IN MEMORIAM PAUL ERDŐS (1913-1996)

Bordeaux, Pâques 1979. Une chambre d'hôtel sans grand confort. Sur le lit, un homme âgé somnole. Ses cheveux blancs sont en désordre et sa respiration difficile est émaillée de soubresauts fébriles. Le médecin rédige une ordonnance d'antibiotiques : pleurésie sévère. Il s'approche du lit, et parle (trop) fort :

— Au revoir, Monsieur, j'ai laissé l'ordonnance. Je ne vous fait pas payer la consultation...

Le vieil homme se redresse brusquement, piqué au vif.

— Je veux payer. Je suis mathématicien à l'Académie des Sciences Hongroise, j'ai écrit plusieurs ouvrages...

Cet épisode est un des rares, sinon le seul, où j'ai vu Erdős revendiquer un quelconque statut. L'homme des nombres était, pour les choses de ce monde, un homme de l'ombre.

Paul Erdős est né à Budapest le 26 mars 1913, dans une famille juive. Son père, Lajos, et sa mère, Anna, enseignaient tous deux les mathématiques au collège. Sa naissance fut marquée du sceau du destin : pendant le séjour d'Anna à la maternité, ses deux sœurs, Clara et Magda, âgées de trois et cinq ans contractèrent la scarlatine et moururent dans la journée.

Ces circonstances tragiques firent de Paul plus qu'un simple enfant unique : un être singulier. A un journaliste qui lui demandera, bien plus tard, s'il a jamais été tenté par le mariage il répondra : « *Mon caractère est intrinsèquement tel que j'ai toujours voulu être différent des autres gens. Depuis mon plus jeune âge, j'ai toujours résisté automatiquement à la tentation de ressembler aux autres. Je me souviens d'un incident, lorsque j'étais un petit enfant. Vous savez, les juifs avaient beaucoup de problèmes après la révolution communiste de 1919. Ils y avait beaucoup d'agissements antisémites. Étant juive, ma mère me dit un jour : — Tu sais, c'est si dur pour les juifs, ne devrions-nous pas nous faire baptiser ? — Écoute, tu fais ce que tu veux, mais moi je reste comme je suis né. C'est tout à fait remarquable pour un enfant (je n'avais que six ou sept ans à l'époque) parce qu'en fait être juif ne signifiait rien pour moi. Cela n'a d'ailleurs jamais rien signifié.* »

Enfant singulier, Paul[1] dut aux circonstances de vivre une relation plus que singulière avec sa mère : alors qu'il avait un an et demi, son père Lajos fut capturé par les Russes et envoyé en Sibérie pour six ans. Anna le garda à la maison, craignant les risques de contagion. Même à l'âge du lycée, il n'alla en classe que très épisodiquement, Anna changeant constamment d'avis sur la question.

[1] L'orthographe hongroise est *Pál*, avec essentiellement la même prononciation. Erdős a opté plus tard pour *Paul*, plus international.

C'est à l'âge de quatre ans qu'il découvre la mort et... les nombres négatifs — ne voyez en cela aucun hasard. « *J'étais un enfant prodige* », aimait-il rappeler avec un malicieux sourire. « *J'ai dit un jour à ma mère : si de cent on ôte deux cent cinquante, on obtient cent cinquante en dessous de zéro.* » Quant à la découverte de la mort, il l'évoque avec une émotion intacte : « *C'est ma seconde grande découverte. Les enfants ne pensent généralement pas qu'ils vont mourir. Ce fut mon cas jusqu'à l'âge de quatre ans. Un jour, j'étais dans un magasin avec ma mère et j'ai soudain réalisé mon erreur. Je me suis mis à pleurer. J'ai compris que j'allais mourir. Depuis ce jour, j'ai toujours souhaité être plus jeune.* »

Paul Erdős est parti le 20 septembre 1996, seul dans une chambre d'hôpital de Varsovie, des suites d'une double crise cardiaque. Il désignait ce type de départ du vocable de *guérison* — ultime remède à l'incurable maladie de la vie.

Lorsqu'un grand homme disparaît, il est d'usage de centrer le discours sur l'œuvre, restreignant les renseignements biographiques aux éléments objectifs fondamentaux : quelques lieux, quelques dates. Qu'importe, après tout, que Baudelaire ait aimé Sarah, ou qu'il ait détesté son beau-père : ce qui compte ce sont *Les fleurs du mal...* Pourtant, dans le cas d'Erdős, on a la confuse impression que l'évocation de la singularité psychologique de l'homme permettra de comprendre, à défaut d'expliquer, l'inexplicable génie du mathématicien.

Erdős naviguait sur un océan de confiance. Fils adoré d'une mère pour laquelle il était littéralement tout, il vivait dans le village planétaire des mathématiciens, dont il partageait à tour de rôle l'intimité familiale. On a coutume de dire qu'il n'avait pas de domicile : en fait, il était partout chez lui.

