# Analyse

# (Notes de cours)

Gérald Tenenbaum
Université de Lorraine
Faculté des sciences et technologies
Master de Mathématiques
MAMT1 UE701 TC - 2017/2018

(26/4/2019, 12h43)
Diffusion étudiants

# Table des matières

Université de Lorraine
Faculté des sciences et technologies
Master de mathématiques 2017/2018
Analyse (MAMT1 UE701 TC)

# I

# Espaces de Banach

## 1. Espaces vectoriels normés

### *1·1. Rappels de topologie métrique*

**Théorème 1.1.** *Soient $(E, d)$ et $(F, \delta)$ deux espaces métriques, $A$ une partie de $E$, et $f$ une application de $E$ vers $F$. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes pour chaque couple $(\alpha, \beta) \in E \times F$ :*

*(i) $\lim_{\substack{x\to\alpha \\ x\in A}} f(x) = \beta$.*

*(ii) Pour toute suite $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de points de $A$ convergeant vers $\alpha$, la suite $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ converge vers $\beta$.*

*Démonstration.* Montrons seulement que (ii) implique (i). La réciproque est évidente. Nous procédons par *contraposition* en établissant que non(i) $\Rightarrow$ non(ii). Si $f(x) \not\to \beta$ lorsque $x$ tend vers $\alpha$ en restant dans $A$, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour chaque $\eta > 0$ on ait

$$\sup_{\substack{d(x,\alpha)<\eta \\ x\in A}} \delta(f(x), \beta) \geqslant \varepsilon.$$

Spécialisons $\eta = 1/n$. Pour chaque $n \geqslant 1$, il existe $x_n \in A$ tel que $d(x_n, \alpha) < 1/n$ et $\delta(f(x_n), \beta) > \frac{1}{2}\varepsilon$. La suite $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ satisfait donc à $\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$ mais, comme $\inf_n d(f(x_n), \beta) \geqslant \frac{1}{2}\varepsilon > 0$, on a $f(x_n) \not\to \beta$. □

**Corollaire 1.2 (Critère de continuité en termes de limites de suites).** *Soient $(E, d)$ et $(F, \delta)$ deux espaces métriques et $f$ une application de $E$ vers $F$. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes pour chaque $a \in E$ :*

*(i) $f$ est continue en $a$.*

*(ii) Pour toute suite $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de points de $E$ telle que $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, on a $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$.*

**Définition 1.3 (Adhérence).** *Soit $(E, d)$ un espace métrique et $A$ une partie de $E$. On désigne par adhérence (ou fermeture) de $A$, et on note $\overline{A}$ le plus petit fermé contenant $A$.*

Cette définition montre que l'adhérence est de nature topologique et non métrique.

Une partie $A$ de $E$ est fermée si, et seulement si, on a $A = \overline{A}$.

**Proposition 1.4 (Caractérisation de l'adhérence).** *Soit $(E, d)$ un espace métrique. Pour toute partie $A$ de $E$ et tout point $x$ de $E$ les trois propriétés suivantes sont équivalentes*

(i) $x \in \overline{A}$.

(ii) $d(x, A) = 0$.

(iii) *Il existe une suite $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ de points de $A$ qui converge vers $x$.*

*Démonstration.* (i)⇒(ii). Soit $x \in \overline{A}$. Si $r := d(x,A) > 0$, alors $B^+(x,r/2) \subset E \smallsetminus A$ donc $\overline{A} \smallsetminus B(x,r/2)$ est un fermé strictement contenu dans $\overline{A}$,[1] et qui contient $A$. Cela contredit la définition de $\overline{A}$.

L'implication (ii)⇒(iii) est immédiate : si $\inf_{a\in A} d(x,a) = 0$ alors $\forall n \geqslant 1\ \exists a_n \in A$ : $d(a_n, a) \leqslant 1/n$, donc $a_n \to a$.

Montrons enfin (iii)⇒(i). Si $x \notin \overline{A}$, alors tous les $a_n$ sont dans l'ouvert $E \smallsetminus \overline{A}$ à partir d'un certain rang. C'est impossible puisque $a_n \in A \subset \overline{A}$ pour tout $n$. □

## *1·2. Normes sur un espace vectoriel*

**Définition 1.5.** *Soit $E$ un espace vectoriel sur $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Une application $x \mapsto \|x\|$ de $E$ dans $\mathbb{R}^+$ est une norme sur $E$ si elle satisfait aux trois propriétés suivantes :*

(i) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(ii) $(\forall x \in E, \forall \lambda \in K)\quad \|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$

(iii) $(\forall x, y \in E)\quad \|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

*Lorsque $x \mapsto \|x\|$ est une norme sur $E$, le couple $(E, \|\cdot\|)$ est appelé un espace vectoriel normé.*

*Remarque.* On désigne par *semi-norme* une application $p : E \to \mathbb{R}^+$ vérifiant uniquement les propriétés (ii) et (iii). Si $p$ est une semi-norme sur $E$, alors $F := \{x \in E : p(x) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $E$ et $p$ induit canoniquement une norme sur $E/F$.

On vérifie immédiatement que l'application

$$(x,y) \mapsto d(x,y) := \|x-y\|$$

est une distance sur $E$. Un espace vectoriel normé est donc un cas particulier d'espace métrique. Un espace vectoriel normé est par convention systématiquement muni de la distance associée à la norme.

Exemple d'un espace métrique dont la topologie est non normée : $\mathcal{C}([0,1[)$ muni de la distance

$$d(f,g) := \begin{cases} 1 & \text{si } \|f-g\|_\infty := \sup_{0\leqslant x<1} |f(x)-g(x)| > 1 \\ \|f-g\|_\infty & \text{dans le cas contraire.} \end{cases}$$

Si $\sup|f| = +\infty$, alors $d(f/n, 0) \not\to 0$ quand $n \to \infty$.

*Exemples.* 1. $\mathcal{C}([0,1])$ muni de la norme

$$\|f\|_\infty := \sup_{0\leqslant x\leqslant 1} |f(x)|. \tag{1·1}$$

On désigne souvent cette norme par *norme de la convergence uniforme.*

2. Soit $E = \mathcal{C}_m^*([0,1])$ l'espace des fonctions continues par morceaux normalisées par $f(x) := \frac{1}{2}f(x+) + \frac{1}{2}f(x-)$ si $x \in ]0,1[$ et $f(0) = f(0+)$, $f(1) = f(1-)$. Alors l'application définie par

$$\|f\|_1 := \int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x \tag{1·2}$$

est une norme sur $E$. Faire la démonstration en exercice.

Les espaces vectoriels normés complets portent le nom du mathématicien polonais Stefan Banach (1890–1945).

1. Car $x \in \overline{A} \cap B(x,r/2)$.

**Définition 1.6.** *On appelle espace de Banach un espace vectoriel normé complet.*

Nous verrons à l'Exercice 5 que les espaces vectoriels normés suivants sont des espaces de Banach :

- $\mathcal{C}(E,F)$ muni de la norme de la convergence uniforme $\|f\| := \sup_E \|f(x)\|$ lorsque $E$ est un espace métrique compact et $F$ un espace métrique complet.
- $\ell_0(\mathbb{K})$, sous-espace de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ constitué des suites tendant vers 0 et muni de la norme $\|\boldsymbol{x}\| := \sup |x_j|$.
- $\ell_1(\mathbb{K})$, sous-espace de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ constitué des suites $\boldsymbol{x} = (x_j)_{j\geqslant 0}$ telles que $\|\boldsymbol{x}\| := \sum |x_j| < \infty$ et muni de cette même norme.

En revanche $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $L^1$ n'est pas complet (exercice).

La distinction entre normes topologiquement équivalentes et métriquement équivalentes n'a pas lieu d'être. Rappelons d'abord une définition de topologie métrique.

**Définition 1.7.** *On dit que deux distances $d_1$, $d_2$, définies sur un même ensemble $E$, sont topologiquement équivalentes si l'identité est bicontinue en tant qu'application de $(E,d_1)$ sur $(E,d_2)$. On dit que $d_1$ et $d_2$ sont métriquement équivalentes s'il existe des nombres réels positifs $m$, $M$, ne dépendant que de $E$ tels que*

$$m \leqslant \inf_{x\neq y} d_1(x,y)/d_2(x,y) \leqslant \sup_{x\neq y} d_1(x,y)/d_2(x,y) \leqslant M. \tag{1·3}$$

Deux distances topologiquement équivalentes définissent la même topologie sur $E$ : une application immédiate du Théorème 1.1 permet de voir que toute suite convergente dans $(E,d_1)$ est aussi convergente dans $(E,d_2)$, et possède la même limite. Une autre manière de décrire la situation consiste à observer qu'étant donné un espace métrique quelconque $(F,\delta)$, toute application continue de $(E,d_1)$ sur $(F,\delta)$ est aussi continue en tant qu'application de $(E,d_2)$ sur $(F,\delta)$ et toute application continue de $(F,\delta)$ sur $(E,d_1)$ est aussi continue en tant qu'application de $(F,\delta)$ sur $(E,d_2)$.

Cependant, il est *faux* que, lorsque deux distances sont topologiquement équivalentes, on ait $d_1(x_n,y_n) \to 0$ si, et seulement si, $d_2(x_n,y_n) \to 0$. Contre-exemple : $\mathbb{R}^{+*}$ avec les distances $d_1(x,y) := |x-y|$, $d_2(x,y) := |1/x - 1/y|$.

On dit qu'une distance $d$ est bornée sur $E$ (ou simplement qu'elle est est bornée) si $\sup_{x,y\in E} d(x,y) < \infty$. Cette notion n'est pas de nature topologique : si $d_1$ est une distance sur $E$, alors $d_2 := \min(1,d_1)$ et $d_3 := d_1/(1+d_1)$ sont des distances topologiquement équivalentes à $d_1$. (Le vérifier en exercice.)

Il est donc important de faire la distinction entre des propriétés métriques, liées à la définition de la distance, qui seront conservées lorsqu'on remplace une distance par une distance métriquement équivalente, et les propriétés topologiques, liées seulement à la topologie induite par la distance.

**Proposition 1.8.** *Soit $E$ un espace vectoriel et $x \mapsto \|x\|_j$ $(j=1,2)$ deux normes sur $E$. Les distances associées sont topologiquement équivalentes si et seulement s'il existe deux nombres réels positifs $m$ et $M$ tels que*

$$(\forall x \in E) \qquad m\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant M\|x\|_1. \tag{1·4}$$

*Lorsqu'il en est ainsi, les distances associées sont métriquement équivalentes.*

*Démonstration.* Si l'identité est continue en tant qu'application de $(E,\|\cdot\|_1)$ dans $(E,\|\cdot\|_2)$, alors il existe un $\eta > 0$ tel que $\|x\|_1 \leqslant \eta \Rightarrow \|x\|_2 \leqslant 1$. Il s'ensuit que

$$(\forall x \in E) \qquad \left\| \frac{\eta x}{\|x\|_1} \right\|_2 \leqslant 1,$$

d'où l'inégalité de droite de (1·4) avec $M = 1/\eta$. On procède symétriquement pour l'inégalité de gauche. □

Le résultat précédent motive la définition qui suit.

**Définition 1.9.** *On dit que deux normes* $x \mapsto \|x\|_j$ $(j = 1, 2)$ *sont équivalentes sur un espace vectoriel* $E$ *si elles satisfont à la relation* (1·4) *pour des constantes positives* $m$ *et* $M$ *convenables.*

On verra plus loin (Théorème 1.24) que dans un espace vectoriel normé de dimension finie toutes les normes sont équivalentes. Ce n'est pas le cas en dimension infinie, comme le montre l'exemple de $\mathcal{C}([0,1])$ : avec les notations (1·1) et (1·2), on a pour $f_n(x) := x^n$, $\|f_n\|_\infty = 1$, $\|f_n\|_1 = 1/(n+1)$.

*Remarque.* Dans un espace vectoriel, on utilise souvent la notion de segment

$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] := \{\boldsymbol{x} \in E : \boldsymbol{x} = a + t(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}), 0 \leqslant t \leqslant 1\}.$$

Cette notion est liée à la structure d'espace vectoriel et n'a pas d'équivalent pour un espace métrique général.

**Théorème 1.10.** *Soit* $(E, d)$ *un espace métrique complet et* $A$ *une partie de* $E$. *Alors* $(A, d)$ *est un espace métrique complet si, et seulement si,* $A$ *est fermé dans* $E$.

*Démonstration.* Si $(A, d)$ est complet, et si $x \in \overline{A}$, alors il existe une suite $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de points de $A$ qui converge dans $E$ vers $x$ : c'est l'une des définitions possibles de l'adhérence dans un espace métrique. Cette suite, est de Cauchy dans $E$, donc aussi dans $A$, donc converge dans $A$ par hypothèse, donc $x \in A$. Cela montre bien que $A$ est fermé dans $E$. Réciproquement, si $A$ est fermé dans $E$, toute suite de Cauchy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de $A$ converge dans $E$ qui est complet et possède ipso facto une limite $x \in A$, puisque $A$ est fermé. Elle converge donc dans $A$. □

*Remarque.* Il est à noter qu'un sous-espace métrique complet $A$ d'un espace métrique *quelconque* est fermé : la démonstration de la condition nécessaire du théorème précédent ne fait pas appel à la complétude de $E$.

## *1·3. Parties totales. Séparabilité*

**Définition 1.11.** *On dit qu'un espace métrique* $E$ *est séparable s'il existe une partie dénombrable* $D$ *dense dans* $E$.

*Exemples.* 1. $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont séparables puisque $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

2. Tout espace vectoriel normé $E$ de dimension finie est séparable : si $\{\boldsymbol{e}_j\}_{j=1}^{n}$ est une base de $E$, alors $D := \{\sum_{1 \leqslant j \leqslant n} \lambda_j \boldsymbol{e}_j : \lambda_j \in \mathbb{Q}\ (1 \leqslant j \leqslant n)\}$ convient.

Nous verrons à l'Exercice 9 qu'une partie d'un espace métrique séparable est séparable.

**Proposition 1.12.** *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un espace vectoriel normé* $E$ *soit séparable est qu'il existe une suite croissante* $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ *de sous-espaces vectoriels de dimension finie telle que* $\cup_n E_n$ *soit dense dans* $E$. *De plus, pour tout espace vectoriel normé séparable* $E$ *de dimension infinie, on peut choisir* $E_n$ *tel que* $\dim E_n = n$ $(n \geqslant 1)$.

*Démonstration.* Si $D = \{d_j\}_{j=0}^{\infty}$ est dense dans $E$ il est clair que la suite des sous-espaces vectoriels $E_n := \mathrm{Vect}[d_0, \cdots, d_n]$ $(n \geqslant 0)$ répond à la question. Réciproquement, si $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ possède la propriété indiquée, et si $D_n$ est une partie dénombrable dense de $E_n$, alors $D := \cup_n D_n$ est une partie dénombrable dense dans $E$.

Pour établir la seconde partie, on raisonne par récurrence sur $n$. Étant donné $E_n$ de dimension $n$, on désigne par $j_n$ le plus petit des indices $j$ tels que $d_j \notin E_n$. Un tel indice existe puisque $E$ est de dimension infinie. On pose $E_{n+1} := \mathrm{Vect}[E_n, d_{j_n}]$. On a bien $\dim E_{n+1} = n+1$ et $E_{n+1} \supset \{d_j\}_{j=0}^{j_n}$, d'où $\cup_n E_n \supset D$. □

*Exemples.* 1. Les espaces $\ell^p(\mathbb{K})$ et $L^p[0,1]$ sont séparables pour $1 \leqslant p < \infty$. Dans le cas de $\ell^p(\mathbb{K})$ on peut introduire la base canonique $\{\boldsymbol{e}_n\}_{n=1}^{\infty}$ telle que $e_{nj} = \delta_{nj}$ (symbole de Kronecker). Alors $E_n := \mathrm{Vect}[\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n]$ est constitué des suites nulles à partir du rang $n+1$. Toute suite de $\ell^p(\mathbb{K})$ est limite d'une suite d'éléments de $E_n$ pour la topologie ambiante. Dans le cas de $L^p[0,1]$, on considère $E_n := \mathrm{Vect}[f_{jn} : 0 \leqslant j \leqslant n!]$ où $f_{jn} = \mathbf{1}_{[0,j/n!]}$. Il est clair $\cup_n E_n$ est dense dans $L^p[0,1]$.

2. $\ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ et $L^\infty[0,1]$ ne sont pas séparables. Considérons d'abord le cas de $L^\infty[0,1]$. Notant $f_t := \mathbf{1}_{[0,t]}$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$, si $\{d_n\}_{n=0}^{\infty}$ était dense dans $L^\infty[0,1]$, alors pour chaque $t$ il existerait un $n = n_t \in \mathbb{N}$ tel que $\|f_t - d_n\|_\infty < \frac{1}{2}$, ce qui fournirait une injection de $[0,1]$ dans $\mathbb{N}$ puisque $\|f_t - f_s\|_\infty = 1$ si $s \neq t$. Le même raisonnement fonctionne pour $\ell^\infty$ : il suffit de considérer les suites $\boldsymbol{x}_t$ définies par $x_{tn} = \mathbf{1}_{[0,t]}(r_n)$ où $r_n$ est le $n$-ième rationnel.

**Définition 1.13.** *On dit qu'une partie $A$ d'un espace vectoriel normé $E$ est totale (dans $E$) si le sous-espace vectoriel algébrique $F$ engendré par $A$ est dense dans $E$.*

NB. $F$ est donc l'ensemble des combinaisons linéaires finies d'éléments de $A$.
*Exemple.* La base canonique $\{\boldsymbol{e}_n\}_{n=0}^{\infty}$ est totale dans $\ell^p(\mathbb{K})$ pour tout $p < \infty$. Elle n'est pas totale dans $\ell^\infty(\mathbb{K})$ (la suite constante égale à 1 n'est pas dans l'adhérence de $F$), mais elle l'est dans $\ell_0(\mathbb{K})$ — le vérifier en exercice.

**Proposition 1.14.** *Un espace vectoriel normé est séparable si, et seulement si, il possède une partie dénombrable totale.*

*Démonstration.* La condition nécessaire est immédiate : si $E$ est séparable et $\overline{D} = E$, alors $\mathrm{Vect}(D)$ est dense dans $E$. Réciproquement, si $A = \{a_j\}_{j=0}^{\infty}$ est une partie dénombrable totale dans $E$, alors $\mathrm{Vect}(A)$ est dense dans $E$ et $\mathrm{Vect}(A) = \cup_n E_n$ où $E_n := \mathrm{Vect}[a_0, \ldots, a_n]$. On peut donc appliquer la Proposition 1.12. □

## *1·4. Parties compactes*

Soient $(E,d)$ un espace métrique et $A \subset E$. On dit que $A$ *possède la propriété de Borel–Lebesgue*[2] *(dans $E$)* si, de tout recouvrement de $A$ par des ouverts de $E$, soit $A \subset \cup_{j \in \mathcal{J}} V_j$, on peut extraire un sous-recouvrement fini, $A \subset \cup_{1 \leqslant k \leqslant n} V_{j_k}$. Nous observons immédiatement que $(BL)$ équivaut[3] au fait suivant : *si une intersection de fermés de $E$ ne rencontre pas $A$, alors il existe une sous-famille finie qui possède déjà cette propriété.*[4]

On dit que $A$ *possède la propriété de Bolzano–Weierstrass*[5] si, de toute suite $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ de points de $A$, on peut extraire une sous-suite convergente vers un point de $A$, autrement dit si toute suite de $A$ possède une valeur d'adhérence dans $A$.

Le résultat suivant a été vu en Licence.

**Théorème 1.15.** *Soit $(E,d)$ un espace métrique. Les propriétés de Borel–Lebesgue et de Bolzano–Weierstrass relatives à une partie $A$ de $E$ sont équivalentes.*

*Démonstration.* Supposons d'abord que $A$ vérifie $(BL)$. Soit $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite de points de $A$. Nous rappelons que (cf. cours de Licence) que l'ensemble des valeurs d'adhérence

2. Notée $(BL)$ en abrégé.
3. Par passage au complémentaire.
4. Ce que l'on peut encore énoncer sous la forme : soit $\{F_j\}_{j \in \mathcal{J}}$ une famille de fermés de $E$ ayant la propriété que $A \cap \left(\cap_{1 \leqslant k \leqslant n} F_{j_k}\right) \neq \varnothing$ pour toute sous famille finie $\{F_{j_k}\}_{k=1}^{n}$ ; alors $\cap_{j \in \mathcal{J}} F_j \cap A \neq \varnothing$.
5. Notée $(BW)$ en abrégé.

de la suite $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ vaut $D = \cap_{n \geqslant 1} \overline{S_n}$ avec $S_n := \{a_m : m \geqslant n\}$. Les $\overline{S_n}$ forment une suite décroissante de fermés rencontrant $A$. Il découle donc de $(BL)$ que leur intersection rencontre $A$.

Réciproquement, supposons que $A$ satisfasse $(BW)$ et considérons un recouvrement ouvert $\cup_{\mathcal{J}} V_j$ de $A$. On commence par observer qu'il existe un $r > 0$ tel que

$$\forall a \in A \quad \exists j := j(a) \in \mathcal{J} : \qquad B(a, r) \subset V_j.$$

En effet, s'il n'en était pas ainsi, pour chaque $n \geqslant 1$, on pourrait trouver $a_n \in A$ tel que, pour tout $j$, $B(a_n, 1/n) \not\subset V_j$. Soit alors $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ une sous-suite convergente de la suite des $a_n$, de limite $a \in A$. On doit avoir $a \notin V_j$, car sinon, comme $V_j$ est ouvert, on aurait pour un $\varrho_j > 0$ convenable et $k$ assez grand $B(a_{n_k}, 1/n_k) \subset B(a, \varrho_j) \subset V_j$. Cela implique $a \notin \cup_{\mathcal{J}} V_j$, une contradiction. Nous pouvons maintenant établir $(BL)$ facilement. Il suffit de montrer que $A$ peut être recouvert par un nombre fini de boules de rayon $r$. Soit $a_1$ arbitraire dans $A$. Si $A \subset B(a_1, r)$, la conclusion souhaitée est vérifiée. Sinon, il existe $a_2 \in A \smallsetminus B(a_1, r)$. Si, $A \subset B(a_1, r) \cup B(a_2, r)$, nous avons la propriété requise. Sinon, il existe $a_3 \in A \smallsetminus \{B(a_1, r) \cup B(a_2, r)\}$... Après $n$ étapes, nous avons construit $n$ boules $B(a_k, r)$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ dont les centres sont dans $A$ et de distances mutuelles $\geqslant r$. Si le processus continuait indéfiniment, nous construirions ainsi une suite $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ de points de $A$ dont les distances mutuelles sont $\geqslant r$, et qui ne contiendrait donc aucun point d'accumulation. Une telle éventualité est incompatible avec $(BW)$. On a donc $A \subset \cup_{k=1}^{n} B(a_k, r) \subset \cup_{k=1}^{n} V_{j(a_k)}$ pour un entier $n \geqslant 1$ convenable. □

**Définition 1.16.** *Soit $(E, d)$ un espace métrique. On dit qu'une partie $A$ de $E$ est compacte si elle vérifie $(BL)$ ou $(BW)$. On dit que $(E, d)$ est un espace métrique compact si $E$ est compact.*

*Remarques.* 1. La notion de compacité d'une partie de $E$ ne dépend que des ouverts de $E$. C'est donc une notion topologique.

2. Une partie $A$ de $E$ est compacte si, et seulement si, l'espace métrique $(A, d)$ est compact : c'est une conséquence immédiate du Théorème 1.15. Il est à noter, à ce propos, que, dans le cas d'une partie propre $A$, la propriété $(BL)$ dépend des ouverts de l'espace ambiant $E$, alors que $(BW)$ ne dépend que de la topologie (et non de la métrique !) de $A$. Il découle donc du Théorème 1.15 que $A$ vérifie $(BL)$ dans $E$ si, et seulement si, l'espace métrique $(A, d)$ vérifie $(BL)$ — une propriété non triviale de la topologie induite.

*Exemples.* 1. Toute partie finie (y compris l'ensemble vide) d'un espace métrique est compacte.

2. Tout intervalle fermé borné $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ est compact. La propriété de Bolzano–Weierstrass est beaucoup plus facile à établir que celle de Borel–Lebesgue : on utilise le fait que l'on peut extraire de toute suite réelle une sous-suite monotone (méthode des « points pics »).

3. Soit $(E, d)$ un espace métrique et $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite de $E$ convergeant vers $a \in E$. Alors $A := \{a_n : n \geqslant 1\} \cup \{a\}$ est compact. C'est immédiat par $(BL)$ puisque tout recouvrement ouvert de $A$ contient un voisinage de $a$, qui lui-même contient nécessairement tous les $a_n$ sauf au plus un nombre fini.

Avant d'indiquer les principales applications topologiques de la notion de compact, nous caractérisons les sous-espaces métriques compacts d'un espace métrique compact.

**Théorème 1.17.** *Dans tout espace métrique, une partie compacte est fermée. Dans un espace métrique compact, une partie est compacte si, et seulement si, elle est fermée.*

*Démonstration.* Si $A$ est compacte et si $a \in \overline{A}$, alors il existe une suite de points de $A$ convergeant vers $a$. Cette suite possède par hypothèse une sous-suite convergeant dans $A$, dont la limite ne peut être que $a$. Dont $a \in A$. Cela prouve que $A$ est fermée.

Réciproquement, si $A$ est fermée dans $E$ compact, alors toute suite de $A$, possède, en tant que suite de $E$, une sous-suite convergeant dans $E$. Mais la limite doit être dans $A = \overline{A}$. Donc $A$ vérifie $(BW)$. □

**Corollaire 1.18.** *Dans un espace métrique, l'intersection de toute famille non vide de compacts est compacte. Toute réunion finie de compacts est compacte.*

**Corollaire 1.19.** *Les parties compactes de $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ sont exactement les parties fermées et bornées.*

*Démonstration.* Une partie fermée bornée est un fermé dans un intervalle $[a, b]$ convenable, donc compacte, d'après l'exemple 2 ci-dessus. Un compact $K$ de $\mathbb{R}$ est fermé d'après le Théorème 1.17. Il est aussi borné car $K \subset \cup_n ]-n, n[$ et l'on peut extraire de ce recouvrement ouvert un sous-recouvrement fini. □

**Théorème 1.20 (Tychonov).** *Un produit cartésien quelconque d'espaces métriques compacts est compact pour la topologie produit. Si le produit est fini ou dénombrable, la condition est également nécessaire.*

*Démonstration.* La version générale de ce théorème est établie à l'aide l'axiome du choix. Nous nous restreignons pour cette démonstration au cas dénombrable. Soit $\{(E_j, d_j)\}_{j=1}^{\infty}$ une suite d'espaces métriques compacts. La topologie produit sur $E := \times_{j\geqslant 1} E_j$ est métrisable : elle est associée par exemple à la distance

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{j\geqslant 1} \frac{\min\{1, d_j(x_j, y_j)\}}{2^j}.$$

La condition nécessaire est alors immédiate par la propriété de Bolzano–Weierstrass et la définition de la topologie produit : si $\{\boldsymbol{u}_n\}_{n=0}^{\infty}$ admet une valeur d'adhérence, il en va de même de chacune des suites coordonnées. La réciproque est moins évidente. Soit $\{\boldsymbol{u}_n\}_{n=0}^{\infty}$ une suite de $E$. Par extraction d'une sous-suite, on obtient une sous-suite $\{u_{\varphi_1(n)1}\}_{n=0}^{\infty}$ convergente. Une seconde extraction fournit une suite $\{u_{\varphi_2(n)2}\}_{p=0}^{\infty}$ convergente telle que $\{u_{\varphi_2(p)1}\}_{n=0}^{\infty}$ demeure convergente. En itérant le procédé, on obtient pour tout $r$ une suite $\{\varphi_r(n)\}_{n=0}^{\infty}$ telle que $\{u_{\varphi_j(p)j}\}_{n=0}^{\infty}$ converge pour $j \leqslant r$ vers un élément $u_j$ de $E_j$. Alors la suite extraite diagonale $\boldsymbol{u}_{\varphi_n(n)}$ converge vers $\boldsymbol{u} = \{u_j\}_{j=1}^{\infty}$ : en effet, pour tout $j$ fixé $\boldsymbol{u}_{\varphi_n(n)j} \to u_j$ et il suit

$$d(\boldsymbol{u}_{\varphi_n(n)}, \boldsymbol{u}) \leqslant \sum_{1\leqslant j\leqslant J} \frac{d_j(u_{\varphi_n(n)j}, u_j)}{2^j} + \frac{1}{2^J}.$$

On obtient le résultat en faisant tendre $n$ puis $J$ vers l'infini. □

**Corollaire 1.21.** *Les parties compactes de $\mathbb{K}^p$ sont exactement les parties fermées et bornées.*

*Démonstration.* Une partie fermée bornée est fermée dans un produit $[a, b]^p$ qui est compact d'après le Théorème 1.20. Réciproquement, une partie compacte est fermée (Théorème 1.17) et peut être recouverte par une réunion finie d'ouverts $]-n, n[^p$. □

*Remarque.* En dimension infinie, les parties fermées bornées ne sont en général pas compactes. La boule unité de $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{C})$ muni de la norme $\|f\|_2 := \sqrt{\int_0^1 |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x}$ n'est pas compacte : notant $e_n(x) := \mathrm{e}^{2\pi i n x}$, on a $\|e_n - e_p\|_2 = \sqrt{2}$ si $n \neq p$. On ne peut donc extraire de cette suite aucune sous-suite convergente.

**Théorème 1.22.** *Tout espace métrique compact est complet.*

*Démonstration.* Soit $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite de Cauchy d'un espace métrique compact $E$ et $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ une sous-suite convergente, de limite $a$. Alors $d(a_n, a) \leqslant d(a_n, a_{n_k}) + d(a_{n_k}, a)$. En faisant tendre $k$ vers l'infini, on obtient $d(a_n, a) \leqslant \limsup_{p \geqslant n} d(a_n, a_p) \to 0$. □

## *1·5. Fonctions continues sur un compact*

L'un des intérêts essentiels de la notion de compact est son comportement par transformation continue.

**Théorème 1.23.** *Soient $(E, d)$ et $(F, \delta)$ des espaces métriques et $f \in \mathcal{C}(E, F)$. Si $E$ est compact, alors l'image $f(E)$ est un compact de $F$. En particulier, toute fonction numérique continue sur un espace métrique compact non vide est bornée et atteint ses bornes.*

*Démonstration.* Immédiat par $(BW)$, ou d'ailleurs par $(BL)$.

*Exemple d'application.* Si $A$ est une partie compacte non vide d'un espace métrique $E$ alors la distance $d(x, A)$ est atteinte pour tout $x$ de $E$.

**Théorème 1.24.** *Sur un espace vectoriel $E$ de dimension finie, deux normes quelconques sont équivalentes. En particulier, tout espace vectoriel normé de dimension finie est complet, c'est-à-dire un espace de Banach.*

*Démonstration.* Soit $\{\boldsymbol{e}_j\}_{j=1}^{p}$ une base de $E$ et $\boldsymbol{x} \mapsto \|\boldsymbol{x}\|_1$ une norme sur $E$. On a

$$\|\boldsymbol{x}\|_1 \leqslant \sum_{1 \leqslant j \leqslant p} |x_j| \|\boldsymbol{e}_j\|_1$$

donc $\boldsymbol{x} \mapsto \|\boldsymbol{x}\|_1$ est continue en $\mathbf{0}$ sur $(E, \|\cdot\|)$ où $\|\boldsymbol{x}\| := \sup_{1 \leqslant j \leqslant p} |x_j|$. L'inégalité triangulaire sous la forme $\big| \|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|_1 - \|\boldsymbol{x}\|_1 \big| \leqslant \|\boldsymbol{y}\|_1$ montre alors que l'application $\boldsymbol{x} \mapsto \|\boldsymbol{x}\|_1$ est continue sur $(E, \|\cdot\|)$. La sphère unité $S$ de $E$ pour $\|\cdot\|$ est l'image par l'application continue $(x_1, \ldots, x_p) \mapsto \boldsymbol{x}$ de la sphère unité de $\mathbb{R}^p$. Elle est donc compacte. Comme $\|\boldsymbol{u}\|_1$ ne s'annule pas sur $S$, cette quantité varie, lorsque $\boldsymbol{u}$ parcourt $S$, dans un intervalle $[m_1, M_1]$, avec $0 < m_1 \leqslant M_1$. De même pour toute autre norme $\|\boldsymbol{u}\|_2$ avec un intervalle $[m_2, M_2]$, avec $0 < m_2 \leqslant M_2$. On a donc

$$m_1/M_2 \leqslant \|\boldsymbol{u}\|_1/\|\boldsymbol{u}\|_2 \leqslant M_1/m_2 \qquad (\boldsymbol{u} \in S) \tag{1·5}$$

Comme tout vecteur non nul $\boldsymbol{x}$ de $E$ peut s'écrire $\boldsymbol{x} = \|\boldsymbol{x}\|\boldsymbol{u}$ avec $\boldsymbol{u} \in S$, on voit que (1·5) persiste pour tout vecteur non nul de $E$.

La seconde assertion est une conséquence immédiate de la première et du fait qu'un produit fini espaces métriques complets est complet : si $E$ est de dimension finie $p$ sur $\mathbb{R}$, alors $E$ est complet pour la norme $\boldsymbol{x} \mapsto \|\boldsymbol{x}\|$ car les $p$ suites coordonnées de toute suite de Cauchy $E$ sont de Cauchy. Comme la norme de $E$ est équivalente à la norme précédente, $E$ est bien complet. □

**Théorème 1.25 (Heine).** *Toute fonction continue sur un espace métrique compact, à valeurs dans un espace métrique quelconque, est uniformément continue.*

*Démonstration.* Raisonnons par l'absurde. Si $f$ n'est pas uniformément continue, il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall \eta > 0 \quad \exists x, y \in E : d(x, y) < \eta \quad \text{et} \quad \delta\big(f(x), f(y)\big) > \varepsilon.$$

On spécialise $\eta = 1/n$ ($n \geqslant 1$). On obtient deux suites $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ telles que $d(x_n, y_n) \to 0$ et $\delta\big(f(x_n), f(y_n)\big) > \varepsilon$. Par extractions successives de sous-suites, on peut supposer que les deux suites $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ convergent, nécessairement vers la même limite. Une contradiction. □

## *1·6. Espaces localement compacts*

**Définition 1.26.** *On dit qu'un espace métrique est localement compact si chacun de ses points admet au moins un voisinage compact.*

*Exemples.* 1. Un espace métrique compact est évidemment localement compact.

2. Un espace métrique discret,(6) par exemple $\mathbb{Z}$, est localement compact : tout point constitue un voisinage compact de lui-même.

3. $\mathbb{R}$ est localement compact mais non compact : pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tous $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < x < b$, $[a, b]$ est un voisinage compact de $x$.

4. $\mathbb{Q}$ n'est ni compact ni localement compact en tant que sous-espace métrique de $\mathbb{R}$ muni de la distance euclidienne. En effet si 0 possédait un voisinage compact, alors $\mathbb{Q} \cap [-\delta, \delta]$ serait fermé, donc compact dans $\mathbb{Q}$ pour un $\delta > 0$ convenable. Or,

$$\cap_{n>1/h}[h\sqrt{2} - 1/n, h\sqrt{2} + 1/n] \cap \mathbb{Q} = \varnothing$$

pour tout $h \in \mathbb{Q} \cap ]0, \frac{1}{2}\delta[$.

**Proposition 1.27.** *Un espace vectoriel normé est localement compact si, et seulement si, sa boule unité fermée est compacte. En particulier, tout espace vectoriel normé de dimension finie est localement compact.*

*Démonstration.* La première propriété résulte du fait que, pour tout vecteur $x$ et tout $r \geqslant 0$, on a $B(x; r) = x + rB(0; 1)$. Soit $E$ un espace vectoriel normé de dimension finie $n$ sur $\mathbb{K}$ et soit $(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ une base. La seconde assertion provient du fait que la boule unité $B(0; 1)$ est l'image par l'application continue $(x_1, \cdots, x_n) \mapsto \sum x_j \boldsymbol{e}_j$ de la boule unité de $\mathbb{K}^n$, qui est compacte d'après le Corollaire 1.21. □

Frédéric Riesz (1880-1956) a établi la réciproque du résultat précédent.

**Théorème 1.28 (F. Riesz).** *Tout espace vectoriel normé localement compact est de dimension finie.*

*Démonstration.* Soit $E$ un tel espace vectoriel normé. Désignons par $B_E := \overline{B_E(0; 1)}$ sa boule unité fermée. Observons d'abord qu'il existe une famille finie $\{x_j\}_{j=1}^{k}$ de vecteurs de $B_E$ telle que $B_E \subset \cup_{j=1}^{k} B(x_j; \frac{1}{2})$ : cela résulte immédiatement de la propriété $(BL)$.

Définissons ensuite une application $T : E \to B_E$ par $T(0) := 0$ et $T(x) := x/\|x\|$ si $x \neq 0$. Alors, pour tout $x \in E \smallsetminus \{0\}$, il existe un indice $j$ $(1 \leqslant j \leqslant k)$ tel que $T(x) - x_j \in B(0; \frac{1}{2})$.

Montrons alors par récurrence sur $n \geqslant 0$ que, pour tout $x \in E \smallsetminus \{0\}$, il existe des indices $j_0, \ldots, j_n \in [1, k]$ tels que $y_n := T(x) - \sum_{0 \leqslant m \leqslant n} x_{j_m}/2^m \in B(0; 1/2^{n+1})$. En effet, $2y_0 = 2\{T(x) - x_{j_0}\} \in B^+(0, 1)$, donc $2y_0 - x_{j_1} \in B(0; \frac{1}{2})$, soit $y_1 = y_0 - \frac{1}{2}x_{j_1} \in B(0; \frac{1}{4})$, etc.

On conclut en observant que la série converge, ce qui montre que $x \in \text{Vect}[x_1, \ldots, x_k]$. Il s'ensuit que $E$ est de dimension finie sur $\mathbb{R}$, et que cette dimension n'excède pas $k$. □

---

6. On dit qu'une distance sur $E$ induit la topologie discrète si chaque partie de $E$ est un ouvert. La distance discrète, définie par $d(x, x) = 0$, $d(x, y) = 1$ $(x \neq y)$, induit la topologie discrète sur un ensemble $E$ quelconque.

### *1·7. Homéomorphismes*

La topologie d'un espace métrique est déterminée par l'ensemble de ses ouverts. Il est donc naturel d'introduire une notion permettant d'identifier les structures topologiques de deux ensembles.

**Définition 1.29.** *Soient $(E,d)$ et $(F,\delta)$ deux espaces métriques. On dit que $E$ et $F$ sont homéomorphes s'il existe une bijection $\varphi : E \to F$ qui échange leurs ouverts, c'est-à-dire que $\varphi(\Omega)$ est un ouvert de $F$ pour tout ouvert $\Omega$ inclus dans $E$ et que $\varphi^{-1}(\omega)$ est un ouvert de $E$ pour tout ouvert $\omega$ inclus dans $F$. Une telle application $\varphi$ s'appelle un homéomorphisme de $E$ sur $F$.*

La caractérisation des fonctions continues par leur action sur les ouverts fournit la caractérisation suivante des homéomorphismes.

**Théorème 1.30.** *Une bijection $\varphi : E \to F$ entre deux espaces métriques est un homéomorphisme si, et seulement si, elle est bicontinue, i.e. si $\varphi$ et $\varphi^{-1}$ sont continues.*

On pourrait croire que toute bijection continue d'espaces métriques est un homéomorphisme. Nous verrons qu'il en est ainsi dans certains cas, mais une telle implication n'a pas lieu en toute généralité. Par exemple, l'identité de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est continue sans être bicontinue lorsque l'ensemble de départ est muni de la topologie discrète, pour laquelle toute partie est ouverte. Un autre exemple est indiqué à l'Exercice 8.

