Analyse

Énoncés des exercices

Gérald Tenenbaum
Université de Lorraine
Faculté des sciences et technologies
Master de Mathématiques
MAMT1 UE701 TC - 2017/2018

(21/8/2017, 16h30)
Diffusion étudiants

Table des matières

Université de Lorraine
Faculté des sciences et technologies
Master de mathématiques 2017/2018
Analyse (MAMT1 UE701 TC)
Gérald Tenenbaum

Exercices sur les espaces vectoriels normés

1. Soit E est un espace métrique localement compact non compact, on dit qu'une fonction numérique $f : E \to \mathbb{R}$ tend vers $+\infty$ à l'infini si l'on a

$$\forall A > 0\ \exists K \subset E,\ K\text{compact} : \inf_{x \in E \smallsetminus K} f(x) > A.$$

Montrer que, dans ce cas et si f est supposée continue, alors elle est minorée et atteint sa borne inférieure.[1]

2. Déduire du résultat établi à l'Exercice 1 une preuve du théorème de d'Alembert–Gauss : Tout polynôme non constant à coefficients complexes admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

3. Soit (E, d) un espace métrique et $f : E \to \mathbb{R}$ une application injective.

(a) Montrer que l'application $d_f : E^2 \to \mathbb{R}^+$ définie par $d_f(x, y) = |f(x) - f(y)|$ est une distance sur E.

(b) L'espace métrique $(\mathbb{R}, d_f)$ est-il complet dans les cas suivant : $f(x) = x^3$, $f(x) = \mathrm{e}^x$?

(c) L'espace métrique $(\mathbb{R}^{+*}, d_{\ln})$ est-il complet ?

(d) Trouver, dans le cas général, une condition nécessaire et suffisante sur f pour que (E, d) soit complet.

4. *Applications contractantes.*

(a) Rappeler la démonstration du théorème du point fixe pour une application strictement contractante d'un espace métrique complet.

(b) Soient (E, d) un espace métrique complet et $f : E \to E$ une application telle que, pour un entier $n \geqslant 1$ convenable, l'itérée f^n soit strictement contractante, de point fixe x_n.

(i) Montrer que tout point fixe de f est un point fixe pour f^n.

(ii) Montrer que si $x \in E$ est un point fixe de f^n, alors il en va de même de $f(x)$.

(iii) Montrer que x_n est l'unique point fixe de f.

5. Montrer que les espaces vectoriels normés suivants sont des espaces de Banach.

(a) $\mathcal{C}(E, F)$ muni de la norme de la convergence uniforme $\|f\| := \sup_E \|f(x)\|$ lorsque E est un espace métrique compact et F un espace métrique complet.

(b) $\ell_0(\mathbb{K})$, sous-espace de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) constitué des suites tendant vers 0 et muni de la norme $\|\boldsymbol{x}\| := \sup |x_j|$.

(c) $\ell_1(\mathbb{K})$, sous-espace de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ constitué des suites $\boldsymbol{x} = (x_j)_{j \geqslant 0}$ telles que

$$\|\boldsymbol{x}\| := \sum |x_j| < \infty,$$

et muni de cette même norme.

1. Autrement dit, f admet un minimum.

6. On définit une suite $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ de fonctions de $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ par $f_n(x) := x^n$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$. Montrer que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ n'admet aucune valeur d'adhérence pour la norme de la convergence uniforme.

7. *Une forme linéaire sur* $\ell_0(\mathbb{C})$.

Soit $\ell_0(\mathbb{C})$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ formé des suites complexes convergeant vers 0, muni de la norme de la convergence uniforme. Pour $\boldsymbol{x} = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell_0(\mathbb{C})$, on pose $f(\boldsymbol{x}) := \sum_{n\geqslant 1} x_n/2^n$.

(a) Montrer que f est une forme linéaire continue et calculer $\|f\|$.

(b) Existe-t-il $\boldsymbol{x} \in \ell_0(\mathbb{C})$ tel que $\|\boldsymbol{x}\| = 1$ et $|f(\boldsymbol{x})| = \|f\|$?

8. Soit $a > 0$. Sur l'espace $E := \mathcal{C}^{\infty}\big([0,a],\mathbb{R}\big)$, on considère les deux normes définies par

$$\|f\|_0 := \sup_{0\leqslant x\leqslant a} |f(x)|, \qquad \|f\|_1 := |f(0)| + \sup_{0\leqslant x\leqslant a} |f'(x)|.$$

On considère alors l'application linéaire identité $T : (E, \|\cdot\|_1) \to (E, \|\cdot\|_0)$ définie par $T(f) = f$.

(a) Montrer que T est continue et calculer sa norme d'opérateur $\|T\|$.

(b) Montrer que T^{-1} n'est pas continue. Y a-t-il contradiction avec le théorème de l'isomorphisme ?

(c) Montrer que $F := \mathcal{C}^1([0,a],\mathbb{R})$ est complet pour la norme $\|\cdot\|_1$.

9. Montrer qu'un sous-espace métrique d'un espace métrique séparable est séparable.

10. *Avec le principe de Baire.* Soit (E,d) un espace métrique complet.

(i) Soit $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite de fermés de E telle que $E = \cup_n F_n$. Montrer que l'ouvert $G := \cup_n \overset{\circ}{F_n}$ est partout dense dans E.(2)

(ii) Soit $\{O_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite d'ouverts denses dans E. Montrer que $H := \cap_n O_n$ est partout dense.(3)

11. *Une application du principe de Baire.* Pour $r \in \mathbb{Q}^*$, avec $r = p/q$, $(p,q) = 1$ on pose et $J_n(r) :=]r - 1/(2q)^n, r + 1/(2q)^n[$. Soit $L_n := \cup_{r\in\mathbb{Q}^*} J_n(r)$. Montrer que L_n est un ouvert partout dense dans $\mathbb{R}$ et que $L := \cap_n L_n$ est également partout dense. Montrer que $\alpha := \sum_{n\geqslant 1} 2^{-n!} \in L \smallsetminus \mathbb{Q}$.

12. *Une application du théorème de Banach-Steinhaus.* Montrer que $\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{C})$ coïncide avec l'ensemble des suites $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telles que la série $\sum_{n\geqslant 0} |x_n y_n|$ converge pour tout $\boldsymbol{y} \in \ell^2(\mathbb{N},\mathbb{C})$.

13. Soient E, F deux espaces de Banach et $\{T_n\}_{n=0}^{\infty} \in \mathcal{L}(E,F)^{\mathbb{N}}$. On suppose que, pour chaque $x \in E$, la suite $\{T_n x\}_{n=0}^{\infty}$ converge vers une limite, notée $Tx \in F$. Montrer que si $x_n \to x$ dans E alors $T_n x_n \to Tx$ dans F.

---

2. On pourra montrer que, pour tout ouvert non vide V de E et tout fermé d'intérieur non vide $W \subset V$, on a $\overset{\circ}{F_n} \cap W \neq \varnothing$ pour au moins un $n \geqslant 1$ en appliquant le théorème de Baire à la famille des $F_n^* := F_n \cap W$ dont chaque élément est un fermé de W. On rappelle que $\overset{\circ}{A \cap B} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$ pour toutes parties A, B d'un espace métrique.

3. On rappelle que $\overline{A}^c = (\overset{\circ}{A^c})$ pour toute partie A d'un espace métrique.

14. *Optimalité du théorème de Banach.* Le but de cet exercice est de montrer que l'hypothèse de complétude de l'espace d'arrivée est indispensable à la validité du Théorème I.2.13.

Soit $E = \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$, muni de la norme de la convergence uniforme $\|f\|_\infty$. On pose $\|f\|_0 = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$.

(a) L'espace E est-il complet pour la norme $f \mapsto \|f\|_\infty$? pour la norme $f \mapsto \|f\|_0$?

(b) L'identité est-elle continue en tant qu'application de $(E, \|\cdot\|_\infty)$ dans $(E, \|\cdot\|_0)$? En tant qu'application de $(E, \|\cdot\|_0)$ dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$?

(c) Conclure.

15. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé.

(a) Soit $H = \operatorname{Ker} T$ un hyperplan de E. Montrer que $E = H + \mathbb{R}y$ pour tout $y \in E$ tel que $T(y) \neq 0$. En déduire que H est soit fermé soit dense dans E.(4)

(b) Montrer qu'une forme linéaire $T : E \to \mathbb{R}$ est continue si, et seulement si, son noyau $H = \operatorname{Ker}(T)$ est fermé. Lorsque $T \neq 0$, on pourra introduire un vecteur y_0 tel que $T(y_0) = 1$ et montrer que $|T(x)|d(y_0, H) \leqslant d(x, H) \leqslant \|x\|$ pour tout $x \in E$.

(c) Montrer que, si T est une forme linéaire continue non nulle, alors $\|T\|d(y_0, H) = 1$ et $d(x, H) = |T(x)|/\|T\|$ pour tout x de E.

16. *Normes équivalentes.* Soit E un espace vectoriel et $x \mapsto \|x\|_1$, $x \mapsto \|x\|_2$ deux normes. On suppose que E est un espace de Banach pour chacune de ces deux normes et qu'il existe $M > 0$ tel que $\|x\|_2 \leqslant M\|x\|_1$ pour tout $x \in E$. Montrer qu'il existe $m > 0$ tel que $m\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2$ pour tout $x \in E$.

17. *Avec le théorème du graphe fermé.*

Soient E un $\mathbb{R}$-espace de Banach et $T : E \to E' := \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ un opérateur linéaire tel que $Tx(x) \geqslant 0$ pour tout x de E. Montrer que T est continu.

18. *Bases de Schauder d'un espace de Banach.*

Soit E un espace de Banach sur $\mathbb{C}$. On dit qu'une suite $\{e_n\}_{n=1}^\infty \in E^{\mathbb{N}}$ est une *base de Schauder* si, pour tout x de E, il existe une unique suite $\{x_n\}_{n=1}^\infty \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que $x = \sum_{n\geqslant 1} x_n e_n$ dans E.

