

Colloque IUF
LORIA
27 mars 2008

Le zéro et l'infini : de la limite de l'expérience à l'expérience des limites

Gérald Tenenbaum

Quand Véronique Montémont m'a initialement entretenu du projet de ce colloque IUF, elle a indiqué que le thème en serait « le zéro et l'infini ». Lorsque, pour préparer cette intervention conjointe, j'ai consulté la page internet du colloque sur le site du LORIA, j'ai constaté une légère altération : le colloque s'est mis en mouvement avec le titre *Du zéro à l'infini*.

Il est vrai que le progrès, celui de la science mais plus particulièrement encore, de nos jours, celui de la technologie, fait partie de l'idéologie ambiante : qui n'avance pas recule, qui ne fait pas de profit dépose son bilan, qui ne suit pas une direction n'a pas de sens.

Pour le mathématicien que je suis, la première formulation était cependant plus dynamisante. Si tant est que les mathématiques produisent des définitions, elles progressent par l'étude des relations entre celles-ci. À ce titre, une simple progression est moins riche, par exemple, qu'une dualité.

Certes, aller du zéro à l'infini relève du prodige, c'est parcourir un fabuleux parcours, c'est s'extraire du néant pour atteindre le géant. Mais, diraient les spécialistes d'un air désabusé, c'est linéaire, désespérément linéaire.

En revanche, considérer d'un même regard le zéro et l'infini, les englober dans une même problématique, c'est élaborer du concept sur les concepts, c'est apporter sa pierre à la construction commune.

C'est donc avec ce regard et cette intention, tous deux modestes mais résolus, que je vous propose quelques brèves réflexions vagabondes sur l'expérience empirique de ces notions mathématiques, voire sur l'expérience mathématique de ces notions empiriques. Dans la seconde partie de cet exposé, Véronique Montémont fournira de ces thèmes un éclairage complémentaire et transversal, issu de son approche professionnelle et cependant personnelle de la littérature.

Commençons par quelques poncifs incontournables : la définition de l'infini et l'invention du zéro.

L'infini fascine. Tous les enfants qui apprennent à compter ont ce sourire à l'infini, précisément, en découvrant, d'une manière ou d'une autre, mais souvent par eux-mêmes, emportés dans le cycle énumératif, que les nombres ne s'arrêtent jamais.

Face à l'infini, le zéro fait piètre figure. C'est le plus petit des nombres entiers, incapable, par addition, de produire autre chose qu'une tautologie, zéro plus

zéro, c'est la tête à toto, ou, par multiplication, qu'un consternant narcissisme : multiplier par zéro donne toujours zéro.

Pourtant, si la classification des infinis, notamment grâce aux travaux de Cantor, a présidé à la naissance de la théorie des ensembles moderne et fondé les bases de l'arithmétique, c'est bien l'invention du zéro, presque comme celle de la roue, qui est considérée comme un pas de géant dans l'histoire des mathématiques et de la pensée humaine.

Comme il y a des infinis, il y a des zéros. Le plus simple d'entre eux, le zéro comme absence de quantité, est loin d'être une évidence. C'est la présence, c'est la chose, qui est évidente. Dire « il y a une pierre sur le chemin » est à la portée de n'importe quel singe doué de parole. Mais énoncer qu'il n'y a pas, sans même évoquer le poignant *il n'y a plus* de Jacques Roubaud, est une tout autre affaire. Cela suppose l'élaboration de l'idée de pierre, l'évocation de sa possibilité de présence, et, enfin, la constatation que cette possibilité n'est pas réalisée.

Le zéro, ce zéro-là, va encore plus loin : débarrassant la pensée de toute précision contingente, il ne retient de la pierre que son nombre, avec ou sans jeu de mot dans ce cas, il en extrait le concept même de l'absence : zéro est la qualité commune à tous les objets qui ne se trouvent pas sur le chemin.

Nous avons affaire ici à une élaboration extrêmement délicate, à une définition mathématique particulièrement féconde.

Mais il y a un autre zéro encore plus performant, bien qu'évidemment lié au précédent, c'est le zéro de la numération de position, celui qui est à la fois chiffre et nombre, et qui permet les calculs.