Sinon totalement imaginaire, son monde fonctionnait selon les étranges principes d'un idéalisme à la Schopenhauer — une table rase sur laquelle on peut poser, ou construire, tels objets que bon nous semble. Et le miracle, c'est que le monde fonctionnait *pour lui* sur le mode ainsi forgé. Les mathématiciens qui l'hébergeaient et partageaient son quotidien pendant quelques jours ou quelques semaines vivaient *de facto* à son rythme et selon sa philosophie. Les biens de consommation, par exemple, qui étaient tenus par lui pour négligeables, en un sens presque mathématique, étaient exclus du paysage pendant une visite d'Erdős.

Ce que contenait sa petite valise, si légère à nos yeux, c'était un monde en kit, une phénoménale entreprise de mener sa vie sur un chemin inexploré. Les mathématiques en étaient-elles l'instrument ou la finalité ? On peut aujourd'hui s'interroger. Il reste que nous qui l'avons connu et aimé étions, sans peut-être en avoir une conscience totale, les complices de cette création illicite d'univers. Ce n'est pas une petite fierté.

Erdős publia son premier article (1932) à l'âge de dix-neuf ans : une nouvelle preuve du postulat de Bertrand, établi par Tchébychev en 1851, selon lequel, pour chaque entier $n \geqslant 1$, il existe au moins un nombre premier p tel que $n < p \leqslant 2n$. Tout Erdős est déjà là : la simplicité apparente, l'élégance, la puissance de la déduction, l'émergence de nouvelles méthodes. Tchébychev avait déployé une puissante machinerie, Erdős obtient le résultat avec une petite cuiller. Le monde mathématique n'est pas indifférent et Nathan Fine salue l'entrée de l'artiste par un petit couplet :

Chebyshev said it and I say it again
There is always a prime between n *and* $2n$.

Il est évidemment impossible de rendre compte ici de l'influence d'Erdős sur les mathématiques de ce siècle. Il a écrit plus de 1500 articles, dont une bonne moitié en collaboration, avec quelques 458 co-auteurs,[2] et le nombre des publications liées à ses travaux est considérable. Il aurait d'ailleurs fait peu de cas d'une telle comptabilité, affichant en l'espèce un pragmatisme radical : seul est à considérer l'avancement des idées, et celles-ci sont *bien commun* dès qu'elles sont émises.

Les domaines d'élection d'Erdős sont principalement la théorie des nombres, l'analyse combinatoire, la théorie des graphes, la géométrie des nombres, la théorie des ensembles, les probabilités, ainsi que diverses branches de l'analyse mathématique. Je me contenterai ici de donner au lecteur, à côté d'une image de l'homme, un bref aperçu subjectif (qu'y puis-je ?) du rayonnement de l'œuvre, en choisissant quelques exemples dans les sujets de ma compétence.

Dès 1934, Erdős fait faire un bond décisif à la meilleure minoration connue pour les grandes valeurs des différences entre nombres premiers consécutifs. Soit p_n le n-ième nombre premier et $d_n = p_{n+1} - p_n$. Erdős montre que l'on a, pour une infinité d'entiers n,

$$d_n > c \log n \log_2 n / (\log_3 n)^2,$$

où, ici et dans la suite, on désigne par $\log_k$ la k-ième itérée de la fonction logarithme. En 1938, Rankin montre par un raffinement de la même méthode que la minoration peut être multipliée par $\log_4 n$.[3] À la valeur de la constante près, c'est toujours le meilleur résultat connu.

Cette situation n'est pas rare. Les progrès d'Erdős sur les problèmes abordés sont souvent d'une telle profondeur que les améliorations qui suivent, lorsqu'il y en a, reposent essentiellement sur les mêmes idées. Là se situe sans doute une des qualités majeures du génie d'Erdős : sa capacité à attaquer un problème, à trouver le petit bout de fil qui, plus tard, permettra de dévider l'écheveau. Et l'on sait que, dans les domaines de prédilection d'Erdős, c'est

[2] Au dernier recensement...
[3] Maier (1981) a obtenu des résultats de qualité comparable pour k grandes différences consécutives.

souvent le premier pas, non le dernier, qui manque.[4] Aussi naturels qu'ils paraissent, aussi débonnaires qu'ils soient formulés, les problèmes semblent lisses, n'offrant pas la moindre aspérité où accrocher un début de solution. C'est dans ces situations critiques, quand les choses sont au pire, qu'Erdős est le meilleur : tel un alpiniste, il ouvre la voie. Résolveur, Erdős le fut avant tout, même si l'édifice conjectural qu'il nous laisse est impressionnant.

L'habitude d'Erdős de mettre à prix ses conjectures est aujourd'hui bien connue. Il a, par exemple, offert 10000 dollars pour une preuve[5] que l'on peut améliorer l'estimation de Rankin d'un facteur tendant vers l'infini. Cela reflétait à la fois la difficulté supposée d'un problème et l'intérêt personnel qu'il y portait. Ces jugements pouvaient varier dans le temps. Ainsi, dans un article récent (1996) qu'on peut lire comme une sorte de testament mathématique, Paul réduit l'offre précédente à 5000 dollars et réitère son offre de 10000 dollars pour une preuve de $\limsup d_n/(\log n)^{1+\epsilon} > 0$ avec $\epsilon > 0$.