Toutes les propriétés topologiques sont conservées par homéomorphisme. L'image d'un ouvert, d'un fermé, d'un compact, d'un connexe, est respectivement ouverte, fermée, compacte, connexe. En revanche, les propriétés métriques peuvent ne pas être conservées : on construira avec profit des exemples dans lesquels l'image d'un borné est non bornée, celle d'un sous-espace métrique complet n'est pas un sous-espace métrique complet, ou encore celle d'une suite de Cauchy n'est pas une suite de Cauchy. On notera enfin que la composée d'une fonction uniformément continue avec un homéomorphisme n'est pas nécessairement uniformément continue.

On dit qu'une application est *ouverte* (resp. *fermée*) si l'image directe de tout ouvert est un ouvert (resp. si l'image directe de tout fermé est un fermé). Il est immédiat qu'*une bijection continue est un homéomorphisme si, et seulement si, elle est ouverte ou fermée.*

Les Théorèmes 1.17 et 1.23 impliquent immédiatement qu'une fonction continue sur un compact est fermée. On en déduit l'énoncé suivant.

**Théorème 1.31.** *Soit $(E,d)$ un espace métrique compact et $(F,\delta)$ un espace métrique. Si $\varphi : E \to F$ est une bijection continue, c'est un homéomorphisme.*

Un autre cas utile en pratique dans lequel une bijection continue est automatiquement un homéomorphisme est décrit dans l'énoncé suivant.

**Proposition 1.32.** *Soit $I$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $\varphi : I \to \mathbb{R}$ une injection continue. Alors $\varphi$ est un homéomorphisme de $I$ sur $\varphi(I)$.*

*Démonstration.* Le théorème des valeurs intermédiaires implique immédiatement que $\varphi$ est strictement monotone. Si $U$ est un ouvert de $I$ et $x \in U$, l'image $\varphi(U)$ contient donc un intervalle ouvert centré en $\varphi(x)$. Cela montre que $\varphi$ est ouverte. $\square$

Il est facile de voir que tout intervalle ouvert est homéomorphe à $\mathbb{R}$. Dans le cas, par exemple, d'un intervalle ouvert borné $]a,b[$, on peut choisir $\varphi(x) := 1/(a-x) + 1/(b-x)$.

En revanche, un intervalle semi-ouvert n'est pas homéomorphe à $\mathbb{R}$. S'il existait un homéomorphisme $\varphi : [0,1[\to \mathbb{R}$, alors $\varphi$ serait monotone, donc son image serait incluse dans une demi-droite issue de $\varphi(0)$, et $\varphi$ ne serait pas bijective.

Montrons semblablement que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ ne sont pas homéomorphes. S'il existait un homéomorphisme $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, alors $A := \varphi(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$ serait connexe en tant qu'image homéomorphe d'un connexe, mais on aurait aussi $A = \mathbb{R} \setminus \{\varphi((0,0))\}$, qui est la réunion de deux demi-droites ouvertes disjointes, donc non-connexe.

## *1·8. Propriétés topologiques des espaces complets*

Une des propriétés essentielles des espaces métriques complets[7] est énoncée dans le théorème suivant. Nous désignons par diamètre d'une partie $A$ d'un espace métrique le nombre de $\mathbb{R}^+ \cup \{\pm\infty\}$

$$\delta(A) := \sup_{x,y\in A} d(x,y).$$

Lorsque $\delta(A) < \infty$, on dit que $A$ est borné.

**Théorème 1.33 (Cantor).** *Soit $(E,d)$ un espace métrique complet et $\{F_n\}_{n=1}^\infty$ une suite décroissante de fermés non vides de $E$ telle que $\lim_n \delta(F_n) = 0$. Alors $F := \cap_n F_n$ contient exactement un point.*

*Démonstration.* Soit $x_n \in F_n$. Alors $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ est une suite de Cauchy. Elle converge donc vers $x \in E$. Comme $d(x,F) \leqslant d(x,F_n) + \delta(F_n) \leqslant d(x,x_n) + \delta(F_n)$[8] pour tout $n$, on a $x \in \overline{F} = F$, car $F$ est fermé. De plus $\delta(F) \leqslant \delta(F_n)$ pour tout $n$, donc $\delta(F) = 0$, donc $F = \{x\}$. □

**Corollaire 1.34 (Principe de Baire).** *Soit $(E,d)$ un espace métrique complet et $\{F_n\}_{n=1}^\infty$ une suite de fermés d'intérieurs vides (i.e. rares) de $E$. Alors $G := \cup_n F_n$ est aussi d'intérieur vide.*

*Démonstration.* Rappelons que, pour toute partie $A$ d'un espace métrique, on a

$$\overline{E \setminus A} = E \setminus \overset{\circ}{A}.$$

En appliquant cette formule à $A := \overline{B}$, on obtient qu'une partie $B$ est rare si, et seulement si, $\overline{B}$ est d'intérieur vide. Il est donc bien équivalent de dire qu'un fermé est d'intérieur vide ou qu'il est rare.

Montrons que $\overset{\circ}{G} = \varnothing$, c'est-à-dire que $E \setminus G$ rencontre tout ouvert non vide $V$ de $E$. Comme $\overset{\circ}{F_1} = \varnothing$, $V$ rencontre l'ouvert $E \setminus F_1$. Donc $V_1 := V \cap (E \setminus F_1)$ est un ouvert non vide, et il existe une boule ouverte $B(x_1, r_1)$ entièrement contenue dans $V \cap (E \setminus F_1)$. On peut choisir $r_1$ tel que $0 < r_1 < 1$. Posons alors $B_1 := B(x_1, \frac{1}{2}r_1)$, de sorte que $\overline{B_1} \subset V_1$. Comme $V_2 := B_1 \cap (E \setminus F_2)$ est un ouvert non vide, il existe une boule ouverte $B(x_2, r_2)$ entièrement contenue dans $V_2$, et l'on peut choisir $0 < r_2 < 1/2$. Ainsi, posant $B_2 := B(x_2, \frac{1}{2}r_2)$, on a $\overline{B_2} \subset V_2$. Par itération, on obtient une suite $B_n = B(x_n, \frac{1}{2}r_n)$, avec $0 < r_n < 1/n$, de boules ouvertes emboîtées telles que $\overline{B_n} \subset V \cap (\cap_{j=1}^n (E \setminus F_j))$. La famille des boules fermées $\overline{B_n}$ satisfait donc aux hypothèses du Théorème 1.33. Son intersection est donc non vide, ce qui implique immédiatement que $G^c \cap V \neq \varnothing$. □

*Exemples d'application.* $\overset{\circ}{\mathbb{Q}} = \varnothing$. Voir aussi l'Exercice 11.

---

7. Un espace métrique complet est habituellement désigné comme un espace de Fréchet (1878-1973) si la distance est induite par une famille dénombrable et séparante de semi-normes. La famille est séparante si deux points distincts ont nécessairement des voisinages distincts.

8. On a en toute généralité $d(x,A) \leqslant d(x,B) + \delta(B)$ si $A \subset B$, puisque, pour tous $a \in A$, $b \in B$, on a $d(x,a) \leqslant d(x,b) + d(a,b) \leqslant d(x,b) + \delta(B)$.

Le résultat suivant caractérise les sous-espaces métriques complets d'un espace métrique complet.

**Théorème 1.35.** *Soit $(E,d)$ un espace métrique complet et $A$ une partie de $E$. Alors $(A,d)$ est un espace métrique complet si, et seulement si, $A$ est fermé dans $E$.*

*Démonstration.* Si $(A,d)$ est complet, et si $x \in \overline{A}$, alors(9) il existe une suite $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de points de $A$ qui converge dans $E$ vers $x$. Cette suite, est de Cauchy dans $E$, donc aussi dans $A$, donc converge dans $A$ par hypothèse, donc $x \in A$. Cela montre bien que $A$ est fermé dans $E$. Réciproquement, si $A$ est fermé dans $E$, toute suite de Cauchy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de $A$ converge dans $E$ qui est complet et possède ipso facto une limite $x \in A$, puisque $A$ est fermé. Elle converge donc dans $A$. □

*Remarque.* Il est à noter qu'un sous-espace métrique complet $A$ d'un espace métrique *quelconque* est fermé : la démonstration de la condition nécessaire du théorème précédent ne fait pas appel à la complétude de $E$.

Contrairement au cas de la dimension finie, il est en général faux qu'une partie bornée d'un espace métrique soit relativement compacte, autrement dit ait une adhérence compacte. Le théorème suivant, dû à Giulio Ascoli (1843-1896), donne une condition suffisante dans le cas où l'espace ambiant est celui des fonctions continues sur un compact et à valeurs dans un espace métrique de dimension finie, muni de la norme de la convergence uniforme.(10)

Soient $E$ et $F$ deux espaces métriques. Rappelons qu'une partie $\mathcal{F}$ de $F^E$ est dite *équicontinue* si l'on a

$$\forall x \in E\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \eta > 0 :\ (\forall f \in \mathcal{F})\ f\big(B_E(x;\eta)\big) \subset B_F\big(f(x);\varepsilon\big).$$

On dit que $\mathcal{F}$ est uniformément équicontinue si

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \eta > 0 :\ (\forall x \in E\ \forall f \in \mathcal{F})\ f\big(B_E(x;\eta)\big) \subset B_F\big(f(x);\varepsilon\big).$$

Il est clair que, si $E$ est compact, toute partie équicontinue est uniformément équicontinue. En effet, pour tout $\varepsilon > 0$, et tout $x \in E$, il existe $\eta_x$ tel que $f\big(B_E(x;\eta_x)\big) \subset B_F\big(f(x);\varepsilon\big)$. Comme $E$ est compact, il existe une famille finie $X$ telle que $E \subset \cup_{x\in X} B_E(x;\eta_x/2)$. En posant $\varrho := \frac{1}{2}\min_{x\in X}\eta_x$, on obtient donc $d(x,y) < \varrho \Rightarrow \delta(f(x),f(y)) < \varepsilon$.(11)

Nous aurons besoin d'un lemme relatif à la compacité des parties un espace métrique complet. On dit qu'une partie $A$ d'un espace métrique est *totalement bornée* ou *précompacte* si, pour tout $\varepsilon > 0$, elle peut être recouverte par un nombre fini de boules de rayon $\varepsilon$.

**Lemme 1.36.** *Une partie fermée $A$ d'un espace métrique complet est compacte si, et seulement si, elle est totalement bornée.*

*Démonstration.* Il est évident qu'une parte compacte est totalement bornée. Réciproquement, raisonnons par l'absurde et supposons que $A$ est totalement bornée dans un espace métrique complet et que $\cup_J U_j$ est un recouvrement ouvert de $A$ dont on ne peut extraire aucun sous-recouvrement fini. Comme $A$ est totalement bornée, $A$ est recouvert par un nombre fini de boules fermées de diamètre $\leqslant 1$. L'une de ces boules, disons $B_1$ ne peut être recouverte par un nombre fini de $U_j$. Le même raisonnement fournit une boule $B_2$ de diamètre $\leqslant \frac{1}{2}$ qui ne peut être recouverte par un nombre fini de $U_j$. En

9. Cf. les caractérisations vues es Licence de l'adhérence d'une partie d'un espace métrique.
10. Donnée dans ce cas par la formule $\|f\| := \sup_{x\in E}\|f(x)\|$.
11. Soit $x \in E$, il existe $x_1$ tel que $d(x,x_1) < \eta_{x_1}/2$. Si $d(x,y) < \varrho$, alors $y \in B_E(x,\eta_x)$.

itérant le procédé, nous obtenons une suite $\{B_n\}_{n=0}^{\infty}$ de boules fermées emboîtées telles que $\operatorname{diam} B_n \leqslant 1/n$ $(n \geqslant 1)$ dont aucune ne peut être recouverte par un nombre fini de $U_j$. D'après le théorème de Cantor (Théorème 1.33), l'intersection des $B_n$ contient exactement un point, disons $x$. Or il existe $j \in J$ tel que $x \in U_j$, donc $B_n \subset U_j$ pour $n$ assez grand, ce qui fournit la contradiction souhaitée. □

**Théorème 1.37 (Ascoli).** *Soient $E$ un espace métrique compact, $F$ un espace vectoriel normé de dimension finie, et $A \subset \mathcal{C}(E, F)$ une partie équicontinue et bornée. Alors $\overline{A}$ est une partie compacte de $\mathcal{C}(E, F)$. En particulier, de toute suite d'éléments de $A$ on peut extraire une sous-suite convergente.*

*Démonstration.* Comme $\mathcal{C}(E, F)$ est complet, il suffit de montrer que $A$, et donc aussi $\overline{A}$, est totalement bornée. Soit donc $\varepsilon > 0$. Comme $E$ est compact et $A$ est (uniformément) équicontinue, il existe $\eta > 0$ et une suite finie $\{x_j\}_{j=1}^{n}$ telle que $E \subset \cup_{1 \leqslant j \leqslant n} B_E(x_j; \eta)$ et, pour chaque indice $j$ et toute $f \in A$, $f(B_E(x_j; \eta)) \subset B_F(f(x_j); \varepsilon)$. Il s'ensuit que $\|f(x) - f(x_j)\| < \varepsilon$ pour toute $f \in A$ et tout $x \in B(x_j; \eta)$. Alors l'ensemble

$$G := \{f(x_j) : f \in A,\ 1 \leqslant j \leqslant n)\}$$

est borné, donc relativement compact dans $F$ : en effet, comme $A$ est bornée, chaque ensemble $\{f(x) : f \in A\}$ est borné dans $F$. Il existe donc une partie finie $Y \subset F$ telle que $G \subset \cup_{y \in Y} B_F(y; \varepsilon)$. Considérons alors, pour tout $n$-uple $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in Y^n$,

$$H(\boldsymbol{y}) := \{f \in \mathcal{C}(E, F) : \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \|y_j - f(x_j)\| < \varepsilon,\ f\big(B_E(x_j; \eta)\big) \subset B_F(y_j; 2\varepsilon)\ (1 \leqslant j \leqslant n)\}.$$

Si $f$, $g \in H(\boldsymbol{y})$, on a clairement $\|f - g\| < 4\varepsilon$, donc $\operatorname{diam} H(\boldsymbol{y}) < 4\varepsilon$. En particulier, $H(\boldsymbol{y})$ peut être recouvert par un nombre fini de boules de rayon $\varepsilon$. De plus, si $f \in A$, $x \in E$, il existe $j \in [1, n]$ tel que $d(x, x_j) < \eta$ et $y_j \in Y$ tel que $\|f(x_j) - y_j\| < \varepsilon$. Cela implique $\|f(x) - y_j\| < 2\varepsilon$, donc $f \in \cup_{\boldsymbol{y} \in Y^n} H(\boldsymbol{y})$. □

## 2. Applications linéaires continues

### *2·1. Norme d'un opérateur*

On appelle *opérateur* une application linéaire entre espaces vectoriels normés.

**Théorème 2.1.** *Soient $E$ et $F$ deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $T : E \to F$ un opérateur. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

*(i) $T$ est continue.*

*(ii) Il existe une constante $M$ telle que $\|T(x)\| \leqslant M\|x\|$ pour tout $x \in E$.*

*Démonstration.* Si $T$ est continue, alors $T$ est continue en $0 = 0_E$. Il existe donc un $\eta > 0$ tel que $\|x\| \leqslant \eta \Rightarrow \|T(x)\| \leqslant 1$. Il suit, pour tout $x \neq 0$,

$$\|T(x)\| = \frac{\|x\|}{\eta} \left\| T\Big(\frac{\eta x}{\|x\|}\Big) \right\| \leqslant \frac{\|x\|}{\eta}.$$

On a donc (ii) avec $M = 1/\eta$.

Réciproquement, si l'on a (ii), alors $T$ est continue en 0, donc en tout point puisque $T(x+y)-T(x)=T(y)$. □

**Définition 2.2.** *Soient $E$ et $F$ deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $T:E\to F$ un opérateur continu. On définit la norme de $T$ par*

$$\|T\| := \sup_{x\in E\smallsetminus\{0\}} \|T(x)\|/\|x\|.$$

*Remarque.* On a aussi $\|T\| = \sup_{\|x\|=1}\|T(x)\| = \sup_{\|x\|<1}\|T(x)\|$.

*Exemples.* Dans $E := \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $\|f\|_2 := \sqrt{\int_0^1 f(x)^2\,\mathrm{d}x}$, considérons les trois opérateurs de $E$ dans $\mathbb{R}$ définis par

$$T_1(f) := \int_0^1 x^2 f(x)\,\mathrm{d}x,\quad T_2(f) := \int_0^{1/2} f(x)\,\mathrm{d}x,\quad T_3(f) := f(0).$$

Alors, par l'inégalité de Cauchy–Schwarz, $\|T_1\| \leqslant 1/\sqrt{5}$, $\|T_2\| \leqslant 1/\sqrt{2}$, et la première norme est atteinte pour $f(x) := x^2$, donc $\|T_1\| = 1/\sqrt{5}$. La seconde inégalité est aussi une égalité : pour $f_n(x) := \begin{cases} 1-\max(0,2nx-n+1) & \text{si } x\leqslant \frac12,\\ 0 & \text{si } \frac12 < x \leqslant 1,\end{cases}$ de sorte que $\|f_n\|_2 \leqslant 1/\sqrt{2}$, on a

$$|T_2(f_n)| \geqslant \int_0^{(n-1)/2n} \mathrm{d}x \geqslant \frac{n-1}{2n} \geqslant \frac{(n-1)}{n\sqrt{2}}\|f_n\|_2 \sim \frac{\|f_n\|_2}{\sqrt{2}}.$$

Cependant, il faut noter que cette norme d'opérateur n'est pas atteinte : si l'on avait $|T_2(f)| = \|f\|_2/\sqrt{2}$ pour une fonction non nulle $f\in\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, on aurait

$$\int_0^1 \{f(x)+\lambda\mathbf{1}_{[0,1/2]}(x)\}^2\,\mathrm{d}x = \|f\|_2^2 + 2\lambda T_2(f) + \tfrac12\lambda^2 = \big(\|f\|_2 \pm \lambda/\sqrt{2}\big)^2 = 0 \tag{2·1}$$

pour le choix $\lambda := \mp\sqrt{2}\|f\|_2$. Comme $f$ est continue en $x=\frac12$, on a

$$\int_{1/2-1/n}^{1/2+1/n} \{f(x)+\lambda\mathbf{1}_{[0,1/2]}(x)\}^2\,\mathrm{d}x = \frac1n\{f(\tfrac12)+\lambda\}^2 + \frac1n f(\tfrac12)^2 + o\Big(\frac1n\Big) \qquad (n\to\infty).$$

Par (2·1), cela implique $\{f(\frac12)+\lambda\}^2 + f(\frac12)^2 = 0$, donc $\lambda = f(\frac12) = 0$, donc $\|f\|_2 = 0$, et finalement $f=0$, une contradiction.

Enfin l'opérateur $T_3$ n'est pas continu : $f(0)$ peut prendre des valeurs arbitrairement grandes sous la contrainte $\|f\|_2 \leqslant 1$ : construire en exercice des exemples simples.

Dans toute la suite de ce fascicule, nous désignons par $\mathcal{L}(E,F)$ l'espace vectoriel des opérateurs continus de $E$ dans $F$. Nous écrivons également $\mathcal{L}(E) := \mathcal{L}(E,E)$. On montre facilement le résultat suivant.

**Proposition 2.3.** *L'application $T\mapsto\|T\|$ est une norme sur $\mathcal{L}(E,F)$.*

*Remarque.* Si $T\in\mathcal{L}(E,F)$ et $S\in\mathcal{L}(F,G)$, on a évidemment

$$\|S\circ T\| \leqslant \|S\|\|T\|. \tag{2·2}$$

L'énoncé suivant est important.

**Théorème 2.4.** *Soient $E$ et $F$ deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K} := \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Si $F$ est complet, il en va de même de $\mathcal{L}(E, F)$. En particulier $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ est complet.*

*Démonstration.* Exercice.

*Remarque.* On désigne l'espace $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ du nom de *dual* de $E$. Il est souvent noté $E'$.

Il a été vu en Licence qu'une application uniformément continue à valeurs dans un espace métrique complet est prolongeable par continuité à l'adhérence de son ensemble de définition, avec le même module de continuité. Or, il résulte immédiatement du Théorème 2.1 qu'une application linéaire continue est uniformément continue.(12) Cela conduit au résultat suivant.

**Théorème 2.5.** *Soit $A$ un sous-espace vectoriel partout dense d'un espace vectoriel normé $E$ et soit $T$ un opérateur continu défini sur $A$ et à valeurs dans un espace de Banach $F$. Alors il existe un unique opérateur $\widetilde{T} : E \to F$ dont la restriction à $A$ est $T$. De plus $\|\widetilde{T}\| = \|T\|$.*

*Démonstration.* D'après la remarque précédent l'énoncé, nous savons que $T$ est prolongeable par continuité et que le prolongement $\widetilde{T}$ vérifie $\|\widetilde{T}(x+y)-\widetilde{T}(x)\| \leqslant \|T\|\,\|y\|$ pour tous $x$, $y$ de $E$. Il reste à voir que $\widetilde{T}$ est linéaire. Soient $x$, $y \in E$. Alors $x = \lim x_n$, $y = \lim y_n$ où $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ sont des suites d'éléments $A$. On a, pour tous $\lambda$, $\mu \in K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$,

$$\widetilde{T}(\lambda x + \mu y) = \lim T(\lambda x_n + \mu y_n) = \lim\{\lambda T(x_n) + \mu T(y_n)\} = \lambda \widetilde{T}(x) + \mu \widetilde{T}(y).$$

□

Nous avons vu (Théorème 1.24) que, sur un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes. On en déduit facilement la continuité de tout opérateur en dimension finie.

**Théorème 2.6.** *Soit $E$ un espace vectoriel normé de dimension finie. Toute application linéaire $T : E \to F$ à valeurs dans un espace vectoriel normé est continue.*

*Démonstration.* Soit $\{e_j\}_{j=1}^{p}$ une base de $E$. Pour tout vecteur $x = \sum_{j=1}^{p} x_j e_j$, on a

$$\|T(x)\| = \left\| \sum_{j=1}^{p} x_j T(e_j) \right\| \leqslant M\|x\|_\infty,$$

avec $\|x\|_\infty := \sup_{j=1}^{p} |x_j|$ et $M := \sum_{j=1}^{p} \|T(e_j)\|$. Comme la norme de $E$ est équivalente à la norme $x \mapsto \|x\|_\infty$, on en déduit bien que $T$ est continue. □

Les deux théorèmes suivants sont fondamentaux dans la théorie.

**Théorème et définition 2.7.** *Soit $E$ un $\mathbb{C}$-espace de Banach et $T \in \mathcal{L}(E)$. Alors la suite $\{\|T^n\|^{1/n}\}_{n=0}^{\infty}$ converge vers une limite $\varrho(T) \leqslant \|T\|$. On a plus généralement $\varrho(T) \leqslant \|T^n\|^{/n}$ pour tout entier $n \geqslant 1$. On appelle $\varrho(T)$ le* rayon spectral *de l'opérateur $T$.*

*Démonstration.* Posons $\varrho_n := \|T^n\|$. D'après (2·2), nous avons $\varrho_{m+n} \leqslant \varrho_m \varrho_n$ pour tous $m \geqslant 0$, $n \geqslant 0$. Cela implique en particulier que si $\varrho_p = 0$ pour un indice $p$ alors $\varrho_n = 0$ pour $n \geqslant p$ et les assertions de l'énoncé sont satisfaites avec $\varrho(T) = 0$.

Nous pouvons donc supposer dans la suite que $\varrho_n > 0$ pour tout $n \geqslant 0$. Soit $\varrho(T) := \limsup_n \varrho_n^{1/n}$. Nous allons montrer que $\varrho(T) \leqslant \varrho_p^{1/p}$ pour tout $p \geqslant 1$, ce qui impliquera $\varrho(T) \leqslant \liminf \varrho_n^{1/n}$ et établira ainsi les deux assertions souhaitées.

Soit $p \geqslant 1$ fixé. Chaque entier $n \geqslant 1$ s'écrit sous la forme $n = ap + r$ avec $0 \leqslant r < p$. Il s'ensuit que

$$\varrho_n^{1/n} \leqslant \varrho_p^{a/n} \varrho_r^{1/n} = \varrho_p^{1/p - r/pn} \varrho_r^{1/n}.$$

12. $\|T(x+y) - T(x)\| = \|T(y)\| \leqslant \|T\|\,\|y\|$.

En prenant la limite supérieure, nous obtenons bien l'inégalité annoncée. □

**Théorème 2.8 (Banach-Steinhaus).** *Soient $E$ un espace de Banach, $F$ un espace vectoriel normé, et $(T_j)_{j\in J}$ une famille d'opérateurs de $\mathcal{L}(E,F)$. On suppose que, pour tout $x \in E$, on a $\sup_J \|T_j(x)\| < \infty$. Alors $\sup_J \|T_j\| < \infty$.*

*Démonstration.* Soit $B$ la boule unité fermée de $E$. Nous devons montrer l'existence d'un $M > 0$ tel que $\|T_j(u)\| \leqslant M$ pour $j \in J$, $u \in B$.

Il suffit de montrer l'existence de $K > 0$, $y \in E$, $r > 0$ tels que $\|T_j(x)\| \leqslant K$ pour tout $x \in \overline{B(y;r)} := \{x \in E : \|x - y\| \leqslant r\}$. En effet, si $u \in B$, alors $y + ru \in \overline{B(x;r)}$, donc $T_j(u) = \{T_j(y + ru) - T_j(y)\}/r$ vérifie $\|T_j(u)\| \leqslant 2K/r$.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, posons

$$F_n := \{x \in E : \sup_J \|T_j(x)\| \leqslant n\}.$$

Alors $F_n$ est un fermé de $E$, en tant qu'intersection de fermés. L'hypothèse équivaut à $\cup_n F_n = E$. D'après le principe de Baire (Corollaire 1.34), il existe un entier $p$ tel que $\overset{\circ}{F}_p \neq \varnothing$. Si $y \in \overset{\circ}{F}_p$, $B(y;2r) \subset \overset{\circ}{F}_p$, nous avons donc $\sup_J \|T_j(x)\| \leqslant p$ pour tout $x \in \overline{B(y;r)}$. □

*Remarque.* Le théorème est en défaut si $E$ n'est pas complet. Considérons par exemple l'espace $E = \mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels muni de la norme de la convergence uniforme sur la suite des coefficients, et posons $T_n P = P^{(n)}(0)$. Pour chaque $P$ la suite $\{T_n P\}_{n=0}^{\infty}$ est stationnaire car $T_n P = 0$ dès que $n > \deg P$. Elle est donc bornée. En revanche $T_n P = n! a_n$ si $P(x) = \sum_{0\leqslant j\leqslant d} a_j x^j$. Donc $\|T_n\| = n!$, terme général d'une suite non bornée.

**Corollaire 2.9.** *Soient $E$ un espace de Banach, $F$ un espace vectoriel normé, et $\{T_n\}_{n\geqslant 0}$ une suite d'opérateurs de $\mathcal{L}(E,F)$. On suppose que, pour tout $x \in E$, la suite $\{T_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ converge vers une limite notée $T(x)$. Alors $T \in \mathcal{L}(E,F)$.*

*Démonstration.* L'application $T$ est clairement linéaire. Comme toute suite convergente est bornée, l'hypothèse implique, par le Théorème 2.8, que $\sup_n \|T_n\| < \infty$, d'où $\sup_{x\neq 0} \|T(x)\|/\|x\| < \infty$. □

*Remarque.* L'énoncé précédent n'implique pas que $T_n$ tend vers $T$ dans $\mathcal{L}(E,F)$. Considérons par exemple $E = \mathcal{C}([0,1])$, $F := \mathcal{L}^\infty([0,1])$ (fonctions bornées), tous deux munis de la norme de la convergence uniforme et définissons $T_n(f)$ par $T_n(f)(x) := x^n f(x)$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$. Alors $T(f)(x) = f(1)$ si $x = 1$, $T(f)(x) = 0$ si $x \neq 1$. Cette application linéaire est bien continue de $E$ dans $F$. En revanche

$$\|T_n - T\| \geqslant \|T_n(1) - T(1)\|_\infty = \sup_{0\leqslant x<1} x^n = 1 \qquad (n \geqslant 1).$$

### *2·2. Sous-espaces vectoriels des espaces vectoriels normés*

On dit qu'un opérateur défini sur un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est une *forme linéaire* si elle est à valeurs dans le corps de base. On appelle *hyperplan* le noyau d'une forme linéaire non nulle. Il est immédiat que le noyau de toute forme linéaire continue est fermé.[13] On déduit donc du Théorème 2.6 que *tout hyperplan d'un espace vectoriel normé de dimension finie est fermé.*

13. La réciproque est vraie : voir l'Exercice 15.

Si $E$ est un espace vectoriel normé de dimension finie $n$, un hyperplan est de dimension $n-1$. Le résultat suivant stipule qu'en fait tous les sous-espaces vectoriels de $E$ sont alors fermés.

**Proposition 2.10.** *Tout sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est complet, et donc fermé.*

*Démonstration.* C'est une conséquence immédiate du Théorème 1.24, en vertu duquel tout espace vectoriel normé de dimension finie est complet, et du fait qu'une partie complète d'un espace métrique est nécessairement fermée (Théorème 1.35). □

Le théorème général suivant fournit une autre preuve, directe.

**Théorème 2.11.** *Soit $E$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$, $F$ un sous-espace vectoriel fermé de $E$ et $y$ un vecteur de $E$. Alors le sous-espace vectoriel $G := F + \mathbb{R}y$ est fermé dans $E$. Si de plus $F$ est complet, alors $G$ est complet.*

*Démonstration.* Si $y \in F$, il n'y a rien à démontrer car $G = F$. Sinon, considérons une suite $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ de vecteurs de $G$ qui converge vers $z \in E$. Pour chaque $n$, on a une décomposition $z_n = x_n + \lambda_n y$ avec $x_n \in F$ et $\lambda_n \in \mathbb{R}$. Comme $E \smallsetminus F$ est ouvert, il existe un $r > 0$ tel que $B(y, r) \subset E \smallsetminus F$, d'où $d(y, F) \geqslant r$. Posons $z_n - z_p = (x_n - x_p) + (\lambda_n - \lambda_p)y$. Comme $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ est de Cauchy, on a $\lim_{n,p\to\infty} \|z_n - z_p\| = 0$. Or, pour tous $n, p$ tels que $\lambda_n \neq \lambda_p$, on a

$$\|z_n - z_p\| = |\lambda_n - \lambda_p|\, \|y + (x_n - x_p)/(\lambda_n - \lambda_p)\| \geqslant |\lambda_n - \lambda_p| d(y, F) \geqslant |\lambda_n - \lambda_p| r.$$

Cela montre que $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ est de Cauchy, donc convergente. Comme $x_n = z_n - \lambda_n y$, la suite $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ est également convergente, vers un vecteur $x$ de $F$, car $F$ est fermé. Ainsi $z = x + \lambda y \in G$. Nous avons donc obtenu que $G$ est fermé. La démonstration montre en fait que, pour toute suite de Cauchy $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ de $G$, on a $z_n = x_n + \lambda_n y$ où $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ est une suite de Cauchy de $F$ et $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ suite de Cauchy de $\mathbb{R}$. Cela implique bien la seconde partie de l'énoncé. □

Les hyperplans des espaces vectoriels normés de dimension finie peuvent être caractérisés simplement par une équation linéaire. Si $T$ est une forme linéaire sur $E$ de dimension $p$ sur $\mathbb{R}$, et si $\{e_j\}_{j=1}^{p}$ est une base de $E$, on pose $u_j := T(e_j)$ et on désigne par gradient de $T$ le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, T := \sum_{j=1}^{p} u_j e_j$.

**Proposition 2.12.** *Soit $E$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$ de dimension $p$ muni de la norme euclidienne relativement à une base $\{e_j\}_{j=1}^{p}$ et soit $T$ une forme linéaire sur $E$. Alors $T(x) := \langle \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, T, x\rangle := \sum_{j=1}^{p} u_j x_j$ et $\|T\| = \|\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, T\|$.*

*Démonstration.* On a $T(x) = T(\sum_{j=1}^{p} x_j e_j) = \sum_{j=1}^{p} u_j x_j$ par linéarité. Par l'inégalité de Cauchy–Schwarz, on a $\|T(x)\| \leqslant \|x\|\, \|\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, T\|$, avec égalité si $x = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, T$. □

## *2·3. Les théorèmes de l'isomorphisme et du graphe fermé*

**Théorème 2.13 (Théorème de Banach, ou théorème de l'application ouverte).** *Soient $E, F$ des espaces vectoriels normés complets et $T : E \to F$ une application linéaire continue surjective. Alors $T$ est ouverte.*

*Démonstration.* Il faut montrer que l'image par $T$ d'un ouvert de $E$ est un ouvert de $F$. Par linéarité, il suffit de montrer que l'image d'un voisinage de l'origine dans $E$ est voisinage de l'origine dans $F$.

Soit $V \subset E$ un voisinage de 0. Il existe alors une boule ouverte $B_0 = B_E(0, r)$ telle que $2B_0 \subset V$. On a $E = \cup_{n\geqslant 1} nB_0$, donc, puisque $T$ est surjective, $F = \cup_{n\geqslant 1} nT(B_0)$. D'après le principe de Baire (Corollaire 1.34), l'un au moins des $n\overline{T(B_0)}$ est d'intérieur non vide, ce qui implique que $W := \overset{\circ}{\overline{T(B_0)}} \neq \varnothing$. Si $y \in W$ alors

$$0 = y - y \in 2W \subset \overset{\circ}{\overline{T(2B_0)}} \subset \overset{\circ}{\overline{T(V)}}\,.^{(14)}$$

Cela montre que $\overline{T(B_0)}$, et donc aussi $\overline{T(V)}$, est un voisinage de 0.

Nous allons déduire de ce qui précède que $T(V)$ est lui-même un voisinage de 0. à cette fin, il suffit de montrer que $\overline{T(V_0)} \subset T(V)$ où $V_0 := B_E(0, \varrho)$ avec $\varrho$ assez petit pour que $3V_0 \subset V$. Posons $V_1 := \frac{1}{2}V_0$. Comme $\overline{T(V_1)}$ est un voisinage de 0, on a $\overline{T(V_0)} \subset T(V_0) + \overline{T(V_1)}$. En itérant ce procédé, on obtient $\overline{T(V_0)} \subset \sum_{j=0}^{n} T(V_j) + \overline{T(V_{n+1})}$ avec $V_j := V_0/2^j$. Ainsi tout $y \in \overline{T(V_0)}$ peut s'écrire $y = \sum_{j=0}^{n} T(x_j) + \varepsilon_{n+1}$ avec $x_j \in V_j$ et $\|\varepsilon_{n+1}\| \leqslant \varrho\|T\|/2^{n+1}$. Comme $E$ est complet, la série des $x_j$ est convergente, donc $y = T(x)$ avec $\|x\| \leqslant 2\varrho$, donc $x \in 3V_0$ et finalement $x \in V$. Cela établit bien l'inclusion $\overline{T(V_0)} \subset T(V)$ et achève la démonstration. □

La notion d'isomorphisme d'espaces de Banach est particulièrement utile pour l'étude du calcul différentiel.

**Définition 2.14.** *Soient $E$, $F$ deux espaces de Banach. On dit que $T \in \mathcal{L}(E, F)$ est un isomorphisme si $T$ est bijective et si $T^{-1}$ est continue.*

**Théorème 2.15 (Théorème de l'isomorphisme).** *Soient $E$, $F$ des espaces de Banach et $T : E \to F$ une application linéaire continue bijective. Alors $T$ est un isomorphisme.*

*Démonstration.* C'est clair puisque la continuité de $T^{-1}$ équivaut au fait que $T$ est ouverte (cf. p. 10).

*Exemple.* Soit $g \in L^\infty(\mathbb{R})$. L'application $T : L^\infty(\mathbb{R}) \to L^\infty(\mathbb{R})$ définie par $f \mapsto fg$ est continue, injective si $g$ ne s'annule pas sur un ouvert, et surjective si $1/g \in L^\infty(\mathbb{R})$. C'est alors un isomorphisme, et $T^{-1} : f \mapsto f/g$.

**Théorème 2.16 (Théorème du graphe fermé).** *Soient $E$, $F$ des espaces de Banach et $T : E \to F$ une application linéaire. Alors $T$ est continue si, et seulement si, son graphe est fermé dans $E \times F$.*

*Démonstration.* Si $T \in \mathcal{L}(E, F)$, le graphe $\Gamma := \{(x, y) : x \in E,\, y = T(x)\}$ est fermé car il est l'image réciproque de $\{0\}$ par l'application linéaire continue $\varphi_T : E \times F \to F$ définie par $\varphi_T(x, y) := T(x) - y$. Réciproquement, si $\Gamma$ est fermé, c'est un sous-espace vectoriel fermé de $E \times F$. Il est donc complet pour la topologie induite. Considérons les projections $\pi_1 : \Gamma \to E$ et $\pi_2 : \Gamma \to F$ définies respectivement par $\pi_1(x, y) = x$ et $\pi_2(x, y) = y = T(x)$. Ce sont des applications linéaires continues. Comme $\pi_1$ est bijective, on a $T = \pi_2 \circ \pi_1^{-1}$. D'après le théorème de l'isomorphisme, $\pi_1^{-1}$ est continue, donc $T$ l'est également. □

## *2·4. Supplémentaires topologiques, projecteurs*

**Théorème 2.17.** *Soient $E$ un espace de Banach et $F$, $G$ des sous-espaces vectoriels fermés tels que $F + G$ soit fermé. Alors il existe une constante $C > 0$ telle que tout $x$ de $F + G$ admette une décomposition sous la forme $x = y + z$ avec $y \in F$, $z \in G$, $\|y\| \leqslant C\|x\|$, $\|z\| \leqslant C\|x\|$.*

*Démonstration.* L'application $T : F \times G \to F + G$ définie par $T(y, z) = y + z$ est linéaire et surjective. Si l'on munit $F \times G$ de la norme $\|(y, z)\| := \|y\| + \|z\|$, elle est aussi continue. D'après le théorème de Banach (Théorème 2.13), est donc ouverte. Si $r > 0$ est tel que

14. La première inclusion résulte du fait que $2W$ est un ouvert contenu dans $2\overline{T(B_0)} = \overline{T(2B_0)}$.

$\overline{B_{F+G}(0;r)} \subset T\big(B_{F\times G}(0;1)\big)$, alors $x = y + z$, $\|x\| \leqslant r \Rightarrow \|y\| \leqslant 1$, $\|z\| \leqslant 1$. On peut donc choisir la constante $C$ indiquée dans l'énoncé égale à $1/r$. □

**Définition 2.18.** *Soient $E$ un espace de Banach et $F$ un sous-espace vectoriel fermé de $E$. On dit qu'un sous-espace vectoriel $G$ de $E$ est un* supplémentaire topologique *de $F$ si $G$ est fermé, $E = F + G$, et $F \cap G = \{0\}$. Dans ce cas, tout élément $x$ de $E$ est représentable de façon unique sous la forme $x = y + z$ avec $y \in F$, $z \in G$. Les applications linéaires continues $x \mapsto y$ et $x \mapsto z$ sont désignés comme des projecteurs.*

*Exemples.* 1. Dans un espace vectoriel de dimension finie, tout sous-espace vectoriel admet un supplémentaire topologique. Cela résulte immédiatement du théorème de la base incomplète.

2. Nous verrons plus loin (Corollaire II.3.4) que dans un espace de Hilbert tout sous-espace vectoriel fermé admet un supplémentaire topologique.