(a) Notons $\alpha_n : E \to \mathbb{C}$ $(n \geqslant 1)$ l'application $x \mapsto x_n$. Montrer que α_n est linéaire, et que, pour tous $n \geqslant 1$, $p \geqslant 1$, on a $\alpha_n e_p = \delta_{np}$ (notation de Kronecker).

(b) Soit F le sous-espace de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ formé des suites $\boldsymbol{x} = \{x_n\}_{n=1}^\infty$ telles que $\sum_{n\geqslant 1} x_n e_n$ converge dans E. On pose alors

$$\|\boldsymbol{x}\|_F := \sup_{n\geqslant 1} \Big\| \sum_{1\leqslant j\leqslant n} x_j e_j \Big\| \qquad (\boldsymbol{x} \in F).$$

Montrer que F est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, que $\|\cdot\|_F$ est une norme sur F et que F est un espace de Banach pour cette norme. On pourra établir la validité pour tout entier $n \geqslant 1$ de la majoration $|x_n|\|e_n\| \leqslant 2\|\boldsymbol{x}\|_F$.

(c) Soit $T : F \to E$ l'application définie par $T\boldsymbol{x} := \sum_{n\geqslant 1} x_n e_n$. Montrer que T est un isomorphisme de F sur E.

(d) Soit $p_n : F \to \mathbb{C}$ la projection canonique définie par $p_n\boldsymbol{x} = x_n$. Montrer que $p_n \in \mathcal{L}(F, \mathbb{C})$ et donner un majorant de $\|p_n\|$. En déduire que $\alpha_n \in \mathcal{L}(E, \mathbb{C})$ pour tout $n \geqslant 1$ et qu'il existe $M \geqslant 1$ tel que

$$1 \leqslant \|e_n\|\|\alpha_n\| \leqslant M \qquad (n \geqslant 1).$$

4. On pourra montrer que si $y \notin \overline{H}$ et si $x = \lambda y + h \in E$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$, $h \in H$, alors $|\lambda| r \leqslant d(x, H)$ pour tout r tel que $B(y, r) \subset \overline{H}^c$.

Université de Lorraine
Faculté des sciences et technologies
Master de mathématiques 2017/2018
Analyse (MAMT1 UE701 TC)
Gérald Tenenbaum

Exercices sur les espaces de Hilbert

19. *Le cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy–Schwarz.*

Soient E un espace préhilbertien séparé et x, y des vecteurs non nuls de E. Que peut-on déduire de l'égalité $|(x\,|\,y)| = \|x\|\|y\|$? De l'égalité $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$? Donner un exemple d'espace vectoriel normé où cette dernière conclusion est en défaut.

20. Soient E, F des espaces hilbertiens et $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ une famille d'éléments de $\mathcal{L}(E,F)$. On suppose que

$$(\forall x \in E) \quad \sup_n \|u_n x\| < \infty.$$

Montrer que $\sup_n \|u_n\| < \infty$.

21. Soient E un espace hilbertien et u un endomorphisme de E tel que $(ux\,|\,y) = (x\,|\,uy)$ pour tous x, y de E. Montrer que $u \in \mathcal{L}(E)$.

22. *Le théorème de Riesz est-il en défaut ?*

Soit E l'espace préhilbertien constitué des suites complexes $\boldsymbol{x} = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ nulles à partir d'un certain rang, muni du produit scalaire $(\boldsymbol{x}\,|\,\boldsymbol{y}) = \sum_{n\geqslant 1} x_n\overline{y_n}$.

(a) Montrer que l'application $T : E \to \mathbb{C}$ définie par $T\boldsymbol{x} = \sum_{n\geqslant 1} x_n/n$ est une forme linéaire continue sur E.

(b) Existe-t-il un élément $\boldsymbol{y}$ de E tel que $T\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}\,|\,\boldsymbol{y})$ pour tout $\boldsymbol{x}$ de E ?

(c) Qu'en déduisez-vous ?

23. *Fonctions nulles sur un compact.*

Soit $E := \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $(f\,|\,g) := \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ et K une partie compacte de $[0,1]$. On note F_K le sous-espace vectoriel de E constitué des fonctions s'annulant sur K.

(a) Montrer que E est un espace préhilbertien séparé, mais n'est pas un espace de Hilbert.

(b) Montrer que $F_K^{\perp} = \{0\} \Leftrightarrow \overset{\circ}{K} = \varnothing$. Pour établir la condition suffisante, on raisonnera par l'absurde en considérant une fonction g de $F_K^{\perp}$ et $x \in [0,1]$ tels que $g(x) \neq 0$, et en montrant l'existence, pour tout $\varepsilon > 0$, d'un $y \in]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ tel que $d(y,K) > 0$.

(c) Montrer que $\overline{F_K} = E \Leftrightarrow |K| = 0$, où $|K|$ désigne la mesure de Lebesgue de K. Pour établir la condition suffisante, on pourra utiliser le fait qu'il existe une suite $\{h_n\}_{n=0}^{\infty} \in F_K^{\mathbb{N}}$ telle que $h_n \to 1$ pp. On établira la condition nécessaire en considérant la fonction constante égale à 1.

24. *Projection orthogonale sur un convexe.*
On se propose ici de démontrer le théorème suivant.

Théorème. *Soient E un espace préhilbertien séparé et A une partie de E, convexe, complète et non vide. Pour tout $x \in E$, il existe un unique élément y de A tel que $d(x, A) = \|x - y\|$. Ce point est caractérisé par la propriété*

$$(\forall z \in A) \qquad \Re e\ (x - y \,|\, z - y) \leqslant 0. \tag{1}$$

On dit alors que y est la *projection orthogonale* de x sur A, et l'on écrit $y = p_A(x)$ ou $p_A x$. Cette notion généralise celle de projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel fermé.

(a) Montrer que, si $x \in A$, alors on a $p_A(x) = x$ et ce point est l'unique élément de A satisfaisant (1).

(b) On suppose désormais que $r := d(x, A) > 0$. On pose

$$A_n := \{z \in A : \|x - z\|^2 \leqslant r^2 + 2^{-2n}\} \qquad (n \geqslant 1).$$

Montrer que, pour chaque entier $n \geqslant 1$, A_n est une partie convexe fermée non vide de E.

(c) En appliquant l'identité de la médiane, montrer que le diamètre $\delta(A_n)$ de A_n n'excède pas 2^{1-n}.

(d) Montrer qu'il existe $y \in A$ tel que $\cap_n A_n = \{y\}$ et que $\|x - y\| = d(x, A)$.

(e) Soit $z \in A$. On pose $z_t := y + t(z - y)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$. Montrer que $z_t \in A$ et calculer $\|x - z_t\|^2$. En déduire que y satisfait (1).

(f) Montrer que si $y_1 \in A$ vérifie (1), alors $y_1 = y$.

25. *Propriétés de la projection orthogonale sur un convexe fermé.*
Soit E un espace de Hilbert et A une partie convexe fermée de E.

(a) Montrer que, pour tous $x \in E$, $z \in A$, on a $\|x - p_A x\| \leqslant \|x - z\|$.

(b) Montrer que l'application p_A est contractante.

26. *Minimum sur une sphère.*
Soient E un espace de Hilbert réel et F un sous-espace vectoriel fermé non réduit à $\{0\}$.

(a) Montrer que, pour tout $x \in E \smallsetminus F^\perp$, la borne inférieure

$$m_F(x) := \inf_{\substack{y \in F \\ \|y\|=1}} (x \,|\, y)$$

est atteinte en un unique point y de F que l'on explicitera.

(b) Soient y_j $(1 \leqslant j \leqslant n)$ des vecteurs de E et $G := \mathrm{Vect}[y_1, \ldots, y_n]$. Calculer $m_F(x)$ lorsque $F = G$ et lorsque $F = G^\perp$.

27. *Suites positives de $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.*
Soit A le sous ensemble de $E := \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ constitué des suites $\boldsymbol{x} = (x_n)_{n \geqslant 1}$ dont tous les termes sont positifs ou nuls.

(a) Montrer que A est une partie convexe fermée de E.

(b) Expliciter la projection $p_A : E \to A$.

28. *Projections orthogonales, 1.*
Soient E un espace de Hilbert et F un sous-espace vectoriel fermé de E, non réduit à $\{0\}$. Établir les relations suivantes :

(a) $p_F \circ p_F = p_F$;

(b) $(\forall x, y \in E)$ $(p_F x \,|\, y) = (x \,|\, p_F y)$;

(c) $\|p_F\| = 1$.

29. *Projections orthogonales, 2.*
Soient E un espace de Hilbert et F un sous-espace vectoriel fermé de E. Établir, pour tous $x, y \in E$, l'équivalence des propriétés suivantes :

(i) $y = p_F x$

(ii) $y \in F$ et $(\forall z \in F) \quad (y \mid z) = (x \mid z)$

(iii) $y \in F$ et $(\forall z \in F) \quad \|x - y\| \leqslant \|x - z\|$.

30. *Projections orthogonales, 3.*
Soient p et q des projecteurs orthogonaux d'un espace de Hilbert E.
(a) Montrer que $u := p \circ q \circ p$ est auto-adjoint.
(b) Montrer que $(\operatorname{Im} p + \operatorname{Ker} q)^{\perp} = \operatorname{Im} q \cap \operatorname{Ker} p$.

31. *Projecteur et projection orthogonale.*
Soient E un espace de Hilbert et p un projecteur de E. Montrer l'équivalence des trois propriétés suivantes :

(i) p est un projecteur orthogonal

(ii) $(\forall x \in E) \ \|px\| \leqslant \|x\|$

(iii) $p = p^*$ (autrement dit p est auto-adjoint ou hilbertien).

32. *Sommes de Fejér, module de continuité, et base orthonormale de $L^2[0,1]$.*
On rappelle les expressions du noyau de Fejér

$$F_N(x) := \sum_{|n| \leqslant N} \Big(1 - \frac{|n|}{N}\Big) \mathrm{e}^{2\pi i n x} = \frac{1}{N} \Big(\frac{\sin \pi N x}{\sin \pi x}\Big)^2.$$

Soit f une fonction continue et 1-périodique. On dit qu'une fonction croissante φ est un module de continuité de f sur $[0,1]$ si $|f(x) - f(y)| \leqslant \varphi(h)$ pour tous x, $y \in \mathbb{R}$ tels que $|x - y| \leqslant h$.