Erdős entre à l'université de Budapest à dix-sept ans et en ressort quatre ans plus tard avec le titre de docteur en mathématiques. En octobre 1934, il obtient une bourse post-doctorale de quatre ans pour Manchester. C'est une époque de grands bouleversements : largement motivée par des raisons politiques (« *J'étais juif et la Hongrie était un pays semi-fasciste.* »), cette première séparation de la famille et du pays natal s'avère très pénible, et Paul rentre au pays trois fois par an. La légende dit aussi que c'est à son arrivée en Angleterre qu'il beurra sa première tartine...

En mars 1938, Hitler envahit l'Autriche et il est trop dangereux pour Paul de revenir en Hongrie. Il y parvient cependant, discrètement, pendant l'été, mais, inquiété par la crise Tchèque,[6] repart le 3 septembre 1938. À la fin du mois, il s'embarque pour les États Unis au moment même où se déroule la conférence de Munich, concrétisant, entre autres, l'annexion au Reich de larges territoires tchèques. Les nazis devaient assassiner quatre des cinq frères de sa mère et son père meurt d'une crise cardiaque en 1942.

De l'époque anglaise d'Erdős date aussi le fameux théorème de Davenport–Erdős (1937) selon lequel tout ensemble de multiples

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}(\mathcal{A}) = \{am : a \in \mathcal{A},\, m \geqslant 1\}$$

possède une densité logarithmique, c'est-à-dire que le rapport

$$\frac{1}{\log x} \sum_{\substack{n \leqslant x \\ n \in \mathcal{M}(\mathcal{A})}} \frac{1}{n}$$

possède une limite lorsque $x \to \infty$. Ce résultat profond et élégant a eu une nombreuse descendance mathématique, notamment de puissantes généralisations dues à Ruzsa (1977, 1982).

[4] Il en va parfois autrement en sciences expérimentales ou dans des domaines plus sophistiqués des mathématiques.

[5] Ou une infirmation, mais dans le cas précis, il excluait totalement une telle éventualité.

[6] Provoquée par la minorité allemande des Sudètes.

Ce fut aussi le (second) début de la théorie probabiliste des nombres. L'étape liminaire avait été franchie par Hardy et Ramanujan qui ont montré en 1918 que, si l'on note $\omega(n)$ le nombre des facteurs premiers distincts de n, alors on a pour toute fonction $\xi(n) \to \infty$ et presque tout entier n

$$|\omega(n) - \log_2 n| < \xi(n)\sqrt{\log_2 n}.$$

Paul Turán, un ami et collaborateur de toujours d'Erdős, avait trouvé en 1934 une démonstration simple de ce résultat fondamental, reposant sur un analogue arithmétique de l'inégalité de Bienaymé-Tchébychev — que d'ailleurs il ignorait à l'époque. En 1935, Erdős montre que la densité des entiers n pour lesquels $\omega(n) > \log_2 n$ vaut $\frac{1}{2}$. Il utilise à cette fin le crible de Brun — une méthode élémentaire dont il a perçu les vastes possibilités bien avant et bien plus profondément que quiconque — et le théorème central limite des probabilités (qu'il ignorait également) dans le cas d'une variable aléatoire binomiale. Dans son ouvrage de référence (1979/1980), Elliott cite Paul parlant de Turán et lui-même à cette époque : « *We were rediscovering the central limit theorem as we went along.* »

En 1938, Erdős montre que, si f est une fonction additive, c'est-à-dire si

$$f(n) = \sum_{p^\nu \| n} f(p^\nu) \qquad (n \geqslant 1),$$

alors la suite des fréquences

$$\nu_x(z) := x^{-1}|\{n \leqslant x : f(n) \leqslant z\}|$$

converge vers une fonction de répartition dès que les trois séries

$$\sum_{|f(p)|>1} \frac{1}{p}, \qquad \sum_{|f(p)|\leqslant 1} \frac{f(p)}{p}, \qquad \sum_{|f(p)|\leqslant 1} \frac{f(p)^2}{p}$$

convergent. C'est un analogue du théorème des trois séries de Kolmogorov — encore un résultat probabiliste dont Erdős, ignorant l'original, découvre la version arithmétique. En 1939, Erdős et Wintner démontrent que la condition est aussi nécessaire.

La preuve utilisait des idées probabilistes, et en particulier le fameux théorème d'Erdős–Kac, établi quelques mois auparavant dans des circonstances qui méritent d'être racontées.