## *2·5. Topologie de l'ensemble des isomorphismes entre espaces de Banach*

**Proposition 2.19.** *Soit $E$ un espace de Banach et $T \in \mathcal{L}(E)$ une application linéaire continue vérifiant $\|T - \mathrm{id}_E\| < 1$. Alors $T$ est inversible et $T^{-1} \in \mathcal{L}(E)$.*

*Démonstration.* Soit $h := \mathrm{id}_E - T$. Pour tout $y \in E$, la série $\sum_{n=0}^{\infty} h^n(y)$ converge puisque $\|h^n y\| \leqslant \|h\|^n \|y\|$ et $E$ est un espace de Banach. Sa somme $S(y)$ vérifie $h \circ S(y) = \sum_{n=1}^{\infty} h^n(y) = S(y) - y$, c'est-à-dire $y = T \circ S(y)$. L'application $S$ est clairement linéaire, donc $T$ est inversible. Il reste à montrer que $S = T^{-1}$ est continue. On a

$$\|S(y)\| \leqslant \sum_{n\geqslant 0} \|h\|^n \|y\| = \frac{\|y\|}{1 - \|h\|}.$$

Cela implique bien la continuité de $S$ et la majoration $\|S\| \leqslant 1/(1 - \|h\|)$. □

**Théorème 2.20.** *Soient $E$ et $F$ deux espaces de Banach. L'ensemble $\mathcal{L}^*(E, F)$ des isomorphismes de $E$ sur $F$ est ouvert et l'application $T \mapsto T^{-1}$ de $\mathcal{L}^*(E, F)$ dans $\mathcal{L}^*(F, E)$ est continue.*

*Démonstration.* Soit $T_0 \in \mathcal{L}^*(E, F)$, $S_0 := T_0^{-1}$. Pour $T \in \mathcal{L}(E, F)$, posons $S = S_0 \circ T \in \mathcal{L}(E)$. Alors $\|S - \mathrm{id}_E\| = \|S_0 \circ (T - T_0)\| \leqslant \|S_0\| \, \|T - T_0\|$. Pour $\|T - T_0\| < 1/\|S_0\|$, il résulte de la Proposition 2.19 que $S$, donc également $T$, est inversible. Cela établit bien que $\mathcal{L}^*(E, F)$ est ouvert. Pour montrer que $T \mapsto T^{-1}$ est continue, il suffit de montrer que $\varrho \mapsto (\mathrm{id}_E - \varrho)^{-1}$ est continue sur la boule unité ouverte de $\mathcal{L}(E)$. En effet, on a

$$T^{-1} = (\mathrm{id}_E - \varrho)^{-1} \circ S_0$$

pour $\|T - T_0\|$ assez petite avec $\varrho := \mathrm{id}_E - S_0 \circ T$. Or, nous avons vu au cours de la démonstration de la Proposition 2.19 que

$$(\mathrm{id}_E - \varrho)^{-1} = \sum_{n\geqslant 0} \varrho^n.$$

On en déduit aisément la continuité souhaitée. □

À fins de simplification, nous écrirons $\mathcal{L}^*(E) := \mathcal{L}^*(E, E)$. Il s'agit donc de l'ensemble des isomorphismes de $E$ sur lui-même.

### *2·6. Spectre d'un opérateur*

**Définition 2.21.** *Soient $E$ un $\mathbb{C}$-espace de Banach et $T \in \mathcal{L}(E)$. On appelle spectre de $T$ l'ensemble* $\mathrm{Sp}(T)$ *des scalaires $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $T - \lambda\,\mathrm{id}_E \in \mathcal{L}(E) \smallsetminus \mathcal{L}^*(E)$.*

**Théorème et définition 2.22.** *Pour tout endomorphisme $T$ continu d'un $\mathbb{C}$-espace de Banach $E$, l'ensemble* $\mathrm{Sp}(T)$ *est une partie compacte de $\mathbb{C}$. On a* $\mathrm{Sp}(T) \subset \overline{B(0;\varrho(T))}$.

*L'application $\lambda \mapsto R_T(\lambda) := (T - \lambda\,\mathrm{id}_E)^{-1}$, définie sur $\mathbb{C} \smallsetminus \mathrm{Sp}(T)$, est appelée résolvante de $T$. C'est une application continue.*

*Démonstration.* Le Théorème 2.20 implique que $\mathrm{Sp}(T)$ est fermé et que l'application $\lambda \mapsto R_T(\lambda)$ est continue. Il reste à montrer que $\mathrm{Sp}(T)$ est borné. Or, d'après la Proposition 2.19, $T/\lambda - \mathrm{id}_E \in \mathcal{L}^*(E)$ dès que $|\lambda| > \|T\|$, ce qui implique $\mathrm{Sp}(T) \subset \overline{B(0;\|T\|)}$. En fait, d'après le théorème de Hadamard, la série

$$S := \sum_{n\geqslant 0} T^n/\lambda^n$$

converge dans $\mathcal{L}(E)$ dès que $\lambda > \varrho(T)$. Elle vérifie $S \circ T/\lambda = S - \mathrm{id}_E$, c'est-à-dire $(S/\lambda) \circ (\lambda\,\mathrm{id}_E - T) = \mathrm{id}_E$. □

Le résultat suivant montre que l'étude du spectre est toujours non-triviale.

**Théorème 2.23.** *Soient $E$ un $\mathbb{C}$-espace de Banach non réduit à 0 et $T \in \mathcal{L}(E)$. Alors* $\mathrm{Sp}(T) \neq \varnothing$ *et, plus précisément,* $\mathrm{Sp}(T) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = \varrho(T)\} \neq \varnothing$.

*Démonstration.* Pour $\lambda, \mu \in U := \mathbb{C} \smallsetminus \mathrm{Sp}(T)$, nous avons

$$\begin{aligned} R_T(\mu) - R_T(\lambda) &= (T - \mu\,\mathrm{id}_E)^{-1}\{T - \lambda\,\mathrm{id}_E - (T - \mu\,\mathrm{id}_E)\}(T - \lambda\,\mathrm{id}_E)^{-1} \\ &= (\mu - \lambda) R_T(\mu) R_T(\lambda). \end{aligned}$$

La continuité de $R_T$ nous permet donc d'écrire

$$\lim_{\mu\to\lambda} \frac{R_T(\mu) - R_T(\lambda)}{\mu - \lambda} = R_T(\lambda)^2 \qquad (\lambda \in U),$$

ce que nous interprétons en énonçant que $R_T$ est une fonction holomorphe de $U$ dans $\mathcal{L}(E)$. De plus, lorsque $|\lambda| > \|T\|$, nous avons

$$R_T(\lambda) = \frac{-1}{\lambda}(\mathrm{id}_E - T/\lambda)^{-1}.$$

Il s'ensuit que $\|R_T(\lambda)\| \leqslant 2/|\lambda|$ pour $|\lambda| > 2\|T\|$, donc $\lim_{|\lambda|\to\infty} R_T(\lambda) = 0$ dans $\mathcal{L}(E)$. En admettant la validité du théorème de Liouville pour les fonctions holomorphes à valeurs dans un espace de Banach, nous voyons donc que la vacuité du spectre impliquerait que la fonction holomorphe $R_T$ est constante, donc nulle, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, ce qui est absurde puisque $R_T(\lambda)$ est l'inverse d'un opérateur.

On peut parvenir à la même conclusion sans faire appel à la théorie des fonctions holomorphes à valeurs dans un espace de Banach.

Dans toute la suite de cette démonstration nous notons la composition des applications linéaires comme des produits. Commençons par observer que, si $\varrho(T) = 0$ alors $T \notin \mathcal{L}^*(E)$ et donc $0 \in \mathrm{Sp}(T)$. En effet, si $ST = \mathrm{id}_E$, alors $1 \leqslant \|T^n\|\|S\|^n$, donc $\varrho(T) \geqslant 1/\|S\| > 0$.

Nous pouvons donc supposer $\varrho(T) > 0$ et, quitte à considérer $T/\varrho(T)$, que $\varrho(T) = 1$. D'après le Théorème 2.22, nous savons que $\mathrm{Sp}(T) \subset \overline{D(0;1)}$. Raisonnons par l'absurde et supposons que $\mathrm{Sp}(T) \subset D(0;1)$. Comme $R_T$ est continue sur $\mathbb{C} \smallsetminus D(0;1)$, elle est uniformément continue sur la couronne compacte $\overline{D(0;1,2)}$. Pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe donc un $\alpha = \alpha(\varepsilon) > 1$ tel que $\sup_{|\lambda|=1} \|R_T(\alpha\lambda) - R_T(\lambda)\| \leqslant \varepsilon$.

Considérons alors les racines $n$-ièmes de l'unité $\zeta_j := \mathrm{e}^{2\pi i j/n}$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$. De l'identité $z^n - 1 = \prod_{1\leqslant j\leqslant n}(z-\zeta_j)$, nous déduisons par dérivation

$$nz^{n-1} = \sum_{1\leqslant j\leqslant n} (z^n-1)/(z-\zeta_j)$$

et cette identité algébrique est valable dans tout anneau. Il suit

$$T^{n-1}(T^n - \mathrm{id}_E)^{-1} = \frac{1}{n}\sum_{1\leqslant j\leqslant n} R_T(\zeta_j).$$

Un calcul analogue fournit

$$T^{n-1}(T^n - \alpha^n\,\mathrm{id}_E)^{-1} = \frac{1}{n}\sum_{1\leqslant j\leqslant n} R_T(\alpha\zeta_j),$$

et donc

$$\|T^n(T^n - \mathrm{id}_E)^{-1} - T^n(T^n - \alpha^n\,\mathrm{id}_E)^{-1})\| \leqslant \varepsilon\|T\|.$$

Or $T^n(T^n - \mathrm{id}_E)^{-1} = \mathrm{id}_E + (T^n - \mathrm{id}_E)^{-1}$, et

$$T^n(T^n - \alpha^n\,\mathrm{id}_E)^{-1} = \mathrm{id}_E + \alpha^n(T^n - \alpha^n\,\mathrm{id}_E)^{-1} = \mathrm{id}_E + ((T/\alpha)^n - \mathrm{id}_E)^{-1}.$$

Nous obtenons donc

$$\|(T^n - \mathrm{id}_E)^{-1} - ((T/\alpha)^n - \mathrm{id}_E)^{-1}\| \leqslant \varepsilon\|T\|.$$

Nous avons $(T/\alpha)^n \to 0$ lorsque $n\to\infty$ dans $\mathcal{L}(E)$ puisque $\alpha > 1 = \varrho(T)$. Il s'ensuit que $(T^n - \mathrm{id}_E)^{-1}$ tend vers $-\,\mathrm{id}_E$ lorsque $n \to \infty$, et donc que $T^n$ tend vers 0, ce qui contredit l'hypothèse $\varrho(T) = 1$. □

Université de Lorraine
Faculté des sciences et technologies
Master de mathématiques 2017/2018
Analyse (MAMT1 UE701 TC)

# II

# Espaces de Hilbert

Les espaces de Hilbert sont les espaces vectoriels de dimension infinie les plus simples. Ils interviennent entre autres :

- dans l'étude des équations différentielles et aux dérivées partielles ;
- en mécanique classique (fréquences propres) ;
- en physique (équation de Schrödinger, mécanique quantique).

On se placera ici dans le cas d'espaces vectoriels complexes, le cas réel étant analogue.

Principe heuristique : les propriétés algébriques des espaces vectoriels de dimension finie s'étendent aux espaces de Hilbert si l'on se limite aux applications linéaires continues et aux sous-espaces fermés.

## 1. Espaces préhilbertiens

**Définition 1.1.** *Un espace vectoriel complexe $E$ est dit* préhilbertien *s'il est muni d'un produit scalaire $(x, y) \mapsto (x \,|\, y)$, i.e. une application de $E^2$ dans $\mathbb{C}$ vérifiant*

*(i)* $\forall y \in E \quad x \mapsto (x \,|\, y)$ *est une forme linéaire sur $E$ ;*

*(ii)* $\forall (x, y) \in E^2 \quad (y \,|\, x) = \overline{(x \,|\, y)}$ *;*

*(iii)* $\forall x \in E \quad (x \,|\, x) \geqslant 0.$

Les propriétés (i) et (ii) impliquent que, pour tout $x \in E$, l'application $y \mapsto (x \,|\, y)$ est semi-linéaire, i.e. vérifie

$$\forall y, z \in E \quad (x \,|\, y + z) = (x \,|\, y) + (x \,|\, z)$$
$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad \forall y \in E \quad (x \,|\, \lambda y) = \overline{\lambda}\, (x \,|\, y)\,.$$

*Exemples.* 1. $E = \mathbb{C}^n$, muni du produit scalaire $(\boldsymbol{z} \,|\, \boldsymbol{w}) := \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} z_j \overline{w_j}$. On désigne ce produit scalaire comme le produit scalaire canonique.

2. $E$ est l'ensemble des suites $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ nulles à partir d'un certain rang, muni du produit scalaire $\sum_{n \geqslant 0} \lambda_n \overline{\mu_n}$.

3. $E := \ell^2(\mathbb{N}) = \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$, muni du produit scalaire $\sum_n \lambda_n \overline{\mu_n}$. À noter que cet exemple contient l'exemple 2.

4. $E := L^2(I, \mathbb{C})$, où $I$ est un intervalle de $\mathbb{R}$, muni du produit scalaire $(f \,|\, g) := \int_I f(t) \overline{g(t)}\, \mathrm{d}t$.

**Définition 1.2.** *Soient $E$, $F$ deux espaces préhilbertiens. On dit qu'une application linéaire $T \in \mathcal{L}(E, F)$ est un* isomorphisme d'espaces préhilbertiens *si $T$ est bijective et si*

$$\forall x, y \in E \quad (Tx \,|\, Ty) = (x \,|\, y)\,.$$

**Proposition 1.3 (Inégalité de Cauchy-Schwarz).** *Soit $E$ un espace préhilbertien. Pour tous $x, y \in E$, nous avons* $|\,(x\,|\,y)\,|^2 \leqslant (x\,|\,x)\,(y\,|\,y)$ .

*Démonstration.* Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, nous avons

$$(x + \lambda y\,|\,x + \lambda y) = |\lambda|^2\,(y\,|\,y) + 2\Re e\,\overline{\lambda}\,(x\,|\,y) + (y\,|\,y) \geqslant 0. \tag{1·1}$$

Posant $\vartheta := \arg(x\,|\,y)$ avec la convention $\vartheta := 0$ si $(x\,|\,y) = 0$, nous spécialisons $\lambda = te^{i\vartheta}$ avec $t \in \mathbb{R}$. Nous obtenons que le trinôme

$$t^2\,(y\,|\,y) + 2t|\,(x\,|\,y)\,| + (x\,|\,x) \tag{1·2}$$

est positif ou nul pour tout $t \in \mathbb{R}$, ce qui implique que son discriminant réduit $|\,(x\,|\,y)\,|^2 - (x\,|\,x)\,(y\,|\,y)$ est $\leqslant 0$. □

**Définition 1.4.** *Dans un espace préhilbertien $E$, on dit que deux vecteurs $x$ et $y$ sont* orthogonaux, *et l'on note $x \perp y$, si $(x\,|\,y) = 0$. On dit que deux parties $A$ et $B$ sont orthogonales, et l'on note $A \perp B$, si tout vecteur de $A$ est orthogonal à tout vecteur de $B$. On note $A^\perp$ l'ensemble des vecteurs de $E$ orthogonaux à tout vecteur de $A$.*

**Proposition 1.5.** *Soient $E$ un espace préhilbertien et $A$ une partie de $E$. Alors $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de $E$.*

*Démonstration.* Cela résulte immédiatement des axiomes du produit scalaire. □

Il est à noter que $E^\perp$ n'est pas nécessairement réduit à $\{0\}$ : considérer par exemple le cas de $\mathcal{L}^2[0,1]$ et des fonctions négligeables.

## 2. Espaces préhilbertiens séparés

**Proposition 2.1.** *Soit $E$ un espace préhilbertien. Alors $E^\perp = \{x \in E : (x\,|\,x) = 0\}$.*

*Démonstration.* La condition nécessaire est immédiate puisque $x \in E^\perp \Rightarrow (x\,|\,x) = 0$. La condition suffisante résulte de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. □

**Définition 2.2.** *Un espace préhilbertien $E$ est dit séparé si $E^\perp = \{0\}$.*

Les exemples du §1 sont tous séparés. En revanche $\mathcal{L}^2(I)$ ne l'est pas.

Il est à noter que, dans un espace préhilbertien séparé, l'inégalité de Cauchy-Schwarz est une égalité si, et seulement si, les vecteurs $x$ et $y$ sont proportionnels. En effet, si le discriminant du trinôme (1·2) est nul, ou bien $(y\,|\,y) = 0$, donc $y = 0$, ou bien le trinôme a une racine double $t_0 := -|\,(x\,|\,y)\,|/\,(y\,|\,y)$, ce qui implique en reportant dans (1·1) que $\big(x + t_0 e^{i\vartheta} y\,|\,x + t_0 e^{i\vartheta} y\big) = 0$ et donc $x + t_0 e^{i\vartheta} y = 0$.

Si $E$ est un espace préhilbertien, on peut définir un produit scalaire sur $F := E/E^\perp$ en posant $(u\,|\,v) = (x\,|\,y)$ où $x$ (resp. $v$) est un représentant quelconque de $u$ (resp. $v$) dans $E$.

**Proposition 2.3.** *Soit $E$ un espace préhilbertien. Alors $F := E/E^\perp$ est un espace préhilbertien séparé.*

*Démonstration.* Soient $u \in F^\perp$ et $x$ un représentant de $u$ dans $E$. Pour tout $v \in F$ de représentant $y \in E$, nous avons $0 = (u\,|\,v) = (x\,|\,y)$, donc $x \in E^\perp$, donc $u = 0_F$. □

**Théorème 2.4.** *Tout espace préhilbertien séparé de dimension $n$ est isomorphe à $\mathbb{C}^n$.*

*Démonstration.* On procède par récurrence sur $n \geqslant 0$, le résultat étant trivial pour $n = 0$. Soit $x_0 \in E \smallsetminus \{0\}$. Quitte à diviser par $\sqrt{(x_0\,|\,x_0)}$, on peut supposer que $(x_0\,|\,x_0) = 1$.

On considère la forme linéaire $f$ définie par $f(x) := (x\,|\,x_0)$. Elle est non nulle puisque $f(x_0) = 1$. Alors $F := \operatorname{Ker} f$ est de dimension $n-1$ et $E = F \oplus \mathbb{C}x_0$. Comme $\mathbb{C}^n = \mathbb{C}^{n-1} \oplus \mathbb{C}e_0$ avec $e_0 := (0, 0, \ldots, 0, 1)$, et que, d'après l'hypothèse de récurrence il existe un isomorphisme $\varphi$ tel que $\varphi(F) = \mathbb{C}^{n-1}$, on peut définir $\psi : E \to \mathbb{C}^n$ par $\psi(x + \lambda x_0) := \varphi(x) + \lambda e_0$. C'est clairement un isomorphisme d'espaces vectoriels. De plus

$$\begin{aligned}(x + \lambda x_0 \,|\, y + \mu x_0) &= (x\,|\,y) + \lambda\overline{\mu} \\ (\psi(x + \lambda x_0 \,|\, \psi(y + \mu x_0) &= (\varphi(x) + \lambda e_0 \,|\, \varphi(y) + \mu e_0) \\ &= (\varphi(x)\,|\,\varphi(y)) + \lambda\overline{\mu}\,(x_0\,|\,x_0) = (x\,|\,y) + \lambda\overline{\mu},\end{aligned}$$

puisque $\varphi$ est un isomorphisme d'espaces préhilbertiens et $(x_0\,|\,x_0) = 1$. □

**Proposition 2.5.** *Soit $E$ un espace préhilbertien. L'application $x \mapsto \|x\| := \sqrt{(x\,|\,x)}$ est une semi-norme sur $E$. Si $E$ est séparé, c'est une norme.*

*Démonstration.* Seule l'inégalité triangulaire est à vérifier. Nous avons

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= (x+y\,|\,x+y) = (x\,|\,x) + 2\Re e\,(x\,|\,y) + (y\,|\,y) \\ &\leqslant \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2,\end{aligned} \tag{2·1}$$

d'après l'inégalité de Cauchy–Schwarz. □

**Proposition 2.6 (Identité de la médiane).** *On a identiquement pour $x, y \in E$*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2. \tag{2·2}$$

*Démonstration.* Laissée en exercice. □

*Remarque.* Une forme équivalente de l'identité (2·2) est

$$\|z-x\|^2 + \|z-y\|^2 = 2\|z-m\|^2 + \tfrac{1}{2}\|x-y\|^2, \tag{2·3}$$

valable pour tous $x, y, z$ de $E$ avec $m := \frac{1}{2}(x+y)$. Il suffit d'appliquer (2·2) à $X := z - m$, $Y := \frac{1}{2}(x-y)$, de sorte que $z - x = X - Y$, $z - y = X + Y$.

**Proposition 2.7 (Théorème de Pythagore).** *Soit $E$ un espace préhilbertien. Si $x$, $y$ sont des vecteurs de $E$ tels que $x \perp y$, alors $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.*

*Démonstration.* C'est immédiat au vu de la première ligne de (2·1). □

**Proposition 2.8 (Identité de polarisation).** *Soit $E$ un espace préhilbertien. Pour tous $x$, $y$ de $E$, nous avons*

$$4\,(x\,|\,y) = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2.$$

*Démonstration.* Laissée en exercice. □

Ce résultat implique en particulier que toute isométrie $\varphi$ d'espaces préhilbertiens séparés conserve le produit scalaire, et est donc un isomorphisme d'espaces préhilbertiens.

**Proposition 2.9.** *Soit $E$ un espace préhilbertien séparé. Les applications suivantes sont continues*

(i) $E \times E \to E : (x, y) \mapsto x + y$,
(ii) $\mathbb{C} \times E \to E : (\lambda, x) \mapsto \lambda x$,
(iii) $E \times E \to E : (x, y) \mapsto (x\,|\,y)$.

*Démonstration.* Laissée en exercice. □

Il est clair que tout sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien séparé est fermé, puisque isomorphe à $\mathbb{C}^n$. Il est cependant à noter qu'il existe en général des sous-espaces vectoriels non fermés, par exemple l'ensemble $F$ des suites nulles à partir d'un certain rang dans $E = \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$. Il est clair que $F$ est un sous-espace vectoriel dense ne coïncidant pas avec $E$.

**Proposition 2.10.** *Soient $E$ un espace préhilbertien séparé et $A$ une partie de $E$. Alors $A^\perp$ est fermé dans $E$. On a $A^{\perp\perp} \supset \overline{A}$.*

*Démonstration.* La première assertion est immédiate puisque $\varphi_y : x \mapsto (x \mid y)$ est continue pour tout $y$ et $A^\perp = \cap_{a \in A} \varphi_a^{-1}(0)$. Ensuite, $A^{\perp\perp}$ est un fermé contenant $A$ donc $A^{\perp\perp} \supset \overline{A}$. □

*Remarque.* On peut avoir $\overline{A} \neq A^{\perp\perp}$. Dans $\mathbb{R}^2$, si $A := \{x\}$, $x \neq 0$, alors $\overline{A} = A$ mais $A^{\perp\perp}$ coïncide avec la droite vectorielle engendrée par $x$.

Cette situation est possible même lorsque $A$ est un sous-espace vectoriel fermé de $E$ : il en va ainsi, par exemple, lorsque $E$ est le sous-ensemble de $\mathbb{C}^\mathbb{N}$ constitué des suites nulles à partir d'un certain rang, muni du produit scalaire induit par le produit scalaire canonique de $\ell^2(\mathbb{N}^*, \mathbb{C})$ et $A := E \cap \{z\}^\perp$ où $z := \{1/n\}_{n=1}^\infty$. En effet, on a alors $x \in A^\perp \Rightarrow nx_n = (n+1)x_{n+1}$ pour tout entier $n \geqslant 1$ puisque $(0, 0, \ldots, -n, n+1, 0, \ldots) \in A$ ; comme $x_n = 0$ pour $n$ assez grand, on en déduit que $A^\perp = \{0\}$ et donc que $A^{\perp\perp} = E \neq A$.

**Proposition 2.11.** *Soient $E$ un espace préhilbertien séparé et $F$ un sous-espace vectoriel de $E$. Alors $\overline{F}$ est encore un sous-espace vectoriel de $E$.*

*Démonstration.* On vérifie immédiatement que $\overline{F}$ est stable par addition et multiplication scalaire. □

**Proposition 2.12.** *Soient $E$ un espace préhilbertien séparé, $A$ une partie de $E$, et $G$ l'adhérence de l'ensemble $F$ des combinaisons linéaires finies d'éléments de $A$. Alors $G$ est le plus petit sous-espace vectoriel fermé de $E$ contenant $A$.*

On rappelle (Définition 1.13) que la partie $A$ est dite totale si $G = E$.

*Démonstration.* $G \supset F \supset A$, donc $G$ est bien un sous-espace vectoriel fermé contenant $A$. Mais si $H$ est un sous-espace vectoriel fermé contenant $A$, alors $H \supset F$, donc $H \supset G = \overline{F}$. □

## 3. Espaces de Hilbert

**Définition 3.1.** *On désigne par espace de Hilbert, ou espace hilbertien, un espace préhilbertien séparé complet.*

*Exemples.* 1. En dimension finie, tout espace préhilbertien séparé est un espace de Hilbert puisque $\mathbb{C}^n$ est complet — cf. Théorème 2.4.

2. $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ est un espace de Hilbert.

3. $L^2(I)$ est un espace de Hilbert pour tout intervalle $I$ de $\mathbb{R}$ et plus généralement $L^2(E, A, \mu)$ pour tout espace mesuré $(E, \mathcal{A}, \mu)$.

**Proposition 3.2.** *Soient $E$ un espace de Hilbert et $F$ un sous-espace vectoriel de $E$. Alors $F$ est hilbertien si, et seulement si, $F$ est fermé dans $E$.*

*Démonstration.* Cela découle du fait qu'une partie d'un espace métrique complet est complète si, et seulement si, elle est fermée. □

*Remarque.* La proposition précédente fournit donc des exemples d'espaces préhilbertiens non hilbertiens : les sous-espaces vectoriels non fermés d'un espace de Hilbert.

**Théorème et définition 3.3.** *Soient $E$ un espace de Hilbert et $F$ un sous-espace vectoriel fermé de $E$. Pour tout $x \in E$ il existe un unique $y \in F$ tel que $\|x-y\| = d(x,F)$. Il est caractérisé par la condition $x - y \perp F$. On dit que $y$ est la* projection orthogonale *de $x$ sur $F$, et l'on note $y = p_F(x)$.*

*Démonstration.* On a $d(x,F) = \inf_{z\in F} \|x - z\|$. Il existe donc une suite $\{z_n\}_{n=0}^{\infty} \in F^{\mathbb{N}}$ telle que $\|x - z_n\| \to d(x,F)$. Appliquons l'identité de la médiane (2·3) au triangle de sommets $x$, $z_n$, $z_p$. Posant $m := \frac{1}{2}(z_n + z_p) \in F$, nous obtenons

$$\|x - z_n\|^2 + \|x - z_p\|^2 = 2\|x - m\|^2 + \tfrac{1}{2}\|z_p - z_n\|^2 \geqslant 2d(x,F)^2 + \tfrac{1}{2}\|z_p - z_n\|^2$$

donc $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ est une suite de Cauchy. Posant $y := \lim z_n$, on a bien $\|x - y\| = d(x,F)$. De plus $y \in F$ puisque $F$ est fermé.

Montrons ensuite que $x - y \perp F$. Comme $y + tz \in F$ pour tout $z \in F$ et tout $t \in \mathbb{R}$, nous avons

$$\|x - y - tz\|^2 = \|x - y\|^2 - 2t\Re e\ (x - y \,|\, z) + t^2\|z\|^2 \geqslant \|x - y\|^2,$$

ce qui n'est possible que si $\Re e\ (x - y \,|\, z) = 0$. Mais, si $z \in F$, on a aussi $iz \in F$, d'où $\Im m\ (x - y \,|\, z) = 0$ et finalement $(x - y \,|\, z) = 0$.

Il reste à établir l'unicité de $y$. Si $z \in F$, $z \neq y$, on a $x-y \perp y-z$ d'après ce qui précède, donc, par le théorème de Pythagore,

$$\|x - z\|^2 = \|x - y\|^2 + \|y - z\|^2 > d(x,F)^2.$$

De plus, si $z \in F$, $z \neq y$, nous avons

$$(x - z \,|\, y - z) = (x - y \,|\, y - z) + \|y - z\|^2 = \|y - z\|^2$$

donc $x - z \not\perp F$. Ainsi $y = p_F(x)$ est bien caractérisé par la condition $x - y \perp F$. □

La projection orthogonale $p_F$ est un endomorphisme de $E$. On a $\operatorname{Ker} p_F = F^\perp$, $\operatorname{Im} p_F = F$. Ainsi, $F$ est caractérisé par la relation $p_F y = y$.

**Corollaire 3.4.** *Soient $E$ un espace de Hilbert et $F$ un sous-espace vectoriel fermé. Alors $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel fermé et l'on a $E = F \oplus F^\perp$.*

*Démonstration.* On sait que $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel fermé par les Propositions 1.5 et 2.10. On a $F \cap F^\perp = \{0\}$ puisque tout vecteur de cette intersection vérifie $(x \,|\, x) = 0$. Enfin, la décomposition $x = p_F x + (x - p_F x)$ montre que $E = F + F^\perp$. □

**Corollaire 3.5.** *Soient $E$ un espace de Hilbert et $F$ un sous-espace vectoriel fermé. Pour tout $x \in E$, nous avons $\|p_F x\| \leqslant \|x\|$*

*Démonstration.* D'après ce qui précède, nous avons $\|x\|^2 = \|p_F x\|^2 + \|x - p_F x\|^2$. □

**Corollaire 3.6.** *Soient $E$ un espace de Hilbert et $F$ un sous-espace vectoriel fermé. Alors $p_F + p_{F^\perp} = \mathrm{id}_E$.*

*Démonstration.* Soient $x \in E$ et $y := p_F x$. Il faut vérifier que $x - y = p_{F^\perp} x$, autrement dit que $x - y \in F^\perp$ et $y \in (F^\perp)^\perp$. La première condition résulte du Théorème 3.3. La seconde découle du fait que si $z \in F^\perp$, alors $(y \,|\, z) = 0$ puisque $y \in F$. □

**Corollaire 3.7.** *Soient $E$ un espace de Hilbert et $F$ un sous-espace vectoriel fermé. Alors $(F^\perp)^\perp = F$.*

*Démonstration.* On a $\mathrm{id}_E = p_F + p_{F^\perp} = p_{F^\perp} + p_{(F^\perp)^\perp}$, donc $p_F = p_{(F^\perp)^\perp}$, ce qui implique le résultat en prenant l'image de $E$. □

**Corollaire 3.8.** *Soient $E$ un espace de Hilbert et $A$ une partie de $E$. Alors $A$ est totale dans $E$ si, et seulement si, $A^\perp = \{0\}$.*

*Démonstration.* Soit $F$ l'ensemble des combinaisons linéaires finies d'éléments de $A$. Alors $A$ est totale si, et seulement si, $\overline{F} = E$, ce qui équivaut à $(\overline{F})^\perp = \{0\}$. Or $(\overline{F})^\perp = F^\perp$ et $F^\perp = A^\perp$. □

Un des succès les plus spectaculaires de la théorie des projecteurs est le théorème suivant.

**Théorème 3.9 (F. Riesz).** *Soit $E$ un espace de Hilbert. Toute forme linéaire continue sur $E$ est de la forme $\varphi_y : x \mapsto (x \,|\, y)$. De plus, l'application $E \to E' := \mathcal{L}(E, \mathbb{C})$ qui associe $\varphi_y$ à $y$ est une bijection isométrique semi-linéaire.*

*Démonstration.* Il est clair que $\varphi_y \in E'$ pour tout $y \in E$. D'après l'inégalité de Cauchy–Schwarz, nous avons $|\varphi_y(x)| \leqslant \|x\|\|y\|$, donc $\|\varphi_y\| \leqslant \|y\|$. Mais comme $\varphi_y(y) = \|y\|^2$, on a bien identiquement $\|\varphi_y\| = \|y\|$.

La semi-linéarité du produit scalaire par rapport à la seconde variable implique immédiatement que l'application $y \mapsto \varphi_y$ est semi-linéaire. D'après ce qui précède, elle est isométrique, donc injective. Il reste à montrer qu'elle est surjective.

Soit donc $\varphi \in E'$. Si $\varphi = 0$, alors $\varphi = \varphi_0$. Si $\varphi \neq 0$, alors $K := \operatorname{Ker} \varphi$ est un hyperplan fermé puisque $\varphi$ est continue. D'après le Corollaire 3.4, nous avons donc $E = K \oplus K^\perp$. Soit alors $z \in K^\perp$. On a $\varphi(z) \neq 0$ et l'on peut supposer $\varphi(z) = 1$ quitte à considérer $z/\varphi(z)$. Introduisons alors $y := z/\|z\|^2$. Si $x \in K$, nous avons $0 = \varphi(x) = \varphi_y(x) = (x \,|\, y) = 0$, et si $x \in K^\perp$, nous avons $x = \lambda z$ avec $\lambda = \varphi(x)$ alors que $\varphi_y(x) = (x \,|\, y) = \lambda\,(z \,|\, y) = \lambda$, donc nous avons encore $\varphi(x) = \varphi_y(x)$. Par linéarité, il s'ensuit que $\varphi(x) = \varphi_y(x)$ sur $E$. □

Le théorème suivant caractérise les homomorphismes bicontinus entre espaces préhilbertiens séparés et entre espaces de Hilbert.

**Théorème 3.10.** *Soient $E$, $F$ des espaces préhilbertiens séparés et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *$u$ est une bijection bicontinue ;*

(ii) *$u$ est surjectif et il existe $b > 0$ tel que $\|ux\| \geqslant b\|x\|$ pour tout $x$ de $E$.*

*Si l'on suppose de plus que $E$ et $F$ sont hilbertiens, les deux assertions précédentes sont équivalentes à :*

(iii) *$u$ est bijectif.*

*Démonstration.* (i)⇒(ii). Si $u$ est une bijection bicontinue on a, pour tout $x$ de $E$,

$$\|x\| = \|u^{-1}ux\| \leqslant \|u^{-1}\|\|ux\|$$

donc l'assertion (ii) est satisfaite avec $b := 1/\|u^{-1}\|$.

(ii)⇒(i). Si la propriété (ii) a lieu, on trivialement $\operatorname{Ker} u = \{0\}$, donc $u$ est injectif, et par conséquent bijectif. Si $v := u^{-1}$, c'est nécessairement une application linéaire. De plus, pour tout $y \in F$, on a $\|y\| = \|uvy\| \geqslant b\|vy\|$, donc $v \in \mathcal{L}(F, E)$, $\|v\| \leqslant 1/b$.

Lorsque $E$ et $F$ sont hilbertiens, le théorème de l'isomorphisme (Théorème I.2.15) implique l'équivalence de (i) et (iii). □

*Remarque.* L'hypothèse de surjectivité est essentielle dans la condition (ii). Un contre-exemple classique est fourni par l'opérateur de décalage (*shift*) défini sur $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ par $u(x_0, x_1, \ldots) := (0, x_1, x_2, \ldots)$. On a identiquement $\|ux\| = \|x\|$ mais $u$ n'est pas bijectif.

## 4. Topologies forte et faible sur un espace de Hilbert

L'identification d'un espace hilbertien $E$ avec son dual $\mathcal{L}(E, \mathbb{C})$ fournie par le théorème de Riesz (Théorème 3.9) invite à considérer une nouvelle topologie sur $E$, à savoir celle de la convergence simple des formes linéaires continues associées. On désigne cette topologie comme la *topologie faible* sur $E$. Un système fondamental de voisinages de $x \in E$ est constitué des ensembles $V(x; \varepsilon; y_1, \ldots, y_n) = \{w \in E : \sup_{1 \leqslant j \leqslant n} |(w - x \,|\, y_j)| \leqslant \varepsilon\}$ lorsque les $y_j$ décrivent $E$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$.

Une suite $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge faiblement vers $x \in E$ si $(x_n \,|\, y) \to (x \,|\, y)$ pour tout $y \in E$. On écrit alors $x_n \rightharpoonup x$.

La topologie faible sur $E$ est induite par la topologie de la convergence simple sur $\mathbb{C}^E$. Pour cette topologie, tout ensemble du type

$$\{f \in \mathbb{C}^E : |f(y)| \leqslant \varphi(y)\} = \prod_{y \in E} D\big(0; \varphi(y)\big), \tag{4·1}$$

où $\varphi \in {\mathbb{R}^+}^E$, est compact en vertu du théorème de Tychonov (Théorème 1.20).

La topologie faible n'est pas métrisable.[1] En revanche, dans un espace de Hilbert séparable $E$, la topologie faible sur la boule unité fermée $B_E$ est métrisable : on peut montrer qu'une distance convenable est fournie par

$$d(x, y) := \sum_{n \geqslant 0} \frac{|(x - y \,|\, x_n)|}{2^n}$$

où $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ est une famille dénombrable dense dans $B_E$.

Une application $\varphi : M \to E$ définie sur un espace métrique $M$ (où plus généralement sur un espace topologique, i.e. doté d'une famille d'ouverts) et à valeurs dans $E$ muni de la topologie faible est continue si l'application $\varphi_y : M \to \mathbb{C}$ définie par $\varphi_y(m) = (\varphi(m) \,|\, y)$ est continue pour chaque $y \in E$.

Il est immédiat que toute suite $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ convergeant fortement converge aussi faiblement. La réciproque est fausse, comme l'indique l'exemple de la base canonique $\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$ de $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ qui converge faiblement vers 0 mais ne converge pas fortement.

Sur un espace hilbertien de dimension finie les deux topologies coïncident.

La topologie faible est donc moins fine que la forte : tout ouvert faible est un ouvert fort, tout fermé faible est un fermé fort, tout voisinage faible est un voisinage fort.[2] La topologie faible a donc moins d'ouverts et partant plus de compacts. C'est cette propriété qui fait son principal attrait : sur un espace hilbertien de dimension infinie, la boule unité fermée n'est pas compacte pour la topologie forte, nous verrons en revanche (Théorème 4.2) qu'elle l'est pour la topologie faible.

**Proposition 4.1.** *Toute suite faiblement convergente d'un espace de Hilbert est bornée. De plus, si $x_n \rightharpoonup x$, alors $\|x\| \leqslant \liminf_n \|x_n\|$.*

*Démonstration.* La propriété $x_n \rightharpoonup x$ signifie que les formes linéaires continues associées $y \mapsto (x_n \,|\, y)$ convergent simplement vers $y \mapsto (x \,|\, y)$. Pour tout $y \in E$, la suite $\{(x_n \,|\, y)\}_{n=0}^{\infty}$ est donc bornée. Le théorème de Banach–Steinhaus (Théorème I.2.8) implique donc $\sup \|x_n\| < \infty$. De plus, on a $(x_n \,|\, x) \to (x \,|\, x) = \|x\|^2$. L'inégalité de Cauchy–Schwarz implique donc la majoration annoncée. □

---

1. Voir le contre-exemple de l'Exercice 34.
2. Si $U$ est ouvert faible et si $x \in U$, alors, pour tout $y \in E$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $V(x; \varepsilon; y) \subset U$ ; or $B(x; \eta) \subset V(x; \varepsilon; y)$ dès que $y \neq 0$ et $\eta < \varepsilon / \|y\|$, donc $U$ est ouvert pour la topologie normique de $E$. De même, si $F$ est un fermé faible et si $x \in \overline{F}$, alors, pour tous $\varepsilon > 0$, $y_1, \ldots, y_n \in E$, on a $F \cap V(x; \varepsilon; y_1, \ldots, y_n) \neq \varnothing$, donc $x$ est dans l'adhérence faible de $F$, donc dans $F$, ce qui montre que $F$ est fortement fermé.

**Théorème 4.2.** *Soit $E$ un espace de Hilbert. La boule unité fermée forte de $E$ est faiblement compacte.*

*Démonstration.* Grâce au théorème de Riesz (Théorème 3.9), nous pouvons identifier $B_E := \{x \in E : \|x\| \leqslant 1\}$ à l'ensemble des formes linéaires continues de norme au plus 1. L'ensemble $S := \{f \in \mathbb{C}^E : (\forall y \in E)\ |f(y)| \leqslant \|y\|\}$ est compact pour la topologie faible d'après le théorème de Tychonov puisque c'est un ensemble de type (4·1) pour le choix $\varphi(y) = \|y\|$. De plus, avec l'identification précédemment indiquée, nous avons $B_E \subset S$ d'après l'inégalité de Cauchy–Schwarz.