(a) Montrer que, si l'on note $c_k(f) := \int_{-1/2}^{1/2} \mathrm{e}^{-2\pi i t} f(t) \, \mathrm{d}t$ $(k \in \mathbb{Z})$ et si

$$\sigma_N f(x) := \sum_{|k| \leqslant N} \Big(1 - \frac{|k|}{N}\Big) c_k(f) \mathrm{e}^{2\pi i k x} = \int_{-1/2}^{1/2} F_N(t) f(x - t) \, \mathrm{d}t$$

désigne la somme de Fejér d'ordre $N \geqslant 0$ de f, alors

$$\|f - \sigma_N f\|_\infty \leqslant 2 \int_0^{1/2} F_N(t) \varphi(t) \, \mathrm{d}t.$$

(b) Montrer que $F_N(t) \leqslant \min(N, 1/4t^2 N)$ pour tout $t \in]0, 1/2]$. En déduire que

$$\|f - \sigma_N f\|_\infty \leqslant \varphi\Big(\frac{1}{2N}\Big) + \frac{1}{2N} \int_{1/2N}^{1/2\sqrt{N}} \varphi\Big(\frac{1}{2\sqrt{N}}\Big) \frac{\mathrm{d}t}{t^2} + \frac{\varphi(\frac{1}{2})}{2N} \int_{1/2\sqrt{N}}^{1/2} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$$

et finalement que

$$\|f - \sigma_N f\|_\infty \leqslant 2\varphi\Big(\frac{1}{2\sqrt{N}}\Big) + \frac{2\|f\|_\infty}{\sqrt{N}}.$$

(c) Montrer que la famille $\{e_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ définie par $e_n(x) := \mathrm{e}^{2\pi i n x}$ est une base orthonormale de $L^2[0,1]$.

33. *Un lemme de Grothendieck.* Soit E un sous-espace vectoriel fermé de $L^1[0,1]$. On suppose que $E \subset L^\infty[0,1]$. On se propose de montrer que $\dim E < \infty$.

Pour $1 \leqslant p \leqslant \infty$, on note $\|f\|_p$ la norme canonique de $L^p[0,1]$

(a) Montrer qu'il existe une constante C telle que $\|f\|_\infty \leqslant C\|f\|_1$ pour toute fonction f de E. On pourra raisonner comme à l'Exercice 16.

(b) Montrer l'existence d'une constante M telle que $\|f\|_\infty \leqslant M\|f\|_2$ pour toute fonction f de E.

(c) En déduire que E est un sous-espace vectoriel fermé de $L^2[0,1]$.

(d) On suppose à présent que $\dim E = \infty$ et l'on considère une suite $\{e_j\}_{j=1}^\infty$ de vecteurs de E, orthonormée pour le le produit scalaire de $L^2[0,1]$. Montrer l'existence d'un sous-ensemble négligeable $\mathcal{N} \subset [0,1]$ tel que, pour tout entier $n \geqslant 1$ et toute suite finie $\{c_j\}_{j=1}^n \in \mathbb{C}^n$, on ait

$$\Big|\sum_{1\leqslant j\leqslant n} c_j e_j(x)\Big|^2 \leqslant M^2 \sum_{1\leqslant j\leqslant n} |c_j|^2 \quad (x \in [0,1] \smallsetminus \mathcal{N}).$$

(On pourra considérer d'abord le cas $\{c_j\}_{j=1}^n \in \mathbb{Q}^n$.) En déduire que $\sum_{1\leqslant j\leqslant n}|e_j(x)|^2 \leqslant M^2$ pour $x \in [0,1] \smallsetminus \mathcal{N}$ et conclure.

34. *Non-métrisabilité de la topologie faible.*

Soit $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ la base canonique de $\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{C})$. On pose $s := \{\sqrt{n}e_n : n \geqslant 1\}$

(a) Montrer que tout voisinage faible de 0 intersecte s et donc que 0 appartient à l'adhérence faible de s.

(b) Montrer qu'aucune sous-suite de s ne tend vers tend faiblement vers 0.

(c) Conclure.

35. *Lorsque la convergence faible implique la convergence forte.*

Soient E un espace de Hilbert et $\{x_n\}_{n=0}^\infty \in B_E^{\mathbb{N}}$ une suite convergeant faiblement vers $x \in E$ tel que $\|x\| = 1$. Montrer que $x_n \to x$.

Plus généralement, montrer que si $x_n \rightharpoonup x$ et $\limsup \|x_n\| \leqslant \|x\|$, alors $x_n \to x$.

36. *Continuités faible et forte d'un opérateur d'espaces de Hilbert.*

Soient E, F des espaces de Hilbert et $u : E \to F$ une application linéaire.

(a) On munit E soit de la topologie normique, soit de la topologie faible et on munit F de la toplogie faible. Montrer que u est continue si, et seulement si, les applications $x \mapsto (ux \,|\, y)$ sont continues pour tout $y \in F$.

(b) On suppose que $u \in \mathcal{L}(E,F)$. Montrer que u est continue en tant qu'application linéaire entre E et F munis de leurs topologies faibles respectives.

(c) On suppose à présent que u est continue si E et F sont munis de leurs topologies faibles. Montrer que $u \in \mathcal{L}(E,F)$. On pourra appliquer le théorème du graphe fermé.

37. *Sommes de sous-espaces vectoriels fermés.*

Soient E un espace de Hilbert et F, G des sous-espaces vectoriels fermés.

(a) Dans $E := \ell^2(\mathbb{N},\mathbb{C})$, on choisit

$$F := \{\boldsymbol{x} \in E : (\forall n \geqslant 0)\ x_{2n} = 0\}, \quad G := \{\boldsymbol{x} \in E : (\forall n \geqslant 0)\ x_{2n} = x_{2n+1}/(2n+1)\}.$$

Vérifier que F et G sont fermés. Montrer que $\overline{F+G} = E$ et que $F+G$ n'est pas fermé.

(b) On suppose que $\dim G < \infty$. Montrer que $F+G$ est fermé. On pourra se ramener au cas $\dim G = 1$ et considérer $w := y - p_F y$ où y est un vecteur directeur de G.

(c) On suppose que $F \perp G$. Montrer que $F+G$ est fermé.

(d) On suppose que $\sup_{x\in F,\, y\in G,\, \|x\|=\|y\|=1} |\,(x\,|\,y)\,| < 1$. Montrer que $F+G$ est fermé.

38. *Un calcul explicite d'adjoint.*

Soit $E := L^2[0,1]$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ l'opérateur défini par $uf(x) := \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Majorer $\|u\|$ et définir explicitement u^*.

39. *Une troisième preuve du théorème de Schauder.*

Soient E, F des espaces de Hilbert et $u \in \mathcal{L}(E,F)$.

(a) Montrer que $u \in \mathcal{K}(E,F)$ si, et seulement si, pour toute suite $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \in B_E^{\mathbb{N}}$, la suite $\{ux_n\}_{n=0}^{\infty}$ possède une valeur d'adhérence.

(b) Montrer que $u \in \mathcal{K}(E,F)$ si, et seulement si, pour toute suite $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \in B_E^{\mathbb{N}}$ on a $x_n \rightharpoonup x \Rightarrow ux_n \to ux$.

(c) Montrer que $u \in \mathcal{K}(E,F) \Leftrightarrow u^* \in \mathcal{K}(F,E)$.

40. *Adhérences faible et forte d'un convexe.*

On se propose de démontrer ici le théorème suivant.

Théorème. *Soit E un espace de Hilbert réel et A une partie convexe de E Alors A est faiblement fermée si, et seulement si, A est fortement fermée.*

On note B l'adhérence faible de A, autrement dit l'ensemble des points x de E tels que, pour tous $\varepsilon > 0$, $y_1, \ldots, y_n \in E$ on ait $V(x;\varepsilon;y_1,\ldots,y_n) \cap A \neq \varnothing$, où l'on a posé $V(x;\varepsilon;y_1,\ldots,y_n) := \{w \in E : \max_{1\leqslant j\leqslant n} |(x-w\,|\,y_j)| < \varepsilon\}$. Nous allons montrer que $\overline{A} = B$, ce qui est clairement équivalent à l'assertion souhaitée.

(a) Montrer que $\overline{A} \subset B$.

(b) Montrer que $\overline{A}$ est convexe.

(c) Soit $x \in E \setminus \overline{A}$. On pose $y := p_{\overline{A}}x$ (cf. l'Exercice 24). Montrer que $r := \|x-y\| > 0$ et que $(x-z\,|\,x-y) \geqslant r^2$ pour tout $z \in \overline{A}$. En déduire que $V(x;r^2/2;x,y) \cap \overline{A} = \varnothing$. Conclure.

41. *Un opérateur compact de $L^2([0,1],\mathbb{C})$.*

Soit $E := L^2([0,1],\mathbb{C})$ muni du produit scalaire canonique. On définit $u : E \to E$ par

$$uf(x) := i\mathrm{e}^{i\pi x}\left\{\int_0^x \mathrm{e}^{-i\pi t} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_x^1 \mathrm{e}^{-i\pi t} f(t)\,\mathrm{d}t\right\} \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1).$$

(a) Montrer que, pour toute fonction $f \in E$, on a $uf \in \mathcal{C}([0,1];\mathbb{C})$ et $\|uf\|_\infty \leqslant \|f\|$. En déduire que $u \in \mathcal{L}(E)$.

(b) Soient $f \in E$ et $\{f_n\}_{n=0}^{\infty} \in B_E^{\mathbb{N}}$ une suite telle que $f_n \rightharpoonup f$. Montrer que $f \in B_E$ et que, pour tout $x \in [0,1]$, on a $\lim_n uf_n(x) = uf(x)$. En déduire que $uf_n \to uf$ dans E, puis que $u \in \mathcal{K}(E)$.

(c) Montrer que, pour tout $f \in E$, la fonction uf est solution de l'équation différentielle

$$y' - i\pi y = 2if.$$

(d) Comparer $uf(0)$ et $uf(1)$ pour $f \in E$.