En mars 1939, Marc Kac, un chercheur en physique mathématique, émigré juif polonais, qui devait contribuer au développement des radars pendant la guerre, donne une conférence à Princeton dans laquelle il énonce la conjecture suivante. *Soit f une fonction additive telle que $f(p^\nu) = f(p)$. Posons*

$$A(x) = \sum_{p \leqslant x} f(p)/p, \qquad B(x) := \sum_{p \leqslant x} f(p)^2/p.$$

Alors, si $B(x) \to \infty$, on a

$$\lim_{x\to\infty} x^{-1}|\{n \leqslant x : f(n) \leqslant A(x) + zB(x)\}| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} \mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t.$$

En fait, Kac explique qu'il sait montrer sa conjecture si l'on impose que $f(p) = 0$ pour $p > y$ où $y = y(x)$ tend vers l'infini assez lentement. Erdős, qui est dans la salle (comme l'a dit Kac en 1976, « *heureusement pour moi et probablement pour les mathématiques* »), réalise immédiatement que si Kac peut montrer un tel résultat, alors il peut compléter la preuve en faisant appel au crible de Brun...

Il devint vite clair qu'une nouvelle page de l'histoire de la théorie des nombres avait été tournée, dans laquelle les idées probabilistes, en particulier l'interprétation de la divisibilité des entiers par des nombres premiers distincts comme des événements (presque) indépendants, trouvaient une place naturelle.

Comme le note Kac, peut-être à cause de la guerre et aussi parce que les articles fondateurs d'Erdős et Kac (1939, 1940) n'étaient pas très bien écrits,[7] le sujet resta plus ou moins confidentiel jusqu'en 1948. Puis, soudain, à la suite d'une conférence de Kac devant la société mathématique américaine, il devint immensément populaire, quasiment du jour au lendemain.

Erdős regardait son activité conjecturale comme l'inséparable complément de son travail de pionnier et de découvreur de théorèmes. Ernst Straus, qui a collaboré avec Einstein et Erdős, disait en 1983 : « *Dans notre siècle, où les mathématiques ont été tellement dominées par les "docteurs théoriques", Erdős demeure le prince des résolveurs de problèmes et le monarque absolu des poseurs de problèmes.* » Il est difficile de comparer Erdős à qui que ce soit, mais la référence initiée par Straus et qui peu à peu s'impose est celle d'un « *Euler de notre temps.* » Peut-être parce qu'au talent, à la clairvoyance, à la prolixité, au génie, s'ajoute encore un fantastique plaisir ludique.

Souvent énoncées dans les termes les plus simples qui contiennent toute la complexité du problème, les conjectures d'Erdős sont comme les énigmes anciennes. Elles apparaissent d'abord incongrues et obscures. Puis, alors que la réflexion s'organise, la pertinence émerge peu à peu. Quand une solution partielle survient, on commence à percevoir l'importance et les ramifications, et l'on se rend compte que les outils mis en place pour cette avancée ouvrent des fenêtres insoupçonnées. Et, au delà de l'horizon, le paysage est certainement plus étrange encore...

Un des problèmes de théorie probabiliste des nombres qui a résisté à Erdős pendant plusieurs décennies est celui d'un éventuel critère pour l'absolue continuité de la répartition limite d'une fonction additive. Beaucoup de questions intéressantes se posent également pour des fonctions non additives. Soit $P^+(n)$ le plus grand facteur premier de n. Erdős considérait comme « inattaquable » la conjecture selon laquelle la densité naturelle des entiers n tels que $P^+(n+1) > P^+(n)$ est $\frac{1}{2}$.

[7] Erdős et Kac revendiquent chacun l'entière responsabilité de ce manque de limpidité, d'ailleurs tout relatif.

L'un des épisodes les plus aigus de la vie mathématique d'Erdős est celui de sa contribution à la première preuve élémentaire du théorème des nombres premiers. Ici encore, la psychologie joue un rôle plus important qu'on ne pourrait se l'imaginer. On a mentionné plus haut le premier article d'Erdős, sur le postulat de Bertrand. Les nombres premiers représentaient pour lui une constante fascination. Il se souvient : « *J'avais dix ans, mon père m'a raconté la preuve d'Euclide, et j'ai été accroché.* »

Aboutissement de vingt cinq siècles d'efforts, le théorème des nombres premiers a été rigoureusement établi en 1896 par Hadamard et La Vallée–Poussin selon les idées développées par Riemann dans son mémoire visionnaire de 1859. Riemann avait montré comment ce problème d'analyse réelle pouvait être plongé dans le champ complexe et il avait dégagé les étapes d'une résolution faisant appel aux puissants outils de la théorie de Cauchy. Les plus grands mathématiciens, au premier rang desquels Hardy, pensèrent alors que ce plongement était essentiellement nécessaire, et qu'il n'eut été guère raisonnable[8] d'attendre une preuve fondamentalement indépendante des concepts de la théorie des fonctions de variable complexe.