Il suffit donc de montrer que $B_E$ est fermé dans $S$. Soit alors $g \in S$ un point adhérent à $B_E$ pour la topologie faible. Pour tous $x, y \in E$, $\varepsilon > 0$, le voisinage

$$V(x, y; \varepsilon) := \{f \in S : |g(x) - f(x)| < \varepsilon,\ |g(y) - f(y)| < \varepsilon,\ |g(x + y) - f(x + y)| < \varepsilon\}$$

intersecte donc $B_E$. Si $h \in V(x, y) \cap B_E$, alors, $h$ est une forme linéaire continue, qui vérifie donc $h(x + y) - h(x) - h(y) = 0$. Cela implique par passage à la limite en $\varepsilon$ que $g(x + y) - g(x) - g(y) = 0$. On montre de même que $g(\lambda x) = \lambda g(x)$ pour tout $x$ de $E$. Donc $g$ est une forme linéaire. Comme $g \in S$, on a en fait $g \in \mathcal{L}(E, \mathbb{C})$ et $\|g\| \leqslant 1$ (norme d'application linéaire). On a donc $g \in B_E$. □

## 5. Familles orthonormales, bases hilbertiennes

**Définition 5.1.** *Soit $E$ un espace préhilbertien. Une famille $(x_j)_{j\in J}$ de vecteurs de $E$ est dite* orthogonale *si $x_k \perp x_j$ pour $j, k \in J$, $j \neq k$. Elle est dite* orthonormale *si elle est orthogonale et si $\|x_j\| = 1$ pour tout $j \in J$.*

*Exemples.* 1. La base canonique de $\mathbb{C}^n$ est une famille orthonormale.

2. Dans $E := \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ la famille des vecteurs $e_n = (\delta_{jn})_{j\geqslant 0}$ est orthonormale.

3. Dans $L^2[0, 1]$, la famille des fonctions $e_n : t \mapsto \mathrm{e}^{2\pi int}$ est orthonormale.

**Proposition 5.2.** *Dans un espace préhilbertien toute famille orthonormale est libre.*

*Démonstration.* En effet, soit $(x_j)_{j\in J}$ une famille orthonormale et supposons

$$\sum_{1\leqslant k\leqslant n} \lambda_k x_{j_k} = 0.$$

En effectuant le produit scalaire avec $x_{j_k}$, nous obtenons $\lambda_k = 0$. □

**Proposition 5.3.** *Soient $E$ un espace préhilbertien et $\{e_j\}_{j=1}^n$ une famille orthonormale finie de vecteurs de $E$. Pour $x, y \in \mathrm{Vect}[e_1, \ldots, e_n]$, nous avons*

$$x = \sum_{1\leqslant j\leqslant n} (x \,|\, e_j)\, e_j, \qquad (x \,|\, y) = \sum_{1\leqslant j\leqslant n} (x \,|\, e_j)\, \overline{(y \,|\, e_j)}.$$

*Démonstration.* On a par hypothèse $x = \sum_{1\leqslant j\leqslant n} \lambda_j e_j$, $y = \sum_{1\leqslant j\leqslant n} \mu_j e_j$. Les formules indiquées s'en déduisent immédiatement. □

Le résultat suivant permet de substituer à toute famille libre une famille orthonormale. La méthode a été publiée par Jørgen Pedersen Gram en 1883 et reformulée par Erhard Schmidt en 1907, mais on la trouve déjà dans des travaux de 1816 de Laplace.

**Théorème 5.4 (Orthonormalisation de Gram-Schmidt).** *Soient $E$ un espace préhilbertien séparé et $\{a_j\}_{j=1}^\infty$ une famille libre de vecteurs de $E$. Alors il existe une unique famille orthonormale $\{e_j\}_{j=1}^\infty$ telle que :*

(i) $\mathrm{Vect}[a_1, \ldots, a_n] = \mathrm{Vect}[e_1, \ldots, e_n]$ $\quad (n \geqslant 1)$,

(ii) $(e_n \,|\, a_n) \in \mathbb{R}^{+*}$ $\quad (n \geqslant 1)$.

*Démonstration.* On procède par récurrence sur $n$. Le choix $e_1 := a_1/\|a_1\|$ convient pour $n = 1$. Supposons la propriété établie pour $n$. On cherche alors $e_{n+1}$ sous la forme

$$e_{n+1} = \lambda\Big\{a_{n+1} + \sum_{1\leqslant j\leqslant n} \alpha_j e_j\Big\}$$

où $\lambda > 0$. La relation $(e_{n+1} \,|\, e_j) = 0$ équivaut à $(a_{n+1} \,|\, e_j) + \alpha_j = 0$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$ donc les $\alpha_j$ sont déterminés. Comme la famille $\{a_j\}_{j=1}^{\infty}$ est libre, $a_{n+1} \notin \mathrm{Vect}[a_1, \dots, a_n]$ le terme entre accolades est non nul et un choix convenable de $\lambda > 0$ fournit $\|e_{n+1}\| = 1$. De plus, $1 = \lambda\,(e_{n+1} \,|\, a_{n+1})$, donc on a bien $(e_{n+1} \,|\, a_{n+1}) > 0$.

On établit l'unicité en observant qu'à chaque étape de la construction précédente un seul choix est possible pour $e_{n+1}$. □

**Corollaire 5.5.** *Toute famille orthonormale d'un espace hilbertien $E$ de dimension finie peut être complétée en une base orthonormale.*

*Démonstration.* Le théorème de la base incomplète permet de compléter une famille orthonormale en une base. On applique ensuite le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt pour transformer cette base en une base orthonormale. □

**Corollaire 5.6.** *Soient $E$ un espace de Hilbert et $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ une famille orthogonale d'éléments de $E$. Alors la série $\sum_n x_n$ converge si, et seulement si, $\sum_n \|x_n\|^2 < \infty$. Lorsqu'il en est ainsi, on a $\|\sum_{n\geqslant 0} x_n\|^2 = \sum_n \|x_n\|^2$.*

*Démonstration.* Voir cours oral. □

**Théorème 5.7.** *Soient $E$ un espace de Hilbert et $\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$ une suite orthonormale. Alors, pour toute suite scalaire $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$, la série $\sum_n \lambda_n e_n$ converge si, et seulement si, $\sum_n |\lambda_n|^2 < \infty$. De plus, tout élément $x$ du sous-espace vectoriel fermé engendré par les $e_n$ est représentable de façon unique sous la forme $\sum_n \lambda_n e_n$. On a $\lambda_n = (x \,|\, e_n)$ $(n \geqslant 0)$.*

*Démonstration.* Voir cours oral. □

Rappelons la notion d'espace métrique séparable, définie au §1.3.

**Définition 5.8.** *On appelle* base hilbertienne *d'un espace de Hilbert séparable toute suite orthonormale totale.*

*Remarque.* Une base orthonormale n'est pas nécessairement une base algébrique : considérer $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ et $(e_n)$, avec $e_{nj} = \delta_{nj}$. Voir également l'Exercice 32.

**Théorème 5.9.** *Un espace de Hilbert de dimension infinie est séparable si, et seulement si, il possède une base hilbertienne.*

*Démonstration.* Soit $E$ un espace de Hilbert possédant une base hilbertienne $\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$. Alors cette famille est totale, donc $E$ est séparable — Proposition I.1.14. Réciproquement, soit $E$ un espace de Hilbert séparable de dimension infinie et soit $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ une partie dénombrable dense. Comme $E$ est de dimension infinie, $d_k := \dim \mathrm{Vect}[a_1, \dots, a_k] \to \infty$. Notons $k_n$ le plus petit entier tel que $d_k = n$. Le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt permet de construire une suite orthonormale $\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$ telle que

$$\mathrm{Vect}[e_1, \dots, e_n] = \mathrm{Vect}[a_1, \dots, a_{k_n}] \qquad (n \geqslant 1).$$

La suite $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ est donc totale. □

**Corollaire 5.10.** *Soient $E$ un espace de Hilbert séparable de dimension infinie et $\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$ une base hilbertienne. Alors :*

(i) *$E$ est isomorphe à $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ ;*

(ii) *Pour tous $x, y \in E$, on a la formule de Parseval $(x \mid y) = \sum_{n \geqslant 0} (x \mid e_n) \overline{(y \mid e_n)}$.*

*Démonstration.* Le premier point résulte de l'application du Théorème 5.7 à l'espace $E$ tout entier. L'application $\varphi : \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C}) \to E$ qui a une suite $\lambda = (\lambda_n)_n$ associe $\sum_n \lambda_n e_n$ est un isomorphisme d'espaces hilbertiens. La seconde assertion découle de la Proposition 5.3 par passage à la limite. □

*Exemple.* Dans $L^2[0,1]$ muni du produit scalaire usuel, la famille des fonctions $e_n(x) := \mathrm{e}^{2\pi i n x}$ $(n \in \mathbb{Z})$ est orthonormale, et totale en vertu du théorème de Fejér — cf. Exercice 32. On peut donc représenter toute fonction de $L^2[0,1]$ sous la forme $f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e_n$ avec $c_n = \int_0^1 f(x) \overline{e_n(x)}\, \mathrm{d}x = \int_0^1 f(x) \mathrm{e}^{-2\pi i n x}\, \mathrm{d}x$.

**Corollaire 5.11.** *Dans un espace de Hilbert séparable, toute famille orthogonale ne contenant pas le vecteur nul est au plus dénombrable.*

*Démonstration.* Si l'espace de Hilbert est de dimension finie $n$, une famille orthogonale ne peut avoir plus de $n$ éléments puisqu'elle est libre. Si $E$ est un espace de Hilbert séparable de dimension infinie, il existe une base hilbertienne dénombrable $\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$. Soit alors $(x_j)_{j \in J}$ une famille orthogonale de vecteurs de $E$. Posons $\lambda_{jn} := (e_n \mid x_j)$. Pour toute partie finie $K$ de $J$, notons $F(K)$ le sous-espace vectoriel engendré par les $x_j$ pour $j \in K$. D'après le Corollaire 3.5 et la Proposition 5.3, nous avons $\|p_{F(K)} e_n\|^2 = \sum_{j \in K} |\lambda_{jn}|^2 \leqslant 1$. Cela implique que, pour chaque $n$ et chaque $k \geqslant 1$, l'ensemble $L_{nk}$ des indices $j \in J$ tel que $|\lambda_{jn}| \geqslant 1/k$ est fini. Comme $\{j \in J : \lambda_{nj} \neq 0\} = \cup_k L_{nk}$, on voit que cet ensemble est fini ou dénombrable. Par suite $H := \{j \in J : \exists n \geqslant 0\ \lambda_{nj} \neq 0\}$ est fini ou dénombrable comme union dénombrable d'ensembles finis ou dénombrables. Si $j \in J \smallsetminus H$, $x_j$ est orthogonal à tous les $e_n$, donc $x_j = 0$, ce qui contredit le fait que la famille des $x_j$ est orthogonale. Ainsi $J = H$, et $(x_j)_{j \in J}$ est au plus dénombrable. □

**Définition 5.12.** *Soient $E$ un espace de Hilbert et $\{E_n\}_{n=0}^{\infty}$ une suite de sous-espaces vectoriels fermés de $E$. On dit que $E$ est* somme hilbertienne *des $E_n$ et l'on note $E = \oplus_{n \geqslant 0} E_n$ si :*

(i) *$E_m \perp E_n$ $(m \neq n)$ ;*

(ii) *L'espace vectoriel algébrique engendré par les $E_n$ est dense dans $E$.*

Il est donc équivalent de dire que $(e_n)_n$ est une base hilbertienne de $E$ et que $E = \oplus_n \mathbb{C} e_n$.

Pour tout sous-espace vectoriel fermé $F$ de $E$, on a $E = F \oplus F^{\perp}$ (Corollaire 3.6). Le résultat suivant généralise cette relation.

**Théorème 5.13.** *Soient $E$ un espace de Hilbert et $\{E_n\}_{n=0}^{\infty}$ une famille de sous-espaces vectoriels fermés telle que $E = \oplus_n E_n$. Soit $x \in E$, et $x_n := p_{E_n} x$ $(n \geqslant 0)$. Alors*

(i) $x = \sum_{n \geqslant 0} x_n$ ;

(ii) $\|x\|^2 = \sum_n \|x_n\|^2$ (égalité de Bessel-Parseval).

*Démonstration.* Notant $F_n := \oplus_{0 \leqslant j \leqslant n} E_j$, on a $p_{F_n} x = \sum_{0 \leqslant j \leqslant n} x_j$, donc, compte tenu de l'orthogonalité des $E_n$, $\|p_{F_n} x\|^2 = \sum_{0 \leqslant j \leqslant n} \|p_{E_j} x\|^2 \leqslant \|x\|^2$ (Corollaire II.3.5). Il s'ensuit que la série figurant au membre de droite de (ii) converge, et donc (Corollaire II.5.6) que la série (i) converge. Comme $E$ est somme hilbertienne des $E_n$, pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe un $N$ tel que $\|x - y\| \leqslant \varepsilon$ où $y \in F_N$. Mais par définition de la projection, $\|x - p_{F_N} x\| \leqslant \|x - y\|$. Donc $x$ est bien la somme de la série (i) et la relation (ii) en découle par le Corollaire II.5.6. □

*Remarque.* On a en général $\sum_n \|x_n\| = \infty$ ; la série $\sum_n x_n$ n'est donc pas normiquement convergente. On a par exemple

$$\langle x\rangle = \tfrac{1}{2} - \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \frac{\mathrm{e}^{2\pi inx}}{2\pi in} \quad (x \in \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Z})$$

où $\langle x\rangle$ désigne la partie fractionnaire de $x$.

**Théorème 5.14.** *Soient $E = \oplus_n E_n$ et $F = \oplus_n F_n$ deux sommes hilbertiennes. Pour toute famille $\{u_n\}_{n=0}^{\infty} \in \times_n \mathcal{L}(E_n, F_n)$ telle que $\sup_n \|u_n\| < \infty$, il existe un unique opérateur $u \in \mathcal{L}(E, F)$ tel que $u|_{E_n} = u_n$. On a $\|u\| = \sup_n \|u_n\|$ et on note $u = \oplus_n u_n$.*

*Démonstration.* Tout $x \in E$ est décomposable sous la forme $x = \sum_n x_n$ avec $x_n = p_{E_n} x \in E_n$. De plus, en vertu du Corollaire 5.6, la série $\sum_n u_n x_n$ converge puisque $\|u_n x_n\| \leqslant M\|x_n\|$ avec $M := \sup_n \|u_n\|$. Donc $u : x \mapsto \sum_n u_n x_n$ est bien dans $\mathcal{L}(E, F)$ et $\|u\| \leqslant M$. Comme $u|_{E_n} = u_n$, on a nécessairement $\|u\| \geqslant M$ et finalement $\|u\| = M$. Enfin, il est clair que la donnée des restrictions $u|_{E_n}$ détermine $u$ puisque $ux = \sum_n u|_{E_n} x$. □

## 6. Formes sesquilinéaires continues, adjoint d'un opérateur

**Définition 6.1.** *Soient $E$, $F$ des espaces préhilbertiens séparés. On dit qu'une application $f : E \times F \to \mathbb{C}$ est une* forme sesquilinéaire *si $x \mapsto f(x, y)$ est linéaire pour tout $y \in F$ et si $y \mapsto f(x, y)$ est semi-linéaire pour tout $x \in E$.*

On pose

$$\|f\| := \sup_{\|x\|\leqslant 1,\, \|y\|\leqslant 1} |f(x, y)| \in \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}.$$

Il est clair que

$$\|f\| := \inf\{M : |f(x, y)| \leqslant M\|x\|\|y\| \ \forall (x, y) \in E \times F\}.$$

**Théorème 6.2.** *Soient $E$, $F$ des espaces préhilbertiens séparés et $f : E \times F \to \mathbb{C}$ une forme sesquilinéaire. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *$f$ est continue en $(0, 0)$ ;*
(ii) *$f$ est continue ;*
(iii) *$\|f\| < \infty$.*

*Démonstration.* L'assertion (ii) $\Rightarrow$ (i) est triviale. Pour montrer (i) $\Rightarrow$ (iii), on observe que la continuité à l'origine implique l'existence d'un $\eta > 0$ tel que $\|x\| \leqslant \eta$, $\|y\| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x, y)| \leqslant 1$. Il s'ensuit que, pour tout $(x, y) \in E \times F$,

$$f\Big(\frac{\eta x}{\|x\|}, \frac{\eta y}{\|y\|}\Big) \leqslant 1$$

d'où $M \leqslant 1/\eta^2$. Enfin, si l'on a (iii), alors

$$\begin{aligned} |f(x, y) - f(x_0, y_0)| &\leqslant |f(x - x_0, y - y_0)| + f(x_0, y - y_0)| + |f(x - x_0, y_0)| \\ &\leqslant \|f\|\big\{\|x - x_0\|\|y - y_0\| + \|x_0\|\|y - y_0\| + \|x - x_0\|\|y_0\|\big\} \end{aligned}$$

et cette majoration tend vers 0 lorsque $(x, y) \to (x_0, y_0)$. □

**Théorème 6.3.** *Soient $E$, $F$ des espaces de Hilbert.*

(i) *Pour tout $u \in \mathcal{L}(E,F)$, l'application $f_u : (x,y) \mapsto (ux \,|\, y)$ est une forme sesquilinéaire continue sur $E \times F$.*

(ii) *L'application $u \mapsto f_u$ est une isométrie bijective de $\mathcal{L}(E,F)$ dans l'ensemble des formes sesquilinéaires continues sur $E \times F$. On a donc $\|u\| = \|f_u\|$ pour tout $u \in \mathcal{L}(E,F)$.*

*Démonstration.* Il est évident que $f_u$ est une forme sesquilinéaire continue. D'après l'inégalité de Cauchy–Schwarz, on a $|f_u(x,y)| \leqslant \|ux\|\|y\| \leqslant \|u\|\|x\|\|y\|$. Donc $\|f_u\| \leqslant \|u\|$. Montrons que l'application $u \mapsto f_u$ est bijective. Si $f_u = f_v$, alors $(ux - vx \,|\, y) = 0$ pour tout $y \in F$, donc $ux = vx$ pour tout $x \in E$, puisque $F^\perp = \{0\}$. On a donc $u = v$ et l'application est injective. Réciproquement, si $f$ est une forme sesquilinéaire continue sur $E \times F$, l'application $g_x : y \mapsto \overline{f(x,y)}$ est pour chaque $x \in E$ une forme linéaire sur $E$. Elle est continue puisque $|g_x(y)| \leqslant \|f\|\|x\|\|y\|$. D'après le théorème de Riesz (Théorème II.3.9), elle est donc de la forme $g_x(y) = (y \,|\, ux)$ pour une certaine application $u \in F^E$. On a donc $(ux \,|\, y) = f(x,y)$ pour tout $(x,y) \in E \times F$, d'où

$$\begin{aligned}(u(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x) \,|\, y) &= \overline{f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y)} = \lambda_1 f(x_1, y) + \lambda_2 f(x_2, y)\\ &= \lambda_1 \,(ux_1 \,|\, y) + \lambda_2 \,(ux_2 \,|\, y) = (\lambda_1 ux_1 + \lambda_2 ux_2 \,|\, y)\end{aligned}$$

donc $u$ est linéaire. De plus, $\|ux\|^2 = |\,(ux \,|\, ux)\,| = f(x, ux) \leqslant \|f\|\|x\|\|ux\|$, donc $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $\|u\| \leqslant \|f\|$. Il s'ensuit que $f = f_u$ et donc l'application $u \mapsto f_u$ est bien surjective. Comme nous avons vu au début de la démonstration que $\|f_u\| \leqslant \|u\|$, nous avons bien $\|u\| = \|f_u\|$, ce qui établit que l'application est une isométrie. □

L'énoncé suivant montre que, lorsque $E = F$, une forme sesquilinéaire $(x,y) \mapsto (ux \,|\, y)$ est déterminée par la forme quadratique $x \mapsto (ux \,|\, x)$.

**Proposition 6.4.** *Soit $E$ un espace de Hilbert et $u \in \mathcal{L}(E)$. Si $(ux \,|\, x) = 0$ pour tout $x \in E$, alors $u = 0$.*

*Démonstration.* Nous avons identiquement $(u(x+y) \,|\, x+y) = 0$, donc $(ux \,|\, y) + (uy \,|\, x) = 0$. En remplaçant $y$ par $iy$, il vient $-i\,(ux \,|\, y) + i\,(uy \,|\, x) = 0$, d'où $(ux \,|\, y) = 0$. Il reste à appliquer le Théorème 6.3 pour obtenir $u = 0$. □

Soient $E$ et $F$ deux espaces de Hilbert et $u \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors $f(x,y) := (ux \,|\, y)$ est une forme sesquilinéaire continue sur $E \times F$ et $g(y,x) := \overline{f(x,y)}$ est une forme sesquilinéaire continue sur $F \times E$. D'après le Théorème 6.3, il existe donc un unique opérateur $v \in \mathcal{L}(F,E)$ tel que $(vy \,|\, x) = g(y,x) = (y \,|\, ux)$.

**Définition 6.5.** *Avec les notations précédentes, on dit que $v \in \mathcal{L}(F,E)$ est l'adjoint de $u$. On le note $v = u^*$. Il est caractérisé par la relation*

$$(ux \,|\, y) = (x \,|\, u^* y) \qquad (x \in E,\ y \in F). \tag{6·1}$$

Comme $\|u^*\| = \|g\| = \|f\|$, on obtient immédiatement le résultat suivant.

**Proposition 6.6.** *Soient $E$ et $F$ deux espaces de Hilbert et $u \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors $\|u^*\| = \|u\|$.*

Si $E$ et $F$ sont séparables, de dimensions infinies, et de bases hilbertiennes respectives $(e_m)_{m \in \mathbb{N}}$, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on appelle matrice de $u \in \mathcal{L}(E,F)$ par rapport à ces bases la matrice de taille infinie

$$M := (\alpha_{mn})_{\substack{m \in \mathbb{N}\\ n \in \mathbb{N}}}$$

définie par $\alpha_{mn} = (ue_m \,|\, f_n)$ $(m \geqslant 0,\ n \geqslant 0)$. Posant $\beta_{nm} = (u^* f_n \,|\, e_m) = \overline{\alpha_{mn}}$, on a alors

$$ux = \sum_{m,n \geqslant 0} \alpha_{mn}\,(x \,|\, e_m)\, f_n \qquad (x \in E),$$

$$u^* y = \sum_{m \geqslant 0,\, n \geqslant 0} \beta_{nm}\,(y \,|\, f_n)\, e_m \qquad (y \in F)$$

Les matrices de $u$ et $u^*$ sont donc adjointes au sens généralisé depuis la dimension finie.

*Exemples.* 1. Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $E := L^2(I)$. Pour $\varphi \in L^\infty(I)$, on définit $u_\varphi \in \mathcal{L}(E)$ par $u_\varphi : f \mapsto \varphi f$. On a alors $(u_\varphi f \mid g) = \int_I \varphi(t)f(t)\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t = (f \mid u_{\overline{\varphi}} g)$, donc $u_\varphi^* = u_{\overline{\varphi}}$.

2. Soient $I$, $J$ des intervalles de $\mathbb{R}$ et $K \in L^2(I \times J, \mathbb{C})$. Alors $v_K : L^2(I) \to L^2(J)$ définie par

$$v_K f(t) := \int_I K(s,t) f(s)\,\mathrm{d}s$$

est une application linéaire continue : on a

$$\left| \int_J |v_K f(t)|^2\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \int_J \int_I |K(s,t)|^2\,\mathrm{d}s \int_I |f(s)|^2\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \leqslant \|K\|^2_{L^2(I\times J)} \|f\|^2_{L^2(I)}$$

donc $\|v_K\| \leqslant \|K\|$. De plus

$$\begin{aligned}(v_K g \mid h) &= \int_J \overline{h(t)} \int_I K(s,t) g(s)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t = \int_I g(s) \int_J K(s,t)\overline{h(t)}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s \\ &= \int_I g(s) \int_J K(s,t)\overline{h(t)}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s = \int_I g(s) \overline{\int_J \overline{K(s,t)} h(t)\,\mathrm{d}t}\ ds.\end{aligned}$$

Posant $K^* : J \times I \to \mathbb{C}$ tel que $K^*(t,s) := \overline{K(s,t)}$, on a donc $v_K^* = v_{K^*}$.

**Proposition 6.7.** *Soient $E$, $F$ des espaces de Hilbert.*

(i) $\forall u, v \in \mathcal{L}(E,F) \quad (u+v)^* = u^* + v^*$ ;
(ii) $\forall \lambda \in \mathbb{C}\ \forall u \in \mathcal{L}(E,F) \quad (\lambda u)^* = \overline{\lambda} u^*$;
(iii) $\forall u \in \mathcal{L}(E,F) \quad u^{**} = u$.

*Démonstration.* Laissée en exercice. □

**Proposition 6.8.** *Soient $E$, $F$, $G$ des espaces de Hilbert, et $u \in \mathcal{L}(E,F)$, $v \in \mathcal{L}(F,G)$. On a :*

(i) $(vu)^* = u^* v^*$ ;
(ii) $\|uu^*\| = \|u^*u\| = \|u\|^2$.

*Démonstration.* (i). $\forall x \in E$, $\forall z \in G$ $(vux \mid z) = (ux \mid v^*z) = (x \mid u^*v^*z)$.

(ii). D'une part $\|uu^*\| \leqslant \|u\|\|u^*\| = \|u\|^2$, et d'autre part, pour tout $x \in E$

$$\|ux\|^2 = (ux \mid ux) = (x \mid u^*ux) \leqslant \|x\|\|u^*ux\| \leqslant \|u^*u\|\|x\|^2$$

donc $\|u\|^2 \leqslant \|u^*u\|$. □

**Proposition 6.9.** *Soient $E$, $F$ des espaces de Hilbert et $u \in \mathcal{L}(E,F)$.*

(i) *Pour $A \subset E$, $B \subset F$, nous avons $u(A) \subset B \Rightarrow u^*(B^\perp) \subset A^\perp$.*

(ii) *Pour tous sous-espaces vectoriels fermés $A \subset E$, $B \subset F$, nous avons $u^*(B^\perp) \subset A^\perp \Rightarrow u(A) \subset B$.*

*Démonstration.* (i). Supposons $u(A) \subset B$. Soit $y \in B^\perp$, alors $(y \mid ux) = (u^*y \mid x) = 0$ pour tout $x \in A$. Donc $u^*(B) \subset A^\perp$.

(ii). Appliquons (i) à $u^*$. Il suit $u(B^{\perp\perp}) \subset A^{\perp\perp}$. Mais (Corollaire II.3.7) $A^{\perp\perp} = A$, $B^{\perp\perp} = B$. □

**Corollaire 6.10.** *Soient $E$ un espace de Hilbert, $F$ un sous-espace vectoriel fermé de $E$ et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors $F$ est stable par $u$ si, et seulement si, $F^\perp$ est stable par $u^*$.*

*Démonstration.* C'est une conséquence immédiate de la Proposition 6.9. □

**Corollaire 6.11.** *Soient $E$ un espace de Hilbert, $F$ un sous-espace vectoriel fermé de $E$ et $u \in \mathcal{L}(E)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*
- (i) *$F$ et $F^\perp$ sont stables par $u$ ;*
- (ii) *$F$ et $F^\perp$ sont stables par $u^*$ ;*
- (iii) *$F$ est stable par $u$ et par $u^*$.*

*Démonstration.* C'est une conséquence immédiate du Corollaire 6.10. □

**Définition 6.12.** *Lorsque les conditions du Corollaire 6.11 sont satisfaites, on dit que $F$* réduit *$u$.*

Cette appellation s'explique par le fait que, puisque $E = F \oplus F^\perp$ (Corollaire 3.6), l'étude de $u$ peut être scindée en deux études plus simples, respectivement sur $F$ et $F^\perp$.

**Théorème 6.13.** *Soient $E = \oplus_n E_n$ et $F = \oplus_n F_n$ deux sommes hilbertiennes et $u = \oplus_n u_n \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors $u^* = \oplus_n u_n^*$.*

*Démonstration.* Soit $v := \oplus_n u_n^*$. Il faut montrer que $(ux \,|\, y) = (x \,|\, vy)$ pour tout $(x, y) \in E \times F$. Par linéarité et continuité, on peut se ramener au cas $x \in E_n$, $y \in F_p$. Si $n \neq p$, les deux produits scalaires sont nuls. Si $n = p$, on a $(ux \,|\, y) = (u_n x \,|\, y) = (x \,|\, u_n^* y) = (x \,|\, vy)$. □

**Théorème 6.14.** *Soient $E$, $F$ des espaces de Hilbert et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On a :*
- (i) $\operatorname{Ker} u^* = (\operatorname{Im} u)^\perp$
- (ii) $\overline{\operatorname{Im} u} = (\operatorname{Ker} u^*)^\perp$ *;*
- (iii) $\operatorname{Ker} u = (\operatorname{Im} u^*)^\perp$ *;*
- (iv) $\overline{\operatorname{Im} u^*} = (\operatorname{Ker} u)^\perp$.

*Démonstration.* Les points (iii) et (iv) résultent de (i) et (ii) en inversant les rôles de $u$ et $u^*$. On a

$$y \in \operatorname{Ker} u^* \Leftrightarrow u^* y = 0 \Leftrightarrow u^* y \in E^\perp \Leftrightarrow \forall x \in E \ \ (x \,|\, u^* y) = 0 \Leftrightarrow \forall x \in E \ \ (ux \,|\, y) = 0,$$

ce qui établit le point (i). Comme $(\operatorname{Im} u)^\perp = (\overline{\operatorname{Im} u})^\perp$ par continuité, on a $(\operatorname{Im} u)^{\perp\perp} = (\overline{\operatorname{Im} u})^{\perp\perp} = \overline{\operatorname{Im} u}$ (Corollaire 3.7), on obtient immédiatement (ii). □

**Définition 6.15.** *Soient $E$, $F$ des espaces de Hilbert et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle* support *de $u$ le sous-espace vectoriel fermé* $\operatorname{supp} u := (\operatorname{Ker} u)^\perp$. *On a alors* $\operatorname{supp} u^* = \overline{\operatorname{Im} u}$.

**Proposition 6.16.** *Soient $E$, $F$ des espaces de Hilbert et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On pose $E_1 := \operatorname{supp} u$, $F_1 = \overline{\operatorname{Im} u}$, $v := u|_{E_1}$. Alors $v \in \mathcal{L}(E_1, F_1)$ est injective et d'image dense.*

*Démonstration.* $\operatorname{Ker} v = \operatorname{Ker} u \cap E_1 = \operatorname{Ker} u \cap (\operatorname{Ker} u)^\perp = \{0\}$. De plus $\operatorname{Im} v = u(E_1) = u(E) = \operatorname{Im} u$. □

L'énoncé précédent est à interpréter en tenant compte de la décomposition en somme directe $E = E_1 \oplus \operatorname{Ker} u$. Ainsi l'étude de $u$ est canoniquement ramenée à celle de $v$, autrement dit à celle d'un opérateur continu injectif d'image dense.

**Définition 6.17.** *Soient $E$ un espace de Hilbert et $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que $u$ est* normal *si $uu^* = u^*u$, que $u$ est* hermitien *(ou* auto-adjoint*) si $u = u^*$, que $u$ est* unitaire *si $uu^* = \mathrm{id}_E = u^*u$.*

La notion d'adjoint permet une preuve simple de l'important résultat suivant. On rappelle la notation $B_E$ pour la boule unité fermée de $E$ pour la topologie forte.

**Théorème 6.18.** *Soient $E$, $F$ des espaces de Hilbert et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors $u(B_E)$ est faiblement compact, donc faiblement fermé, dans $F$.*

*Démonstration.* Comme $u(B_E)$ est borné, la topologie faible y est métrisable — cf. § II.4. Nous pouvons donc faire appel au critère de Bolzano-Weierstrass. Soit alors $\{ux_n\}_{n=0}^{\infty} \in u(B_E)^{\mathbb{N}}$. Comme $B_E$ est faiblement compact, on peut supposer, quitte à extraire une sous-suite, que $x_n \rightharpoonup x \in B_E$. Mais, pour tout $y \in F$, on a $(ux_n \,|\, y) = (x_n \,|\, u^*y) \to (x \,|\, u^*y) = (ux \,|\, y)$, donc $ux_n \rightharpoonup ux$. □

**Corollaire 6.19.** *Soient $E$, $F$ des espaces de Hilbert et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors $u(B_E)$ est fermé dans $F$.*

*Démonstration.* L'application identité de $F$ muni de la topologie forte vers $F$ muni de la topologie faible est continue. □

## 7. Opérateurs normaux

**Théorème 7.1.** *Soient $E$ un espace de Hilbert et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors $u$ est normal si, et seulement si, $\|ux\| = \|u^*x\|$ pour tout $x \in E$. Un opérateur normal possède les propriétés suivantes :*

(i) $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} u^*$ ;
(ii) $\overline{\operatorname{Im} u} = E \Leftrightarrow \operatorname{Ker} u = \{0\}$ ;
(iii) $u \in \mathcal{L}^*(E) \Leftrightarrow \exists \delta > 0 : (\forall x \in E)\ \|ux\| \geqslant \delta \|x\|$ ;
(iv) *si $ux = \lambda x$ avec $x \in E$, $\lambda \in \mathbb{C}$, alors $u^*x = \overline{\lambda} x$ ;*
(v) *si $\lambda$ et $\mu$ sont des valeurs propres distinctes de $u$, alors les sous-espaces propres associés sont orthogonaux.*

*Démonstration.* Montrons la caractérisation. Si $u$ est normal, nous avons

$$\|ux\|^2 = (ux \,|\, ux) = (x \,|\, u^*ux) = (x \,|\, uu^*x) = (u^*x \,|\, u^*x) = \|u^*x\|^2.$$

Réciproquement, si $\|ux\| = \|u^*x\|$ pour tout $x \in E$, le calcul précédent montre que $(x \,|\, (u^*u - uu^*)x) = 0$ pour tout $x$. Il suffit alors d'appliquer la Proposition 6.4. La relation (i) en découle immédiatement. Le point (ii) résulte alors du Théorème 6.14(ii). La condition nécessaire de l'assertion (iii) découle du Théorème 3.10. Réciproquement, s'il existe un $\delta > 0$ ayant la propriété indiquée, alors $\operatorname{Im} u$ est fermé,[(3)] et dense d'après (ii). Donc $\operatorname{Im} u = E$ et $u$ est bien inversible d'après le théorème de l'isomorphisme — Théorème I.2.15. La relation (iv) résulte de (i) appliqué à $u - \lambda \,\mathrm{id}_E$, d'adjoint $u^* - \overline{\lambda}\,\mathrm{id}_E$. Enfin, si $ux = \lambda x$, $uy = \mu y$, nous avons

$$\lambda\,(x \,|\, y) = (\lambda x \,|\, y) = (ux \,|\, y) = (x \,|\, u^*y) = (x \,|\, \overline{\mu} y) = \mu\,(x \,|\, y)$$

d'après (iv). Cela implique bien $x \perp y$. □

3. Car si $ux_n \to y$ alors $\{ux_n\}_{n=0}^{\infty}$ est une suite de Cauchy, donc il en va de même de $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, d'où $x_n \to x$, et $y = ux$.

*Exemples.* 1. Dans $\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{C})$ l'opérateur diagonal défini par $u\boldsymbol{x} = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \ldots)$ où $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots) \in \ell^\infty(\mathbb{N},\mathbb{C})$ a pour adjoint l'opérateur diagonal associé à $\overline{\boldsymbol{\lambda}}$. Il est donc normal.

2. Soit $\varphi \in L^\infty[0,1]$. Ainsi qu'il a été vu au § 6, l'opérateur de $L^2[0,1]$ défini par $u_\varphi f = \varphi f$ a pour adjoint $u_\varphi^* = u_{\overline{\varphi}}$. On a donc $u_\varphi u_\varphi^* = u_{|\varphi|^2} = u_\varphi^* u_\varphi$ et $u_\varphi$ est normal.

Nous noterons $\mathcal{N}(E)$ l'ensemble des opérateurs normaux de $E$.

**Proposition 7.2.** *Soient $E$ un espace de Hilbert séparable et $u \in \mathcal{N}(E)$. Pour chaque valeur propre $\lambda$ de $u$, on désigne par $E_\lambda$ le sous-espace propre associé et par $F$ le sous-espace vectoriel algébrique engendré par les $E_\lambda$. Alors :*

(i) $G := \overline{F} = \oplus_{\lambda\in\mathbb{C}} E_\lambda$.
(ii) *$G$ réduit $u$.*
(iii) *$u|_{G^\perp}$ n'a aucune valeur propre.*

*Démonstration.* D'après le Théorème 7.1, les $E_\lambda$ sont deux à deux orthogonaux et d'après le Théorème 5.9 chacun d'entre eux admet une base hilbertienne. La réunion de ces bases est donc une famille orthonormale de $E$, dénombrable en vertu du Corollaire 5.11. Il s'ensuit que cette famille est totale dans $G$, ce qui implique bien le point (i).

Montrons que $G$ réduit $u$, c'est-à-dire (Corollaire 6.11) que $G$ est stable par $u$ et $u^*$. Cela résulte du fait évident que chaque $E_\lambda$ est stable par $u$ et par $u^*$ : on a $x \in E_\lambda \Rightarrow uu^*x = u^*ux = u^*(\lambda x) = \lambda u^* x$ et $x \in E_\lambda \Rightarrow u^2 x = u\lambda x = \lambda u x$. On conclut ensuite par linéarité que la propriété s'étend à $F$ puis, par continuité, à $G$.

Il reste à montrer que $u|_{G^\perp}$ n'a pas de valeur propre. Supposons, par l'absurde, que $x \neq 0$ est tel que $u|_{G^\perp} x = \lambda x$ et $x \in G^\perp$. Alors $ux = u|_G x + u|_{G^\perp} x = \lambda x$, donc $x \in E_\lambda \subset G$, et $x \in G \cap G^\perp = \{0\}$, ce qui conduit à la contradiction recherchée. □

*Remarque.* Considérons l'opérateur de $L^2[0,1]$ défini par $uf(t) = tf(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$. Alors $u$ est normal d'après l'exemple vu plus haut, mais n'admet aucune valeur propre. On a donc $F = G = \{0\}$, et la Proposition 7.2 n'apporte aucune information. Cet énoncé est en revanche très utile si $u$ possède beaucoup de valeurs propres. Nous verrons qu'il en est ainsi pour les opérateurs compacts.

**Corollaire 7.3.** *Dans un espace de Hilbert séparable l'ensemble des valeurs propres d'un endomorphisme normal est fini ou dénombrable.*

*Démonstration.* Nous avons vu au cours de la démonstration de la Proposition 7.2 que la famille des $E_\lambda$ est au plus dénombrable. □

**Théorème 7.4.** *Soient $E$ un espace de Hilbert séparable et $u \in \mathcal{N}(E)$. Alors*

$$\operatorname{Ker} u = (\operatorname{Im} u)^\perp, \quad \overline{\operatorname{Im} u} = (\operatorname{Ker} u)^\perp.$$

*Démonstration.* Cela découle immédiatement du Théorème 6.14(i)-(ii) et du Théorème 7.1(i). □

Rappelons la Définition I.2.7 du rayon spectral d'un opérateur.

**Théorème 7.5.** *Soient $E$ un espace de Hilbert séparable et $u \in \mathcal{N}(E)$, de rayon spectral $\varrho(u)$. Alors $\varrho(u) = \|u\|$.*

*Démonstration.* On a $\varrho(u) = \lim_n \|u^n\|^{1/n}$ et $\varrho(u) \leqslant \|u\|$. Lorsque $u$ est normal, nous déduisons du Théorème 7.1 que, pour tout $x \in E$, $\|u^2 x\| = \|uux\| = \|u^* ux\|$, donc $\|u^2\| = \|u^* u\| = \|u\|^2$ — cf. Proposition 6.8(ii). Par itération, il s'ensuit que $\|u^{2^k}\| = \|u\|^{2^k}$, donc $\varrho(u) \geqslant \|u\|$. □

**Corollaire 7.6.** *Soient $E$ un espace de Hilbert séparable et $u \in \mathcal{N}(E)$. On a*

$$\|u\| = \sup_{z \in \operatorname{Sp} u} |z| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |\,(ux\,|\,x)\,|.$$

*Démonstration.* Nous savons par le Théorème I.2.23 que $\sup_{z\in \operatorname{Sp} u} |z| = \varrho(u)$ et par le Théorème 7.5 que $\varrho(u) = \|u\|$. De plus, pour tout $x \in B_E = \overline{B_E(0;1)}$, on a $|\,(ux\,|\,x)\,| \leqslant \|u\|$. Il reste à montrer que les quantités $|\,(ux\,|\,x)\,|$ ($\|x\| \leqslant 1$) permettent d'approcher $\|u\|$. Soit $z \in \operatorname{Sp} u$. Alors $u - z\,\mathrm{id}_E$ est normal et non inversible. D'après le Théorème 7.1(iii), il existe donc une suite $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ de vecteurs de norme 1 telle que $\|ux_n - zx_n\| \to 0$, d'où $(ux_n\,|\,x_n) - z \to 0$. □

## 8. Opérateurs compacts

On rappelle qu'une partie d'un espace métrique est dite relativement compacte si son adhérence est compacte.