(e) Déterminer les valeurs propres de u.

42. *Image d'un opérateur compact.*

On se propose ici de démontrer le résultat suivant : *Soient E, F des espaces de Hilbert et $u \in \mathcal{K}(E, F)$. Alors* $\operatorname{Im} u$ *est fermé dans F si, et seulement si, u est de rang fini.*

(a) Établir la condition suffisante.

(b) On suppose à présent que u est compact et d'image fermée. On note $G := \operatorname{Im} u$.

(i) Montrer que G est un espace de Hilbert.

(ii) Montrer que $u(B_E)$ est un voisinage de 0 dans G.

(iii) En déduire qu'il existe $r > 0$ tel que $\overline{B_G(0; r)}$ soit un compact de G.

(iv) Conclure.

43. *Un opérateur non compact de $L^2([0, 1], \mathbb{R})$.*

Soit $E := L^2([0, 1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique. On définit $u : E \to E$ par $uf(x) = xf(x)$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$.

(a) Montrer que $u \in \mathcal{L}(E)$ et calculer $\|u\|$.

(b) Montrer que u est hermitien, non compact.

(c) Montrer que $F := \operatorname{Im} u$ est un sous-espace vectoriel dense de E, strictement inclus dans E.

44. *Un opérateur de Hilbert-Schmidt.* Soit u l'opérateur de $L^2[0, 1]$ défini à l'Exercice 41. Montrer que u est un opérateur de Hilbert-Schmidt auto-adjoint et déterminer son spectre.

Université de Lorraine
Faculté des sciences et technologies
Master de mathématiques 2017/2018
Analyse (MAMT1 UE701 TC)
Gérald Tenenbaum

Exercices sur la convolution et la transformation de Fourier

45. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $f(x) > 0$ pour tout nombre réel x. Montrer que, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^*$, on a $|\widehat{f}(\xi)| < \widehat{f}(0)$.

46. Pour $a > 0$, on pose $\varphi_a(x) = \dfrac{a}{\pi(a^2 + x^2)}$. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$.

(a) Montrer que $g_a(x) = f * \varphi_a(x)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

(b) Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\int_{|x|>\varepsilon} \varphi_a(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{2a}{\pi\varepsilon}.$$

(c) Montrer que $\| f - g_a \|_1 \leqslant \sup_{|y|\leqslant\varepsilon} \|f - \tau_y f\|_1 + (4a/\pi\varepsilon)\|f\|_1$. En déduire que $\lim_{a\to 0} \| f - g_a \|_1 = 0$.

(d) Soit ϑ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\vartheta(x) = \begin{cases} \exp\{1 - (1 - x^2)^{-2}\} & \text{si } |x| < 1, \\ 0 & \text{si } |x| \geqslant 1. \end{cases}$$

Dessiner sommairement le graphe de ϑ. Montrer que ϑ est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Pour $\varepsilon > 0$, on définit ϑ_ε par $\vartheta_\varepsilon(x) = \vartheta(\varepsilon x)$. Montrer que, pour toute fonction $g \in L^1(\mathbb{R})$, on a $\lim_{\varepsilon\to 0} \|g\vartheta_\varepsilon - g\|_1 = 0$.

(e) Déduire des résultats des questions (c) et (d) que l'espace vectoriel $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ des fonctions à support compact et de classe $\mathcal{C}^\infty$ est dense dans $L^1(\mathbb{R})$.

47. *L'inégalité de Young.*[1]

Soient $p, q \in [1, \infty]$, tels que $1/p + 1/q \geqslant 1$. On définit $r > 0$ par $1/r = 1/p + 1/q - 1$. Le but de cet exercice est de montrer que, pour tous $f \in L^p(\mathbb{R})$, $g \in L^q(\mathbb{R})$, on a $h := f * g \in L^r(\mathbb{R})$ et $\|h\|_r \leqslant \|f\|_p \|g\|_q$.

(a) Établir le résultat lorsque $q = 1$.

(b) Établir le résultat lorsque $q = \infty$.

(c) Établir le cas général. On pourra écrire $|f(x - y)| = |f(x - y)|^{1-p/r} |f(x - y)|^{p/r}$ et introduire l'exposant P, conjugué de q.

1. Mathématicien britannique, 1863-1942.

48. (a) Montrer par intégration complexe que l'on a pour $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2ax - \cos 2bx}{x^2} \, \mathrm{d}x = 2\pi(b-a).$$

(b) En déduire que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Big(\frac{\sin \pi x}{\pi x}\Big)^2 e^{-2\pi i \xi x} \, \mathrm{d}x = (1 - |\xi|)^+.$$

Calculer, pour $T > 0$, la transformée de Fourier de la fonction $w_T(x) = T\Big(\dfrac{\sin \pi T x}{\pi T x}\Big)^2$.

49. Soit $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ qui tendent vers 0 lorsque $|x| \to \infty$. Soit φ une fonction impaire de $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ telle que $\varphi = \widehat{f}$ pour une certaine fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$.

Montrer que $\varphi(x) = -i \int_{\mathbb{R}} f(t) \sin(2\pi x t) \, \mathrm{d}t$. En déduire que

$$\sup_{y \geqslant 1} \Big| \int_1^y \frac{\varphi(x)}{x} \, \mathrm{d}x \Big| < \infty.$$

En déduire que la transformation de Fourier $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ n'est pas surjective.

50. Posons $g_n := \mathbf{1}_{[-n,n]}$.

(a) Calculer explicitement $g_1 * g_n$ $(n \in \mathbb{N})$.

(b) On pose $f_n(x) := \sin(2\pi n x)\sin(2\pi x)/(x^2\pi^2)$. Montrer que $\widehat{f_n}(\xi) = g_1 * g_n(\xi)$.

(c) Montrer que $\|f_n\|_1 \to \infty$ lorsque $n \to \infty$. En déduire que $\mathcal{F}$ n'est pas un opérateur surjectif de $L^1(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$.

(d) Est-il vrai que $\overline{\mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}))} = \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$? [On pourra commencer par établir que la transformée de Fourier d'une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est nécessairement dans $L^1(\mathbb{R})$.]

51. *Polynômes d'Hermite.*(2)

(a) Montrer que la famille des fonction $h_n : x \mapsto x^n \mathrm{e}^{-x^2/2}$ est libre dans $E := L^1(\mathbb{R})$.

(b) Soit $f \in E$ telle que $(f \mid h_n) = 0$ pour tout entier $n \geqslant 0$. On pose $g(x) := \mathrm{e}^{-x^2/2} f(x)$. Montrer que $g \in L^1(\mathbb{R})$ et que $\widehat{g} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Calculer $\widehat{g}^{(n)}(0)$.

(c) Montrer que l'on peut prolonger $\widehat{g}$ en une fonction entière. Qu'en déduit-on ?

(d) Montrer que le procédé de Gram–Schmidt permet de transformer la famille des h_n en une famille $\{x \mapsto G_n(x)\mathrm{e}^{-x^2/2}\}_{n=0}^\infty$ où G_n est un polynôme de degré n (qu'on ne demande pas de calculer).

(e) Montrer que la famille des $\{x \mapsto G_n(x)\mathrm{e}^{-x^2/2}\}_{n=0}^\infty$ est une base hilbertienne de E.

(f) On définit la suite $\{H_n\}_{n=0}^\infty$ des polynômes d'Hermite par

$$H_n(x) := (-1)^n \mathrm{e}^{x^2} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} \mathrm{e}^{-x^2}.$$

Montrer que $G_n = c_n H_n$ $(n \geqslant 0)$ où c_n est un coefficient réel que l'on ne demande pas de calculer.

52. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle qu'il existe $\xi_0 \in \mathbb{R}$ vérifiant $\widehat{f}(\xi_0) = 0$. Montrer que le sous-espace vectoriel de $L^1(\mathbb{R})$ engendré par les $\tau_y f : x \mapsto f(x-y)$ n'est pas dense dans $L^1(\mathbb{R})$.

---

2. Mathématicien français, 1822–1901.

53. (a) Soient $f,\ g \in L^1(\mathbb{R})$. Montrer que $f\widehat{g} \in L^1(\mathbb{R})$ et établir la formule

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\widehat{g}(x)\,\mathrm{d}x. \tag{2}$$

(b) En appliquant (2) avec $g = \overline{\widehat{f}}$ montrer que la formule de Plancherel

$$\|f\|_2 = \|\widehat{f}\|_2$$

est valable pour toute fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$.

(c) Quel est l'adjoint de l'endomorphisme $\mathcal{F}$ de $L^2(\mathbb{R})$?

54. En utilisant (2), montrer que

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2\pi x}\Big(\frac{\sin \pi x}{\pi x}\Big)^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{4} - \frac{\log 2}{2\pi}\cdot$$

55. Calculer $\mathcal{F}\mathbf{1}_{[-1,1]}$. Appliquer le théorème d'inversion locale et en déduire $\mathcal{F}f$ pour $f(x) = (\sin 2\pi x)/(\pi x) \in L^2(\mathbb{R})$.

56. *Formule de Parseval.* Montrer que pour $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{g}(\xi)}\,\mathrm{d}x.$$

Application. Calculer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-2\pi|x|}\frac{\sin(2\pi x)}{\pi x}\,\mathrm{d}x$ en utilisant un résultat de l'Exercice 55.

57. *Avec la formule de Plancherel.* Calculer $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \Big(\frac{\sin x}{x}\Big)^4 \mathrm{d}x.$

58. Calculer $\mathcal{F}g$ pour $g(x) := x/(1+x^2)$. Cette fonction est-elle continue à l'origine ?

59. Calculer la transformée de Fourier de $f(x) = 1/\operatorname{ch}\pi x$ en intégrant $\mathrm{e}^{-2\pi i z\xi}/\operatorname{ch}\pi z$ sur le bord du rectangle de sommets $\pm R$, $\pm R + i$.

60. (a) Montrer que l'algèbre $L^1(\mathbb{R})$ ne possède pas d'unité pour le produit de convolution, autrement dit qu'il n'existe pas de fonction $u \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $f * u = f$ pour toute $f \in L^1(\mathbb{R})$.