Hardy mourut en 1947, et en 1949 Erdős et Selberg produisirent une telle preuve. Le point de départ était la formule relativement simple découverte par Selberg

$$\sum_{p\leqslant x}(\log p)^2 + \sum_{pq\leqslant x}\log p\log q = 2x\log x + O(x),$$

où p et q désignent des nombres premiers. Cette formule résulte directement du théorème des nombres premiers, mais le point remarquable est que Selberg avait obtenu sa formule sans y avoir recours. Il en avait tiré certaines conséquences, depuis déjà quelque temps, mais apparemment rien d'exceptionnel. Cependant, Erdős en déduisit une nouvelle preuve du postulat de Bertrand, sous une forme forte : non seulement $p_{n+1}/p_n \to 1$, mais, pour tout $\delta > 0$, le nombre d'entiers n tels que $x < p_n \leqslant (1+\delta)x$ est au moins égal, dès que x est assez grand, à $c(\delta)x/\log x$ avec $c(\delta) > 0$. Ainsi, alors que la formule de Selberg exhibait une répartition harmonieuse des nombres premiers *en moyenne*, Erdős en déduisait aussi une *régularité locale*. C'était exactement le type de renseignement requis. La situation était essentiellement celle où l'on connaît à la fois le comportement de l'intégrale et celui de la dérivée d'une fonction : il est bien connu[9] que cela fournit des renseignements sur la fonction elle-même. Toujours est-il que, deux jours plus tard, Selberg en déduisit une preuve élémentaire du théorème des nombres premiers. La preuve fut ensuite simplifiée par Selberg et, tout en reposant sur les les mêmes idées, n'utilisait plus *stricto sensu* le résultat intermédiaire d'Erdős sur la régularité locale.

---

[8] « *Extremely unlikely* », selon les termes employés par Hardy dans son allocution devant la société mathématique de Copenhague en 1921.

[9] Dans la tradition orale de la méta-philosophie mathématique, et particulièrement celle de la théorie taubérienne.

Il fut initialement convenu que deux articles séparés mais contigus seraient publiés dans un journal de premier plan. Erdős envoya des cartes postales à divers mathématiciens, annonçant la conquête jointe de ce sommet incontesté de la théorie des nombres. Cependant, Selberg rencontrant fortuitement un mathématicien qui ne le connaissait pas et qui avait reçu l'une de ces cartes postales, se fit apostropher : « *Avez-vous appris la nouvelle ? Erdős et Je-ne-sais-plus-qui ont trouvé une preuve élémentaire du théorème des nombres premiers !* » Selberg, dont la notoriété n'était pas à l'époque ce qu'elle est aujourd'hui, en fut cruellement blessé et il décida de publier son article seul (1949). Après quelques sérieuses difficultés et controverses, Erdős réussit à publier également sa contribution (1949). Selberg se tailla la part du lion de cet exploit qui transformait irrévocablement la philosophie mathématique et rendait définitivement caduque la discussion sur les mérites relatifs des méthodes élémentaires et de celles de la théorie des fonctions. Il reçut la médaille Fields en 1950, en grande partie grâce à son travail sur les nombres premiers.

Il n'est pas rare que des mathématiciens entrent en conflit pour des questions de paternité scientifique. Dans la vie d'Erdős, cet épisode, dont il souffrit beaucoup, est cependant unique à ma connaissance. Erdős a donné, toute sa vie durant, avec une immense générosité. Il avait une définition très large de la collaboration et je crois que la plupart de ses co-auteurs s'accorderont sur le fait qu'il avait une conception quasi collective de la création mathématique qui, finalement, nous amenait à donner le meilleur de nous-mêmes dans notre relation professionnelle avec lui. C'est ce qui explique peut-être qu'un tel génie ait pu travailler d'égal à égal avec tant de gens.

Erdős a imaginé, à partir de la preuve élémentaire du théorème des nombres premiers, une nouvelle classe de théorèmes taubériens (1949). Par exemple, si $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ est une suite de nombres réels positifs ou nuls et si $s_m = \sum_{k\leqslant m} a_k$, alors la relation

$$\sum_{1\leqslant k\leqslant n} a_k\{k + s_{n-k}\} = n^2 + O(n)$$

implique $s_n = n + O(1)$. La preuve initiale, très compliquée, a été simplifiée par Shapiro (1959). Voir Hildebrand & Tenenbaum (1994) pour de récents développements.

Erdős a marqué le domaine de la théorie additive des nombres par l'introduction d'une méthode générale dont l'aspect esthétique n'est plus à souligner. Le point de départ est un problème posé par Sidon dans les années trente. Soit $\mathcal{A}$ une suite d'entiers et $R(n)$ le nombre de représentations d'un entier n sous la forme $n = a + a'$ avec $a, a' \in \mathcal{A}$. Est-il possible d'avoir $R(n) \geqslant 1$ pour tout n et cependant $R(n) = n^{o(1)}$? Erdős mit vingt ans à trouver la réponse à cette question d'apparence anodine. Son idée consiste à munir l'espace des suites d'entiers d'une probabilité telle que presque toutes les suites possèdent la propriété requise — établissant ainsi l'existence d'au moins une telle suite. Il a montré de cette façon (1956) l'existence d'une suite $\mathcal{A}$ telle que $c_1 \log n \leqslant R(n) \leqslant c_2 \log n$ ait lieu pour tout $n \geqslant 2$ avec des constantes positives c_1 et c_2.