**Définition 8.1.** *Soient $E$, $F$ des espaces de Hilbert et $u \in \mathcal{L}(E,F)$. On dit que $u$ est* compact *si l'image de la boule unité de $E$ est relativement compacte dans $F$*

*Remarque.* Soit $B_E := \overline{B_E(0;1)}$. Alors, pout tout opérateur $u \in \mathcal{L}(E,F)$, $u(B_E)$ est fermé (Corollaire 6.19) dans $F$. Or $u(B_E) = \overline{u(B_E(0;1))}$. Il s'ensuit que $u$ est compact si, et seulement si, $u(B_E)$ est compact dans $F$.

**Théorème 8.2 (Schauder).** *Un opérateur d'espaces hilbertiens est compact si, et seulement si, son adjoint est compact.*

*Démonstration.* Considérons un opérateur compact $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et montrons que $u^*$ est compact. Soient $B_F$ la boule unité fermée de $F$ et $\{y_n\}_{n=0}^{\infty} \in B_F^{\mathbb{N}}$. Nous devons montrer que l'on peut extraire de $\{u^*y_n\}_{n=0}^{\infty}$ une sous-suite convergente. Soient $K := u(B_E)$, qui est donc un espace métrique compact, et $A$ la partie de $\mathcal{C}(K,\mathbb{C})$ constituée des applications $\varphi_n : y \mapsto (y\,|\,y_n)$. Alors $A$ est bornée, puisque $\|\varphi_n\| \leqslant 1$ pour tout $n$, et $A$ est équicontinue puisque $|\varphi_n(y) - \varphi_n(z)| \leqslant \|y - z\|$ pour tous $y$, $z$ de $K$. Nous pouvons donc appliquer le théorème d'Ascoli (Théorème I.1.37) pour conclure que l'on peut extraire de la suite $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ une sous-suite convergente pour la topologie de $\mathcal{C}(K,\mathbb{C})$. Notant $\{\varphi_{n_k}\}_{k=0}^{\infty}$ cette sous-suite et $\varphi$ sa limite dans $\mathcal{C}(K,\mathbb{C})$, nous avons donc $\|\varphi_{n_k} - \varphi\| \to 0$, c'est-à-dire

$$\sup_{x\in B_E} |\,(ux\,|\,y_{n_k}) - \varphi(ux)| \to 0 \qquad (k \to \infty).$$

Cela implique

$$\|u^*y_{n_k} - u^*y_{n_\ell}\| = \sup_{x\in B_E} |\,(ux\,|\,y_{n_k}) - (ux\,|\,y_{n_\ell})\,| \to 0 \qquad (k,\ell \to \infty),$$

où l'égalité résulte du théorème de Riesz (Théorème 3.9). Ainsi, la suite $\{u^*y_{n_k}\}_{k=0}^{\infty}$ est de Cauchy dans $E$, donc convergente. □

*Remarque.* La démonstration précédente est généralisable aux espaces de Banach. Une démonstration plus simple, mais spécifiquement hilbertienne, est proposée à l'Exercice 39.

**Théorème 8.3.** *Soient $E$, $F$ des espaces de Hilbert. L'ensemble $\mathcal{K}(E,F)$ des opérateurs compacts de $E$ sur $F$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{L}(E,F)$ pour la topologie forte.*

*Démonstration.* Il est clair que toute combinaison de deux opérateurs compacts est encore compacte car la somme de deux compacts $K_1 + K_2 = \{k_1 + k_2 : k_1 \in K_1, k_2 \in K_2\}$ est compacte, par exemple via le critère de Bolzano–Weierstrass. Ensuite, considérons $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ est une suite d'opérateurs compacts convergeant normiquement vers $u \in \mathcal{L}(E,F)$. Pour montrer que $u(B_E)$ est relativement compacte, il suffit de montrer (Lemme I.1.36) que c'est un ensemble totalement borné. Or, si $n$ est tel que $\|u_n - u\| < \varepsilon/2$ et si $u_n(B_E) \subset \cup_{1\leqslant j\leqslant J} B(y_j;\varepsilon/2)$, on a $u(B_E) \subset \cup_{1\leqslant j\leqslant J} B(y_j;\varepsilon)$. □

**Définition 8.4.** *On dit qu'un opérateur d'espaces de Hilbert $u \in \mathcal{L}(E,F)$ est de rang fini si* $\dim \operatorname{Im} u < \infty$.

Comme toute partie bornée d'un espace vectoriel normé de dimension finie est relativement compacte, tout opérateur de rang fini est compact. Il résulte donc du Théorème 8.3 que toute limite normique d'opérateurs compacts de rangs finis est compacte. Le résultat suivant montre que la réciproque est vraie.

**Théorème 8.5.** *Un opérateur d'espaces de Hilbert $u \in \mathcal{L}(E,F)$ est compact si, et seulement si, il est limite normique d'une suite d'opérateurs de rangs finis.*

*Démonstration.* Il reste seulement à montrer la condition nécessaire. Supposons donc $u$ compact. Soient $\varepsilon > 0$ et $\{y_j\}_{j=1}^{n} \in u(B_E)^n$ tel que $u(B_E) \subset \cup_{1\leqslant j\leqslant n} B_F(y_j;\varepsilon)$. Alors $F_n := \operatorname{Vect}[y_1,\ldots,y_n]$ est un sous-espace vectoriel fermé de $F$ et $v := p_{F_n} u$ est de rang fini. Pour tout $x \in B_E$, on a $ux \in u(B_E)$ donc il existe $j \in [1,n]$ tel que $\|ux - y_j\| < \varepsilon$. Comme $y_j \in F_n$, il s'ensuit que $\|ux - vx\| = \|ux - p_{F_n} ux\| \leqslant \|ux - y_j\| < \varepsilon$. On conclut en faisant tendre $\varepsilon$ vers 0. □

*Exemples.* 1. Commençons par observer que $\mathrm{id}_E$ est compact si, et seulement si, $\dim E < \infty$ : cela résulte du Théorème 1.28 de Riesz.

2. Considérons dans $\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{C})$ l'opérateur diagonal défini par $u\boldsymbol{x} = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \ldots)$ où $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots) \in \ell^\infty(\mathbb{N},\mathbb{C})$. Alors $u$ est compact si, et seulement si, $\lambda_n \to 0$. En effet, la condition est suffisante puisque, si $\lambda_n \to 0$, alors $\|u - u_n\| \to 0$ où $u_n$ est l'opérateur de rang fini défini par $u_n\boldsymbol{x} = (x_1,\ldots,x_n,0,\ldots)$. Réciproquement, si $\lambda_n \not\to 0$, il existe $\delta > 0$ et une suite $\{\lambda_{n_k}\}_{k=0}^{\infty}$ telle que $|\lambda_{n_k}| \geqslant \delta$ pour tout $k$. Si $u$ était compact on pourrait extraire de la suite des $ue_{n_k} = \lambda_{n_k} e_{n_k}$ une sous-suite convergente. Comme $e_{n_k} \rightharpoonup 0$, cela impliquerait $e_{n_k} \to 0$, ce qui contredirait $\|ue_{n_k}\| = |\lambda_{n_k}| \geqslant \delta$.

*Remarques.* 1. Le Théorème 8.5 fournit une nouvelle démonstration, plus simple, du théorème de Schauder (Théorème 8.2). En effet, si $u$ est de rang fini, alors $\operatorname{Ker} u^* = (\operatorname{Im} u)^\perp$ est de codimension $\dim F/\operatorname{Ker} u^*$ finie puisque $F/\operatorname{Ker} u^* \cong (\operatorname{Im} u)^{\perp\perp} = \operatorname{Im} u$ car $\operatorname{Im} u$ est fermé. Comme $\dim \operatorname{Im} u^* = \dim F/\operatorname{Ker} u^*$, on voit que $u^*$ est bien de rang fini. On conclut en observant que si $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ est une suite d'opérateurs de rangs finis telle que $\|u_n - u\| \to 0$ alors la suite d'opérateurs de rangs finis $\{u_n^*\}_{n=0}^{\infty}$ vérifie $\|u_n^* - u^*\| \to 0$.

2. On observera que le Théorème 8.3 est également une conséquence simple de la caractérisation d'un opérateur compact comme limite opérateurs de rangs finis.

3. Il est à noter que $\mathcal{K}(E,F)$ n'est pas fermé pour la topologie de la convergence simple.[4] Considérons par exemple le cas de $E = \ell^2(\mathbb{N},\mathbb{C})$ muni de la base canonique

4. On désigne aussi cette topologie comme la topologie forte sur $\mathcal{L}(E,F)$, par opposition à la topologie faible, dans la quelle une suite $(u_n)_n$ d'opérateurs converge vers $u$ si $u_n x \rightharpoonup ux$ pour tout $x$ de $E$. Cette dénomination prête cependant à confusion, puisque la topologie forte ainsi définie ne coïncide pas avec la topologie de la norme sur $\mathcal{L}(E,F)$.

$(e_n)_{n\geqslant 1}$. On pose $E_n = \oplus_{1\leqslant j\leqslant n}\mathbb{C}e_j$ et $u_n := p_{E_n}$. Alors $u_n$ est de rang fini, donc compact, mais pour tout $\boldsymbol{x} \in \ell^2$, on a

$$\|x - u_n x\|^2 = \sum_{j>n} |x_j|^2 \to 0.$$

Donc $u_n \to \mathrm{id}_E$ simplement. Comme $\mathrm{id}_E \notin \mathcal{K}(E)$, cela établit bien la propriété annoncée.

**Théorème 8.6.** *Soient $E$, $F$, $G$ des espaces hilbertiens.*
(i) *Si $u \in \mathcal{K}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(F,G)$, alors $vu \in \mathcal{K}(E,G)$.*
(ii) *Si $u \in \mathcal{K}(E,F)$ et $w \in \mathcal{L}(G,E)$, alors $uw \in \mathcal{K}(G,F)$.*

*Démonstration.* C'est immédiat en utilisant le critère du Théorème 8.5. Par exemple si $(u_n)_n$ est une suite d'opérateurs de rangs finis convergeant vers $u$ alors $vu_n$ converge vers $vu$ et chaque $vu_n$ est de rang fini. □

**Proposition 8.7.** *Soient $E$, $F$ des espaces de Hilbert et $u \in \mathcal{K}(E,F)$. Pour toute suite $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ de points de $E$ telle que $x_n \rightharpoonup x \in E$, on a $\lim_n ux_n = ux$ dans $F$.*

*Démonstration.* Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un opérateur de rang fini $v$ tel que $\|v - u\| \leqslant \varepsilon$. Pour $n$ assez grand, on a $\|vx_n - vx\| \leqslant \varepsilon$ puisque, si $\{f_j\}_{1\leqslant j\leqslant J}$ est une base hilbertienne de $\mathrm{Im}\, v$, on a $(vx_n \,|\, f_j) = (x_n \,|\, v^* f_j) \to (x \,|\, v^* f_j) = (vx \,|\, f_j)$ pour tout indice $j$. Il s'ensuit que $\|ux - ux_n\| \leqslant \|ux - vx\| + \|vx - vx_n\| + \|vx_n - ux_n\| \leqslant \varepsilon\|x\| + \varepsilon + \varepsilon\|x_n\|$. D'après la Proposition 4.1, on a $\sup_n \|x_n\| < \infty$. Cela implique le résultat annoncé. □

*Remarque.* Le résultat précédent n'implique pas que $\mathrm{Im}\, u$ est fermé. En fait, lorsque $u \in \mathcal{K}(E,F)$, l'image $\mathrm{Im}\, u$ est fermée si, et seulement si, $u$ est de rang fini — cf. Exercice 42.

## 9. Homomorphismes de Hilbert-Schmidt

**Proposition 9.1.** *Soient $E$, $F$ des espaces hilbertiens séparables, de bases respectives $(e_n)_{n\geqslant 0}$, et $(f_p)_{p\geqslant 0}$. Pour tout homomorphisme $u \in \mathcal{L}(E,F)$, on a*

$$\sum_{n\geqslant 0} \|ue_n\|^2 = \sum_{p\geqslant 0} \|u^* f_p\|^2 = \sum_{n\geqslant 0,\, p\geqslant 0} |\,(ue_n \,|\, f_p)\,|^2 \in \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}.$$

*Lorsque cette quantité est finie, elle est indépendante des bases choisies.*

*Démonstration.* Pour chaque indice $n$, on a d'après la formule de Parseval (Corollaire 5.10) $\|ue_n\|^2 = \sum_{p\geqslant 0} |\,(ue_n \,|\, f_p)\,|^2$. On obtient l'égalité du premier et du troisième terme en sommant sur $n$. Symétriquement, pour chaque indice $p$, on a $\|u^* f_p\|^2 = \sum_n |\,(u^* f_p \,|\, e_n)\,|^2$ et le terme général de cette série vaut $|\,(ue_n \,|\, f_p)\,|^2$. Comme on peut modifier l'une des bases sans changer l'autre, la somme est indépendante du choix des bases considérées. □

Avec les notation précédentes, nous posons

$$N(u)^2 := \sum_{n\geqslant 0} \|ue_n\|^2 \in \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}. \tag{9·1}$$

**Théorème 9.2.** *Soient $E$, $F$, $G$ des espaces hilbertiens séparables et $u, w \in \mathcal{L}(E,F)$, $v \in \mathcal{L}(F,G)$. On a :*
(i) *$N(u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$ ;*
(ii) *$N(u + w) \leqslant N(u) + N(w)$ ;*
(iii) *$N(u^*) = N(u)$ ;*
(iv) *$N(vu) \leqslant N(u)\|v\|$, $N(vu) \leqslant \|u\|N(v)$ ;*
(v) *$N(u) \geqslant \|u\|$ ;*
(vi) *$(\forall\lambda \in \mathbb{C})$ $N(\lambda u) = |\lambda| N(u)$.*

*Démonstration.* Voir cours oral. □

**Définition 9.3.** *Soient $E$, $F$ des espaces hilbertiens et $u \in \mathcal{L}(E,F)$. On dit que $u$ est un homomorphisme de Hilbert-Schmidt si $N(u) < \infty$. On note $\mathcal{H}(E,F)$ l'ensemble des homomorphismes de Hilbert-Schmidt de $E$ dans $F$.*

**Proposition 9.4.** *Soient $E$, $F$, $G$ des espaces hilbertiens. Alors :*

(i) *$\mathcal{H}(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E,F)$ ;*

(ii) *$u \in \mathcal{H}(E,F) \Leftrightarrow u^* \in \mathcal{H}(F,E)$ ;*

(iii) *$u \in \mathcal{H}(E,F)$ et $v \in \mathcal{H}(F,G) \Rightarrow vu \in \mathcal{H}(E,G)$.*

*Démonstration.* Laissée en exercice. □

**Théorème 9.5.** *Tout homomorphisme de rang fini est de Hilbert-Schmidt. Un homomorphisme $u$ est de Hilbert-Schmidt si, et seulement si, il existe une suite $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ d'homomorphismes de rangs finis tels que $N(u - u_n) \to 0$.*

*Démonstration.* La première assertion est évidente puisque, si $u$ est de rang fini, la somme $\sum_p \|u^* f_p\|^2$ ne comporte qu'un nombre fini de termes. Pour établir la seconde, observons d'abord que, si la propriété est satisfaite alors $N(u-u_n) \leqslant 1$ pour un entier $n$ convenable. La décomposition $u = u_n + (u - u_n)$ implique alors que $u$ est de Hilbert-Schmidt, au vu du Théorème 9.2(ii). Il reste à montrer que la condition est nécessaire. À cette fin, il suffit de choisir $u_n = up_{E_n}$ où $E_n = \oplus_{0 \leqslant j \leqslant n} \mathbb{C} e_j$. On alors $N(u - u_n)^2 = \sum_{j>n} \|ue_j\|^2 \to 0$ puisque $u$ est de Hilbert-Schmidt. □

**Corollaire 9.6.** *Tout homomorphisme de Hilbert-Schmidt est compact.*

*Démonstration.* C'est une conséquence immédiate du Théorème 9.5 et du Théorème 9.2(v). □

L'importance des homomorphismes de Hilbert-Schmidt provient notamment du fait que, étant donnés deux sous-intervalles $I$, $J$ de $\mathbb{R}$ et $K \in L^2(I \times J)$, l'homomorphisme $v_K : L^2(I) \to L^2(J)$ défini par

$$v_K f(t) = \int_I K(s,t) f(s) \, \mathrm{d}s \quad (t \in J)$$

est de Hilbert-Schmidt. Nous avons vu au § 6 que, avec la notation $K^*(t,s) := \overline{K(s,t)}$, on a $v_K^* = v_{K^*}$, et que $\|v_K\| \leqslant \|K\|_{L^2(I \times J)}$.

Soient $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ une base orthonormale de $L^2(I)$ et $\{f_p\}_{p=1}^{\infty}$ une base orthonormale de $L^2(J)$. Posons $g_{np}(s,t) = \overline{e_n(s)} f_p(t)$. Alors $(g_{np})_{n \geqslant 1, \, p \geqslant 1}$ est une base orthonormale de $L^2(I \times J)$ : d'une part

$$(g_{np} \,|\, g_{m\ell}) = \int_{I \times J} \overline{e_n(s)} f_p(t) \, e_m(s) \overline{f_\ell(t)} \, \mathrm{d}s \, \mathrm{d}t = \delta_{nm} \delta_{p\ell},$$

donc la famille est orthonormale, et, d'autre part, si $h \perp g_{np}$ pour tout $(n,p)$, alors, pour chaque $n \geqslant 1$,

$$h_n(t) := \int_I h(s,t) e_n(s) \, \mathrm{d}s$$

est orthogonale à tous les $f_p$, donc $h_n = 0$ dans $L^2(J)$, ce qui implique que tous les $h_n(t)$ sont simultanément nuls sauf peut-être lorsque $t$ appartient à un sous-ensemble négligeable de $J$. Comme $h_n(t) = (h(\cdot, t) \,|\, \overline{e_n})$, il s'ensuit que, pour ces valeurs de $t$, $h(s,t) = 0$ sauf peut-être pour un ensemble négligeable de valeurs de $s$. On peut donc conclure que $h = 0$ dans $L^2(I \times J)$. La famille est donc totale.

Par ailleurs, nous avons

$$(v_K e_n \,|\, f_p) = \int_J \int_I K(s,t) e_n(s) \, \mathrm{d}s \overline{f_p(t)} \, \mathrm{d}t = (K \,|\, \overline{g_{np}})$$

où le second produit scalaire est dans $L^2(I \times J)$. La relation de Parseval implique alors

$$\|K\|^2 = \sum_{n,p} |\, (K \,|\, g_{np}) \,|^2 = \sum_{n,p} |\, (v_K e_n \,|\, f_p) \,|^2 = N(v_K)^2. \tag{9·2}$$

Cela fournit une majoration pour $\|v_K\|$, qui n'est en général pas optimale.

## 10. Théorie spectrale des opérateurs normaux compacts

Nous avons vu (Proposition 7.2 et Corollaire 7.3) qu'un endomorphisme normal est réduit par la somme hilbertienne $\oplus_\lambda E_\lambda$ de ses sous-espaces propres et que l'ensemble de ses valeurs propres est fini ou dénombrable. Par ailleurs (Théorème 7.5), le rayon spectral $\varrho(u)$ est égal à la norme $\|u\|$ et (Théorème 2.23) il existe un élément du spectre de module $\|u\|$. Le résultat suivant apporte une précision supplémentaire lorsque l'endomorphisme est compact.

**Lemme 10.1.** *Soient $E \neq \{0\}$ un espace de Hilbert séparable, $B_E$ sa boule unité fermée et $u \in \mathcal{K}(E)$. Alors :*

(i) *La fonction $(x,y) \mapsto (ux \,|\, y)$ est faiblement continue sur $B_E \times B_E$ ;*

(ii) *Si, de plus, $u$ est normal, alors $u$ possède au moins une valeur propre de module $\|u\|$.*

*Démonstration.* Montrons l'assertion (i). Considérons d'abord le cas où $u$ est de rang fini. On alors $E = F \oplus G$, avec $F := \operatorname{Ker} u$, $G = F^\perp = \operatorname{Im} u$. Si $\{e_j\}_{=1}^n$ est une base orthonormale de $G$. Pour tout $(x,y) \in B_E^2$, nous avons alors

$$(ux \,|\, y) = (up_G x \,|\, y) = (p_G x \,|\, u^* y) = \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} (x \,|\, e_j) \, \overline{(e_j \,|\, u^* y)} = \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} (x \,|\, e_j) \, \overline{(ue_j \,|\, y)}.$$

Il suffit donc de montrer que les fonctions $(x,y) \mapsto (x \,|\, e_j) \, \overline{(ue_j \,|\, y)}$ sont faiblement continues sur $E^2$, ce qui est évident d'après la définition de la topologie faible.

Lorsque $u$ est compact, il existe une suite $\{u_n\}_{n=0}^\infty$ d'opérateursde rangs finis convergeant normiquement vers $u$. Comme $|\, (ux \,|\, y) - (u_n x \,|\, y) \,| \leqslant \|u - u_n\| \|x\| \|y\| \leqslant \|u - u_n\|$ sur $B_E^2$, il s'ensuit que $(x,y) \mapsto (ux \,|\, y)$ est limite uniforme d'une suite de fonctions continues. C'est donc une fonction continue.

Supposons à présent que $u$ est normal. Alors l'application $x \mapsto |\, (ux \,|\, x) \,|$ est continue sur le compact $B_E$ pour la topologie faible. Elle y atteint donc son maximum $\|u\|$ en un point $z$ tel que $\|z\| = 1$. Comme $E = \mathbb{C}z \oplus \{z\}^\perp$, on peut écrire $uz = \lambda z + y$ avec $y \perp z$, d'où $(uz \,|\, z) = \lambda$, $|\, (uz \,|\, z) \,| = |\lambda| = \|u\|$, et $\|uz\|^2 = |\lambda|^2 + \|y\|^2 = \|u\|^2 + \|y\|^2 \leqslant \|u\|^2 \|z\|^2 = \|u\|^2$. Ainsi, on doit avoir $y = 0$ et $z$ est vecteur propre, de valeur propre $\lambda$. □

**Théorème 10.2.** *Soient $E$ un espace de Hilbert séparable et $u \in \mathcal{N}(E) \cap \mathcal{K}(E)$. Alors il existe une base orthonormale de $E$ constituée de vecteurs propres de $u$.*

*Démonstration.* D'après la Proposition 7.2, nous avons $E = G \oplus G^{\perp}$ où $G := \oplus_{\lambda} E_{\lambda}$ réduit $u$ et $u|_{G^{\perp}}$ n'a aucune valeur propre. Le Lemme 10.1 implique donc $G^{\perp} = \{0\}$. □

**Théorème 10.3.** *Soient $E$ un espace de Hilbert séparable, $u \in \mathcal{N}(E) \cap \mathcal{K}(E)$, $\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$ une base orthonormale de vecteurs propres, et $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ la suite des valeurs propres associées. Pour tout $\varepsilon > 0$, on a $|\lambda_n| \leqslant \varepsilon$ pour tous les indices $n$ sauf au plus un nombre fini.*

*Démonstration.* Nous avons vu à l'exemple 2 du § 8 qu'un endomorphisme diagonal de $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ est compact si, et seulement si, la suite de ses valeurs propres tend vers 0. La démonstration vaut dans le cas général puisque tout espace de Hilbert séparable est isomorphe à $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$. □

**Corollaire 10.4.** *Soient $E$ un espace de Hilbert séparable, $u \in \mathcal{N}(E) \cap \mathcal{K}(E)$, et $\Lambda$ l'ensemble des valeurs propres de $u$. Désignant par $E_{\lambda}$ le sous-espace propre associé à une valeur propre générique $\lambda$, on a $E = \oplus_{\lambda \in \Lambda} E_{\lambda}$. De plus, chaque $E_{\lambda}$ tel que $\lambda \neq 0$ est de dimension finie et, pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble des valeurs propres $\lambda$ telle que $|\lambda| > \varepsilon$ est fini.*

*Démonstration.* La première assertion résulte immédiatement de ce qui précède. Nous avons vu par ailleurs que, si $\dim E = \infty$, la suite des valeurs propres tend vers 0. Si $\lambda \neq 0$ et $\dim E_{\lambda} = \infty$, cette suite ne convergerait pas vers 0. □

*Relation entre* $\operatorname{Sp} u$ *et* $\Lambda$. Lorsque $\dim E < \infty$, on a $\operatorname{Sp} u = \Lambda$ car $u - \lambda \operatorname{id}_E$ non inversible implique que cet endomorphisme a un noyau non réduit à $\{0\}$.

Lorsque $\dim E = \infty$, on montre par l'absurde que $0 \in \operatorname{Sp} u$ : s'il n'en était pas ainsi, $u$ serait inversible. Donc $B_E = u^{-1}(u(B_E))$ serait normiquement compact puisque $u(B_E)$ est normiquement compact par définition. Cette conclusion contredirait le théorème de Riesz (Théorème I.1.28) selon lequel un espace vectoriel normé localement compact est de dimension finie. On a donc toujours $0 \in \operatorname{Sp} u$.[5] On en déduit que $\{0\} \cup \Lambda \subset \operatorname{Sp} u$. Le résultat suivant établit l'inclusion réciproque.

**Proposition 10.5.** *Soient $E$ un espace de Hilbert séparable de dimension infinie, $u \in \mathcal{N}(E) \cap \mathcal{K}(E)$, et $\Lambda$ la suite des valeurs propres de $u$. On a* $\operatorname{Sp} u = \Lambda \cup \{0\}$.

*Démonstration.* Soit $\mu \in \operatorname{Sp} u \setminus \{0\}$. Si $\mu \notin \Lambda$, alors $v := u - \mu \operatorname{id}_E$ est un opérateur normal injectif, donc d'image dense d'après le Théorème 7.1.

Montrons que $\operatorname{Im} v$ est fermée. À cette fin, établissons l'existence d'une constante $\delta > 0$ telle que

$$\|vx\| \geqslant \delta \|x\| \tag{10·1}$$

pour tout $x$ de $E$. S'il n'en était pas ainsi, il existerait une suite $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ de vecteurs de norme 1 telle que $vx_n \to 0$. Comme $u$ est compact, il existe alors une sous-suite $\{x_{n_k}\}_{n=0}^{\infty}$ telle que $ux_{n_k}$ converge. Comme $vx_{n_k} = ux_{n_k} - \mu x_{n_k} \to 0$ et $\mu \neq 0$, il s'ensuit que $x_{n_k}$ converge vers un élément $x$ de $E$ tel que $\|x\| = 1$, d'où $ux - \mu x = 0$, une contradiction. La relation (10·1) implique bien que $\operatorname{Im} v$ est fermé : si $vx_n \to y$, alors $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ est une suite

5. Comme $\Lambda$ est une suite tendant vers 0, on peut aussi raisonner comme suit. Ou bien il n'y a qu'un nombre fini de valeurs propres non nulles, donc $\operatorname{Ker} u$ est non vide et $0 \in \Lambda \subset \operatorname{Sp} u$, ou bien 0 est un point d'accumulation de $\Lambda$ et $0 \ni \operatorname{Sp} u \supset \overline{\Lambda}$.

de Cauchy, donc converge vers un $x \in E$ et $ux_n \to ux = y$. Il résulte de ce qui précède que $v$ est bijectif, donc $\mu \notin \operatorname{Sp} u$, une contradiction.

Ainsi $\operatorname{Sp} u \smallsetminus \{0\} \subset \Lambda$. Comme $0 \in \operatorname{Sp} u$, on a bien $\operatorname{Sp} u = \Lambda \cup \{0\}$. On retrouve ainsi que tout élément de $\Lambda \smallsetminus \{0\}$ est isolé, ce qui découle aussi du Corollaire 10.4. □

## 11. L'alternative de Fredholm

**Théorème 11.1.** *Soient $E$ un espace de Hilbert séparable et $u \in \mathcal{N}(E) \cap \mathcal{K}(E)$. Alors :*

(i) $\operatorname{Ker}(\mathrm{id}_E - u) = \operatorname{Ker}(\mathrm{id}_E - u^*)$ *;*
(ii) $\dim \operatorname{Ker}(\mathrm{id}_E - u) < \infty$ *;*
(iii) $\operatorname{Im}(\mathrm{id}_E - u)$ *est fermé, et plus précisément* $\operatorname{Im}(\mathrm{id}_E - u) = \operatorname{Ker}(\mathrm{id}_E - u)^\perp$ *;*
(iv) $\operatorname{Ker}(\mathrm{id}_E - u) = \{0\} \Leftrightarrow \operatorname{Im}(\mathrm{id}_E - u) = E$.

*Démonstration.* L'assertion (i) découle immédiatement du Théorème 7.1(i).

Montrons (ii). Le sous-espace vectoriel $\operatorname{Ker}(\mathrm{id}_E - u)$ est le sous-espace propre $E_1$ associé à la valeur propre 1. D'après le Corollaire 10.4, il est donc de dimension finie.

Pour établir (iii), observons que l'on a $E = E_1 \oplus E_1^\perp$ d'après le Corollaire 10.4. Soit $G := E_1^\perp$. Alors 1 n'est pas valeur propre de $u|_G$, donc $1 \notin \operatorname{Sp} u|_G$, d'après la Proposition 10.5. Il s'ensuit que $\mathrm{id}_G - u|_G \in \mathcal{L}^*(G)$, donc $\operatorname{Im}(\mathrm{id}_E - u) = \operatorname{Im}(\mathrm{id}_G - u|_G) = G$ est fermé. D'après le Théorème 7.4, on a bien $\operatorname{Im}(\mathrm{id}_E - u) = \operatorname{Ker}(\mathrm{id}_E - u)^\perp$.

Montrons à présent l'assertion (iv). Comme $\mathrm{id}_E - u$ est normal, on a

$$\overline{\operatorname{Im}(\mathrm{id}_E - u)} = \operatorname{Ker}(\mathrm{id}_E - u)^\perp$$

d'après le Théorème 7.4. Mais $\operatorname{Im}(\mathrm{id}_E - u)$ est fermé d'après (ii). □

L'*alternative de Fredholm*[6] concerne la résolution de l'équation

$$x - ux = y. \tag{11·1}$$

D'après le Théorème 11.1, lorsque $u \in \mathcal{N}(E) \cap \mathcal{K}(E)$, l'une des deux situations suivantes se présente :

(a) L'équation possède une solution unique pour tout $y \in E$ ;

(b) L'équation homogène $x - ux = 0$ possède $n$ solutions linéairement indépendantes et l'équation (11·1) est résoluble si, et seulement si, $y$ vérifie $n$ conditions d'orthogonalité, équivalentes à $y \in \{\operatorname{Ker}(\mathrm{id}_E - u)\}^\perp$.

*Remarques.* 1. La condition (iv) du Théorème 11.1 est classique en dimension finie : lorsque $\dim E < \infty$, un endomorphisme de $E$ est injectif si, et seulement si, il est surjectif. En revanche, en dimension infinie, cette équivalence n'a pas lieu : nous avons déjà vu au § 3 l'exemple du décalage dans $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ qui est injectif sans être surjectif ; de même le décalage à gauche $(x_1, x_2, \dots) \mapsto (x_2, x_3, \dots)$ est surjectif sans être injectif.

2. On peut montrer que les points (ii), (iii) et (iv) du Théorème 11.1 sont en fait valides même si $u$ n'est pas normal, à condition de remplacer $\operatorname{Ker}(\mathrm{id}_E - u)^\perp$ par $\operatorname{Ker}(\mathrm{id}_E - u^*)^\perp$ dans (iii). Montrons les assertions (ii) et (iii) dans ce cadre.

Preuve de (ii). Considérons $F := E_1$. Alors $B_F \subset u(B_E)$, puisque $x \in F \Leftrightarrow x = ux$, et $B_F$ est évidemment fermé. Comme $u$ est compact, $B_F$ est donc compact. Le théorème de Riesz (Théorème I.1.28) implique donc que $\dim F < \infty$.

Preuve de (ii). Soit $y_n = x_n - ux_n$ $(n \geqslant 0)$ le terme général d'une suite convergeant vers $y \in E$. Montrons que $y \in G := \operatorname{Im}(\mathrm{id}_E - u)$. Soit $d_n := \mathrm{d}(x_n, F)$. Comme $\dim F < \infty$, il existe $z_n \in F$ tel que $\|x_n - z_n\| = d_n$.[7] On a donc

$$y_n = (x_n - z_n) - u(x_n - z_n) \qquad (n \geqslant 0) \tag{11·2}$$

6. Ivar Fredholm, mathématicien suédois, 1866-1927.
7. Cela découle aussi du Théorème 3.3, mais la preuve est élémentaire dans ce cas.

Montrons par l'absurde que la suite $\{x_n - z_n\}_{n=0}^{\infty}$ est bornée. S'il n'en était pas ainsi, il existerait une sous-suite $\{x_{n_k} - z_{n_k}\}_{k=0}^{\infty}$ telle que $\|x_{n_k} - z_{n_k}\| \to \infty$. Posant $w_n := (x_n - z_n)/\|x_n - z_n\|$, on déduirait de (11·2) que

$$w_{n_k} - uw_{n_k} = y_{n_k}/\|x_{n_k} - z_{n_k}\| \to 0.$$

Comme $u(B_E)$ est compact, quitte à extraire une nouvelle sous-suite, nous pouvons supposer que $uw_{n_k}$ converge, disons vers $w \in u(B_E)$, et donc aussi que $w_{n_k} \to w$. De plus, $w \in F$. Enfin, puisque $z_n \in F$,

$$d(w_n, F) = \frac{d(x_n, F)}{d_n} = 1.$$

Il s'ensuit que $d(w, F) = 1$, ce qui représente la contradiction cherchée.

Comme $u \in \mathcal{K}(E)$, il résulte de ce qui précède que l'on peut supposer, quitte à effectuer une nouvelle extraction, que $u(x_{n_k} - z_{n_k}) \to \ell$, et donc $x_{n_k} - y_{n_k} \to z := y + \ell$. Or $z - uz = \lim_k (x_{n_k} - y_{n_k}) - \lim_k u(x_{n_k} - y_{n_k}) = y + \ell - \ell = y$. Donc $y \in G$, comme souhaité.

Pour établir que $\mathrm{Im}(\mathrm{id}_E - u) = \mathrm{Ker}(\mathrm{id}_E - u^*)^{\perp}$, il suffit d'appliquer le Théorème 6.14(ii), qui fournit

$$G = \mathrm{Im}(\mathrm{id}_E - u) = \overline{\mathrm{Im}(\mathrm{id}_E - u)} = \mathrm{Ker}(\mathrm{id}_E - u^*)^{\perp}.$$

Symétriquement, compte tenu du Théorème 8.2, nous avons également

$$\mathrm{Im}(\mathrm{id}_E - u^*) = \mathrm{Ker}(\mathrm{id}_E - u)^{\perp}.$$

À titre d'illustration des résultats précédents, considérons un opérateur de Hilbert-Schmidt

$$v_K f(t) := \int_I K(s,t) f(s)\,\mathrm{d}s,$$

où $I$ est un sous-intervalle de $\mathbb{R}$, et $K \in L^2(I \times I)$ vérifie $K(s,t) = \overline{K(t,s)}$. D'après ce qui a été vu au § 9, on sait que $v_K$ est de Hilbert-Schmidt, donc compact, et d'après le § 6, $v_K$ est hermitien, donc normal.

**Proposition 11.2.** *Avec les notations précédentes, nous avons :*

(i) $\mathrm{Sp}\, v_K$ *est constitué de 0 et d'une suite* $\Lambda$ *de valeurs propres réelles non nulles, tendant vers 0.*

(ii) $$\int_{I^2} |K(s,t)|^2\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t = \sum_{\lambda \in \Lambda \smallsetminus \{0\}} m(\lambda)|\lambda|^2,$$

*où* $m(\lambda) = \dim E_\lambda$ *désigne la multiplicité de* $\lambda \in \Lambda$.

*Démonstration.* (i) Il est clair que les valeurs propres sont réelles puisque $v_K$ est hermitien — cf. Théorème 7.1(iv). L'assertion découle donc de la Proposition 10.5.

(ii) D'après (9·2), nous avons

$$\|K\|^2 = \sum_{n,p} |\,(v_K e_n \,|\, e_p)\,|^2$$

où $\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$ désigne une base hilbertienne de $L^2(I)$. On choisit une base orthonormale de vecteurs propres associée aux valeurs propres de $\Lambda$. Alors $(v_K e_n \,|\, e_p) = \delta_{np}\lambda_n$ pour tous $n, p$. □

Désignant par $\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$ une base hilbertienne associée aux valeurs propres non nulles, nous avons donc

$$v_K f = \sum_{n \geqslant 1} \lambda_n \,(f \,|\, e_n)\, e_n \qquad (f \in L^2(I))$$

puisque, d'après le Corollaire 10.4, on peut écrire

$$f = \sum_{n \geqslant 1} c_n e_n + g$$

avec $g \in \operatorname{Ker} v_K$ et $c_n := (f \,|\, e_n)$ $(n \geqslant 1)$.

Soit alors $\lambda \in \mathbb{C} \smallsetminus (\Lambda \cup \{0\})$, de sorte que l'opérateur $\lambda \operatorname{id}_E - v_K$ est dans le premier cas de l'alternative de Fredholm. Pour toute fonction $g \in L^2(I)$, l'équation intégrale

$$v_K f(t) - \lambda f(t) = \int_I K(s,t) f(s)\, \mathrm{d}s - \lambda f(t) = g(t)$$

possède donc une solution unique, évidemment égale à $f = (v_K - \lambda \operatorname{id}_E)^{-1} g$, qui est bien définie puisque $\lambda \notin \operatorname{Sp} u$.

Explicitons cette solution. Si $p_N$ désigne le projecteur sur $N := \operatorname{Ker} v_K$, nous avons

$$g = p_N g + \sum_{n \geqslant 1} d_n e_n$$

avec $d_n := (g \,|\, e_n) = \int_I g(t) \overline{e_n(t)}\, \mathrm{d}t$. Or, $(v_K - \lambda \operatorname{id}_E)^{-1} h = -h/\lambda$ pour tout $h \in N$, puisque $v_K(-h/\lambda) - \lambda(-h/\lambda) = h$, et $(v_K - \lambda \operatorname{id}_E)^{-1} e_n = e_n/(\lambda_n - \lambda)$ $(n \geqslant 1)$. Nous obtenons donc

$$f = -\frac{p_N g}{\lambda} + \sum_{n \geqslant 1} \frac{d_n e_n}{\lambda_n - \lambda} \cdot$$

Mais $p_N g = g - \sum_{n \geqslant 1} d_n e_n$. Il suit finalement

$$f = \frac{-g}{\lambda} + \sum_{n \geqslant 1} \frac{d_n e_n}{\lambda} + \sum_{n \geqslant 1} \frac{d_n e_n}{\lambda_n - \lambda} = \frac{-g}{\lambda} + \sum_{n \geqslant 1} \frac{\lambda_n d_n e_n}{\lambda(\lambda_n - \lambda)} \cdot \tag{11·3}$$

Nous pouvons également reconstituer $K$ à l'aide des $e_n$. Supposons en effet que $\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$ soit une base hilbertienne complétée à partir d'une base de $\operatorname{Ker} v_K$. Nous avons vu au § 9 que $(\overline{e_n(s)} e_p(t))_{n,p}$ constitue une base orthonormale de $L^2(I \times I)$. Posons $K = \sum_{n,p} \mu_{n,p} \overline{e_n} e_p$, la série double convergeant dans $L^2(I \times I)$. Alors

$$\mu_{np}\,(K \,|\, \overline{e_n} e_p) = \int_I \int_I K(s,t) e_n(s) \overline{e_p(t)}\, \mathrm{d}s\, \mathrm{d}t = \int_I v_K e_n(t) \overline{e_p(t)}\, \mathrm{d}t = \lambda_n \delta_{np}.$$

Il suit

$$K(s,t) = \sum_{n \geqslant 1} \lambda_n \overline{e_n(s)} e_n(t) \qquad ((s,t) \in I \times I),$$

la série étant normiquement convergente dans $L^2(I \times I)$.