(b) Résoudre dans $L^1(\mathbb{R})$ l'équation $f * f = f$.

(c) On pose $h_a(x) := \sin(\pi a x)/\pi x$ ($x \in \mathbb{R}$). Calculer $\widehat{h_a}$ pour tout $a > 0$ et en déduire la valeur de $h_a * h_b$ pour $a > 0$, $b > 0$.

(d) Montrer que l'équation $f * f = f$ possède une infinité de solutions dans $L^2(\mathbb{R})$.

61. (a) Montrer que le produit de convolution de deux fonctions de $L^2(\mathbb{R})$ est bien défini.

(b) Montrer que, pour $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, on a $\mathcal{F}f * \mathcal{F}g = \mathcal{F}(fg)$.

(c) Soit h_1 définie comme à l'Exercice 60. Montrer que la formule $pf = f * h_1$ définit une application linéaire de $L^2(\mathbb{R})$ sur $L^2(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$.

(d) Montrer que, pour toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$, on a $\|pf\|_2 \leqslant \|f\|_2$.

(e) Montrer que $p \circ p = p$.

62. *Valeurs propres de $\mathcal{F}$.* Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, on définit $\check{f}$ par $\check{f}(x) := f(-x)$ $(x \in \mathbb{R})$.

(a) Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\mathcal{F}f \in L^1(\mathbb{R})$. Calculer $\mathcal{F}\mathcal{F}f$.

(b) Montrer que $\mathcal{F}$ possède au plus quatre valeurs propres sur $L^1(\mathbb{R})$ et les expliciter.

(c) On pose $h_n(x) := x^n \mathrm{e}^{-\pi x^2}$ $(x \in \mathbb{R})$. Calculer $\widehat{h_0}$ et $\widehat{h_1}$. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 0$, on a

$$\widehat{h_{n+2}}(\xi) = \frac{n+1}{2\pi}\widehat{h_n}(\xi) - i\xi\widehat{h_{n+1}(\xi)} \qquad (\xi \in \mathbb{R}).$$

En déduire que

$$\widehat{h_2} = \frac{h_0}{2\pi} - h_2, \quad \widehat{h_3} = \frac{-3i}{2\pi}h_1 + ih_3.$$

(d) Montrer que les quatre valeurs propres possibles déterminées à la question (b) sont effectivement réalisées.

63. *Vecteurs propres de $\mathcal{F}$.* On pose $\varphi_n(x) = (-1)^n \mathrm{e}^{\pi x^2} \dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\mathrm{e}^{-2\pi x^2}$. Trouver une équation différentielle satisfaite par $\widehat{\varphi}_0$ et déterminer cette fonction. Montrer que $\varphi_n(x) = 2\pi x\varphi_{n-1}(x) - \varphi'_{n-1}(x)$ pour $n \geqslant 1$ et établir que la suite des fonctions $i^n\widehat{\varphi_n}(\xi)$ vérifie la même relation de récurrence. Calculer $\widehat{\varphi}_n(\xi)$ pour $n \geqslant 1$ en fonction de $\varphi_n(\xi)$.

64. *L'espace de Schwartz.*(3)

Soit $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ (espace de Schwartz) l'espace vectoriel des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telles que $x^p f^{(n)}(x)$ soit bornée pour tous entiers $n, p \geqslant 0$. On définit alors $h_{jk}(f) := \|x^j f^{(k)}(x)\|_\infty$ $(j, k \in \mathbb{N})$ et

$$d(f,g) := \sum_{j\geqslant 0, k\geqslant 0} \frac{\min(1, h_{jk}(f-g))}{2^{j+k}} \qquad (f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

(a) Montrer que l'application $d : \mathcal{S}(\mathbb{R})^2 \to \mathbb{R}^+$ est une distance sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ et que l'espace métrique $(\mathcal{S}(\mathbb{R}), d)$ est complet.

(b) Montrer que la fonction $\psi_1(x) := \mathrm{e}^{-\pi x^2}$ est dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

(c) Montrer que $\mathcal{F}\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$. En déduire, en utilisant (2) avec $g(x) := \psi_1(x/T)$ $(T > 0)$ et en remplaçant f par $f_y(x) := f(x + y)$ $(y \in \mathbb{R})$, que $\mathcal{F}$ est un isomorphisme isométrique de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ sur lui-même lorsque cet espace est muni de la norme L^2.

(d) Montrer que $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est stable par multiplication et par convolution.

65. Déterminer l'équation différentielle satisfaite par $\widehat{f}(\xi)$ si f est solution dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ de l'équation différentielle $f''(x) + xf'(x) + f(x) = 0$. En déduire que cette équation possède effectivement des solutions dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ et les déterminer.

66. *Un principe d'incertitude.* Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, une fonction à valeurs réelles telle que $\|f\|_2 = 1$.

(a) Montrer que $\int_\mathbb{R} xf'(x)f(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}$.

(b) En déduire que

$$\int_\mathbb{R} \xi^2|\widehat{f}(\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi \int_\mathbb{R} x^2 f(x)^2\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{16\pi^2}.$$

(c) Décrire les cas d'égalité.

3. Mathématicien français, 1915–2002.

67. Montrer que l'équation homogène associée à l'équation différentielle

$$(*) \qquad f''(x) - 2f'(x) + 2f(x) = \mathrm{e}^{-|x|} \qquad (x \neq 0)$$

n'a pas de solution non-triviale dans $L^1(\mathbb{R})$. En utilisant la transformée de Fourier trouver une solution intégrable de $(*)$ et montrer qu'elle est unique.

68. *Un théorème de type Paley-Wiener.*

Soit φ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ et à support compact inclus dans $[-1,1]$.

(a) Montrer que la formule $\widehat{\varphi}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\mathrm{e}^{-2\pi i z x}\,\mathrm{d}x$ définit un prolongement holomorphe de $\widehat{\varphi}(\xi)$. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 0$, on a

$$(1+|z|)^n |\widehat{\varphi}(z)| \leqslant C_n \mathrm{e}^{2\pi|\Im m\, z|}.$$

(b) Soit F une fonction entière vérifiant $(1+|z|)^n|F(z)| = O(\mathrm{e}^{2\pi|\Im m\, z|})$ pour chaque entier $n \geqslant 1$. Montrer que la restriction de F à $\mathbb{R}$ est intégrable et que

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi)\mathrm{e}^{2\pi i x\xi}\,\mathrm{d}\xi$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Grâce à une intégration complexe,(4) établir que le support de φ est inclus dans $[-1,1]$. Montrer que $\widehat{\varphi}(\xi) = F(\xi)$.

(c) Énoncer le théorème démontré dans cet exercice.

69. On convient dans cet exercice qu'une fonction de $L^1(\mathbb{R})$ est dite continue si sa classe coïncide avec celle d'une fonction continue. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ une fonction paire bornée dans un voisinage de l'origine.

(a) Montrer que $\widehat{f}(\xi)$ est réelle et paire.

(b) On pose $f_T := f * w_T$. Montrer que $f_T(0)$ est borné indépendamment de T. [On pourra distinguer les cas $T \leqslant 1$ et $T > 1$.]

(c) En déduire que si $\widehat{f}$ est de signe constant à l'infini (c'est-à-dire s'il existe un ξ_0 tel que $\widehat{f}(\xi)$ soit de signe constant pour $|\xi| > \xi_0$) alors $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ et f est continue. Autrement dit : *si $f \in L^1(\mathbb{R})$ n'est pas continue, alors $\widehat{f}(\xi)$ change infiniment souvent de signe lorsque $|\xi| \to \infty$.* [Indication : utiliser les deux expressions pour f_T obtenues dans la démonstration du Théorème III.3.2.]

70. Soit $g \in L^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R})$ et f une solution intégrable de classe $\mathcal{C}^2$ de l'équation différentielle $f'' - f + g = 0$.

(a) Montrer que $f'' \in L^1(\mathbb{R})$ et en déduire que $f'(x) \to 0$ lorsque $|x| \to \infty$.

(b) Pour $a, b \in \mathbb{R}^+$, $\xi \in \mathbb{R}$, évaluer $\displaystyle\int_{-a}^{b} f''(x)\mathrm{e}^{-2\pi i\xi x}\,\mathrm{d}x$ en intégrant deux fois par parties. Montrer que $f(x)\mathrm{e}^{-2\pi i x\xi}$ tend vers une limite $h^\pm(\xi)$ lorsque $x \to \pm\infty$. En déduire que $h^\pm(\xi) = 0$.

(c) Montrer que $\widehat{f''}(\xi) = -4\pi^2\xi^2\widehat{f}(\xi)$.

(d) Calculer $\widehat{f}(\xi)$ et en déduire une expression de f en fonction de g. Montrer que cette expression définit bien une solution de l'équation différentielle initiale.

4. On pourra considérer le rectangle de coordonnées $\pm R$; $\pm R + iy$, avec $R > 0$, $y \neq 0$.

71. *L'image de $L^1(\mathbb{R})$ par la transformation de Fourier.*

(a) Soient $f, g \in L^2(\mathbb{R})$. Montrer que $f * g = \overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}f \cdot \mathcal{F}g)$.

(b) Montrer que l'espace $L^2(\mathbb{R}) * L^2(\mathbb{R})$ des produits de convolution de deux fonctions de $L^2(\mathbb{R})$ est inclus dans l'espace $\mathcal{F}L^1(\mathbb{R})$ des transformées de Fourier de fonctions intégrables.

(c) Réciproquement, si $f \in L^1(\mathbb{R})$, poser $u := \overline{\mathcal{F}} \dfrac{f}{\sqrt{|f|}}$, $v := \overline{\mathcal{F}} \sqrt{|f|}$ et montrer que $u, v \in L^2(\mathbb{R})$, $u * v = \overline{\mathcal{F}} f$.

(d) En déduire que $\mathcal{F}L^1(\mathbb{R}) = L^2(\mathbb{R}) * L^2(\mathbb{R})$.

72. *Formule de Poisson.*

Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ telle que $|f(x)|$ soit majorée par une fonction intégrable paire, décroissante sur $\mathbb{R}^+$. On suppose de plus que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)| < \infty$.