Une autre application des probabilités à la théorie additive des nombres réside dans la théorie statistique des partitions. Soit $p(n)$ le nombre total des partitions de n et $p_k(n)$ le nombre de celles qui sont composées d'au plus k termes. Erdős et Lehner ont montré en 1941 que

$$\lim_{n\to\infty} p_k(n)/p(n) = \exp\{-2c\mathrm{e}^{-z/2}\}$$

lorsque $k = c\sqrt{n}\{\log n + z\}$ où c est une constante positive convenable. La théorie statistique des partitions est aujourd'hui une branche florissante de la théorie des nombres — cf., par exemple, Dixmier & Nicolas (1990), Erdős, Nicolas & Sárközy (1989, 1990), et Erdős & Szalay (1984, 1990).

Une forme faible de l'hypothèse H de Sierpiński et Schinzel énonce qu'il existe une infinité de nombres premiers dans la suite $F(n)$ pour tout polynôme irréductible $F(X)$ à coefficients entiers et sans facteur fixe. Soit $P_F(x)$ le plus grand facteur premier de $\prod_{n\leqslant x} F(n)$. Erdős a prouvé en 1952 que $P_F(x) > c_1 x(\log x)^{c_2 \log_2 x}$ et son estimation a successivement été améliorée par Erdős & Schinzel (1990) et l'auteur du présent travail (1990) jusqu'à $P_F(x) > x\mathrm{e}^{(\log x)^\alpha}$ pour $x > x_0(F)$ et tout $\alpha < 2 - \log 4$.[10]

La théorie de Ramsey a été redécouverte en 1933 par George Szekeres, un ami de Paul de la première heure, pour résoudre un problème d'Esther Klein, la future Mme Szekeres. Cette branche des mathématiques doit son nom à un brillant étudiant de Bertrand Russel qui a obtenu en 1930 un théorème relativement compliqué sur les ensembles infinis et que l'on peut interpréter philosophiquement comme étayant l'adage selon lequel *le désordre complet n'existe pas*. Le nombre de Ramsey $r(k,\ell)$ est défini comme le plus petit entier r tel que, si l'on colorie un graphe complet à r sommets en rouge et bleu, alors il y a au moins un sous-graphe complet à k sommets entièrement rouge ou un sous-graphe complet à ℓ sommets entièrement bleu. Erdős et ses collaborateurs ont montré que

$$r(k,\ell) \leqslant \binom{k+\ell-2}{k-1}.$$

Il est facile de voir que $r(3,3) = 6$, on peut montrer que $r(4,4) = 18$ et l'on sait seulement que $42 \leqslant r(5,5) \leqslant 55$. Erdős aimait raconter l'histoire suivante : « *Si un esprit malin apparaissait et me disait* « *Dis-moi quelle est la valeur de* $r(5,5)$ *ou j'extermine l'humanité* », *la meilleure stratégie serait de mettre tous les ordinateurs de la planète sur le problème. Mais si l'esprit malin demandait la valeur de* $r(6,6)$, *la meilleure stratégie serait d'essayer de détruire l'esprit malin lui-même. Et si nous pouvions trouver la bonne réponse par la seule réflexion, nous n'aurions rien à craindre de l'esprit malin*

[10] Une telle majoration avait été annoncée par Erdős en 1952, mais la démonstration n'a jamais pu être reconstruite selon la méthode indiquée.

parce que nous serions tellement intelligents qu'il ne pourrait nous faire aucun mal. »

Un théorème célèbre d'Erdős et Rado (1950) peut s'énoncer comme suit. Supposons que l'on colorie $\mathbb{N}^r$ en un nombre arbitraire de couleurs ; alors il existe une suite d'entiers $\mathcal{A}$ infinie réalisant l'une au moins des 2^r éventualités suivantes : (a) $\mathcal{A}^r$ est monochrome ; (b) les éléments de $\mathcal{A}^r$ ont des couleurs deux à deux distinctes ; (c) il existe un entier k, avec $1 \leqslant k < r$, et une suite d'indices $\{j_t\}_{t=1}^k$ tel que deux éléments de $\mathcal{A}^r$ ont même couleur si, et seulement si, leurs coordonnées d'indices j_t coïncident pour $1 \leqslant t \leqslant k$.

L'introduction d'idées probabilistes dans tous les domaines des mathématiques est certainement une constante de l'approche d'Erdős. En 1956, il montre avec Offord le surprenant théorème suivant, riche de perspectives inexplorées. Sauf peut-être pour au plus $O(2^n/\sqrt{\log n \log_2 n})$ des 2^n polynômes de degré n à coefficients ± 1, le nombres des racines réelles vaut $(2/\pi)\log n + O((\log n)^{2/3}\log_2 n)$. Une nouvelle approche a été récemment développée par Edelman & Kostlan (1995).