*Exemple.* Choisissons $I := [0,1]$ et $K(st) := st$. On a alors

$$v_K f(t) = t \int_0^1 s f(s)\, \mathrm{d}s.$$

Si $f$ est un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda \neq 0$, on a nécessairement $f(t) = \alpha t$, donc

$$v_K f(t) = t \int_0^1 \alpha s^2 \, \mathrm{d}s = \tfrac{1}{3}\alpha t = \tfrac{1}{3} f(t).$$

Il s'ensuit que $\lambda = \frac{1}{3}$ est la seule valeur propre non nulle. Un vecteur propre de norme 1 est donc $t \mapsto e_1(t) = \sqrt{3}t$. La discussion précédente nous permet d'affirmer que, pour tout $\lambda \neq \frac{1}{3}$ et pour toute fonction $g \in L^2[0,1]$, l'équation intégrale $v_K f - \lambda f = g$ possède une unique solution, donnée par la formule :

$$f(t) = \frac{-g(t)}{\lambda} + \frac{d_1 e_1(t)}{\lambda(1-3\lambda)} = \frac{-g(t)}{\lambda} + \frac{3t}{\lambda(1-3\lambda)} \int_0^1 sg(s) \, \mathrm{d}s.$$

On peut effectivement vérifier que cela fournit bien une solution puisque

$$v_K f(t) = \frac{-t}{\lambda} \int_0^1 sg(s) \, \mathrm{d}s + \frac{t}{\lambda(1-3\lambda)} \int_0^1 sg(s) \, \mathrm{d}s = \frac{3t}{1-3\lambda} \int_0^1 sg(s) \, \mathrm{d}s = \lambda f(t) + g(t).$$

Lorsque $\lambda = \frac{1}{3}$, l'opérateur $v_K - \frac{1}{3} \mathrm{id}_E$ est dans le premier cas de l'alternative de Fredholm. L'ensemble des solutions de l'équation homogène $v_K f - \frac{1}{3} f = 0$ est alors la droite vectorielle engendrée par la fonction $t \mapsto t$ et l'équation non homogène $v_K f - \frac{1}{3} f = g$ est résoluble si, et seulement si, $\int_0^1 tg(t) \, \mathrm{d}t = 0$.

Université de Lorraine
Faculté des sciences et technologies
Master de mathématiques 2017/2018
Analyse (MAMT1 UE701 TC)

# III

# Convolution et transformation de Fourier

Dans ce chapitre, nous considérons principalement des fonctions d'une variable réelle. Cependant, la plupart des résultats sont transposables sans difficulté au cas de fonctions définies sur $\mathbb{R}^n$ ($n \geqslant 1$). Certains exercices sont cependant relatifs au cas multidimensionnel.

## 1. Convolution

On appelle convolée (ou produit de convolution) de deux fonctions $f, g$ de variable réelle à valeurs dans $\mathbb{C}$ la fonction définie par

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y \tag{1·1}$$

sur l'ensemble des valeurs de $x$ où l'application $y \mapsto f(x-y)g(y)$ est dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Le théorème du changement de variables montre immédiatement que $g * f(x)$ est définie en tout point $x$ où $f * g(x)$ est définie et que l'on a alors $f * g(x) = g * f(x)$.

**Théorème 1.1.** *Si $f$ et $g$ sont $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, alors $f * g$ est partout définie et l'on a*

$$\|f * g\|_\infty := \sup_{x \in \mathbb{R}} |f * g(x)| \leqslant \|f\|_2 \|g\|_2.$$

*Démonstration.* Pour chaque $x \in \mathbb{R}$, les fonctions $y \mapsto g(y)$ et $y \mapsto f(x-y)$ sont dans $L^2(\mathbb{R})$, donc leur produit est dans $L^1(\mathbb{R})$. L'inégalité de Cauchy–Schwarz fournit alors la conclusion. □

**Théorème 1.2.** *Si $f$ et $g$ sont dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, alors $f * g$ est définie* pp *et l'application $x \mapsto f * g(x)$ peut être prolongée en une fonction de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ qui satisfait*

$$\|f * g\|_1 \leqslant \|f\|_1 \|g\|_1. \tag{1·2}$$

La démonstration utilise le résultat auxiliaire suivant. Nous notons $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions mesurables sur $\mathbb{R}$ et $Esc_0(\mathbb{R})$ celui des fonctions en escalier sur $\mathbb{R}$ à support compact. De plus, nous désignons par $|E|$ la mesure de Lebesgue d'une partie intégrable de $\mathbb{R}$.

**Lemme 1.3.** *Soient $f$ et $g$ deux fonctions de $\mathcal{M}(\mathbb{R})$. Alors la fonction de deux variables $h(x,y) := f(x-y)g(y)$ est dans $\mathcal{M}(\mathbb{R}^2)$.*

*Démonstration du lemme.* Par hypothèse, il existe une suite $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ (resp. $\{g_n\}_{n=1}^\infty$) de fonctions de $Esc_0(\mathbb{R})$ convergeant pp vers $f$ (resp. $g$). Fixons $n$ et désignons par $\{\alpha_i\}_{i=1}^k$ (resp. $\{\beta_j\}_{j=1}^\ell$) l'ensemble (fini) des points de discontinuité de $f_n$ (resp. $g_n$).

Alors l'ensemble des points de discontinuité de $h_n(x,y) := f_n(x-y)g_n(y)$ est contenu dans la réunion des droites $x-y=\alpha_i$ et $y=\beta_j$, donc $h_n$ est Riemann-intégrable et par conséquent mesurable. Il reste à montrer que $h_n \to h$ pp. à cette fin, nous introduisons l'ensemble $N_1$ (resp. $N_2$) des nombres réels $x$ tels que $f_n(x) \not\to f(x)$ (resp. $g_n(x) \not\to g(x)$). Par hypothèse, $N_1$ et $N_2$ sont négligeables et $h_n(x,y)$ tend vers $h(x,y)$ sauf peut-être lorsque $(x,y) \in A \cup B$, avec

$$A := \{(x,y) : x-y \in N_1\}, \qquad B := \{(x,y) : y \in N_2\}.$$

Montrons que $A$ est négligeable, une démonstration semblable étant valable pour $B$. Soit $A_m := A \cap [-m,m]^2$. Alors $A = \cup_{m\geqslant 1} A_m$, et il suffit de prouver que $A_m$ est négligeable. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe une famille dénombrable $\{I_j\}_{j=1}^{\infty}$ d'intervalles ouverts telle que $N_1 \subset \cup_{j\geqslant 1} I_j$ et $\sum_{j\geqslant 1} |I_j| < \varepsilon/2m$. Maintenant, on a $A_m \subset \cup_{j\geqslant 1} C_j$, avec $C_j := \{(x,y) : x-y \in I_j,\ |x| \leqslant m\}$. $C_j$ est un domaine borné limité par un nombre fini de droites, donc $C_j$ est mesurable. On a

$$|C_j| = \int_{-m}^{m} \mathrm{d}x \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{I_j}(x-y)\,\mathrm{d}y = 2m|I_j|.$$

Par l'additivité dénombrable de la mesure de Lebesgue, il suit

$$|\cup_{j=1}^{\infty} C_j| \leqslant 2m \sum_{j\geqslant 1} |I_j| < \varepsilon.$$

Ainsi, pour chaque $p \geqslant 1$, il existe un ensemble mesurable $E_p$ tel que $|E_p| \leqslant 1/p$ et $A_m \subset E_p$. On a $A_m \subset E := \cap_p E_p$ et $|E| = 0$. Donc $A_m$ est bien négligeable. Cela achève la démonstration du lemme. □

*Démonstration du Théorème 1.2.* Voir cours oral. □

Bien entendu, la classe dans $L^1(\mathbb{R})$ du produit de convolution de deux fonctions de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ ne dépend que des classes de $f$ et $g$ dans $L^1(\mathbb{R})$. On peut donc définir le produit de convolution dans $L^1(\mathbb{R})$, et c'est sous cette forme que nous considérerons désormais le produit de convolution.

Il découle immédiatement du théorème de Fubini et de l'invariance par translation de la mesure de Lebesgue que l'on a pour toutes fonctions $f, g$ de $L^1(\mathbb{R})$

$$(1{\cdot}3) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f * g(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x.$$

La convolution permet de montrer que l'ensemble $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ des fonctions $C^\infty$ à support compact est dense dans $L^1(\mathbb{R})$ — cf. Exercice 46.

On peut définir également le produit de convolution d'une fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$ par une fonction $g \in L^p(\mathbb{R})$ ($1 \leqslant p \leqslant \infty$). Le théorème de Fubini permet, par une démonstration analogue à celle du Théorème 1.2, mais utilisant à présent l'inégalité de Hölder, de montrer que l'intégrale (1·1) converge pp et définit une fonction de $L^p(\mathbb{R})$ telle que

$$\|f * g\|_p \leqslant \|f\|_1 \|g\|_p$$

## 2. Transformation de Fourier

On désigne par $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \to L^\infty(\mathbb{R})$ l'application qui à toute fonction intégrable $f$ associe la fonction définie par

$$\mathcal{F}f(\xi) = \widehat{f}(\xi) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-2\pi i\xi x}\,\mathrm{d}x.$$

Il est en effet immédiat que $\widehat{f}$ est bornée : on a $\|\widehat{f}\|_\infty \leqslant \|f\|_1$. On pose également

$$\overline{\mathcal{F}}f(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{2\pi i\xi x}\,\mathrm{d}x.$$

On vérifie sans difficulté que $\mathcal{F}$ est linéaire. Désignons par $\tau_y : L^1(\mathbb{R}) \to L^1(\mathbb{R})$ la translation définie par $\tau_y f(x) = f(x-y)$. Alors on a

$$\widehat{\tau_y f}(\xi) = \mathrm{e}^{-2\pi i\xi y}\widehat{f}(\xi). \tag{2·1}$$

Semblablement, pour $g(x) := Tf(Tx)$ avec $T > 0$ on a

$$\widehat{g}(\xi) = \widehat{f}(\xi/T). \tag{2·2}$$

En dimension $n$, on pose semblablement

$$\mathcal{F}f(\boldsymbol{\xi}) = \widehat{f}(\boldsymbol{\xi}) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x})\mathrm{e}^{-2\pi i(\boldsymbol{x}\,|\,\boldsymbol{\xi})}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

**Théorème 2.1 (Riemann–Lebesgue).** *Pour toute fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$, la fonction $\xi \mapsto \widehat{f}(\xi)$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ et tend vers 0 lorsque $|\xi| \to \infty$.*

*Démonstration.* Pour tout $\eta \in \mathbb{R}$, nous avons

$$\begin{aligned}|\widehat{f}(\xi+\eta) - \widehat{f}(\xi)| &\leqslant \int_{\mathbb{R}} |\mathrm{e}^{2\pi i\eta x} - 1||f(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant 2\int_{\mathbb{R}} \min(|\pi\eta x|, 1)|f(x)|\,\mathrm{d}x \\ &\leqslant 2\pi\sqrt{|\eta|}\,\|f\|_1 + 2\int_{|x|>1/\sqrt{|\eta|}} |f(x)|\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

une quantité qui tend vers 0 avec $\eta$ indépendamment de $\xi$.

Par ailleurs, $\lim_{|\xi|\to\infty} \widehat{f}(\xi) = 0$ si $f \in Esc_0(\mathbb{R})$. Le résultat s'étend donc à $L^1(\mathbb{R})$ par densité. □

Soit $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ l'espace de Banach des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ qui tendent vers 0 à l'infini. Le théorème de Riemann-Lebesgue montre que $\mathcal{F} \in \mathcal{L}(L^1(\mathbb{R}), \mathcal{C}_0(\mathbb{R}))$ puisque $\mathcal{F}$ est linéaire et que $\|\widehat{f}\|_\infty \leqslant \|f\|_1$. En revanche, la transformation de Fourier n'est pas surjective sur $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ : voir l'Exercice 49 pour une démonstration simple de ce fait.

La propriété fondamentale de la transformation de Fourier énoncée dans le théorème suivant est une conséquence immédiate de la formule (1·3), appliquée aux fonctions $F : x \mapsto \mathrm{e}^{-2\pi i\xi x}f(x)$ et $G : x \mapsto \mathrm{e}^{-2\pi i\xi x}g(x)$.

**Théorème 2.2.** *Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, on a $\widehat{f * g}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi)$.*

*Démonstration.* Nous avons en effet

$$F * G(x) = \int_{\mathbb{R}} F(x-y)G(y)\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-2\pi i\xi x} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y$$

donc le théorème de Fubini implique $\int F * G(x)\,\mathrm{d}x = \widehat{(f*g)}(\xi)$, alors que ; d'après (1·3), $\int F * G(x)\,\mathrm{d}x = \int F(x)\,\mathrm{d}x \int G(x)\,\mathrm{d}x = \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi)$. □

**Théorème 2.3.** (i) *Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ une fonction dérivable telle que $f'$ soit bornée sur tout intervalle compact $[a,b]$ et intégrable sur $\mathbb{R}$. Alors on a*

$$\widehat{f'}(\xi) = 2\pi i\xi \widehat{f}(\xi) \qquad (\xi \in \mathbb{R}). \tag{2·3}$$

(ii) *Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $g : x \mapsto xf(x)$ soit également intégrable sur $\mathbb{R}$. Alors $\widehat{f}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et l'on a*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\widehat{f}(\xi) = -2\pi i\,\widehat{g}(\xi). \tag{2·4}$$

La démonstration de ce résultat repose sur deux lemmes de la théorie de l'intégration.

**Lemme 2.4.** *Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, dérivable sur ]a,b[, et telle que $f' \in L^1[a,b] \cap L^\infty([a,b])$.*[(1)] *Alors*

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x. \tag{2·5}$$

*Démonstration.* Soit $h > 0$ assez petit. Alors

$$F(h) := \frac{1}{h}\int_{b-h}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t \to f(b)$$

lorsque $h \to 0$ car $f$ est continue en $b$. Mais

$$F(h) = \frac{1}{h}\int_a^{a+h} f(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{h}\int_{a+h}^{b} \{f(t) - f(t-h)\}\,\mathrm{d}t.$$

Le théorème de continuité sous le signe d'intégration, qui est applicable car

$$\left|\frac{f(t) - f(t-h)}{h}\right| = |f'(t+\vartheta h)| \leqslant M,$$

fournit donc $\lim_{h\to 0} F(h) = f(a) + \int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t$. □

**Lemme 2.5.** *Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, et $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ des fonctions de $L^1[a,b]$. On a pose $F(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$, $G(x) := \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$. Alors*

$$\int_a^b F(x)g(x)\,\mathrm{d}x = F(b)G(b) - \int_a^b f(x)G(x)\,\mathrm{d}x. \tag{2·6}$$

*Démonstration.* Voir cours oral. □

*Démonstration du Théorème 2.3.* Voir cours oral. □

1. Si $f \in L^\infty[a,b]$, il existe $M \in \mathbb{R}^+$ et $\mathcal{N}$ négligeable tels que $|f(x)| \leqslant M$ pour $x \in [a,b] \smallsetminus \mathcal{N}$. En définissant $f(x) = 0$ pour $x \in \mathcal{N}$, ce qui ne modifie pas la classe de $f$ dans $L^1[a,b]$, on peut donc supposer que $|f(x)| \leqslant M$ pour $x \in [a,b]$.

Nous rassemblons dans le théorème ci-dessous quelques calculs explicites de transformées de Fourier.

**Théorème 2.6.** *Posons, pour $a > 0$, $T > 0$,*

$$\varphi_a(x) := \frac{a}{\pi(a^2+x^2)}, \qquad \psi_a(x) := a^{-1/2}\mathrm{e}^{-\pi x^2/a}, \qquad w_T(x) := T\Big(\frac{\sin(\pi Tx)}{\pi Tx}\Big)^2.$$

*On a*

$$\widehat{\varphi_a}(\xi) = \mathrm{e}^{-2\pi a|\xi|}, \qquad \widehat{\psi_a}(\xi) = \mathrm{e}^{-\pi a\xi^2}, \qquad \widehat{w_T}(\xi) = \max(1-|\xi|/T, 0) = \big(1-|\xi|/T\big)^+.$$

*Démonstration.* La formule pour $\widehat{\varphi_a}(\xi)$ est obtenue par un calcul standard de résidus. Celle qui fournit $\widehat{w_T}(\xi)$ est du même type, mais un peu plus délicate : voir l'Exercice 48.

Calculons $\widehat{\psi_a}(\xi)$. Il suffit de considérer le cas $a = 1$, puisque (2·2) appliquée avec $T = 1/\sqrt{a}$ fournit le cas général. Par dérivation sous le signe d'intégration, on peut écrire

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\widehat{\psi_1}(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\pi x^2-2\pi i\xi x}(-2\pi ix)\,\mathrm{d}x\\ &= -i\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\pi x^2-2\pi i\xi x}(2\pi x+2\pi i\xi)\,\mathrm{d}x - 2\pi\xi\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\pi x^2-2\pi i\xi x}\,\mathrm{d}x\\ &= -2\pi\xi\widehat{\psi_1}(\xi).\end{aligned}$$

En résolvant l'équation différentielle, on obtient que $\widehat{\psi_1}(\xi) = \widehat{\psi_1}(0)\mathrm{e}^{-\pi\xi^2}$. Or, un calcul classique utilisant les coordonnées polaires fournit $\widehat{\psi_1}(0)^2 = 1$. Cela implique bien la formule annoncée. □

## 3. Formules d'inversion

Le résultat suivant, qui possède un intérêt intrinsèque, nous sera utile pour établir la formule d'inversion.

**Théorème 3.1.** *Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. On a*

$$\lim_{y\to 0}\|f-\tau_y f\|_1 = \lim_{T\to\infty}\|f - f * w_T\|_1 = 0.$$

*Démonstration.* Soit $\mathcal{C}_K(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues à support compact. La continuité uniforme implique immédiatement que $\|f-\tau_y f\|_1 \to 0$ lorsque $f \in \mathcal{C}_K(\mathbb{R})$. Comme $\mathcal{C}_K(\mathbb{R})$ est dense dans $L^1(\mathbb{R})$, il existe pour tout $\varepsilon > 0$ une fonction $\varphi$ de $\mathcal{C}_K(\mathbb{R})$ telle que $\|f-\varphi\|_1 \leqslant \varepsilon$, et donc

$$\begin{aligned}\|f-\tau_y f\|_1 &\leqslant \|f-\varphi\|_1 + \|\varphi-\tau_y\varphi\|_1 + \|\tau_y\varphi - \tau_y f\|_1 = 2\|f-\varphi\|_1 + \|\varphi-\tau_y\varphi\|_1\\ &\leqslant 2\varepsilon + \|\varphi - \tau_y\varphi\|_1.\end{aligned}$$

En faisant tendre $y$ puis $\varepsilon$ vers 0, nous obtenons bien le résultat annoncé.

Montrons à présent la formule relative à $w_T$. Posons $f_T(x) := f * w_T(x)$. Nous avons

$$f_T(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)\Big(\frac{\sin \pi Ty}{\pi Ty}\Big)^2 T\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} f(x-y/T)w_1(y)\,\mathrm{d}y.$$

Comme $\widehat{w}_1(0) = 1$ par le Théorème 2.6, nous avons

$$f_T(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}} \{f(x - y/T) - f(x)\} w_1(y)\,\mathrm{d}y$$

et donc

$$\|f_T - f\|_1 \leqslant \int_{\mathbb{R}} \|\tau_{y/T} f - f\|_1 w_1(y)\,\mathrm{d}y.$$

Grâce à la première partie de la démonstration, nous obtenons bien le résultat souhaité par le théorème de Lebesgue. □

**Théorème 3.2 (Réciprocité $L^1$).** *Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. Alors on a*

$$f(x) = \overline{\mathcal{F}}\widehat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi) \mathrm{e}^{2\pi i \xi x}\,\mathrm{d}\xi \quad \text{pp.} \tag{3·1}$$

*L'égalité* (3·1) *a lieu en particulier en tout point de continuité de $f$.*

*Démonstration.* La preuve repose sur la formule

$$w_T(x) = \int_{-T}^{T} \Big(1 - \frac{|\xi|}{T}\Big) \mathrm{e}^{2\pi i \xi x}\,\mathrm{d}\xi, \tag{3·2}$$

qui est établie élémentairement. Maintenant, on a

$$\begin{aligned} f * w_T(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)\,\mathrm{d}y \int_{-T}^{T} \Big(1 - \frac{|\xi|}{T}\Big) \mathrm{e}^{2\pi i \xi y}\,\mathrm{d}\xi \\ &= \int_{-T}^{T} \Big(1 - \frac{|\xi|}{T}\Big) \mathrm{e}^{2\pi i \xi x}\,\mathrm{d}\xi \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y) \mathrm{e}^{-2\pi i \xi (x-y)}\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{-T}^{T} \Big(1 - \frac{|\xi|}{T}\Big) \mathrm{e}^{2\pi i \xi x} \widehat{f}(\xi)\,\mathrm{d}\xi, \end{aligned} \tag{3·3}$$

où nous avons utilisé successivement le théorème de Fubini et le changement de variables $z = x - y$. Si $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, le théorème de Lebesgue implique donc que l'on a pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{T \to \infty} f * w_T(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi) \mathrm{e}^{2\pi i \xi x}\,\mathrm{d}\xi. \tag{3·4}$$

Or, il découle du Théorème 3.1 que la limite précédente est égale à $f(x)$ pp. Cela fournit bien (3·1).

Pour établir que (3·1) est valable en tout point de continuité de $f$, nous utilisons le Théorème 2.6 sous la forme $\widehat{w_1}(0) = 1$. Cela permet d'écrire pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(x) - f * w_T(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) w_1(y)\,\mathrm{d}y - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - y/T) w_1(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \big(f(x) - f(x - y/T)\big) w_1(y)\,\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Comme $w_1 \geqslant 0$, on en déduit

$$|f(x) - f * w_T(x)| \leqslant \sup_{|h| \leqslant T^{-1/3}} |f(x) - f(x-h)| \widehat{w_1}(0) + \int_{|y| > T^{2/3}} \{|f(x)| + |f(x - y/T)|\} \frac{\mathrm{d}y}{\pi^2 y^2}.$$

Supposons que $f$ soit continue au point $x$. Alors le premier terme du membre de droite tend vers 0 lorsque $T \to \infty$. De plus, la dernière intégrale n'excède pas

$$\frac{2|f(x)|}{\pi^2 T^{2/3}} + \frac{1}{\pi^2 T^{1/3}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x - y/T)| \, \mathrm{d}(y/T) = \frac{2|f(x)|}{\pi^2 T^{2/3}} + \frac{\|f\|_1}{\pi^2 T^{1/3}}.$$

Elle tend donc vers 0 lorsque $T \to \infty$. Compte tenu de (3·4), cela achève la démonstration. □

**Corollaire 3.3.** *La transformation de Fourier est injective sur* $L^1(\mathbb{R})$.

*Démonstration.* Il suffit de montrer que le noyau est réduit à $\{0\}$. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\mathcal{F}f = 0$. Alors $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ et la formule (3·1) implique $f = 0$. □

Lorsqu'une fonction $f$ possède des limites latérales en $x$, on pose

$$\widetilde{f}(x) = \tfrac{1}{2}\big(f(x+) + f(x-)\big).$$

Par ailleurs, rappelons qu'une fonction $f : I \to \mathbb{C}$ définie sur un intervalle fermé $I$ est dite de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux s'il existe une famille finie $\{I_j\}_{j=1}^k$ de sous-intervalles ouverts disjoints de $I$ telle que $I = \cup_{1 \leqslant j \leqslant k} \overline{I_j}$, $f$ soit de classe $\mathcal{C}^1$ sur chaque $I_j$ et $f'$ possède des limites latérales finies aux extrémités de chaque $I_j$. Le théorème suivant fournit des conditions suffisantes sur le comportement de $f$ pour que l'intégrale de Fourier inverse de $f$ soit semi-convergente au sens de Cauchy et ait pour valeur $\widetilde{f}(x)$.

**Théorème 3.4 (Inversion locale).** *Soit* $f \in L^1(\mathbb{R})$. *Si* $f$ *possède des limites latérales en* $x$, *on a*

$$\widetilde{f}(x) = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} \Big(1 - \frac{|\xi|}{T}\Big) \widehat{f}(\xi) \mathrm{e}^{2\pi i \xi x} \, \mathrm{d}\xi. \tag{3·5}$$

*Si de plus la fonction* $\varphi_x(y) := \big(2\widetilde{f}(x) - f(x+y) - f(x-y)\big)/y$ *est intégrable sur* $]0,1[$, *et en particulier lorsque* $f$ *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *par morceaux dans un voisinage de* $x$, *on a*

$$\widetilde{f}(x) = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} \widehat{f}(\xi) \mathrm{e}^{2\pi i \xi x} \, \mathrm{d}\xi. \tag{3·6}$$

En pratique, il faut donc retenir que (3·6) a lieu *partout* si $f$ est $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$.

*Démonstration du Théorème 3.4.* Voir cours oral. □

## 4. Transformation de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$

Nous utiliserons dans ce qui suit le résultat de l'Exercice 53, soit

$$\|f\|_2 = \|\widehat{f}\|_2 \tag{4·1}$$

pour toute fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. Il est à noter que la formule de réciprocité $L^1$ implique immédiatement que sous ces hypothèses $f$ et $\widehat{f}$ sont bornées et sont donc dans $L^2(\mathbb{R})$.

**Théorème 4.1.** (i) *L'espace* $E := L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ *est dense dans* $L^2(\mathbb{R})$ *pour la norme* $L^2$.

(ii) *L'espace* $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ *est dense dans* $E$ *pour la norme* $\|f\| := \|f\|_1 + \|f\|_2$.

(iii) *Pour toute fonction* $f$ *de* $E$, *on a* $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ *et la relation* (4·1) *est satisfaite.*

*Démonstration.* (i) Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$. Alors $f_T := f\mathbf{1}_{[-T,T]} \in E$ et

$$\|f - f_T\|_2^2 = \int_{|x|>T} |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x$$

tend vers 0 lorsque $T \to \infty$ par le théorème de Lebesgue.

(ii) Observons d'abord que l'on a

$$\lim_{y\to 0} \|f - \tau_y f\|_2 = 0.$$

Cela découle facilement du fait que l'espace $\mathcal{C}_K(\mathbb{R})$ des fonctions continues à support compact est dense dans $L^2(\mathbb{R})$, et nous omettons les détails, qui sont analogues à ceux de la preuve du Théorème 3.1.

Soit $f \in E$. Pour $a > 0$, posons $g_a = f * \varphi_a$ où $\varphi_a$ est définie au Théorème 2.6 Cette convolution est bien définie puisque $\varphi_a \in L^2(\mathbb{R})$ (cf. Théorème 1.1). Par dérivation sous le signe d'intégration (voir les détails à l'Exercice 46), on montre que $g_a$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$. De plus, comme $\widehat{\varphi_1}(0) = 1$ on a

$$f(x) - g_a(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \big\{f(x) - f(x - ay)\big\}\varphi_1(y)\,\mathrm{d}y,$$

d'où, par l'inégalité de Cauchy–Schwarz,

$$|f(x) - g_a(x)|^2 \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} \big|f(x) - f(x - ay)\big|^2 \varphi_1(y)\,\mathrm{d}y.$$

Le théorème de Fubini permet donc d'écrire

$$\|f - g_a\|_2^2 \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} \|f - \tau_{ay} f\|_2^2 \,\varphi_1(y)\,\mathrm{d}y.$$

Le théorème de Lebesgue implique que la dernière intégrale tend vers 0 lorsque $a \to 0$. On a donc $\lim_{a\to 0} \|f - g_a\|_2 = 0$. On établit de la même manière que $\lim_{a\to 0} \|f - g_a\|_1 = 0$. Enfin, désignant par $\vartheta_\varepsilon$ la fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ construite à l'Exercice 46, on montre facilement que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|\vartheta_\varepsilon g_a - g_a\|_j = 0 \qquad (j = 1, 2).$$

Cela implique bien que $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est dense dans $E$ pour la norme indiquée.

(iii) Si $f \in E$, on a

$$\widehat{g_a}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\widehat{\varphi_a}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\mathrm{e}^{-2\pi a|\xi|} \to \widehat{f}(\xi) \quad (a \to 0) \qquad \text{et} \qquad \|\widehat{g_a}\|_2 = \|g_a\|_2 \to \|f\|_2,$$

où nous avons utilisé (4·1) pour $g_a$. Par le lemme de Fatou,[(2)] cela implique que $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R})$. Comme de plus $|\widehat{g_a}| \leqslant |\widehat{f}|$, on peut appliquer le théorème de Lebesgue pour établir que

$$\|f\|_2 = \lim_{a\to 0} \|g_a\|_2 = \lim_{a\to 0} \|\widehat{g_a}\|_2 = \|\widehat{f}\|_2.$$

Cela achève la démonstration du théorème. □

2. Si $\{f_n\}_{n=0}^\infty \in L^1(\mathbb{R})^\mathbb{N}$, $f_n \to f$ pp $\liminf_n \|f_n\|_1 < \infty$, alors $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $\|f\|_1 \leqslant \liminf_n \|f_n\|_1$.

**Théorème 4.2 (Plancherel).** *Il existe un unique opérateur* $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ *ayant les propriétés suivantes :*

(i) $\mathcal{F}f(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-2\pi i\xi x}\,\mathrm{d}x$ *si* $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$,

(ii) $(\forall f \in L^2(\mathbb{R})) \qquad \|\mathcal{F}f\|_2 = \|f\|_2$

(iii) $\mathcal{F}$ *est bijective et, plus précisément, on a :* $(\forall f \in L^2(\mathbb{R})) \quad \mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}f = \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}f = f.$

*Démonstration.* Observons d'abord qu'il existe au plus un opérateur satisfaisant les propriétés (i) et (ii). En effet, si $f \in L^2(\mathbb{R})$, toute suite $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ de fonction de $E = L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ convergeant vers $f$ dans $L^2(\mathbb{R})$ est telle que $\{\widehat{f_n}\}_{n=1}^{\infty}$ est de Cauchy, donc convergente, dans $L^2(\mathbb{R})$ et, puisque $\|\mathcal{F}f - \widehat{f_n}\|_2 = \|f - f_n\|_2$ on doit avoir

$$\mathcal{F}f := \lim_{n\to\infty} \mathcal{F}f_n \tag{4·2}$$

où la limite est prise dans $L^2(\mathbb{R})$.

Il est de plus évident que la formule (4·2) définit bien une isométrie sur $L^2(\mathbb{R})$ puisque la validité de (4·1) dans $E$ implique que la limite est indépendante de la suite $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ de fonctions de $E$ convergeant vers $f$ dans $L^2(\mathbb{R})$.

Il reste à établir le point (iii). Observons d'abord que la transformée de Fourier d'une fonction $h$ de classe $\mathcal{C}^2$ à support compact est nécessairement intégrable. En fait on a, grâce au Théorème 2.3(i),

$$|\widehat{h}(\xi)| \leqslant \min\{\|h\|_1,\, \|h''\|_1/(4\pi^2\xi^2)\} \qquad (\xi \in \mathbb{R}).$$

Par le Théorème 3.2, on a donc $h = \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}h = \mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}h$. Notons que $\overline{\mathcal{F}}h$ est intégrable et bornée, donc dans $L^2(\mathbb{R})$. Considérons alors une fonction quelconque $f \in L^2(\mathbb{R})$. Il existe une suite $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ de fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ convergeant dans $L^2(\mathbb{R})$ vers $f$. D'après ce que nous venons de voir, on a $\mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}h_n = h_n$ pour chaque indice $n$ et, en appliquant deux fois (ii), $\|\mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}h_n - \mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}f\|_2 = \|h_n - f\|_2 \to 0$ (noter que $\overline{\mathcal{F}}g = \mathcal{F}\breve{g}$ où $\breve{g}$ est définie par $\breve{g}(x) = g(-x)$). Ainsi $f = \lim_n h_n = \lim_n \mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}h_n = \mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}f$. La relation $\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}f = f$ est établie de manière identique. Cela complète la démonstration du théorème. □

*Remarque.* Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$. Alors $f_n := f\mathbf{1}_{[-n,n]} \in E$ et $f_n$ converge vers $f$ dans $L^2(\mathbb{R})$. D'après un théorème classique d'intégration[(3)] il existe donc une suite d'entiers strictement croissante $\{n_j\}_{j=1}^{\infty}$ telle que

$$\mathcal{F}f(\xi) = \lim_{j\to\infty} \int_{-n_j}^{n_j} f(x)\mathrm{e}^{-2\pi i\xi x}\,\mathrm{d}x \qquad \text{pp.} \tag{4·3}$$

Il existe un autre espace, plus simple, sur lequel la transformée de Fourier est un isomorphisme, l'espace de Schwartz, des fonctions à décroissance rapide : voir l'Exercice 64.

Il est à noter qu'une démonstration en tout point analogue permet de définir $\mathcal{F}$ sur $L^p(\mathbb{R})$ pour $p \in [1, 2]$. On peut alors montrer que $\mathcal{F}(L^p(\mathbb{R})) \subset L^q(\mathbb{R})$ où $q := p/(p-1)$ l'exposant conjugué de $p$. Cependant $\mathcal{F}$ n'est plus une isométrie et n'est plus surjective si $p \neq 2$. Les relations

$$\|\widehat{f}\|_\infty \leqslant \|f\|_1, \quad \|\widehat{f}\|_2 = \|f\|_2,$$

3. Soit $p \in [1, \infty[$. Alors $L^p(\mathbb{R})$ est complet et, de toute suite de Cauchy $\{f_n\}_{n=0}^{\infty} \in L^p(\mathbb{R})$, on peut extraire une sous-suite convergeant pp et en norme $L^p$ vers la limite dans $L^p(\mathbb{R})$ de la suite convergente $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$.

respectivement valables pour $f \in L^1(\mathbb{R})$, $f \in L^2(\mathbb{R})$, se généralisent en

$$\|\widehat{f}\|_q \leqslant \|f\|_p \qquad (f \in L^p(\mathbb{R})). \tag{4·4}$$

C'est l'inégalité de Hausdorff-Young.

**Théorème 4.3.** *Soient $f \in L^1(\mathbb{R})$, $g \in L^2(\mathbb{R})$. Alors on a*

$$\widehat{f * g}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi) \qquad \text{pp.} \tag{4·5}$$

*Démonstration.* Nous avons vu au paragraphe 1 que $f * g \in L^2(\mathbb{R})$, donc les deux membres de (4·5) sont bien définis pp. D'après le Théorème 4.1, il existe une suite $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ de fonctions de $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ qui tend vers $g$ dans $L^2(\mathbb{R})$. Quitte à extraire une sous-suite, nous pouvons supposer que $\widehat{g_n}(\xi) \to \widehat{g}(\xi)$ pp — voir la note 3. Par le Théorème 2.2 (cas de $f, g \in L^1(\mathbb{R})$), il suit

$$\lim_{n\to\infty} \widehat{f * g_n}(\xi) = \lim_{n\to\infty} \widehat{f}(\xi)\widehat{g}_n(\xi) = \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi) \qquad \text{pp.}$$

Par ailleurs, nous avons grâce au théorème de Plancherel

$$\|\widehat{f * g} - \widehat{f * g_n}\|_2 \;=\; \|f * g - f * g_n\|_2 \;=\; \|f * (g - g_n)\|_2 \;\leqslant\; \|f\|_1 \, \|g - g_n\|_2,$$

de sorte que $\widehat{f * g_n}$ tend vers $\widehat{f * g}$ dans $L^2(\mathbb{R})$. En extrayant au besoin une nouvelle sous-suite, on peut donc écrire

$$\lim_{n\to\infty} \widehat{f * g_n}(\xi) = \widehat{f * g}(\xi) \qquad \text{pp,}$$

d'où le résultat annoncé. □

Université de Lorraine
Faculté des sciences et technologies
Master de mathématiques 2017/2018
Analyse (MAMT1 UE701 TC)

# Exercices sur les espaces vectoriels normés

**1.** Soit $E$ est un espace métrique localement compact non compact, on dit qu'une fonction numérique $f : E \to \mathbb{R}$ tend vers $+\infty$ à l'infini si l'on a

$$\forall A > 0\ \exists K \subset E,\ K\text{compact} : \inf_{x \in E \smallsetminus K} f(x) > A.$$

Montrer que, dans ce cas et si $f$ est supposée continue, alors elle est minorée et atteint sa borne inférieure.[1]

**2.** Déduire du résultat établi à l'Exercice 1 une preuve du théorème de d'Alembert–Gauss : Tout polynôme non constant à coefficients complexes admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

**3.** Soit $(E, d)$ un espace métrique et $f : E \to \mathbb{R}$ une application injective.

(a) Montrer que l'application $d_f : E^2 \to \mathbb{R}^+$ définie par $d_f(x, y) = |f(x) - f(y)|$ est une distance sur $E$.

(b) L'espace métrique $(\mathbb{R}, d_f)$ est-il complet dans les cas suivant : $f(x) = x^3$, $f(x) = \mathrm{e}^x$ ?

(c) L'espace métrique $(\mathbb{R}^{+*}, d_{\ln})$ est-il complet ?

(d) Trouver, dans le cas général, une condition nécessaire et suffisante sur $f$ pour que $(E, d)$ soit complet.

**4.** *Applications contractantes.*

(a) Rappeler la démonstration du théorème du point fixe pour une application strictement contractante d'un espace métrique complet.

(b) Soient $(E, d)$ un espace métrique complet et $f : E \to E$ une application telle que, pour un entier $n \geqslant 1$ convenable, l'itérée $f^n$ soit strictement contractante, de point fixe $x_n$.

(i) Montrer que tout point fixe de $f$ est un point fixe pour $f^n$.

(ii) Montrer que si $x \in E$ est un point fixe de $f^n$, alors il en va de même de $f(x)$.

(iii) Montrer que $x_n$ est l'unique point fixe de $f$.

**5.** Montrer que les espaces vectoriels normés suivants sont des espaces de Banach.

(a) $\mathcal{C}(E, F)$ muni de la norme de la convergence uniforme $\|f\| := \sup_E \|f(x)\|$ lorsque $E$ est un espace métrique compact et $F$ un espace métrique complet.

(b) $\ell_0(\mathbb{K})$, sous-espace de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) constitué des suites tendant vers 0 et muni de la norme $\|\boldsymbol{x}\| := \sup |x_j|$.

(c) $\ell_1(\mathbb{K})$, sous-espace de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ constitué des suites $\boldsymbol{x} = (x_j)_{j \geqslant 0}$ telles que

$$\|\boldsymbol{x}\| := \sum |x_j| < \infty,$$

et muni de cette même norme.

1. Autrement dit, $f$ admet un minimum.

**6.** On définit une suite $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ de fonctions de $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ par $f_n(x) := x^n$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$. Montrer que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ n'admet aucune valeur d'adhérence pour la norme de la convergence uniforme.

**7.** *Une forme linéaire sur* $\ell_0(\mathbb{C})$.

Soit $\ell_0(\mathbb{C})$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ formé des suites complexes convergeant vers 0, muni de la norme de la convergence uniforme. Pour $\boldsymbol{x} = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell_0(\mathbb{C})$, on pose $f(\boldsymbol{x}) := \sum_{n\geqslant 1} x_n/2^n$.

(a) Montrer que $f$ est une forme linéaire continue et calculer $\|f\|$.