(a) Vérifier que l'on a bien $f \in L^1(\mathbb{R})$.

(b) Montrer que la série $\varphi(t) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n+t)$ est normalement convergente sur tout compact de $\mathbb{R}$ et définit une fonction continue 1-périodique.

(c) Montrer que $c_n(\varphi) := \int_0^1 \varphi(t) \mathrm{e}^{-2\pi int}\, \mathrm{d}t = \widehat{f}(n)$ $(n \in \mathbb{Z})$.

(d) En déduire[5] que

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n+t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n) \mathrm{e}^{-2\pi int} \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1).$$

73. *Équation fonctionnelle de la fonction thêta de Jacobi.*[6]

Montrer que, pour tout nombre complexe z tel que $\Re e\, z > 0$, on a

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{-\pi n^2 z} = \frac{1}{\sqrt{z}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{-\pi n^2/z}, \tag{3}$$

où la racine carrée complexe est prise en détermination principale.

5. On rappelle qu'une fonction continue 1-périodique dont la série de Fourier est absolument convergente est somme de sa série de Fourier.

6. Mathématicien allemand, 1804-1851.

Université de Lorraine
Faculté des sciences et technologies
Master 2014/2015
Analyse (MAMT1 UE701)

Lundi 3 novembre 2014
Durée : 1h30

Sujet d'examen

Aucun document n'est autorisé. L'usage d'une calculatrice est interdit. Sauf mention contraire, les notations sont celles du cours.

Les deux parties sont indépendantes.

Il sera tenu le plus grand compte de la rédaction et de la présentation. Seules les explications claires et précises seront prises en compte à la correction.

La partie I est notée sur 5 points. La question II(i) est notée sur 4 points.

I. Énoncer le théorème de l'application ouverte et le théorème de l'isomorphisme. Expliquer comment le second est déduit du premier.

II. Désignons par $E := L^1([-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}])$ l'espace de Banach des fonctions intégrables sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ muni de la norme $\|f\|_1 := \int_{-1/2}^{1/2} |f(x)|\,\mathrm{d}x$,[1] par $F := \ell^\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ l'espace vectoriel des suites complexes bornées indexées par les entiers relatifs et muni de la norme de la convergence uniforme $\|\boldsymbol{z}\|_\infty := \sup_{n\in\mathbb{Z}} |z_n|$, et par $G := c_0(\mathbb{Z})$ le sous-espace de F constitué des suites complexes $\{z_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ telles que $\lim_{|n|\to\infty} z_n = 0$.

Pour $f \in E$, on pose

$$\widehat{f}(n) := \int_{-1/2}^{1/2} f(x)\mathrm{e}^{-2\pi i n x}\,\mathrm{d}x \qquad (n \in \mathbb{Z}).$$

(a) Montrer que F est un espace de Banach et que G est fermé dans F.

(b) Soit $T : E \to \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ l'application définie par $T(f) := \{\widehat{f}(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ $(f \in E)$. Montrer que, pour toute fonction f de E, la suite $T(f)$ est un élément de F et que $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Calculer $\|T\|$.

(c) Soit $a \in]0, 1[$. Expliciter $T(f)$ lorsque $f := \mathbf{1}_{[-a/2,a/2]}$.

(d) Soit H le sous-espace de E constitué des fonctions en escalier. Montrer que, si $f \in H$, alors $T(f) \in G$. On pourra s'inspirer du calcul effectué en (c).

(e) Montrer que $T(E) \subset G$. On pourra utiliser, sans démonstration, le fait que H est dense dans E.

(f) Montrer que T est injective. On pourra utiliser sans démonstration le fait que, pour toute fonction f de E, le polynôme trigonométrique

$$f_N(x) := \sum_{|n|\leqslant N} \Big(1 - \frac{|n|}{N}\Big)\widehat{f}(n)\mathrm{e}^{2\pi i n x} \quad (N \geqslant 0),$$

vérifie $\lim_{N\to\infty} \|f - f_N\|_1 = 0$.

(g) Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on pose $D_N(x) := \sum_{|n|\leqslant N} \mathrm{e}^{2\pi i n x}$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$. Calculer $T(D_N)$.

(h) Montrer que

$$D_N(x) = \frac{\sin((2N+1)\pi x)}{\sin(\pi x)} = \frac{\sin((2N+1)\pi x)}{\pi x} + O(1) \qquad (|x| \leqslant \tfrac{1}{2}).$$

En déduire que $\lim_{N\to\infty} \|D_N\|_1 = +\infty$. (On pourra opérer le changement de variables $y = (2N+1)x$ et observer que $|\sin \pi y| \geqslant \frac{1}{2}$ pour $y \in \cup_{0\leqslant k\leqslant N}[k+\frac{1}{6}, k+\frac{1}{2}]$.)

(i) A-t-on $\operatorname{Im} T = G$?

---

1. On ne demande pas de redémontrer que E est un espace de Banach.

Université de Lorraine
Faculté des sciences et technologies
Master 2014/2015
Analyse (MAMT1 UE701)

Vendredi 5 décembre 2014
Durée : 1h

Sujet d'examen

Aucun document n'est autorisé. L'usage d'une calculatrice est interdit. Sauf mention contraire, les notations sont celles du cours.

Les deux parties sont indépendantes.

Il sera tenu le plus grand compte de la rédaction et de la présentation. Seules les explications claires et précises seront prises en compte à la correction.

I. Donner la définition et la caractérisation de la projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Hilbert.

II. Soient E un espace de Hilbert séparable et F un sous-espace vectoriel fermé non réduit à $\{0\}$. On note p_F la projection orthogonale de E sur F et l'on définit $G := F^\perp$.

(a) Montrer que, pour tout $(x, y) \in E \times G$, on a $(x \,|\, y) = (x - p_F x \,|\, y)$. En déduire que, pour tout x de E, on a $d(x, F) = \sup_{z \in G,\, \|z\|=1} |\,(x \,|\, z)\,|$.

(b) On désigne par $\{e_j\}_{j \in J}$, où J est un sous-ensemble de $\mathbb{N}$ fini ou non, une base hilbertienne de F.

(i) Rappeler les résultats du cours permettant d'affirmer l'existence d'une telle base de F (on pourra distinguer les cas $\dim F < \infty$ et $\dim F = \infty$).

(ii) Soit $x \in E$. Déterminer les coordonnées de $p_F x$ sur la base $\{e_j\}_{j \in J}$ et écrire la représentation correspondante de $p_F x$.

(c) Déterminer une base orthonormale du sous-espace F engendré dans $L^2([0,1], \mathbb{R})$ par les polynômes $t \mapsto 1$ et $t \mapsto t$. Calculer $p_F(t \mapsto t^2)$. En déduire la valeur de

$$m := \inf_{a \in \mathbb{R},\, b \in \mathbb{R}} \int_0^1 (t^2 - at - b)^2 \,\mathrm{d}t.$$

On pourra utiliser, sans les vérifier, *certains* des calculs suivants

$$\int_0^1 (t - \tfrac{1}{2})^2 \,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{12}, \quad \int_0^1 t^2(2t-1) \,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{6}, \quad \int_0^1 t^2(2-t) \,\mathrm{d}t = \tfrac{5}{12},$$

$$\int_0^1 (t^2 - \tfrac{1}{6}t + 1)^2 \,\mathrm{d}t = \tfrac{439}{270}, \quad \int_0^1 (t^2 - t + \tfrac{1}{6})^2 \,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{180}, \quad \int_0^1 (t^2 + t - \tfrac{1}{6})^2 \,\mathrm{d}t = \tfrac{141}{180}.$$

(d) On suppose désormais que $E = \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$, on se donne un entier $n \in \mathbb{N}$, et l'on définit $F := \{\boldsymbol{x} \in E : \sum_{0 \leqslant j \leqslant n} x_j = 0\}$.

(i) Montrer que F est un sous-espace vectoriel fermé de E et déterminer $\boldsymbol{z} \in E$ tel que $F = \{\boldsymbol{x} \in E : (\boldsymbol{x} \,|\, \boldsymbol{z}) = 0\}$. Quel théorème du cours implique-t-il a priori l'existence d'un tel vecteur $\boldsymbol{z}$? Montrer que $F^\perp = \mathbb{C}\boldsymbol{z}$ et que $E = F \oplus F^\perp$.

(ii) Soit $\boldsymbol{y} := (1, 0, 0, \ldots) \in E$. En considérant la décomposition

$$\boldsymbol{y} = p_F \boldsymbol{y} + p_{F^\perp} \boldsymbol{y},$$

calculer $d(\boldsymbol{y}, F)$.

Université de Lorraine
Faculté des sciences et technologies
Master 2014/2015
Analyse (MAMT1 UE701)

Lundi 12 janvier 2015
Durée : 3h

Sujet d'examen

Aucun document n'est autorisé. L'usage d'une calculatrice est interdit. Sauf mention contraire, les notations sont celles du cours.

Les quatre parties peuvent être traitées indépendamment.

Il sera tenu le plus grand compte de la rédaction et de la présentation. Seules les explications claires et précises seront prises en compte à la correction.

Les notations sont celles du cours. Dans tout le sujet, on note exclusivement par $\widehat{f}$ la transformée de Fourier d'une fonction de variable réelle lorsqu'elle est bien définie.

I. (a) Énoncer le théorème de Plancherel.

(b) Expliquer pourquoi ce résultat implique la validité de la formule de Parseval

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{g}(\xi)}\,\mathrm{d}\xi$$

pour toutes fonctions f, g de $L^2(\mathbb{R})$.

II. Soit $\varphi_1(x) := \mathrm{e}^{-2\pi|x|}$ $(x \in \mathbb{R})$. On rappelle que $\widehat{\varphi_1}(\xi) = \dfrac{1}{\pi(1+\xi^2)}$.

(a) On pose $h_1(x) := \mathbf{1}_{[-1/2,1/2]}(x)$. Calculer $\widehat{h_1}(\xi)$.