La théorie de l'équirépartition doit à Erdős et Turán un de ses théorèmes les plus fondamentaux. On sait depuis Weyl (1916) qu'une suite $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ est équirépartie modulo 1 si, et seulement si, les sommes de Weyl

$$S_N(\nu) := \sum_{n \leqslant N} \mathrm{e}^{2\pi i \nu u_n} \qquad (\nu \in Z)$$

satisfont à $S_N(\nu) = o(N)$ $(\nu \neq 0)$ lorsque $N \to \infty$. Erdős et Turán (1948) ont donné de ce résultat une version quantitative optimale : il existe une constante absolue c telle que

$$\sup_{0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 1} \Bigg| \sum_{\substack{n \leqslant N \\ \alpha < u_n \leqslant \beta \,(\mathrm{mod}\, 1)}} 1 - (\beta - \alpha) N \Bigg| \leqslant c \frac{N}{H+1} + c \sum_{1 \leqslant \nu \leqslant H} \frac{|S_\nu(N)|}{\nu} \qquad (1 \leqslant H \leqslant N).$$

L'élaboration d'un monde nouveau ne va pas sans création de vocabulaire. Erdős avait son propre lexique, dont les concepts ignoraient avant l'heure les vastes territoires du « politiquement correct ». Les hommes sont des « esclaves », relativement aux femmes, qualifiées de *boss*. Les enfants sont des *epsilons*, et Dieu est le *SF*, *the Supreme Fascist*. *Sam* signifie les États Unis et *Joe*, l'Union Soviétique. Paul ne croyait pas en Dieu, mais il aimait à penser que le SF tenait un Grand Livre, un livre transfini, contenant les meilleures preuves de tous les théorèmes mathématiques — l'élégance étant, c'est le cas de le dire, la vertu cardinale. Cette fantasmagorie venait ainsi, discrètement, à l'appui d'une représentation de l'homme comme découvrant les mathématiques plutôt que les créant.

Au début des années cinquante, Erdős commença à avoir des problèmes avec Sam et Joe. Il ne voulait pas revenir en Hongrie à cause de Joe et se trouvait en butte à des difficultés de communication avec Sam. En 1954, en plein maccarthysme, il revient d'un colloque international à Amsterdam. L'officier d'immigration lui demande :

— Avez-vous lu, Marx, Engels, ou Staline ?

— Non...

— Que pensez-vous de Marx ?

— Eh bien, je ne suis pas compétent pour juger, mais, sans aucun doute, ce fut un grand homme...

Son visa d'entrée fut refusé et Erdős, qui avait envisagé de demander la nationalité américaine, ne remit pas les pieds au pays de la liberté avant les années soixante.

En 1964, Anna, âgée de quatre-vingt quatre ans, entreprit d'accompagner Paul dans sa quête d'absolu autour du monde. Elle ne parlait que très peu d'anglais, elle détestait les voyages — il était son dieu. Ils prenaient tous leurs repas ensemble, et il lui tenait la main tous les soirs jusqu'à ce qu'elle s'endorme. Magda Fredro, la cousine de Paul rescapée d'Auschwitz, se souvient : « *Quand ils étaient ensemble, je n'étais personne. Cela me faisait très mal, parce que j'étais très proche d'elle. Lorsque je suis sortie du camp, c'est chez elle que je suis allée. Elle m'a nourrie, lavée, vêtue, et m'a rendue à l'humanité.* »

Anna mourut en 1971, d'un ulcère perforé mal diagnostiqué. C'est peu après que Paul commença à prendre des antidépresseurs et des amphétamines. Paul Turán lui rappela affectueusement : « *C'est une grande forteresse que nos mathématiques.* »

En 1975, Erdős et Selfridge montrent qu'un produit d'entiers consécutifs n'est jamais une puissance. Le problème était ouvert depuis cent cinquante ans. Les vingt années qui suivent, extraordinairement riches en résultats de premier plan, témoignent d'un incroyable foisonnement et d'une fantastique capacité d'adaptation. Combien d'articles portant le nom d'Erdős vont-ils encore paraître dans les prochaines années ?

Le génie d'Erdős était comme un hôte de son esprit, une entité intrinsèque avec laquelle il entretenait des rapports plus ou moins conflictuels. Il disait parfois, me donnant rendez-vous le lendemain après avoir discuté d'un problème tard dans la nuit : « *Je vais voir si je sais.* »

Rien n'est acquis à l'homme, disait Aragon. Paul Erdős, ce géant des mathématiques qui reçut un don dont la fulgurance transpercera les siècles, nous a montré que, pour lui aussi, l'absolu avait un prix. Il fut en cela notre semblable. Puissions-nous en conserver la mémoire.

Bibliographie

H. Davenport & P. Erdős, On sequences of positive integers, *Acta Arith.* **2** (1937), 147–151.

J. Dixmier & J.-L. Nicolas, Partitions sans petits sommants, in : A. Baker, B. Bollobás, A. Hajnal (eds.) *A Tribute to Paul Erdős,* Cambridge University Press (1990), 121–152.

A. Edelman & E. Kostlan, How many zeros of a random polynomial are real? , *Bull. Amer. Math. Soc.* **12** (1995), 1-37.

P.D.T.A. Elliott, *Probabilistic number theory ; vol. 1, Mean value theorems ; vol. 2, Central limit theorems*, Grundlehren der Math. Wiss. 239 (1979), 240 (1980), Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg.