(b) Existe-t-il $\boldsymbol{x} \in \ell_0(\mathbb{C})$ tel que $\|\boldsymbol{x}\| = 1$ et $|f(\boldsymbol{x})| = \|f\|$ ?

**8.** Soit $a > 0$. Sur l'espace $E := \mathcal{C}^{\infty}\big([0,a],\mathbb{R}\big)$, on considère les deux normes définies par

$$\|f\|_0 := \sup_{0\leqslant x\leqslant a} |f(x)|, \qquad \|f\|_1 := |f(0)| + \sup_{0\leqslant x\leqslant a} |f'(x)|.$$

On considère alors l'application linéaire identité $T : (E, \|\cdot\|_1) \to (E, \|\cdot\|_0)$ définie par $T(f) = f$.

(a) Montrer que $T$ est continue et calculer sa norme d'opérateur $\|T\|$.

(b) Montrer que $T^{-1}$ n'est pas continue. Y a-t-il contradiction avec le théorème de l'isomorphisme ?

(c) Montrer que $F := \mathcal{C}^1([0,a],\mathbb{R})$ est complet pour la norme $\|\cdot\|_1$.

**9.** Montrer qu'un sous-espace métrique d'un espace métrique séparable est séparable.

**10.** *Avec le principe de Baire.* Soit $(E,d)$ un espace métrique complet.

(i) Soit $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite de fermés de $E$ telle que $E = \cup_n F_n$. Montrer que l'ouvert $G := \cup_n \overset{\circ}{F_n}$ est partout dense dans $E$.[(2)]

(ii) Soit $\{O_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite d'ouverts denses dans $E$. Montrer que $H := \cap_n O_n$ est partout dense.[(3)]

**11.** *Une application du principe de Baire.* Pour $r \in \mathbb{Q}^*$, avec $r = p/q$, $(p,q) = 1$ on pose et $J_n(r) :=]r - 1/(2q)^n, r + 1/(2q)^n[$. Soit $L_n := \cup_{r\in\mathbb{Q}^*} J_n(r)$. Montrer que $L_n$ est un ouvert partout dense dans $\mathbb{R}$ et que $L := \cap_n L_n$ est également partout dense. Montrer que $\alpha := \sum_{n\geqslant 1} 2^{-n!} \in L \smallsetminus \mathbb{Q}$.

**12.** *Une application du théorème de Banach-Steinhaus.* Montrer que $\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{C})$ coïncide avec l'ensemble des suites $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telles que la série $\sum_{n\geqslant 0} |x_n y_n|$ converge pour tout $\boldsymbol{y} \in \ell^2(\mathbb{N},\mathbb{C})$.

**13.** Soient $E$, $F$ deux espaces de Banach et $\{T_n\}_{n=0}^{\infty} \in \mathcal{L}(E,F)^{\mathbb{N}}$. On suppose que, pour chaque $x \in E$, la suite $\{T_n x\}_{n=0}^{\infty}$ converge vers une limite, notée $Tx \in F$. Montrer que si $x_n \to x$ dans $E$ alors $T_n x_n \to Tx$ dans $F$.

---

2. On pourra montrer que, pour tout ouvert non vide $V$ de $E$ et tout fermé d'intérieur non vide $W \subset V$, on a $\overset{\circ}{F_n} \cap W \neq \varnothing$ pour au moins un $n \geqslant 1$ en appliquant le théorème de Baire à la famille des $F_n^* := F_n \cap W$ dont chaque élément est un fermé de $W$. On rappelle que $\overset{\circ}{A \cap B} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$ pour toutes parties $A$, $B$ d'un espace métrique.

3. On rappelle que $\overline{A}^c = (\overset{\circ}{A^c})$ pour toute partie $A$ d'un espace métrique.

**14.** *Optimalité du théorème de Banach.* Le but de cet exercice est de montrer que l'hypothèse de complétude de l'espace d'arrivée est indispensable à la validité du Théorème I.2.13.

Soit $E = \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$, muni de la norme de la convergence uniforme $\|f\|_\infty$. On pose $\|f\|_0 = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$.

(a) L'espace $E$ est-il complet pour la norme $f \mapsto \|f\|_\infty$ ? pour la norme $f \mapsto \|f\|_0$ ?

(b) L'identité est-elle continue en tant qu'application de $(E, \|\cdot\|_\infty)$ dans $(E, \|\cdot\|_0)$ ? En tant qu'application de $(E, \|\cdot\|_0)$ dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$ ?

(c) Conclure.

**15.** Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé.

(a) Soit $H = \operatorname{Ker} T$ un hyperplan de $E$. Montrer que $E = H + \mathbb{R}y$ pour tout $y \in E$ tel que $T(y) \neq 0$. En déduire que $H$ est soit fermé soit dense dans $E$.[4]

(b) Montrer qu'une forme linéaire $T : E \to \mathbb{R}$ est continue si, et seulement si, son noyau $H = \operatorname{Ker}(T)$ est fermé. Lorsque $T \neq 0$, on pourra introduire un vecteur $y_0$ tel que $T(y_0) = 1$ et montrer que $|T(x)|d(y_0, H) \leqslant d(x, H) \leqslant \|x\|$ pour tout $x \in E$.

(c) Montrer que, si $T$ est une forme linéaire continue non nulle, alors $\|T\|d(y_0, H) = 1$ et $d(x, H) = |T(x)|/\|T\|$ pour tout $x$ de $E$.

**16.** *Normes équivalentes.* Soit $E$ un espace vectoriel et $x \mapsto \|x\|_1$, $x \mapsto \|x\|_2$ deux normes. On suppose que $E$ est un espace de Banach pour chacune de ces deux normes et qu'il existe $M > 0$ tel que $\|x\|_2 \leqslant M\|x\|_1$ pour tout $x \in E$. Montrer qu'il existe $m > 0$ tel que $m\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2$ pour tout $x \in E$.

**17.** *Avec le théorème du graphe fermé.*

Soient $E$ un $\mathbb{R}$-espace de Banach et $T : E \to E' := \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ un opérateur linéaire tel que $Tx(x) \geqslant 0$ pour tout $x$ de $E$. Montrer que $T$ est continu.

**18.** *Bases de Schauder d'un espace de Banach.*

Soit $E$ un espace de Banach sur $\mathbb{C}$. On dit qu'une suite $\{e_n\}_{n=1}^\infty \in E^\mathbb{N}$ est une *base de Schauder* si, pour tout $x$ de $E$, il existe une unique suite $\{x_n\}_{n=1}^\infty \in \mathbb{C}^\mathbb{N}$ telle que $x = \sum_{n\geqslant 1} x_n e_n$ dans $E$.

(a) Notons $\alpha_n : E \to \mathbb{C}$ $(n \geqslant 1)$ l'application $x \mapsto x_n$. Montrer que $\alpha_n$ est linéaire, et que, pour tous $n \geqslant 1$, $p \geqslant 1$, on a $\alpha_n \mathrm{e}_p = \delta_{np}$ (notation de Kronecker).

(b) Soit $F$ le sous-espace de $\mathbb{C}^\mathbb{N}$ formé des suites $\boldsymbol{x} = \{x_n\}_{n=1}^\infty$ telles que $\sum_{n\geqslant 1} x_n e_n$ converge dans $E$. On pose alors

$$\|\boldsymbol{x}\|_F := \sup_{n\geqslant 1} \Big\| \sum_{1\leqslant j\leqslant n} x_j e_j \Big\| \qquad (\boldsymbol{x} \in F).$$

Montrer que $F$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, que $\|\cdot\|_F$ est une norme sur $F$ et que $F$ est un espace de Banach pour cette norme. On pourra établir la validité pour tout entier $n \geqslant 1$ de la majoration $|x_n|\|e_n\| \leqslant 2\|\boldsymbol{x}\|_F$.

(c) Soit $T : F \to E$ l'application définie par $T\boldsymbol{x} := \sum_{n\geqslant 1} x_n e_n$. Montrer que $T$ est un isomorphisme de $F$ sur $E$.

(d) Soit $p_n : F \to \mathbb{C}$ la projection canonique définie par $p_n \boldsymbol{x} = x_n$. Montrer que $p_n \in \mathcal{L}(F, \mathbb{C})$ et donner un majorant de $\|p_n\|$. En déduire que $\alpha_n \in \mathcal{L}(E, \mathbb{C})$ pour tout $n \geqslant 1$ et qu'il existe $M \geqslant 1$ tel que

$$1 \leqslant \|e_n\|\|\alpha_n\| \leqslant M \qquad (n \geqslant 1).$$

4. On pourra montrer que si $y \notin \overline{H}$ et si $x = \lambda y + h \in E$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$, $h \in H$, alors $|\lambda| r \leqslant d(x, H)$ pour tout $r$ tel que $B(y, r) \subset \overline{H}^c$.

Université de Lorraine
Faculté des sciences et technologies
Master de mathématiques 2017/2018
Analyse (MAMT1 UE701 TC)

# Exercices sur les espaces de Hilbert

**19.** *Le cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy–Schwarz.*

Soient $E$ un $\mathbb{C}$-espace préhilbertien séparé et $x$, $y$ des vecteurs non nuls de $E$. Que peut-on déduire de l'égalité $|\,(x\,|\,y)\,| = \|x\|\|y\|$ ? De l'égalité $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$ ? Donner un exemple d'espace vectoriel normé où cette dernière conclusion est en défaut.

**20.** Soient $E$, $F$ des espaces hilbertiens et $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ une famille d'éléments de $\mathcal{L}(E,F)$. On suppose que

$$(\forall x \in E) \qquad \sup_n \|u_n x\| < \infty.$$

Montrer que $\sup_n \|u_n\| < \infty$.

**21.** Soient $E$ un espace hilbertien et $u$ un endomorphisme de $E$ tel que $(ux\,|\,y) = (x\,|\,uy)$ pour tous $x$, $y$ de $E$. Montrer que $u \in \mathcal{L}(E)$.

**22.** *Le théorème de Riesz est-il en défaut ?*

Soit $E$ l'espace préhilbertien constitué des suites complexes $\boldsymbol{x} = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ nulles à partir d'un certain rang, muni du produit scalaire $(\boldsymbol{x}\,|\,\boldsymbol{y}) = \sum_{n\geqslant 1} x_n\overline{y_n}$.

(a) Montrer que l'application $T : E \to \mathbb{C}$ définie par $T\boldsymbol{x} = \sum_{n\geqslant 1} x_n/n$ est une forme linéaire continue sur $E$.

(b) Existe-t-il un élément $\boldsymbol{y}$ de $E$ tel que $T\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}\,|\,\boldsymbol{y})$ pour tout $\boldsymbol{x}$ de $E$ ?

(c) Qu'en déduisez-vous ?

**23.** *Fonctions nulles sur un compact.*

Soit $E := \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $(f\,|\,g) := \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ et $K$ une partie compacte de $[0,1]$. On note $F_K$ le sous-espace vectoriel de $E$ constitué des fonctions s'annulant sur $K$.

(a) Montrer que $E$ est un espace préhilbertien séparé, mais n'est pas un espace de Hilbert.

(b) Montrer que $F_K^\perp = \{0\} \Leftrightarrow \overset{\circ}{K} = \varnothing$. Pour établir la condition suffisante, on raisonnera par l'absurde en considérant une fonction $g$ de $F_K^\perp$ et $x \in [0,1]$ tels que $g(x) \neq 0$, et en montrant l'existence, pour tout $\varepsilon > 0$, d'un $y \in ]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ tel que $d(y,K) > 0$.

(c) Montrer que $\overline{F_K} = E \Leftrightarrow |K| = 0$, où $|K|$ désigne la mesure de Lebesgue de $K$. Pour établir la condition suffisante, on pourra utiliser le fait qu'il existe une suite $\{h_n\}_{n=0}^{\infty} \in F_K^{\mathbb{N}}$ telle que $h_n \to 1$ pp. On établira la condition nécessaire en considérant la fonction constante égale à 1.

**24.** *Projection orthogonale sur un convexe.*

On se propose ici de démontrer le théorème suivant.

**Théorème.** *Soient $E$ un espace préhilbertien séparé et $A$ une partie de $E$, convexe, complète et non vide. Pour tout $x \in E$, il existe un unique élément $y$ de $A$ tel que $d(x,A) = \|x-y\|$. Ce point est caractérisé par la propriété*

$$(\forall z \in A) \qquad \Re e\ (x-y\,|\,z-y) \leqslant 0. \tag{6}$$

On dit alors que $y$ est la *projection orthogonale* de $x$ sur $A$, et l'on écrit $y = p_A(x)$ ou $p_A x$. Cette notion généralise celle de projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel fermé.

(a) Montrer que, si $x \in A$, alors on a $p_A(x) = x$ et ce point est l'unique élément de $A$ satisfaisant (6).

(b) On suppose désormais que $r := d(x, A) > 0$. On pose

$$A_n := \{z \in A : \|x - z\|^2 \leqslant r^2 + 2^{-2n}\} \qquad (n \geqslant 1).$$

Montrer que, pour chaque entier $n \geqslant 1$, $A_n$ est une partie convexe fermée non vide de $E$.

(c) En appliquant l'identité de la médiane, montrer que le diamètre $\delta(A_n)$ de $A_n$ n'excède pas $2^{1-n}$.

(d) Montrer qu'il existe $y \in A$ tel que $\cap_n A_n = \{y\}$ et que $\|x - y\| = d(x, A)$.

(e) Soit $z \in A$. On pose $z_t := y + t(z - y)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$. Montrer que $z_t \in A$ et calculer $\|x - z_t\|^2$. En déduire que $y$ satisfait (6).

(f) Montrer que si $y_1 \in A$ vérifie (6), alors $y_1 = y$.

**25.** *Propriétés de la projection orthogonale sur un convexe fermé.*

Soit $E$ un espace de Hilbert et $A$ une partie convexe fermée de $E$.

(a) Montrer que, pour tous $x \in E$, $z \in A$, on a $\|x - p_A x\| \leqslant \|x - z\|$.

(b) Montrer que l'application $p_A$ est contractante.

**26.** *Minimum sur une sphère.*

Soient $E$ un espace de Hilbert réel et $F$ un sous-espace vectoriel fermé non réduit à $\{0\}$.

(a) Montrer que, pour tout $x \in E \smallsetminus F^\perp$, la borne inférieure

$$m_F(x) := \inf_{\substack{y \in F \\ \|y\|=1}} (x \,|\, y)$$

est atteinte en un unique point $y$ de $F$ que l'on explicitera.

(b) Soient $y_j$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$ des vecteurs de $E$ et $G := \text{Vect}[y_1, \ldots, y_n]$. Calculer $m_F(x)$ lorsque $F = G$ et lorsque $F = G^\perp$.

**27.** *Suites positives de $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.*

Soit $A$ le sous ensemble de $E := \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ constitué des suites $\boldsymbol{x} = (x_n)_{n \geqslant 1}$ dont tous les termes sont positifs ou nuls.

(a) Montrer que $A$ est une partie convexe fermée de $E$.

(b) Expliciter la projection $p_A : E \to A$.

**28.** *Projections orthogonales, 1.*

Soient $E$ un espace de Hilbert et $F$ un sous-espace vectoriel fermé de $E$, non réduit à $\{0\}$. Établir les relations suivantes :

(a) $p_F \circ p_F = p_F$ ;

(b) $(\forall x, y \in E)$ $(p_F x \,|\, y) = (x \,|\, p_F y)$ ;

(c) $\|p_F\| = 1$.

**29.** *Projections orthogonales, 2.*

Soient $E$ un espace de Hilbert et $F$ un sous-espace vectoriel fermé de $E$. Établir, pour tous $x, y \in E$, l'équivalence des propriétés suivantes :

(i) $y = p_F x$

(ii) $y \in F$ et $(\forall z \in F)$ $\quad (y \,|\, z) = (x \,|\, z)$

(iii) $y \in F$ et $(\forall z \in F)$ $\quad \|x - y\| \leqslant \|x - z\|$.

**30.** *Projections orthogonales, 3.*
Soient $p$ et $q$ des projecteurs orthogonaux d'un espace de Hilbert $E$.
(a) Montrer que $u := p \circ q \circ p$ est auto-adjoint.
(b) Montrer que $(\operatorname{Im} p + \operatorname{Ker} q)^{\perp} = \operatorname{Im} q \cap \operatorname{Ker} p$.

**31.** *Projecteur et projection orthogonale.*
Soient $E$ un espace de Hilbert et $p$ un projecteur de $E$. Montrer l'équivalence des trois propriétés suivantes :

(i) $p$ est un projecteur orthogonal
(ii) $(\forall x \in E)\ \|px\| \leqslant \|x\|$
(iii) $p = p^*$ (autrement dit $p$ est auto-adjoint ou hilbertien).

**32.** *Sommes de Fejér, module de continuité, et base orthonormale de $L^2[0,1]$.*
On rappelle les expressions du noyau de Fejér

$$F_N(x) := \sum_{|n| \leqslant N} \Big(1 - \frac{|n|}{N}\Big) \mathrm{e}^{2\pi i n x} = \frac{1}{N} \Big(\frac{\sin \pi N x}{\sin \pi x}\Big)^2.$$

Soit $f$ une fonction continue et 1-périodique. On dit qu'une fonction croissante $\varphi$ est un module de continuité de $f$ sur $[0,1]$ si $|f(x) - f(y)| \leqslant \varphi(h)$ pour tous $x$, $y \in \mathbb{R}$ tels que $|x - y| \leqslant h$.

(a) Montrer que, si l'on note $c_k(f) := \int_{-1/2}^{1/2} \mathrm{e}^{-2\pi i k t} f(t)\,\mathrm{d}t$ $(k \in \mathbb{Z})$ et si

$$\sigma_N f(x) := \sum_{|k| \leqslant N} \Big(1 - \frac{|k|}{N}\Big) c_k(f) \mathrm{e}^{2\pi i k x} = \int_{-1/2}^{1/2} F_N(t) f(x - t)\,\mathrm{d}t$$

désigne la somme de Fejér d'ordre $N \geqslant 0$ de $f$, alors

$$\|f - \sigma_N f\|_\infty \leqslant 2 \int_0^{1/2} F_N(t) \varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$

(b) Montrer que $F_N(t) \leqslant \min(N, 1/4t^2 N)$ pour tout $t \in ]0, 1/2]$. En déduire que

$$\|f - \sigma_N f\|_\infty \leqslant \varphi\Big(\frac{1}{2N}\Big) + \frac{1}{2N} \int_{1/2N}^{1/2\sqrt{N}} \varphi\Big(\frac{1}{2\sqrt{N}}\Big) \frac{\mathrm{d}t}{t^2} + \frac{\varphi(\frac{1}{2})}{2N} \int_{1/2\sqrt{N}}^{1/2} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$$

et finalement que

$$\|f - \sigma_N f\|_\infty \leqslant 2\varphi\Big(\frac{1}{2\sqrt{N}}\Big) + \frac{2\|f\|_\infty}{\sqrt{N}}.$$

(c) Montrer que la famille $\{e_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ définie par $e_n(x) := \mathrm{e}^{2\pi i n x}$ est une base orthonormale de $L^2[0,1]$.

**33.** *Un lemme de Grothendieck.* Soit $E$ un sous-espace vectoriel fermé de $L^1[0,1]$. On suppose que $E \subset L^\infty[0,1]$. On se propose de montrer que $\dim E < \infty$.

Pour $1 \leqslant p \leqslant \infty$, on note $\|f\|_p$ la norme canonique de $L^p[0,1]$

(a) Montrer qu'il existe une constante $C$ telle que $\|f\|_\infty \leqslant C \|f\|_1$ pour toute fonction $f$ de $E$. On pourra raisonner comme à l'Exercice 16.

(b) Montrer l'existence d'une constante $M$ telle que $\|f\|_\infty \leqslant M \|f\|_2$ pour toute fonction $f$ de $E$.

(c) En déduire que $E$ est un sous-espace vectoriel fermé de $L^2[0,1]$.

(d) On suppose à présent que $\dim E = \infty$ et l'on considère une suite $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ de vecteurs de $E$, orthonormée pour le le produit scalaire de $L^2[0,1]$. Montrer l'existence d'un sous-ensemble négligeable $\mathcal{N} \subset [0,1]$ tel que, pour tout entier $n \geqslant 1$ et toute suite finie $\{c_j\}_{j=1}^n \in \mathbb{C}^n$, on ait

$$\Big| \sum_{1\leqslant j\leqslant n} c_j e_j(x) \Big|^2 \leqslant M^2 \sum_{1\leqslant j\leqslant n} |c_j|^2 \quad (x \in [0,1] \smallsetminus \mathcal{N}).$$

(On pourra considérer d'abord le cas $\{c_j\}_{j=1}^n \in \mathbb{Q}^n$.) En déduire que $\sum_{1\leqslant j\leqslant n} |e_j(x)|^2 \leqslant M^2$ pour $x \in [0,1] \smallsetminus \mathcal{N}$ et conclure.

**34.** *Non-métrisabilité de la topologie faible.*
Soit $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ la base canonique de $\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{C})$. On pose $s := \{\sqrt{n}e_n : n \geqslant 1\}$
(a) Montrer que tout voisinage faible de 0 intersecte $s$ et donc que 0 appartient à l'adhérence faible de $s$.
(b) Montrer qu'aucune sous-suite de $s$ ne tend vers tend faiblement vers 0.
(c) Conclure.

**35.** *Lorsque la convergence faible implique la convergence forte.*
Soient $E$ un espace de Hilbert et $\{x_n\}_{n=0}^\infty \in B_E^{\mathbb{N}}$ une suite convergeant faiblement vers $x \in E$ tel que $\|x\| = 1$. Montrer que $x_n \to x$.
Plus généralement, montrer que si $x_n \rightharpoonup x$ et $\limsup \|x_n\| \leqslant \|x\|$, alors $x_n \to x$.

**36.** *Continuités faible et forte d'un opérateur d'espaces de Hilbert.*
Soient $E$, $F$ des espaces de Hilbert et $u : E \to F$ une application linéaire.
(a) On munit $E$ soit de la topologie normique, soit de la topologie faible et on munit $F$ de la toplogie faible. Montrer que $u$ est continue si, et seulement si, les applications $x \mapsto (ux \,|\, y)$ sont continues pour tout $y \in F$.
(b) On suppose que $u \in \mathcal{L}(E,F)$. Montrer que $u$ est continue en tant qu'application linéaire entre $E$ et $F$ munis de leurs topologies faibles respectives.
(c) On suppose à présent que $u$ est continue si $E$ et $F$ sont munis de leurs topologies faibles. Montrer que $u \in \mathcal{L}(E,F)$. On pourra appliquer le théorème du graphe fermé.

**37.** *Sommes de sous-espaces vectoriels fermés.*
Soient $E$ un espace de Hilbert et $F$, $G$ des sous-espaces vectoriels fermés.
(a) Dans $E := \ell^2(\mathbb{N},\mathbb{C})$, on choisit

$$F := \{\boldsymbol{x} \in E : (\forall n \geqslant 0)\ x_{2n} = 0\}, \quad G := \{\boldsymbol{x} \in E : (\forall n \geqslant 0)\ x_{2n} = x_{2n+1}/(2n+1)\}.$$

Vérifier que $F$ et $G$ sont fermés. Montrer que $\overline{F+G} = E$ et que $F+G$ n'est pas fermé.
(b) On suppose que $\dim G < \infty$. Montrer que $F+G$ est fermé. On pourra se ramener au cas $\dim G = 1$ et considérer $w := y - p_F y$ où $y$ est un vecteur directeur de $G$.
(c) On suppose que $F \perp G$. Montrer que $F+G$ est fermé.
(d) On suppose que $\sup_{x\in F,\, y\in G,\, \|x\|=\|y\|=1} |\,(x \,|\, y)\,| < 1$. Montrer que $F+G$ est fermé.

**38.** *Un calcul explicite d'adjoint.*
Soit $E := L^2[0,1]$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ l'opérateur défini par $uf(x) := \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Majorer $\|u\|$ et définir explicitement $u^*$.

**39.** *Une troisième preuve du théorème de Schauder.*
Soient $E$, $F$ des espaces de Hilbert et $u \in \mathcal{L}(E,F)$.
(a) Montrer que $u \in \mathcal{K}(E,F)$ si, et seulement si, pour toute suite $\{x_n\}_{n=0}^\infty \in B_E^{\mathbb{N}}$, la suite $\{ux_n\}_{n=0}^\infty$ possède une valeur d'adhérence.
(b) Montrer que $u \in \mathcal{K}(E,F)$ si, et seulement si, pour toute suite $\{x_n\}_{n=0}^\infty \in B_E^{\mathbb{N}}$ on a $x_n \rightharpoonup x \Rightarrow ux_n \to ux$.
(c) Montrer que $u \in \mathcal{K}(E,F) \Leftrightarrow u^* \in \mathcal{K}(F,E)$.

**40.** *Adhérences faible et forte d'un convexe.*
On se propose de démontrer ici le théorème suivant.

**Théorème.** *Soit $E$ un espace de Hilbert réel et $A$ une partie convexe de $E$ Alors $A$ est faiblement fermée si, et seulement si, $A$ est fortement fermée.*

On note $B$ l'adhérence faible de $A$, autrement dit l'ensemble des points $x$ de $E$ tels que, pour tous $\varepsilon > 0$, $y_1, \dots, y_n \in E$ on ait $V(x;\varepsilon;y_1,\dots,y_n) \cap A \neq \varnothing$, où l'on a posé $V(x;\varepsilon;y_1,\dots,y_n) := \{w \in E : \max_{1\leqslant j\leqslant n} |(x-w\,|\,y_j)| < \varepsilon\}$. Nous allons montrer que $\overline{A} = B$, ce qui est clairement équivalent à l'assertion souhaitée.

(a) Montrer que $\overline{A} \subset B$.

(b) Montrer que $\overline{A}$ est convexe.

(c) Soit $x \in E \setminus \overline{A}$. On pose $y := p_{\overline{A}}x$ (cf. l'Exercice 24). Montrer que $r := \|x-y\| > 0$ et que $(x-z\,|\,x-y) \geqslant r^2$ pour tout $z \in \overline{A}$. En déduire que $V(x;r^2/2;x,y) \cap \overline{A} = \varnothing$. Conclure.

**41.** *Un opérateur compact de $L^2([0,1],\mathbb{C})$.*
Soit $E := L^2([0,1],\mathbb{C})$ muni du produit scalaire canonique. On définit $u : E \to E$ par

$$uf(x) := i\mathrm{e}^{i\pi x}\left\{\int_0^x \mathrm{e}^{-i\pi t}f(t)\,\mathrm{d}t - \int_x^1 \mathrm{e}^{-i\pi t}f(t)\,\mathrm{d}t\right\} \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1).$$

(a) Montrer que, pour toute fonction $f \in E$, on a $uf \in \mathcal{C}([0,1];\mathbb{C})$ et $\|uf\|_\infty \leqslant \|f\|$. En déduire que $u \in \mathcal{L}(E)$.
(b) Soient $f \in E$ et $\{f_n\}_{n=0}^\infty \in B_E^{\mathbb{N}}$ une suite telle que $f_n \rightharpoonup f$. Montrer que $f \in B_E$ et que, pour tout $x \in [0,1]$, on a $\lim_n uf_n(x) = uf(x)$. En déduire que $uf_n \to uf$ dans $E$, puis que $u \in \mathcal{K}(E)$.
(c) Montrer que, pour tout $f \in E$, la fonction $uf$ est solution de l'équation différentielle

$$y' - i\pi y = 2if.$$

(d) Comparer $uf(0)$ et $uf(1)$ pour $f \in E$.
(e) Déterminer les valeurs propres de $u$.

**42.** *Image d'un opérateur compact.*
On se propose ici de démontrer le résultat suivant : *Soient $E$, $F$ des espaces de Hilbert et $u \in \mathcal{K}(E,F)$. Alors $\operatorname{Im} u$ est fermé dans $F$ si, et seulement si, $u$ est de rang fini.*
(a) Établir la condition suffisante.
(b) On suppose à présent que $u$ est compact et d'image fermée. On note $G := \operatorname{Im} u$.
(i) Montrer que $G$ est un espace de Hilbert.
(ii) Montrer que $u(B_E)$ est un voisinage de 0 dans $G$.
(iii) En déduire qu'il existe $r > 0$ tel que $\overline{B_G(0;r)}$ soit un compact de $G$.
(iv) Conclure.

**43.** *Un opérateur non compact de $L^2([0,1],\mathbb{R})$.*
Soit $E := L^2([0,1],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique. On définit $u : E \to E$ par $uf(x) = xf(x)$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$.

(a) Montrer que $u \in \mathcal{L}(E)$ et calculer $\|u\|$.

(b) Montrer que $u$ est hermitien, non compact.

(c) Montrer que $F := \operatorname{Im} u$ est un sous-espace vectoriel dense de $E$, strictement inclus dans $E$.

**44.** *Un opérateur de Hilbert-Schmidt.* Soit $u$ l'opérateur de $L^2[0,1]$ défini à l'Exercice 41. Montrer que $u$ est un opérateur de Hilbert-Schmidt auto-adjoint et déterminer son spectre.

Université de Lorraine
Faculté des sciences et technologies
Master de mathématiques 2017/2018
Analyse (MAMT1 UE701 TC)

# Exercices sur la convolution et la transformation de Fourier

**45.** Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $f(x) > 0$ pour tout nombre réel $x$. Montrer que, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^*$, on a $|\widehat{f}(\xi)| < \widehat{f}(0)$.

**46.** Pour $a > 0$, on pose $\varphi_a(x) = \dfrac{a}{\pi(a^2+x^2)}$. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$.

(a) Montrer que $g_a(x) = f * \varphi_a(x)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

(b) Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\int_{|x|>\varepsilon} \varphi_a(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{2a}{\pi\varepsilon}.$$

(c) Montrer que $\| f - g_a \|_1 \leqslant \sup_{|y|\leqslant\varepsilon} \|f - \tau_y f\|_1 + (4a/\pi\varepsilon)\|f\|_1$. En déduire que $\lim_{a\to 0} \| f - g_a \|_1 = 0$.

(d) Soit $\vartheta$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\vartheta(x) = \begin{cases} \exp\{1-(1-x^2)^{-2}\} & \text{si } |x| < 1, \\ 0 & \text{si } |x| \geqslant 1. \end{cases}$$

Dessiner sommairement le graphe de $\vartheta$. Montrer que $\vartheta$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Pour $\varepsilon > 0$, on définit $\vartheta_\varepsilon$ par $\vartheta_\varepsilon(x) = \vartheta(\varepsilon x)$. Montrer que, pour toute fonction $g \in L^1(\mathbb{R})$, on a $\lim_{\varepsilon\to 0} \|g\vartheta_\varepsilon - g\|_1 = 0$.

(e) Déduire des résultats des questions (c) et (d) que l'espace vectoriel $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ des fonctions à support compact et de classe $\mathcal{C}^\infty$ est dense dans $L^1(\mathbb{R})$.

**47.** *L'inégalité de Young.*[1]

Soient $p, q \in [1,\infty]$, tels que $1/p + 1/q \geqslant 1$. On définit $r > 0$ par $1/r = 1/p + 1/q - 1$. Le but de cet exercice est de montrer que, pour tous $f \in L^p(\mathbb{R})$, $g \in L^q(\mathbb{R})$, on a $h := f * g \in L^r(\mathbb{R})$ et $\|h\|_r \leqslant \|f\|_p \|g\|_q$.

(a) Établir le résultat lorsque $q = 1$.

(b) Établir le résultat lorsque $q = \infty$.

(c) Établir le cas général. On pourra écrire $|f(x-y)| = |f(x-y)|^{1-p/r}|f(x-y)|^{p/r}$ et introduire l'exposant $P$, conjugué de $q$.

**48.** (a) Montrer par intégration complexe que l'on a pour $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2ax - \cos 2bx}{x^2}\,\mathrm{d}x = 2\pi(b-a).$$

(b) En déduire que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Big(\frac{\sin \pi x}{\pi x}\Big)^2 e^{-2\pi i \xi x}\,\mathrm{d}x = (1-|\xi|)^+.$$

Calculer, pour $T > 0$, la transformée de Fourier de la fonction $w_T(x) = T\Big(\dfrac{\sin \pi T x}{\pi T x}\Big)^2$.

---

1. Mathématicien britannique, 1863-1942.

**49.** Soit $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ qui tendent vers 0 lorsque $|x| \to \infty$. Soit $\varphi$ une fonction impaire de $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ telle que $\varphi = \widehat{f}$ pour une certaine fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$.

Montrer que $\varphi(x) = -i \int_{\mathbb{R}} f(t) \sin(2\pi xt)\, dt$. En déduire que

$$\sup_{y \geqslant 1} \left| \int_1^y \frac{\varphi(x)}{x}\, dx \right| < \infty.$$

En déduire que la transformation de Fourier $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ n'est pas surjective.

**50.** Posons $g_n := \mathbf{1}_{[-n,n]}$.

(a) Calculer explicitement $g_1 * g_n$ $(n \in \mathbb{N})$.

(b) On pose $f_n(x) := \sin(2\pi nx) \sin(2\pi x)/(x^2\pi^2)$. Montrer que $\widehat{f_n}(\xi) = g_1 * g_n(\xi)$.

(c) Montrer que $\|f_n\|_1 \to \infty$ lorsque $n \to \infty$. En déduire que $\mathcal{F}$ n'est pas un opérateur surjectif de $L^1(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$.

(d) Est-il vrai que $\overline{\mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}))} = \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ ? [On pourra commencer par établir que la transformée de Fourier d'une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est nécessairement dans $L^1(\mathbb{R})$.]

**51.** *Polynômes d'Hermite.*[2]

(a) Montrer que la famille des fonction $h_n : x \mapsto x^n e^{-x^2/2}$ est libre dans $E := L^1(\mathbb{R})$.

(b) Soit $f \in E$ telle que $(f \mid h_n) = 0$ pour tout entier $n \geqslant 0$. On pose $g(x) := e^{-x^2/2} f(x)$. Montrer que $g \in L^1(\mathbb{R})$ et que $\widehat{g} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Calculer $\widehat{g}^{(n)}(0)$.

(c) Montrer que l'on peut prolonger $\widehat{g}$ en une fonction entière. Qu'en déduit-on ?

(d) Montrer que le procédé de Gram–Schmidt permet de transformer la famille des $h_n$ en une famille $\{x \mapsto G_n(x)e^{-x^2/2}\}_{n=0}^\infty$ où $G_n$ est un polynôme de degré $n$ (qu'on ne demande pas de calculer).

(e) Montrer que la famille des $\{x \mapsto G_n(x)e^{-x^2/2}\}_{n=0}^\infty$ est une base hilbertienne de $E$.

(f) On définit la suite $\{H_n\}_{n=0}^\infty$ des polynômes d'Hermite par

$$H_n(x) := (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}.$$

Montrer que $G_n = c_n H_n$ $(n \geqslant 0)$ où $c_n$ est un coefficient réel que l'on ne demande pas de calculer.

**52.** Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle qu'il existe $\xi_0 \in \mathbb{R}$ vérifiant $\widehat{f}(\xi_0) = 0$. Montrer que le sous-espace vectoriel de $L^1(\mathbb{R})$ engendré par les $\tau_y f : x \mapsto f(x - y)$ n'est pas dense dans $L^1(\mathbb{R})$.

**53.** (a) Soient $f$, $g \in L^1(\mathbb{R})$. Montrer que $f\widehat{g} \in L^1(\mathbb{R})$ et établir la formule

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(x) g(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \widehat{g}(x)\, dx. \tag{7}$$

(b) En appliquant (7) avec $g = \overline{\widehat{f}}$ montrer que la formule de Plancherel

$$\|f\|_2 = \|\widehat{f}\|_2$$

est valable pour toute fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$.

(c) Quel est l'adjoint de l'endomorphisme $\mathcal{F}$ de $L^2(\mathbb{R})$ ?

2. Mathématicien français, 1822–1901.

**54.** En utilisant (7), montrer que

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2\pi x}\Big(\frac{\sin \pi x}{\pi x}\Big)^2 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{4} - \frac{\log 2}{2\pi}\cdot$$

**55.** Calculer $\mathcal{F}\mathbf{1}_{[-1,1]}$. Appliquer le théorème d'inversion locale et en déduire $\mathcal{F}f$ pour $f(x) = (\sin 2\pi x)/(\pi x) \in L^2(\mathbb{R})$.

**56.** *Formule de Parseval.* Montrer que pour $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{g}(\xi)}\,\mathrm{d}\xi.$$

Application. Calculer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-2\pi|x|}\frac{\sin(2\pi x)}{\pi x}\,\mathrm{d}x$ en utilisant un résultat de l'Exercice 55.

**57.** *Avec la formule de Plancherel.* Calculer $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \Big(\frac{\sin x}{x}\Big)^4 \,\mathrm{d}x.$

**58.** Calculer $\mathcal{F}g$ pour $g(x) := x/(1+x^2)$. Cette fonction est-elle continue à l'origine ?

**59.** Calculer la transformée de Fourier de $f(x) = 1/\operatorname{ch}\pi x$ en intégrant $\mathrm{e}^{-2\pi i z\xi}/\operatorname{ch}\pi z$ sur le bord du rectangle de sommets $\pm R$, $\pm R + i$.

**60.** (a) Montrer que l'algèbre $L^1(\mathbb{R})$ ne possède pas d'unité pour le produit de convolution, autrement dit qu'il n'existe pas de fonction $u \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $f * u = f$ pour toute $f \in L^1(\mathbb{R})$.

(b) Résoudre dans $L^1(\mathbb{R})$ l'équation $f * f = f$.

(c) On pose $h_a(x) := \sin(\pi a x)/\pi x$ $(x \in \mathbb{R})$. Calculer $\widehat{h}_a$ pour tout $a > 0$ et en déduire la valeur de $h_a * h_b$ pour $a > 0$, $b > 0$.

(d) Montrer que l'équation $f * f = f$ possède une infinité de solutions dans $L^2(\mathbb{R})$.

**61.** (a) Montrer que le produit de convolution de deux fonctions de $L^2(\mathbb{R})$ est bien défini.

(b) Montrer que, pour $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, on a $\mathcal{F}f * \mathcal{F}g = \mathcal{F}(fg)$.

(c) Soit $h_1$ définie comme à l'Exercice 60. Montrer que la formule $pf = f * h_1$ définit une application linéaire de $L^2(\mathbb{R})$ sur $L^2(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$.

(d) Montrer que, pour toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$, on a $\|pf\|_2 \leqslant \|f\|_2$.

(e) Montrer que $p \circ p = p$.

**62.** *Valeurs propres de $\mathcal{F}$.* Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, on définit $\check{f}$ par $\check{f}(x) := f(-x)$ $(x \in \mathbb{R})$.

(a) Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\mathcal{F}f \in L^1(\mathbb{R})$. Calculer $\mathcal{F}\mathcal{F}f$.

(b) Montrer que $\mathcal{F}$ possède au plus quatre valeurs propres sur $L^1(\mathbb{R})$ et les expliciter.

(c) On pose $h_n(x) := x^n \mathrm{e}^{-\pi x^2}$ $(x \in \mathbb{R})$. Calculer $\widehat{h_0}$ et $\widehat{h_1}$. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 0$, on a

$$\widehat{h_{n+2}}(\xi) = \frac{n+1}{2\pi}\widehat{h_n}(\xi) - i\xi\widehat{h_{n+1}}(\xi) \qquad (\xi \in \mathbb{R}).$$

En déduire que

$$\widehat{h_2} = \frac{h_0}{2\pi} - h_2, \quad \widehat{h_3} = \frac{-3i}{2\pi}h_1 + ih_3.$$

(d) Montrer que les quatre valeurs propres possibles déterminées à la question (b) sont effectivement réalisées.

**63.** *Vecteurs propres de $\mathcal{F}$.* On pose $\varphi_n(x) = (-1)^n \mathrm{e}^{\pi x^2} \dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} \mathrm{e}^{-2\pi x^2}$. Trouver une équation différentielle satisfaite par $\widehat{\varphi}_0$ et déterminer cette fonction. Montrer que $\varphi_n(x) = 2\pi x \varphi_{n-1}(x) - \varphi'_{n-1}(x)$ pour $n \geqslant 1$ et établir que la suite des fonctions $i^n \widehat{\varphi_n}(\xi)$ vérifie la même relation de récurrence. Calculer $\widehat{\varphi}_n(\xi)$ pour $n \geqslant 1$ en fonction de $\varphi_n(\xi)$.