(b) Montrer l'existence et calculer la valeur de l'intégrale $I := \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(\pi\xi)}{\xi(1+\xi^2)}\,\mathrm{d}\xi$. On pourra utiliser la formule de Parseval.

III. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ une fonction telle que $\widehat{f}(\xi) = 1/(1+|\xi|^3)$.

(a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

(b) Montrer que $f'(x) = -4\pi \displaystyle\int_0^\infty \frac{\xi \sin(2\pi x\xi)}{1+\xi^3}\,\mathrm{d}\xi$ $(x \in \mathbb{R})$ et en déduire, en effectuant deux intégrations par parties successives, que $f' \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$. On pourra utiliser, sans les calculer, le fait que les dérivées de $Q(\xi) := \xi/(1+\xi^3)$ sont intégrables sur $\mathbb{R}^+$.

(c) Calculer $\widehat{f'}(\xi)$.

(d) Calculer $J := \displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f * f'(x)|^2\,\mathrm{d}x$.

IV. Soit E un espace de Hilbert séparable de dimension infinie et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme continu injectif. On pose $v := u^*u$.

(a) Montrer que v est auto-adjoint, injectif, et que $\operatorname{Im} v$ est dense dans E.

(b) En considérant le cas de l'espace $E_0 := \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ et un endomorphisme diagonal $\boldsymbol{x} \mapsto (\lambda_0 x_0, \lambda_1 x_1, \ldots)$ où $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, montrer que v n'est pas nécessairement surjectif.

(c) À partir de cette question, et jusqu'à la fin du problème, on suppose que v est surjectif. Montrer que $v \in \mathcal{L}^*(E)$, autrement dit que v est un isomorphisme de E.

(d) Montrer l'existence d'une constante M telle que $\|x\| \leqslant M\|ux\|$ pour tout x de E. En déduire que $\operatorname{Im} u$ est fermé.

(e) On rappelle que, pour tout endomorphisme w de E on a $E = \operatorname{Ker} w \oplus \overline{\operatorname{Im} w^*}$: expliquer d'où provient cette représentation.

(f) Montrer que $E = \operatorname{Ker} u^* \oplus \operatorname{Im} u$. À l'aide de cette égalité et de la conclusion de la question (c), montrer que $\operatorname{Im} u^*$ est fermé, puis que u^* est un isomorphisme de $\operatorname{Im} u$ sur E.

(g) Montrer que le décalage à droite $u : \boldsymbol{x} \mapsto (0, x_0, x_1, \ldots)$ sur E_0 est un endomorphisme continu, injectif, et vérifie $v \in \mathcal{L}^*(E_0)$. En déduire que les hypothèses précédentes n'impliquent pas que u est un isomorphisme.

(h) Montrer que, si $w := uu^* \in \mathcal{L}^*(E)$, alors u et u^* sont des isomorphismes de E.

Université de Lorraine
Faculté des sciences et technologies
Master 2015/2016
Analyse (MAMT1 UE701)

Vendredi 13 novembre 2015
Durée : 1h30

Sujet d'examen

Aucun document n'est autorisé. L'usage d'une calculatrice est interdit. Sauf mention contraire, les notations sont celles du cours.

Les deux exercices sont indépendants.

Il sera tenu le plus grand compte de la rédaction et de la présentation. Seules les explications claires et précises seront prises en compte à la correction.

I. Énoncer le principe de Baire.

II. Soit E un espace de Banach possédant une famille génératrice dénombrable $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$. Pour chaque entier $n \geqslant 1$, on pose $E_n := \mathrm{Vect}[e_1, \ldots, e_n]$.

(a) Montrer que $E = \cup_{n \geqslant 1} E_n$.

(b) Soit $p \geqslant 1$ tel que $E_p \neq E$.

(i) Montrer qu'il existe $n \geqslant 1$ tel que $e_n \notin E_p$.

(ii) Montrer que, pour tous $x \in E_p$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$, on a $x + \lambda e_n \notin E_p$.

(iii) En déduire que E_p est d'intérieur vide.

(c) Montrer que E est de dimension finie.

III. On munit l'espace $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ d'une certaine norme, notée $f \mapsto \|f\|$, qui lui confère une structure d'espace de Banach. On suppose de plus que toute suite $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ convergeant dans $(E, \|\cdot\|)$ converge aussi simplement vers la même limite.

Pour toute fonction f de E, on pose $\|f\|_\infty := \sup_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f(x)|$.

(a) Soit $D := \{(f, f) : f \in E\}$. Montrer que l'application

$$(f, f) \mapsto \|(f, f)\|_D := \|f\| + \|f\|_\infty$$

est une norme sur D et que $(D, \|\cdot\|_D)$ est un espace de Banach.

(b) Soit $\varphi : (D, \|\cdot\|_D) \to (E, \|\cdot\|)$ l'application définie par $\varphi(f, f) = f$. Montrer que φ est bijective et bicontinue.

(c) En déduire que l'identité $f \mapsto f$ de $(E, \|\cdot\|)$ dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$ est bijective et continue, puis que les normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes.

Université de Lorraine
Faculté des sciences et technologies
Master 2015/2016
Analyse (MAMT1 UE701)

Jeudi 14 janvier 2016
Durée : 3h

Sujet d'examen

Aucun document n'est autorisé. L'usage d'une calculatrice est interdit. Sauf mention contraire, les notations sont celles du cours.

Les quatre parties peuvent être traitées indépendamment.

Il sera tenu le plus grand compte de la rédaction et de la présentation. Seules les explications claires et précises seront prises en compte à la correction.

Les notations sont celles du cours. Dans l'exercice IV, on note $\widehat{f}$ ou $\mathcal{F}f$ la transformée de Fourier d'une fonction de variable réelle f de $L^1(\mathbb{R})$ ou $L^2(\mathbb{R})$.

I. Donner la définition du rayon spectral $\varrho(u)$ d'un opérateur d'espaces de Banach et expliciter les trois formules données en cours pour $\|u\|$ lorsque u est un endomorphisme continu normal d'un espace de Hilbert séparable.

II. Soit $f \mapsto \|f\|$ une norme sur $E := \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ telle que toutes les applications linéaires $T_x : (E, \|\cdot\|) \to \mathbb{R}$ définies par $T_x(f) := f(x)$ soient continues. On suppose de plus que $(E, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach.

(a) Montrer que, pour chaque $f \in E$, on a $\sup_{0\leqslant x\leqslant 1} |T_x(f)| < \infty$. En déduire l'existence d'une constante $M > 0$ telle que $\sup_{0\leqslant x\leqslant 1} \|T_x\| \leqslant M$.

(b) Déduire de la question précédente que, pour toute fonction f de E, on a $\|f\|_\infty \leqslant M\|f\|$, et donc que l'identité $(E, \|\cdot\|) \to (E, \|\cdot\|_\infty)$ est continue.

(c) Montrer que les normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes.

III. Soient E un espace de Hilbert, $u \in \mathcal{L}(E)$ un opérateur de norme n'excédant pas 1 et $F := \operatorname{Ker}(\mathrm{id}_E - u)$. On note

$$u_n := \frac{1}{n+1} \sum_{0\leqslant k\leqslant n} u^k$$

la moyenne des $n+1$ premiers itérés de u. Le but de cet exercice consiste à déterminer des conditions suffisantes pour que u_n tende vers le projecteur p_F dans $\mathcal{L}(E)$ lorsque $n \to \infty$.

(a) Déterminer u_n, et F lorsque u est le décalage à gauche $(x_0, x_1, \ldots) \mapsto (x_1, x_2, \ldots)$ et E est l'ensemble des suites réelles bornées muni du produit scalaire $(\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{y}) := \sum_{j\geqslant 0} x_j y_j / 2^j$. A-t-on $\lim u_n = p_F$ dans ce cas ? On pourra considérer le vecteur $\boldsymbol{x}$ défini pas $x_j := (-1)^k$ pour $2^k < j \leqslant 2^{k+1}$ $(k \in \mathbb{N})$.

(b) À partir de cette question, on suppose que l'opérateur u est normal. Montrer que $F = \operatorname{Ker}(\mathrm{id}_E - u^*)$ et que $E = F \oplus G$ où $G = \overline{\operatorname{Im}(\mathrm{id}_E - u)}$.

(c) Montrer que $\lim_n u_n x = 0$ pour tout x de G.

(d) Établir la propriété requise pour u.

(e) Application. On suppose à présent que E est l'espace de Banach des fonctions complexes continues sur $[0,1]$ et 1-périodiques sur $\mathbb{R}$, muni du produit scalaire canonique $(f \mid g) = \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t$. On considère $\vartheta \in \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q}$ et on définit l'opérateur de translation u par $uf(t) = f(t+\vartheta)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ pour tout f de E. On rappelle que $\vartheta\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

(i) Montrer que u est normal.

(ii) Montrer que $F := \operatorname{Ker}(\mathrm{id}_E - u)$ coïncide avec l'ensemble des fonctions constantes de E.

(iii) Soit $f \in E$. Déterminer $p_F f$.

(iv) Montrer que, pour toute fonction f de E, la suite de fonctions définies par

$$u_n f(t) := \frac{1}{n+1} \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} f(t + k\vartheta)$$

tend dans E vers la constante $\mu(f) := \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.

IV. Soient $\varphi(x) := \sin(\pi x)/(\pi x)$ $(x \in \mathbb{R}^*)$, $\varphi(0) := 1$, et $\psi(x) := \mathbf{1}_{[-1/2,1/2]}(x)$ $(x \in \mathbb{R})$.

(a) Montrer que $\widehat{\psi} = \varphi$. En déduire que $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ et que $\widehat{\varphi} = \psi$ pp.

(b) Montrer que, pour toute fonction f de $L^2(\mathbb{R})$, la convolution $f * \varphi$ est définie partout et vérifie $\|f * \varphi\|_\infty \leqslant \|f\|_2 \|\varphi\|_2$. On définit alors une application linéaire $u : L^2(\mathbb{R}) \to L^\infty(\mathbb{R})$ par $uf := f * \varphi$.