P. Erdős, Beweis eines Satzes von Tschebyschef, *Acta Litt. Ac. Sci. Regiae Univ. Hung. Fr.-Jos. Sect. Sci. Math.* **5** (1932), 194–198.

P. Erdős, On the difference between consecutive primes, *Quart. J. Math. Oxford Ser.* **6** (1935), 124–128.

P. Erdős, On the density of some sequences of numbers I, *J. London Math. Soc.* **10** (1935), 120–125 ; II, *ibid.* **12** (1937), 7–11 ; III, *ibid.* **13** (1938), 119–127.

P. Erdős, On a new method in elementary number theory which leads to an elementary proof of the prime number theorem, *Proc. Nat. Acad. Sci.* (Washington) **35** (1949), 374–384.

P. Erdős, On a Tauberian theorem connected with the new proof of the prime number theorem, J. Indian Math. Soc. **13** (1949), 145–144; Voir aussi : Supplementary note, *Ibid.*, 145–147.

P. Erdős, On the greatest prime factor of $\prod_{k=1}^{x} f(k)$, *J. London Math. Soc.* **27** (1952), 379–384.

P. Erdős, Problems and results in additive number theory, in : *Colloque sur la théorie des nombres (CBRM)*, Bruxelles, 1956, pp. 127–137.

P. Erdős, On some of my favourite theorems, in : Combinatorics, Paul Erdős is eighty, vol. 2, Keszthely (Hungary), 1993, Bolyai Math. Studies, 2, 1996, 97–132.

P. Erdős & M. Kac, On the Gaussian law of errors in the theory of additive functions, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **25** (1939), 206–207.

P. Erdős & M. Kac, The Gaussian law of errors in the theory of additive number theoretic functions, *Amer. J. Math.* **62** (1940), 738–742.

P. Erdős & I. Lehner, The distribution of the summands in the partitions of a positive integer, *Duke math. J.* **8** (1941), 335–345.

P. Erdős & A. Schinzel, On the greatest prime factor of $\prod_{k=1}^{x} f(k)$, Acta Arith. **55** (1990), 191–200.

P. Erdős & M. Szalay, On the statistical theory of partitions, in : G. Halász (ed.), *Topics in classical number theory*, vol. I, II, Colloq. Math. János Bolyai no. 34, North-Holland, Amsterdam, New-York, 1984, 397–450.

P. Erdős & M. Szalay, On some problems of the statistical theory of partitions, in : G. Halász (ed.), *Number theory*, vol. I, Colloq. Math. János Bolyai no. 51, North-Holland, Amsterdam, New-York, 1990, 93–110.

P. Erdős, J.-L. Nicolas & A. Sárközy, On the number of partitions without a given subsum, I, *Discrete Math.* **74** (1989), 155–166.

P. Erdős, J.-L. Nicolas & A. Sárközy, On the number of partitions without a given subsum, II, in : B.C. Berndt et al. (eds), *Analytic number theory*, Proceedings of a conference in honor of P.T. Bateman, Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin, 1990, 205–234.

P. Erdős & A.C. Offord, On the number of real roots of a random algebraic equation, *Proc. London Math. Soc.* **6** (1956), 139–160.

P. Erdős & R. Rado, A combinatorial theorem, *J. London Math. Soc.* **25** (1950), 249–255.

P. Erdős & P.Turán, On a problem in the theory of uniform distribution, I, II, *Proc. Konink. Nederl. Akad. Wetensch. Amsterdam* **51** (1948), 370–413.

P. Erdős & A. Wintner, Additive arithmetical functions and statistical independence, *Amer. J. Math.* **61** (1939), 713–721.

A. Hildebrand & G. Tenenbaum, On some Tauberian theorems related to the prime number theorem, *Compositio Math.* **90** (1994), 315-349.

H. Maier, Chains of large gaps between consecutive primes, *Advances in Math.* **39**, no. 3 (1981), 257–269.

R.A. Rankin, The difference between consecutive prime numbers, *J. London math. Soc.* **13** (1938), 242–247.

I.Z. Ruzsa, General multiplicative functions, *Acta Arith.* **32** (1977), 313–347.

I.Z. Ruzsa, Semigroup valued multiplicative functions, *Acta Arith.* **42** (1982), 79–90.

H.N. Shapiro, Tauberian theorems and elementary prime number theory, *Commun. pure and applied math.* **12** (1959), 579–610.

A. Selberg, An elementary proof of the prime number theorem, *Ann. Math.* **50** (1949), 305–313.

G. Tenenbaum, Sur une question d'Erdős et Schinzel, II, *Inventiones Math.* **99** (1990), 215–224.

P. Turán, On a theorem of Hardy and Ramanujan, *J. London math. Soc.* **9** (1934), 274–276.

H. Weyl, Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins, *Math. Annalen* **77** (1916), 313–352.

Gérald Tenenbaum
Université Henri Poincaré Nancy 1