**64.** *L'espace de Schwartz.*(3)

Soit $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ (espace de Schwartz) l'espace vectoriel des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telles que $x^p f^{(n)}(x)$ soit bornée pour tous entiers $n, p \geqslant 0$. On définit alors $h_{jk}(f) := \|x^j f^{(k)}(x)\|_\infty$ $(j, k \in \mathbb{N})$ et

$$d(f, g) := \sum_{j \geqslant 0, k \geqslant 0} \frac{\min(1, h_{jk}(f-g))}{2^{j+k}} \qquad (f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

(a) Montrer que l'application $d : \mathcal{S}(\mathbb{R})^2 \to \mathbb{R}^+$ est une distance sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ et que l'espace métrique $(\mathcal{S}(\mathbb{R}), d)$ est complet.

(b) Montrer que la fonction $\psi_1(x) := \mathrm{e}^{-\pi x^2}$ est dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

(c) Montrer que $\mathcal{F}\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$. En déduire, en utilisant (7) avec $g(x) := \psi_1(x/T)$ $(T > 0)$ et en remplaçant $f$ par $f_y(x) := f(x+y)$ $(y \in \mathbb{R})$, que $\mathcal{F}$ est un isomorphisme isométrique de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ sur lui-même lorsque cet espace est muni de la norme $L^2$.

(d) Montrer que $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est stable par multiplication et par convolution.

**65.** Déterminer l'équation différentielle satisfaite par $\widehat{f}(\xi)$ si $f$ est solution dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ de l'équation différentielle $f''(x) + xf'(x) + f(x) = 0$. En déduire que cette équation possède effectivement des solutions dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ et les déterminer.

**66.** *Un principe d'incertitude.* Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, une fonction à valeurs réelles telle que $\|f\|_2 = 1$.

(a) Montrer que $\int_{\mathbb{R}} x f'(x) f(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}$.

(b) En déduire que

$$\int_{\mathbb{R}} \xi^2 |\widehat{f}(\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x)^2\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{16\pi^2}.$$

(c) Décrire les cas d'égalité.

**67.** Montrer que l'équation homogène associée à l'équation différentielle

$$(*) \qquad f''(x) - 2f'(x) + 2f(x) = \mathrm{e}^{-|x|} \qquad (x \neq 0)$$

n'a pas de solution non-triviale dans $L^1(\mathbb{R})$. En utilisant la transformée de Fourier trouver une solution intégrable de $(*)$ et montrer qu'elle est unique.

**68.** *Un théorème de type Paley-Wiener.*

Soit $\varphi$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ et à support compact inclus dans $[-1, 1]$.

(a) Montrer que la formule $\widehat{\varphi}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \mathrm{e}^{-2\pi i z x}\,\mathrm{d}x$ définit un prolongement holomorphe de $\widehat{\varphi}(\xi)$. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 0$, on a

$$(1 + |z|)^n |\widehat{\varphi}(z)| \leqslant C_n \mathrm{e}^{2\pi |\Im m\, z|}.$$

(b) Soit $F$ une fonction entière vérifiant $(1 + |z|)^n |F(z)| = O(\mathrm{e}^{2\pi |\Im m\, z|})$ pour chaque entier $n \geqslant 1$. Montrer que la restriction de $F$ à $\mathbb{R}$ est intégrable et que

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi) \mathrm{e}^{2\pi i x \xi}\,\mathrm{d}\xi$$

3. Mathématicien français, 1915–2002.

est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Grâce à une intégration complexe,[4] établir que le support de $\varphi$ est inclus dans $[-1,1]$. Montrer que $\widehat{\varphi}(\xi) = F(\xi)$.

(c) Énoncer le théorème démontré dans cet exercice.

**69.** On convient dans cet exercice qu'une fonction de $L^1(\mathbb{R})$ est dite continue si sa classe coïncide avec celle d'une fonction continue. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ une fonction paire bornée dans un voisinage de l'origine.

(a) Montrer que $\widehat{f}(\xi)$ est réelle et paire.

(b) On pose $f_T := f * w_T$. Montrer que $f_T(0)$ est borné indépendamment de $T$. [On pourra distinguer les cas $T \leqslant 1$ et $T > 1$.]

(c) En déduire que si $\widehat{f}$ est de signe constant à l'infini (c'est-à-dire s'il existe un $\xi_0$ tel que $\widehat{f}(\xi)$ soit de signe constant pour $|\xi| > \xi_0$) alors $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ et $f$ est continue. Autrement dit : *si $f \in L^1(\mathbb{R})$ n'est pas continue, alors $\widehat{f}(\xi)$ change infiniment souvent de signe lorsque* $|\xi| \to \infty$. [Indication : utiliser les deux expressions pour $f_T$ obtenues dans la démonstration du Théorème III.3.2.]

**70.** Soit $g \in L^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R})$ et $f$ une solution intégrable de classe $\mathcal{C}^2$ de l'équation différentielle $f'' - f + g = 0$.

(a) Montrer que $f'' \in L^1(\mathbb{R})$ et en déduire que $f'(x) \to 0$ lorsque $|x| \to \infty$.

(b) Pour $a$, $b \in \mathbb{R}^+$, $\xi \in \mathbb{R}$, évaluer $\displaystyle\int_{-a}^{b} f''(x)\mathrm{e}^{-2\pi i\xi x}\,\mathrm{d}x$ en intégrant deux fois par parties. Montrer que $f(x)\mathrm{e}^{-2\pi i x\xi}$ tend vers une limite $h^\pm(\xi)$ lorsque $x \to \pm\infty$. En déduire que $h^\pm(\xi) = 0$.

(c) Montrer que $\widehat{f''}(\xi) = -4\pi^2\xi^2\widehat{f}(\xi)$.

(d) Calculer $\widehat{f}(\xi)$ et en déduire une expression de $f$ en fonction de $g$. Montrer que cette expression définit bien une solution de l'équation différentielle initiale.

**71.** *L'image de $L^1(\mathbb{R})$ par la transformation de Fourier.*

(a) Soient $f, g \in L^2(\mathbb{R})$. Montrer que $f * g = \overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}f \cdot \mathcal{F}g)$.

(b) Montrer que l'espace $L^2(\mathbb{R}) * L^2(\mathbb{R})$ des produits de convolution de deux fonctions de $L^2(\mathbb{R})$ est inclus dans l'espace $\mathcal{F}L^1(\mathbb{R})$ des transformées de Fourier de fonctions intégrables.

(c) Réciproquement, si $f \in L^1(\mathbb{R})$, poser $u := \overline{\mathcal{F}}\dfrac{f}{\sqrt{|f|}}$, $v := \overline{\mathcal{F}}\sqrt{|f|}$ et montrer que $u, v \in L^2(\mathbb{R})$, $u * v = \overline{\mathcal{F}}f$.

(d) En déduire que $\mathcal{F}L^1(\mathbb{R}) = L^2(\mathbb{R}) * L^2(\mathbb{R})$.

**72.** *Formule de Poisson.*

Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ telle que $|f(x)|$ soit majorée par une fonction intégrable paire, décroissante sur $\mathbb{R}^+$. On suppose de plus que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)| < \infty$.

(a) Vérifier que l'on a bien $f \in L^1(\mathbb{R})$.

(b) Montrer que la série $\varphi(t) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n+t)$ est normalement convergente sur tout compact de $\mathbb{R}$ et définit une fonction continue 1-périodique.

(c) Montrer que $c_n(\varphi) := \int_0^1 \varphi(t)\mathrm{e}^{-2\pi i n t}\,\mathrm{d}t = \widehat{f}(n)$ $(n \in \mathbb{Z})$.

(d) En déduire[5] que

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n+t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)\mathrm{e}^{-2\pi i n t} \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1).$$

---

4. On pourra considérer le rectangle de coordonnées $\pm R$ ; $\pm R + iy$, avec $R > 0$, $y \neq 0$.
5. On rappelle qu'une fonction continue 1-périodique dont la série de Fourier est absolument convergente est somme de sa série de Fourier.

**73.** *Équation fonctionnelle de la fonction thêta de Jacobi.*[6]
Montrer que, pour tout nombre complexe $z$ tel que $\Re e\, z > 0$, on a

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{-\pi n^2 z} = \frac{1}{\sqrt{z}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{-\pi n^2/z}, \tag{8}$$

où la racine carrée complexe est prise en détermination principale.

6. Mathématicien allemand, 1804-1851.

Université de Lorraine
Faculté des sciences et technologies
Master 2014/2015
Analyse (MAMT1 UE701)

Lundi 3 novembre 2014
Durée : 1h30

# Sujet d'examen

*Aucun document n'est autorisé. L'usage d'une calculatrice est interdit. Sauf mention contraire, les notations sont celles du cours.*

*Les deux parties sont indépendantes.*

*Il sera tenu le plus grand compte de la rédaction et de la présentation. Seules les explications claires et précises seront prises en compte à la correction.*

*La partie I est notée sur 5 points. La question II(i) est notée sur 4 points.*

**I.** Énoncer le théorème de l'application ouverte et le théorème de l'isomorphisme. Expliquer comment le second est déduit du premier.

**II.** Désignons par $E := L^1([-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}])$ l'espace de Banach des fonctions intégrables sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ muni de la norme $\|f\|_1 := \int_{-1/2}^{1/2} |f(x)|\,\mathrm{d}x$,[1] par $F := \ell^\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ l'espace vectoriel des suites complexes bornées indexées par les entiers relatifs et muni de la norme de la convergence uniforme $\|\boldsymbol{z}\|_\infty := \sup_{n\in\mathbb{Z}} |z_n|$, et par $G := c_0(\mathbb{Z})$ le sous-espace de $F$ constitué des suites complexes $\{z_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ telles que $\lim_{|n|\to\infty} z_n = 0$.

Pour $f \in E$, on pose

$$\widehat{f}(n) := \int_{-1/2}^{1/2} f(x)\mathrm{e}^{-2\pi i n x}\,\mathrm{d}x \qquad (n \in \mathbb{Z}).$$

(a) Montrer que $F$ est un espace de Banach et que $G$ est fermé dans $F$.

(b) Soit $T : E \to \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ l'application définie par $T(f) := \{\widehat{f}(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ $(f \in E)$. Montrer que, pour toute fonction $f$ de $E$, la suite $T(f)$ est un élément de $F$ et que $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Calculer $\|T\|$.

(c) Soit $a \in ]0, 1[$. Expliciter $T(f)$ lorsque $f := \mathbf{1}_{[-a/2,a/2]}$.

(d) Soit $H$ le sous-espace de $E$ constitué des fonctions en escalier. Montrer que, si $f \in H$, alors $T(f) \in G$. On pourra s'inspirer du calcul effectué en (c).

(e) Montrer que $T(E) \subset G$. On pourra utiliser, sans démonstration, le fait que $H$ est dense dans $E$.

(f) Montrer que $T$ est injective. On pourra utiliser sans démonstration le fait que, pour toute fonction $f$ de $E$, le polynôme trigonométrique

$$f_N(x) := \sum_{|n|\leqslant N} \Big(1 - \frac{|n|}{N}\Big)\widehat{f}(n)\mathrm{e}^{2\pi i n x} \quad (N \geqslant 0),$$

vérifie $\lim_{N\to\infty} \|f - f_N\|_1 = 0$.

(g) Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on pose $D_N(x) := \sum_{|n|\leqslant N} \mathrm{e}^{2\pi i n x}$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$. Calculer $T(D_N)$.

(h) Montrer que

$$D_N(x) = \frac{\sin((2N+1)\pi x)}{\sin(\pi x)} = \frac{\sin((2N+1)\pi x)}{\pi x} + O(1) \qquad (|x| \leqslant \tfrac{1}{2}).$$

En déduire que $\lim_{N\to\infty} \|D_N\|_1 = +\infty$. (On pourra opérer le changement de variables $y = (2N+1)x$ et observer que $|\sin \pi y| \geqslant \frac{1}{2}$ pour $y \in \cup_{0\leqslant k\leqslant N}[k+\frac{1}{6}, k+\frac{1}{2}]$.)

(i) A-t-on $\operatorname{Im} T = G$ ?

---

1. On ne demande pas de redémontrer que $E$ est un espace de Banach.

Université de Lorraine
Faculté des sciences et technologies
Master 2014/2015
Analyse (MAMT1 UE701)

Vendredi 5 décembre 2014
Durée : 1h

# Sujet d'examen

*Aucun document n'est autorisé. L'usage d'une calculatrice est interdit. Sauf mention contraire, les notations sont celles du cours.*

*Les deux parties sont indépendantes.*

*Il sera tenu le plus grand compte de la rédaction et de la présentation. Seules les explications claires et précises seront prises en compte à la correction.*

**I.** Donner la définition et la caractérisation de la projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Hilbert.

**II.** Soient $E$ un espace de Hilbert séparable et $F$ un sous-espace vectoriel fermé non réduit à $\{0\}$. On note $p_F$ la projection orthogonale de $E$ sur $F$ et l'on définit $G := F^{\perp}$.

(a) Montrer que, pour tout $(x, y) \in E \times G$, on a $(x \,|\, y) = (x - p_F x \,|\, y)$. En déduire que, pour tout $x$ de $E$, on a $d(x, F) = \sup_{z \in G,\, \|z\|=1} |\,(x \,|\, z)\,|$.

(b) On désigne par $\{e_j\}_{j \in J}$, où $J$ est un sous-ensemble de $\mathbb{N}$ fini ou non, une base hilbertienne de $F$.

(i) Rappeler les résultats du cours permettant d'affirmer l'existence d'une telle base de $F$ (on pourra distinguer les cas $\dim F < \infty$ et $\dim F = \infty$).

(ii) Soit $x \in E$. Déterminer les coordonnées de $p_F x$ sur la base $\{e_j\}_{j \in J}$ et écrire la représentation correspondante de $p_F x$.

(c) Déterminer une base orthonormale du sous-espace $F$ engendré dans $L^2([0,1], \mathbb{R})$ par les polynômes $t \mapsto 1$ et $t \mapsto t$. Calculer $p_F(t \mapsto t^2)$. En déduire la valeur de

$$m := \inf_{a \in \mathbb{R},\, b \in \mathbb{R}} \int_0^1 (t^2 - at - b)^2 \, \mathrm{d}t.$$

On pourra utiliser, sans les vérifier, *certains* des calculs suivants

$$\int_0^1 (t - \tfrac{1}{2})^2 \, \mathrm{d}t = \tfrac{1}{12}, \quad \int_0^1 t^2(2t - 1) \, \mathrm{d}t = \tfrac{1}{6}, \quad \int_0^1 t^2(2 - t) \, \mathrm{d}t = \tfrac{5}{12},$$
$$\int_0^1 (t^2 - \tfrac{1}{6}t + 1)^2 \, \mathrm{d}t = \tfrac{439}{270}, \quad \int_0^1 (t^2 - t + \tfrac{1}{6})^2 \, \mathrm{d}t = \tfrac{1}{180}, \quad \int_0^1 (t^2 + t - \tfrac{1}{6})^2 \, \mathrm{d}t = \tfrac{141}{180}.$$

(d) On suppose désormais que $E = \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$, on se donne un entier $n \in \mathbb{N}$, et l'on définit $F := \{\boldsymbol{x} \in E : \sum_{0 \leqslant j \leqslant n} x_j = 0\}$.

(i) Montrer que $F$ est un sous-espace vectoriel fermé de $E$ et déterminer $\boldsymbol{z} \in E$ tel que $F = \{\boldsymbol{x} \in E : (\boldsymbol{x} \,|\, \boldsymbol{z}) = 0\}$. Quel théorème du cours implique-t-il a priori l'existence d'un tel vecteur $\boldsymbol{z}$ ? Montrer que $F^{\perp} = \mathbb{C}\boldsymbol{z}$ et que $E = F \oplus F^{\perp}$.

(ii) Soit $\boldsymbol{y} := (1, 0, 0, \ldots) \in E$. En considérant la décomposition

$$\boldsymbol{y} = p_F \boldsymbol{y} + p_{F^{\perp}} \boldsymbol{y},$$

calculer $d(\boldsymbol{y}, F)$.

Université de Lorraine
Faculté des sciences et technologies
Master 2014/2015
Analyse (MAMT1 UE701)

Lundi 12 janvier 2015
Durée : 3h

# Sujet d'examen

*Aucun document n'est autorisé. L'usage d'une calculatrice est interdit. Sauf mention contraire, les notations sont celles du cours.*
*Les quatre parties peuvent être traitées indépendamment.*
*Il sera tenu le plus grand compte de la rédaction et de la présentation. Seules les explications claires et précises seront prises en compte à la correction.*

*Les notations sont celles du cours. Dans tout le sujet, on note exclusivement par* $\widehat{f}$ *la transformée de Fourier d'une fonction de variable réelle lorsqu'elle est bien définie.*

**I.** (a) Énoncer le théorème de Plancherel.

(b) Expliquer pourquoi ce résultat implique la validité de la formule de Parseval

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{g}(\xi)}\,\mathrm{d}\xi$$

pour toutes fonctions $f$, $g$ de $L^2(\mathbb{R})$.

**II.** Soit $\varphi_1(x) := \mathrm{e}^{-2\pi|x|}$ $(x \in \mathbb{R})$. On rappelle que $\widehat{\varphi_1}(\xi) = \dfrac{1}{\pi(1+\xi^2)}$.

(a) On pose $h_1(x) := \mathbf{1}_{[-1/2,1/2]}(x)$. Calculer $\widehat{h_1}(\xi)$.

(b) Montrer l'existence et calculer la valeur de l'intégrale $I := \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(\pi\xi)}{\xi(1+\xi^2)}\,\mathrm{d}\xi$. On pourra utiliser la formule de Parseval.

**III.** Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ une fonction telle que $\widehat{f}(\xi) = 1/(1+|\xi|^3)$.

(a) Montrer que $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

(b) Montrer que $f'(x) = -4\pi \displaystyle\int_0^\infty \frac{\xi\sin(2\pi x\xi)}{1+\xi^3}\,\mathrm{d}\xi$ $(x \in \mathbb{R})$ et en déduire, en effectuant deux intégrations par parties successives, que $f' \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$. On pourra utiliser, sans les calculer, le fait que les dérivées de $Q(\xi) := \xi/(1+\xi^3)$ sont intégrables sur $\mathbb{R}^+$.

(c) Calculer $\widehat{f'}(\xi)$.

(d) Calculer $J := \displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f * f'(x)|^2\,\mathrm{d}x$.

**IV.** Soit $E$ un espace de Hilbert séparable de dimension infinie et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme continu injectif. On pose $v := u^*u$.

(a) Montrer que $v$ est auto-adjoint, injectif, et que $\operatorname{Im} v$ est dense dans $E$.

(b) En considérant le cas de l'espace $E_0 := \ell^2(\mathbb{N},\mathbb{C})$ et un endomorphisme diagonal $\boldsymbol{x} \mapsto (\lambda_0 x_0, \lambda_1 x_1, \dots)$ où $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, montrer que $v$ n'est pas nécessairement surjectif.

(c) À partir de cette question, et jusqu'à la fin du problème, on suppose que $v$ est surjectif. Montrer que $v \in \mathcal{L}^*(E)$, autrement dit que $v$ est un isomorphisme de $E$.

(d) Montrer l'existence d'une constante $M$ telle que $\|x\| \leqslant M\|ux\|$ pour tout $x$ de $E$. En déduire que $\operatorname{Im} u$ est fermé.

(e) On rappelle que, pour tout endomorphisme $w$ de $E$ on a $E = \operatorname{Ker} w \oplus \overline{\operatorname{Im} w^*}$ : expliquer d'où provient cette représentation.

(f) Montrer que $E = \operatorname{Ker} u^* \oplus \operatorname{Im} u$. À l'aide de cette égalité et de la conclusion de la question (c), montrer que $\operatorname{Im} u^*$ est fermé, puis que $u^*$ est un isomorphisme de $\operatorname{Im} u$ sur $E$.

(g) Montrer que le décalage à droite $u : \boldsymbol{x} \mapsto (0, x_0, x_1, \dots)$ sur $E_0$ est un endomorphisme continu, injectif, et vérifie $v \in \mathcal{L}^*(E_0)$. En déduire que les hypothèses précédentes n'impliquent pas que $u$ est un isomorphisme.

(h) Montrer que, si $w := uu^* \in \mathcal{L}^*(E)$, alors $u$ et $u^*$ sont des isomorphismes de $E$.

Université de Lorraine
Faculté des sciences et technologies
Master 2015/2016
Analyse (MAMT1 UE701)

Vendredi 13 novembre 2015
Durée : 1h30

# Sujet d'examen

*Aucun document n'est autorisé. L'usage d'une calculatrice est interdit. Sauf mention contraire, les notations sont celles du cours.*

*Les deux exercices sont indépendants.*

*Il sera tenu le plus grand compte de la rédaction et de la présentation. Seules les explications claires et précises seront prises en compte à la correction.*

**I.** Énoncer le principe de Baire.

**II.** Soit $E$ un espace de Banach possédant une famille génératrice dénombrable $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$. Pour chaque entier $n \geqslant 1$, on pose $E_n := \mathrm{Vect}[e_1, \ldots, e_n]$.

(a) Montrer que $E = \cup_{n \geqslant 1} E_n$.

(b) Soit $p \geqslant 1$ tel que $E_p \neq E$.

(i) Montrer qu'il existe $n \geqslant 1$ tel que $e_n \notin E_p$.

(ii) Montrer que, pour tous $x \in E_p$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$, on a $x + \lambda e_n \notin E_p$.

(iii) En déduire que $E_p$ est d'intérieur vide.

(c) Montrer que $E$ est de dimension finie.

**III.** On munit l'espace $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ d'une certaine norme, notée $f \mapsto \|f\|$, qui lui confère une structure d'espace de Banach. On suppose de plus que toute suite $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ convergeant dans $(E, \|\cdot\|)$ converge aussi simplement vers la même limite.

Pour toute fonction $f$ de $E$, on pose $\|f\|_\infty := \sup_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f(x)|$.

(a) Soit $D := \{(f,f) : f \in E\}$. Montrer que l'application

$$(f,f) \mapsto \|(f,f)\|_D := \|f\| + \|f\|_\infty$$

est une norme sur $D$ et que $(D, \|\cdot\|_D)$ est un espace de Banach.

(b) Soit $\varphi : (D, \|\cdot\|_D) \to (E, \|\cdot\|)$ l'application définie par $\varphi(f,f) = f$. Montrer que $\varphi$ est bijective et bicontinue.

(c) En déduire que l'identité $f \mapsto f$ de $(E, \|\cdot\|)$ dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$ est bijective et continue, puis que les normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes.

Université de Lorraine
Faculté des sciences et technologies
Master 2015/2016
Analyse (MAMT1 UE701)

Jeudi 14 janvier 2016
Durée : 3h

# Sujet d'examen

*Aucun document n'est autorisé. L'usage d'une calculatrice est interdit. Sauf mention contraire, les notations sont celles du cours.*

*Les quatre parties peuvent être traitées indépendamment.*

*Il sera tenu le plus grand compte de la rédaction et de la présentation. Seules les explications claires et précises seront prises en compte à la correction.*

*Les notations sont celles du cours. Dans l'exercice IV, on note $\widehat{f}$ ou $\mathcal{F}f$ la transformée de Fourier d'une fonction de variable réelle $f$ de $L^1(\mathbb{R})$ ou $L^2(\mathbb{R})$.*

**I.** Donner la définition du rayon spectral $\varrho(u)$ d'un opérateur d'espaces de Banach et expliciter les trois formules données en cours pour $\|u\|$ lorsque $u$ est un endomorphisme continu normal d'un espace de Hilbert séparable.

**II.** Soit $f \mapsto \|f\|$ une norme sur $E := \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ telle que toutes les applications linéaires $T_x : (E, \|\cdot\|) \to \mathbb{R}$ définies par $T_x(f) := f(x)$ soient continues. On suppose de plus que $(E, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach.

(a) Montrer que, pour chaque $f \in E$, on a $\sup_{0 \leqslant x \leqslant 1} |T_x(f)| < \infty$. En déduire l'existence d'une constante $M > 0$ telle que $\sup_{0 \leqslant x \leqslant 1} \|T_x\| \leqslant M$.

(b) Déduire de la question précédente que, pour toute fonction $f$ de $E$, on a $\|f\|_\infty \leqslant M\|f\|$, et donc que l'identité $(E, \|\cdot\|) \to (E, \|\cdot\|_\infty)$ est continue.

(c) Montrer que les normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes.

**III.** Soient $E$ un espace de Hilbert, $u \in \mathcal{L}(E)$ un opérateur de norme n'excédant pas 1 et $F := \operatorname{Ker}(\operatorname{id}_E - u)$. On note

$$u_n := \frac{1}{n+1} \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} u^k$$

la moyenne des $n+1$ premiers itérés de $u$. Le but de cet exercice consiste à déterminer des conditions suffisantes pour que $u_n$ tende vers le projecteur $p_F$ dans $\mathcal{L}(E)$ lorsque $n \to \infty$.

(a) Déterminer $u_n$, et $F$ lorsque $u$ est le décalage à gauche $(x_0, x_1, \dots) \mapsto (x_1, x_2, \dots)$ et $E$ est l'ensemble des suites réelles bornées muni du produit scalaire $(\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{y}) := \sum_{j \geqslant 0} x_j y_j / 2^j$. A-t-on $\lim u_n = p_F$ dans ce cas ? On pourra considérer le vecteur $\boldsymbol{x}$ défini pas $x_j := (-1)^k$ pour $2^k < j \leqslant 2^{k+1}$ $(k \in \mathbb{N})$.

(b) À partir de cette question, on suppose que l'opérateur $u$ est normal. Montrer que $F = \operatorname{Ker}(\operatorname{id}_E - u^*)$ et que $E = F \oplus G$ où $G = \overline{\operatorname{Im}(\operatorname{id}_E - u)}$.

(c) Montrer que $\lim_n u_n x = 0$ pour tout $x$ de $G$.

(d) Établir la propriété requise pour $u$.

(e) Application. On suppose à présent que $E$ est l'espace de Banach des fonctions complexes continues sur $[0,1]$ et 1-périodiques sur $\mathbb{R}$, muni du produit scalaire canonique $(f \mid g) = \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}\,dt$. On considère $\vartheta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et on définit l'opérateur de translation $u$ par $uf(t) = f(t + \vartheta)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ pour tout $f$ de $E$. On rappelle que $\vartheta\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

(i) Montrer que $u$ est normal.

(ii) Montrer que $F := \operatorname{Ker}(\operatorname{id}_E - u)$ coïncide avec l'ensemble des fonctions constantes de $E$.

(iii) Soit $f \in E$. Déterminer $p_F f$.

(iv) Montrer que, pour toute fonction $f$ de $E$, la suite de fonctions définies par

$$u_n f(t) := \frac{1}{n+1} \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} f(t + k\vartheta)$$

tend dans $E$ vers la constante $\mu(f) := \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.

**IV.** Soient $\varphi(x) := \sin(\pi x)/(\pi x)$ $(x \in \mathbb{R}^*)$, $\varphi(0) := 1$, et $\psi(x) := \mathbf{1}_{[-1/2,1/2]}(x)$ $(x \in \mathbb{R})$.

(a) Montrer que $\widehat{\psi} = \varphi$. En déduire que $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ et que $\widehat{\varphi} = \psi$ pp.

(b) Montrer que, pour toute fonction $f$ de $L^2(\mathbb{R})$, la convolution $f * \varphi$ est définie partout et vérifie $\|f * \varphi\|_\infty \leqslant \|f\|_2 \|\varphi\|_2$. On définit alors une application linéaire $u : L^2(\mathbb{R}) \to L^\infty(\mathbb{R})$ par $uf := f * \varphi$.

(c) Montrer que, pour toute $f$ de $L^2(\mathbb{R})$, on a $uf \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$. On pourra utiliser sans la redémontrer la majoration $\sup_{|v-x| \leqslant 1} |\varphi(v-y)| \leqslant K_x/(1+|y|)$ $(y \in \mathbb{R})$, valable pour tout $x \in \mathbb{R}$ fixé, où $K_x$ ne dépend que de $x$.

(d) Pour chaque $x \in \mathbb{R}$ fixé, on pose $\sigma_x f(y) := f(x-y)$ $(y \in \mathbb{R})$. Montrer que $\widehat{\sigma_x f}(\xi) = \mathrm{e}^{-2\pi i x \xi} \widehat{f}(-\xi)$ $(\xi \in \mathbb{R})$.

(e) Expliquer succinctement pourquoi le théorème de Plancherel implique la formule de Parseval $(f \mid g) = \left(\widehat{f} \mid \widehat{g}\right)$ pour toutes fonctions $f$, $g$ de $L^2(\mathbb{R})$.[1] Montrer que, pour toute fonction $f$ de $L^2(\mathbb{R})$, on a $uf = \overline{\mathcal{F}}(\widehat{f}\psi)$.

(f) Déduire de ce qui précède que, pour toute $f$ de $L^2(\mathbb{R})$, on a $uf \in L^2(\mathbb{R})$ et $\|uf\|_2 \leqslant \|f\|_2$.

(g) Montrer que, pour tout entier $k \geqslant 0$, l'application $g_k : \xi \mapsto \xi^k \widehat{f}(\xi)\psi(\xi)$ est dans $L^1(\mathbb{R})$. En déduire que $uf \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

1. L'espace $L^2(\mathbb{R})$ est ici muni du produit scalaire usuel.

Université de Lorraine
Faculté des sciences et technologies
Master 2016/2017
Analyse (MAMT1 UE701)

Vendredi 25 novembre 2016
Durée : 2h

# Sujet d'examen

*Aucun document n'est autorisé. L'usage d'une calculatrice est interdit. Sauf mention contraire, les notations sont celles du cours.*

*Les quatre exercices sont indépendants.*

*Il sera tenu le plus grand compte de la rédaction et de la présentation. Seules les explications claires et précises seront prises en compte à la correction.*

**I.** Énoncer le théorème de l'application ouverte.

**II.** On dit qu'une partie $A$ d'un espace métrique est *rare* si son adhérence est d'intérieur vide. On dit qu'elle est *maigre* si elle est contenue dans une réunion dénombrable de parties rares.

(a) Montrer que, dans un espace métrique complet, le complémentaire d'une partie maigre est nécessairement dense.
(b) Une partie maigre peut-elle être dense ?
(c) L'ensemble $A := \{1/n : n \geqslant 1\}$ est-il rare dans $\mathbb{R}$ ?
(d) Dans $\mathbb{R}$, l'ensemble $B := \mathbb{Z} \cup \big([0,1] \cap \mathbb{Q}\big)$ est-il rare ? Est-il maigre ?
(e) Soient $E$, $F$ deux espaces de Banach, $T \in \mathcal{L}(E, F)$ et $V := T\big(B_E(0;1)\big)$.
(i) Montrer que $T(E) \subset \cup_{n \geqslant 1} n\overline{V}$.
(ii) Montrer que, si $\mathring{\overline{V}} = \varnothing$, alors $T(E)$ est maigre.
(iii) Montrer que, si $\mathring{\overline{V}} \neq \varnothing$, alors $T$ est surjective.(1)
(iv) En déduire que $T$ est soit surjective, soit d'image maigre.

(f) Montrer que l'injection canonique de $L^2[0,1]$ dans $L^1[0,1]$ est continue mais non surjective. Que peut-on en déduire ?

**III.** Soient $E$ un espace de Hilbert et $u \in \mathcal{L}(E)$ un opérateur isométrique.
(a) Montrer que, si $u$ est surjectif, alors $u$ est bijectif et $u^* = u^{-1}$.
(b) Montrer que si $u$ n'est pas un opérateur normal, alors $u(E)$ est un sous-espace vectoriel fermé propre de $E$.

**IV** Soient $E$ un espace de Hilbert et $u \in \mathcal{L}(E)$ un opérateur continu hermitien non nul.
(a) Montrer que $u^n \neq 0$ si $n$ est de la forme $2^p$ avec $p \in \mathbb{N}^*$.
(b) Montrer que $u^n \neq 0$ pour tout entier $n \geqslant 1$.

---

1. On admettra que $\mathring{\overline{V}} \neq \varnothing \Rightarrow 0 \in \mathring{\overline{V}}$ : cette propriété a été établie au cours de la preuve du théorème de l'application ouverte.

Université de Lorraine
Faculté des sciences et technologies
Master 2016/2017
Analyse (MAMT1 UE701)

Mardi 10 janvier 2017
Durée : 3h

# Sujet d'examen

*Aucun document n'est autorisé. L'usage d'une calculatrice est interdit. Sauf mention contraire, les notations sont celles du cours. On note en particulier*

$$\widehat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{e}^{-2i\pi x\xi}\,\mathrm{d}x \qquad (\xi \in \mathbb{R})$$

*la transformée de Fourier d'une fonction $f$ intégrable sur $\mathbb{R}$.*

*Les trois parties sont indépendantes.*

*Il sera tenu le plus grand compte de la rédaction et de la présentation. Seules les explications claires et précises seront prises en compte à la correction.*

**I.** Définir un espace vectoriel normé localement compact et énoncer la caractérisation de Riesz.

**II.** Soit $E$ un espace de Hilbert et $T \in \mathcal{L}(E)$ un opérateur continu vérifiant $\|Tx\| < \|x\|$ pour tout $x \in E \smallsetminus \{0\}$. On dit alors que $T$ est *strictement sous-contractant.*

(a) Est-il vrai que la suite $\{T^n x\}_{n=0}^{\infty}$ converge pour tout $x$ de $E$ si $\dim E < \infty$ ? On pourra montrer préalablement que $\|T\| < 1$.

(b) Pour cette question uniquement, on considère l'opérateur défini sur l'espace de Hilbert $E := L^2([0,\infty[)$ muni du produit scalaire usuel par la formule

$$Tf(x) := \mathbf{1}_{[1,\infty[}(x)f(x-1)\mathrm{e}^{G(x-1)-G(x)} \qquad (x \in \mathbb{R}^+),$$

où l'on a posé $G(x) := \int_0^x \mathrm{d}t/(1+t^2)$.

(i) Montrer que $\|Tf\|_2 < \|f\|_2$ dès que $\|f\|_2 \neq 0$.

(ii) Montrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ et pour toute fonction $f$ de $E$, on a $T^n f(x) = \mathbf{1}_{[n,\infty[}(x)f(x-n)\mathrm{e}^{G(x-n)-G(x)}$ $(x \in \mathbb{R}^+)$.

(iii) En déduire que $\|T^n f\|_2 \geqslant \mathrm{e}^{-\pi/2}\|f\|_2$ pour tout entier $n \geqslant 1$ et toute fonction $f$ de $E$.

(iv) En évaluant la limite simple de $T^n f$ lorsque $n \to \infty$, montrer que cette suite ne converge pas dans $E$ si $f \neq 0$.

(c) Déterminer $\mathrm{Ker}(\mathrm{id}_E - T^*)$. En déduire que $\mathrm{Im}(\mathrm{id}_E - T)$ est dense dans $E$.

On suppose désormais que $\dim E = \infty$ et que l'opérateur strictement sous-contractant $T \in \mathcal{L}(E)$ vérifie en outre

$$\lim_{n\to\infty} \{T^{n+1}x - T^n x\} = 0 \qquad (x \in E).$$

On dit dans ce cas que $T$ est *asymptotiquement régulier.*

(d) Montrer que $\lim_{n\to\infty} T^n x = 0$ pour tout $x$ de $\mathrm{Im}(\mathrm{id}_E - T)$.

(e) Montrer que la partie $F := \{x \in E : \lim_{n\to\infty} T^n x = 0\}$ est fermée dans $E$. En déduire que $F = E$.

**III.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, telle que $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $f' \in L^2(\mathbb{R})$.

(a) Montrer que, pour $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$, on a

$$|f(y) - f(x)| = \left|\int_x^y f'(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \|f'\|_2\sqrt{y-x}.$$

On se contentera d'une brève explication pour la première égalité.

(*Voir suite au verso.*)

(b) Montrer que $f$ est uniformément continue. En déduire que $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$,[1] puis que $f$ est bornée, puis que $f \in E := L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$.

(c) On définit une fonction auxiliaire trapézoïdale $\chi : \mathbb{R} \to [0,1]$ par

$$\chi(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leqslant 1, \\ 2-|x| & \text{si } 1 < |x| \leqslant 2, \\ 0 & \text{si } |x| > 2. \end{cases}$$

On pose ensuite $\chi_n(x) := \chi(x/n)$ ($n \geqslant 1$, $x \in \mathbb{R}$) et $f_n := \chi_n f$. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, la fonction $f_n$ est continue, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, et appartient à $E$.

(d) Montrer que $f_n' \in E$.

(e) Montrer que $f_n'$ tend vers $f'$ dans $L^2(\mathbb{R})$.

(f) Montrer que $\widehat{f_n'}(\xi) = 2\pi i\xi \widehat{f_n}(\xi)$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$. En déduire que la suite $\{\widehat{f_n'}\}_{n=0}^{\infty}$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$ vers une limite $g$ que l'on exprimera en fonction de $\widehat{f}$.

(g) Soit $T > 0$ un nombre réel fixé. Montrer que

$$4\pi^2 \int_{-T}^{T} \xi^2 |\widehat{f}(\xi)|^2 \,\mathrm{d}\xi \leqslant \lim_{n\to\infty} \|\widehat{f_n'}\|_2^2 = \lim_{n\to\infty} \|f_n'\|_2^2 = \|f'\|_2^2.$$

En déduire que

$$\int_{\mathbb{R}} (1+\xi^2)|\widehat{f}(\xi)|^2 \,\mathrm{d}\xi \leqslant \|f\|_2^2 + \frac{1}{4\pi^2}\|f'\|_2^2.$$

(h) Montrer que $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. Énoncer un théorème découlant de cette étude.

---

1. On pourra commencer par supposer $\limsup_{x\to\infty} f(x) \geqslant \delta > 0$ et observer que cela implique l'existence d'une infinité d'intervalles de longueur positive ne dépendant que de $\delta$ sur lesquels $f(x) \geqslant \delta/2$.

Université de Lorraine
Faculté des sciences et technologies
Master 2017/2018
Analyse (MAMT1 UE701)

Vendredi 1er décembre 2017
Durée : 1h30

# Sujet d'examen partiel

*Aucun document n'est autorisé. L'usage d'une calculatrice est interdit. Sauf mention contraire, les notations sont celles du cours.*

*Les deux exercices sont indépendants.*

*Il sera tenu le plus grand compte de la rédaction et de la présentation. Seules les explications claires et précises seront prises en compte à la correction.*

**I.** Énoncer le théorème de Banach-Steinhaus.

**II.** Soit $E := \ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{C})$. On suppose que la suite $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est telle que, pour toute suite $\boldsymbol{x} = (x_0, x_1, \ldots)$ de $E$, la série $\sum_{n \geqslant 0} \alpha_n x_n$ converge.

(a) Montrer que, pour tout entier naturel $N \geqslant 0$, l'application $\varphi_N : E \to \mathbb{C}$ définie par $\varphi_N(\boldsymbol{x}) = \sum_{0 \leqslant n \leqslant N} \alpha_n x_n$ est une forme linéaire continue sur $E$.

(b) Calculer $\|\varphi_N\|$.

(c) Montrer que $\boldsymbol{\alpha} \in \ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{C})$.

**III.** (a) Soit $E$ un espace de Hilbert et $F$, $G$, des sous-espaces vectoriels de $E$. Montrer que $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.

(b) On considère l'espace $E := L^2[0, 1]$, muni du produit scalaire usuel. On désigne par $F$ le sous-espace vectoriel de $E$ constitué des fonctions constantes et par $G$ la droite vectorielle engendrée par la fonction identité $x \mapsto x$.

(i) Le sous-espace vectoriel $H := F + G$ est-il fermé ?

(ii) Déterminer une base orthormale de $H$.

(iii) Soit $s \in E$ la fonction définie par $s(x) := \sin(2\pi x)$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$. Déterminer $p_H s$.

(iv) On pose $K := H^\perp$. Calculer $d(s, K)$.

(v) Calculer $\mu := \inf\limits_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \displaystyle\int_0^1 |s(x) - ax - b|^2 \, \mathrm{d}x$.

# Index