(c) Montrer que, pour toute f de $L^2(\mathbb{R})$, on a $uf \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$. On pourra utiliser sans la redémontrer la majoration $\sup_{|v-x| \leqslant 1} |\varphi(v-y)| \leqslant K_x/(1+|y|)$ $(y \in \mathbb{R})$, valable pour tout $x \in \mathbb{R}$ fixé, où K_x ne dépend que de x.

(d) Pour chaque $x \in \mathbb{R}$ fixé, on pose $\sigma_x f(y) := f(x-y)$ $(y \in \mathbb{R})$. Montrer que $\widehat{\sigma_x f}(\xi) = \mathrm{e}^{-2\pi i x \xi} \widehat{f}(-\xi)$ $(\xi \in \mathbb{R})$.

(e) Expliquer succinctement pourquoi le théorème de Plancherel implique la formule de Parseval $(f \,|\, g) = \left(\widehat{f} \,|\, \widehat{g}\right)$ pour toutes fonctions f, g de $L^2(\mathbb{R})$.[1] Montrer que, pour toute fonction f de $L^2(\mathbb{R})$, on a $uf = \overline{\mathcal{F}}(\widehat{f}\psi)$.

(f) Déduire de ce qui précède que, pour toute f de $L^2(\mathbb{R})$, on a $uf \in L^2(\mathbb{R})$ et $\|uf\|_2 \leqslant \|f\|_2$.

(g) Montrer que, pour tout entier $k \geqslant 0$, l'application $g_k : \xi \mapsto \xi^k \widehat{f}(\xi)\psi(\xi)$ est dans $L^1(\mathbb{R})$. En déduire que $uf \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

1. L'espace $L^2(\mathbb{R})$ est ici muni du produit scalaire usuel.

Université de Lorraine
Faculté des sciences et technologies
Master 2016/2017
Analyse (MAMT1 UE701)

Vendredi 25 novembre 2016
Durée : 2h

Sujet d'examen

Aucun document n'est autorisé. L'usage d'une calculatrice est interdit. Sauf mention contraire, les notations sont celles du cours.

Les quatre exercices sont indépendants.

Il sera tenu le plus grand compte de la rédaction et de la présentation. Seules les explications claires et précises seront prises en compte à la correction.

I. Énoncer le théorème de l'application ouverte.

II. On dit qu'une partie A d'un espace métrique est *rare* si son adhérence est d'intérieur vide. On dit qu'elle est *maigre* si elle est contenue dans une réunion dénombrable de parties rares.

(a) Montrer que, dans un espace métrique complet, le complémentaire d'une partie maigre est nécessairement dense.
(b) Une partie maigre peut-elle être dense ?
(c) L'ensemble $A := \{1/n : n \geqslant 1\}$ est-il rare dans $\mathbb{R}$?
(d) Dans $\mathbb{R}$, l'ensemble $B := \mathbb{Z} \cup \big([0,1] \cap \mathbb{Q}\big)$ est-il rare ? Est-il maigre ?
(e) Soient E, F deux espaces de Banach, $T \in \mathcal{L}(E,F)$ et $V := T\big(B_E(0;1)\big)$.
(i) Montrer que $T(E) \subset \cup_{n\geqslant 1} n\overline{V}$.
(ii) Montrer que, si $\overset{\circ}{\overline{V}} = \varnothing$, alors $T(E)$ est maigre.
(iii) Montrer que, si $\overset{\circ}{\overline{V}} \neq \varnothing$, alors T est surjective.[1]
(iv) En déduire que T est soit surjective, soit d'image maigre.

(f) Montrer que l'injection canonique de $L^2[0,1]$ dans $L^1[0,1]$ est continue mais non surjective. Que peut-on en déduire ?

III. Soient E un espace de Hilbert et $u \in \mathcal{L}(E)$ un opérateur isométrique.
(a) Montrer que, si u est surjectif, alors u est bijectif et $u^* = u^{-1}$.
(b) Montrer que si u n'est pas un opérateur normal, alors $u(E)$ est un sous-espace vectoriel fermé propre de E.

IV Soient E un espace de Hilbert et $u \in \mathcal{L}(E)$ un opérateur continu hermitien non nul.
(a) Montrer que $u^n \neq 0$ si n est de la forme 2^p avec $p \in \mathbb{N}^*$.
(b) Montrer que $u^n \neq 0$ pour tout entier $n \geqslant 1$.

1. On admettra que $\overset{\circ}{\overline{V}} \neq \varnothing \Rightarrow 0 \in \overset{\circ}{\overline{V}}$: cette propriété a été établie au cours de la preuve du théorème de l'application ouverte.

Université de Lorraine
Faculté des sciences et technologies
Master 2016/2017
Analyse (MAMT1 UE701)

Mardi 10 janvier 2017
Durée : 3h

Sujet d'examen

Aucun document n'est autorisé. L'usage d'une calculatrice est interdit. Sauf mention contraire, les notations sont celles du cours. On note en particulier

$$\widehat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{e}^{-2i\pi x\xi}\,\mathrm{d}x \qquad (\xi \in \mathbb{R})$$

la transformée de Fourier d'une fonction f intégrable sur $\mathbb{R}$.

Les trois parties sont indépendantes.

Il sera tenu le plus grand compte de la rédaction et de la présentation. Seules les explications claires et précises seront prises en compte à la correction.

I. Définir un espace vectoriel normé localement compact et énoncer la caractérisation de Riesz.

II. Soit E un espace de Hilbert et $T \in \mathcal{L}(E)$ un opérateur continu vérifiant $\|Tx\| < \|x\|$ pour tout $x \in E \setminus \{0\}$. On dit alors que T est *strictement sous-contractant*.

(a) Est-il vrai que la suite $\{T^n x\}_{n=0}^{\infty}$ converge pour tout x de E si $\dim E < \infty$? On pourra montrer préalablement que $\|T\| < 1$.

(b) Pour cette question uniquement, on considère l'opérateur défini sur l'espace de Hilbert $E := L^2([0, \infty[)$ muni du produit scalaire usuel par la formule

$$Tf(x) := \mathbf{1}_{[1,\infty[}(x)f(x-1)\mathrm{e}^{G(x-1)-G(x)} \qquad (x \in \mathbb{R}^+),$$

où l'on a posé $G(x) := \int_0^x \mathrm{d}t/(1+t^2)$.

(i) Montrer que $\|Tf\|_2 < \|f\|_2$ dès que $\|f\|_2 \neq 0$.

(ii) Montrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ et pour toute fonction f de E, on a $T^n f(x) = \mathbf{1}_{[n,\infty[}(x)f(x-n)\mathrm{e}^{G(x-n)-G(x)}$ $(x \in \mathbb{R}^+)$.

(iii) En déduire que $\|T^n f\|_2 \geqslant \mathrm{e}^{-\pi/2}\|f\|_2$ pour tout entier $n \geqslant 1$ et toute fonction f de E.

(iv) En évaluant la limite simple de $T^n f$ lorsque $n \to \infty$, montrer que cette suite ne converge pas dans E si $f \neq 0$.

(c) Déterminer $\mathrm{Ker}(\mathrm{id}_E - T^*)$. En déduire que $\mathrm{Im}(\mathrm{id}_E - T)$ est dense dans E.

On suppose désormais que $\dim E = \infty$ et que l'opérateur strictement sous-contractant $T \in \mathcal{L}(E)$ vérifie en outre

$$\lim_{n\to\infty} \{T^{n+1}x - T^n x\} = 0 \qquad (x \in E).$$

On dit dans ce cas que T est *asymptotiquement régulier*.

(d) Montrer que $\lim_{n\to\infty} T^n x = 0$ pour tout x de $\mathrm{Im}(\mathrm{id}_E - T)$.

(e) Montrer que la partie $F := \{x \in E : \lim_{n\to\infty} T^n x = 0\}$ est fermée dans E. En déduire que $F = E$.

III. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, telle que $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $f' \in L^2(\mathbb{R})$.

(a) Montrer que, pour $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$, on a

$$|f(y) - f(x)| = \left|\int_x^y f'(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \|f'\|_2\sqrt{y-x}.$$

On se contentera d'une brève explication pour la première égalité.

(*Voir suite au verso.*)

(b) Montrer que f est uniformément continue. En déduire que $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$,[1] puis que f est bornée, puis que $f \in E := L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$.

(c) On définit une fonction auxiliaire trapézoïdale $\chi : \mathbb{R} \to [0, 1]$ par

$$\chi(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leqslant 1, \\ 2 - |x| & \text{si } 1 < |x| \leqslant 2, \\ 0 & \text{si } |x| > 2. \end{cases}$$

On pose ensuite $\chi_n(x) := \chi(x/n)$ ($n \geqslant 1$, $x \in \mathbb{R}$) et $f_n := \chi_n f$. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, la fonction f_n est continue, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, et appartient à E.

(d) Montrer que $f_n' \in E$.

(e) Montrer que f_n' tend vers f' dans $L^2(\mathbb{R})$.

(f) Montrer que $\widehat{f_n'}(\xi) = 2\pi i\xi \widehat{f_n}(\xi)$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$. En déduire que la suite $\{\widehat{f_n'}\}_{n=0}^{\infty}$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$ vers une limite g que l'on exprimera en fonction de $\widehat{f}$.

(g) Soit $T > 0$ un nombre réel fixé. Montrer que

$$4\pi^2 \int_{-T}^{T} \xi^2 |\widehat{f}(\xi)|^2 \, \mathrm{d}\xi \leqslant \lim_{n\to\infty} \|\widehat{f_n'}\|_2^2 = \lim_{n\to\infty} \|f_n'\|_2^2 = \|f'\|_2^2.$$

En déduire que

$$\int_{\mathbb{R}} (1 + \xi^2) |\widehat{f}(\xi)|^2 \, \mathrm{d}\xi \leqslant \|f\|_2^2 + \frac{1}{4\pi^2} \|f'\|_2^2.$$

(h) Montrer que $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. Énoncer un théorème découlant de cette étude.

1. On pourra commencer par supposer $\limsup_{x\to\infty} f(x) \geqslant \delta > 0$ et observer que cela implique l'existence d'une infinité d'intervalles de longueur positive ne dépendant que de δ sur lesquels $f(x) \geqslant \delta/2$.