeur de $J(a) := \lim_{n\to\infty} J_n(a)$.

(e) Déterminer l'ensemble des pôles de f dans $I(\gamma_n)$ et calculer le résidu correspondant à chacun de ses éléments.

(f) Calculer $L(a)$ dans chacun des cas $0 < a < 1$ et $a > 1$.

(g) Montrer que $\lim_{a\to 1} L(a) = \pi \ln 2$.

Université de Lorraine
Faculté des sciences et technologies
Licence 2012/2013
Analyse complexe (LMI 6.33)

Mardi 16 avril 2013
Durée : 2h

Sujet d'examen partiel

Aucun document n'est autorisé. L'usage d'une calculatrice est interdit. Sauf mention contraire, les notations sont celles du cours.

Les trois parties sont indépendantes.

Il sera tenu le plus grand compte de la rédaction et de la présentation. Seules les explications claires et précises seront prises en compte à la correction.

I. Définir la simple connexité d'un ouvert du plan complexe et donner les six conditions vues en cours équivalentes à l'assertion spécifiant qu'un domaine U est simplement connexe.

II. Soit $\sqrt{z}$ la détermination principale de la racine carrée.

(a) Écrire sous forme cartésienne les nombres $\sqrt{i}$, $\sqrt{-i}$ et $\sqrt{-1+i\sqrt{3}}$.

(b) Montrer que la fonction $z \mapsto \sqrt{z}$ possède sur $U := \mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$ une unique primitive F telle que $F(1) = \frac{2}{3}$.

(c) Soit $\gamma : [0, \pi/2] \to \mathbb{C}$ le chemin défini par $\gamma(t) := \mathrm{e}^{it}$. Calculer $\displaystyle\int_\gamma \sqrt{z}\,\mathrm{d}z$.

(d) Calculer $\displaystyle\oint_{|z+\pi i|=3} \sqrt{z}\,\mathrm{d}z$.

III. (a) Le logarithme complexe étant choisi en détermination principale, déterminer le domaine de définition U de $h(z) := \log\left(\dfrac{z^2+1}{z^2-1}\right)$ et vérifier que $U \supset \mathbb{C} \setminus \overline{D(0;1)}$.

(b) Montrer que l'expression $f(z) := (1-z^2)\mathrm{e}^{h(z)/2}$ définit une détermination holomorphe de $\sqrt{z^4-1}$ sur U telle que $f\big(\sqrt{3}\big) = -2\sqrt{2}$.

(c) Pour $r > 1$, désignons par γ_r le lacet dont le support géométrique est le cercle $C(0;r)$ parcouru une fois dans le sens direct. Soient r, R des nombres réels tels que $1 < r < R$. En appliquant le théorème de Cauchy à la fonction $g(z) := z/f(z)$ sur le lacet $\gamma = \gamma_r * [r, R] * \gamma_R^- * [r, R]^-$, montrer que

$$I(r) := \int_{\gamma_r} g(z)\,\mathrm{d}z$$

ne dépend pas de $r > 1$.

(d) Montrer que, si $|z| > 1$, alors $g(z)z\sqrt{1-1/z^4} = -1$, où la racine carrée est prise en détermination principale.

(e) Calculer $\lim_{r\to\infty} I(r)$ et en déduire la valeur de $I(r)$ pour tout $r > 1$.

IV. Soient f et g deux fonctions entières telle que $|f(z)| \leqslant |g(z)|$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

(a) Montrer que si w est un zéro de g de multiplicité $m \geqslant 1$, alors w est un zéro de f de multiplicité $n \geqslant m$.

(b) Soit Z_g l'ensemble des zéros de g. Montrer que la fonction $h(z) := f(z)/g(z)$ $(z \in \mathbb{C} \setminus Z_g)$ peut être prolongée en une fonction entière.

(c) Qu'en déduisez-vous ?

Université de Lorraine
Faculté des sciences et technologies
Licence 2012/2013
Analyse complexe (LMI 6.33)

Jeudi 30 mai 2013
Durée : 1h

Sujet d'examen partiel

Aucun document n'est autorisé. L'usage d'une calculatrice est interdit. Sauf mention contraire, les notations sont celles du cours.

Les trois parties sont indépendantes.

Il sera tenu le plus grand compte de la rédaction et de la présentation. Seules les explications claires et précises seront prises en compte à la correction.

I. Soit $n \in \mathbb{N}$. Énoncer la formule de Cauchy permettant d'exprimer la dérivée d'ordre n d'une fonction holomorphe comme une intégrale sur un contour circulaire.

II. Soient $D := D(0;1)$, U un ouvert contenant $\overline{D}$, et $f \in \mathcal{H}(U)$.

(a) Calculer les quantités

$$I := \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \Big(2 + z + \frac{1}{z}\Big) \frac{f(z)}{z} \, \mathrm{d}z, \quad J := \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \Big(2 - z - \frac{1}{z}\Big) \frac{f(z)}{z} \, \mathrm{d}z.$$

(b) En déduire les valeurs de

$$H := \int_0^1 f(\mathrm{e}^{2\pi i\vartheta}) \cos^2(\pi\vartheta) \, \mathrm{d}\vartheta, \quad K := \int_0^1 f(\mathrm{e}^{2\pi i\vartheta}) \sin^2(\pi\vartheta) \, \mathrm{d}\vartheta.$$

III. On conserve les hypothèses de la partie II et, pour $a \in \mathbb{C}$, $|a| \neq 1$, on pose

$$L(a) := \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{\overline{f(z)}}{z - a} \, \mathrm{d}z.$$

(a) Calculer $L(a)$ lorsque $f(z) = 1$ $(z \in U)$ et lorsque $f(z) = 1 - \overline{a}z$ $(z \in U)$.

(b) En exploitant le paramétrage $\gamma(\vartheta) := \mathrm{e}^{i\vartheta}$ $(0 \leqslant \vartheta \leqslant 2\pi)$, exprimer $\overline{L(a)}$ sous la forme

$$\overline{L(a)} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} g(z) \, \mathrm{d}z$$

où g est une fonction méromorphe que l'on déterminera.

(c) Calculer $L(a)$ dans le cas général.

Index