Juste retour des choses, c'est précisément ce zéro qui, judicieusement introduit dans un système de numération, permet de désigner une infinité de nombres avec un nombre fini de chiffres. Nous rencontrons ainsi, sous une forme un peu inattendue, une première occurrence de la dualité entre le zéro et l'infini évoquée en préambule.

À l'inverse, le zéro algébrique, qui indique un équilibre entre deux quantités, n'entre pas en résonance avec l'infini algébrique de la cardinalité : les ensembles sont munis de lois, ces lois permettent de conjuguer leurs éléments, mais l'existence d'un élément qu'on appelle neutre, parce que son action est nulle, ne présume pas de la taille de l'ensemble sur lequel cette loi opère.

Il en va tout autrement du zéro de l'analyse mathématique, dont l'objet n'est pas de connaître exactement mais d'approcher. On ne dissèque pas, on ne prend même plus de photographie, on décrit le mouvement.

Il s'agit d'une élaboration plutôt tardive dans l'évolution de la pensée mathématique. On se souvient des controverses entre Isaac Newton et l'évêque Berkeley à propos de ces *fluxions*, telles que les désignait le grand physicien anglais, et que nous appelons aujourd'hui des dérivées. Newton avait défini les fluxions comme le quotient ultime de deux accroissements évanescents. Berkeley ironisait en les désignant comme des « fantômes de quantités disparues ».

La critique était fondée, mais le concept était trop puissant pour être abandonné. Ce que Newton avait découvert, sans pour autant le définir d'emblée de

manière satisfaisante, était le concept de *limite*. Berkeley disait en substance : ou bien vous divisez 0 par 0 et votre calcul n'a aucun sens, ou bien vous divisez deux quantités finies et non nulles et leur rapport n'est pas celui que vous annoncez. Mais Newton avait un point de vue dynamique et considérait globalement un processus de décroissance conjointe de ces quantités...

Lorsqu'on y réfléchit, indépendamment des définitions formalisées plus tard par notre grand Cauchy, il s'agit-là d'une incroyable audace intellectuelle. Pas étonnant que nos étudiants aient quelques difficultés avec ces notions !

Le zéro-limite, celui du presque rien et de l'à-peu-près, est le pain quotidien de l'analyste. Et la dualité avec l'infini apparaît éclatante : si x tend vers 0, alors $1/x$ tend vers l'infini ! Pour l'analyste, le zéro et l'infini sont une seule et même chose.

Peut-être influencée par le développement des nouvelles technologies et par la puissance de calcul qu'elles fournissent, l'évolution moderne de certaines branches des mathématiques est marquée par un prégnant souci d'effectivité.

Donnons deux exemples parmi une multitude.

La loi des grands nombres, en théorie des probabilités, est un fait acquis, mais on cherche aujourd'hui à déterminer la qualité de l'approximation par les petits nombres, ceux qui sont issus de l'expérience. Ce sont ces résultats, dits « avec vitesse de convergence », qui sont actuellement les sujets de recherche privilégiés des spécialistes.

En arithmétique, le théorème des nombres premiers nous donne une idée globale de leur raréfaction au sein de la suite des nombres entiers, mais les chercheurs actuels s'intéressent au terme d'erreur : une fois soustraite l'approximation au premier ordre, puis-je, littéralement, compter sur un encadrement du nombre global de ces nombres premiers qui m'échappent ? Et si j'échoue à produire un tel encadrement avec une précision suffisante, suis-je au moins capable d'indiquer qu'il est réalisé « presque toujours » en un sens acceptable ?

L'hypothèse de Riemann est, sinon la plus grande, à tout le moins l'une des plus grandes conjectures mathématiques non résolues. Elle est intimement liée à la répartition des nombres premiers dont nous venons de parler, mais elle possède de multiples formulations équivalentes. L'une d'entre elles consiste à affirmer qu'une certaine fonction définie sur l'ensemble des points du plan ne s'annule qu'en des points situés sur une certaine droite verticale. Le grand mathématicien norvégien Atle Selberg, décédé l'an dernier, a montré en 1942 qu'une proportion positive de ces points d'annulation, qu'on appelle également des *zéros*, est effectivement située sur la droite en question, souvent désignée sous le nom de *droite critique*. Une proportion positive est un renseignement qui aurait sans doute été considéré comme suffisant par les grands analystes du dix-neuvième siècle. Il est probable que même le grand Hardy, qui avait donné l'hypothèse de Riemann comme sujet de thèse à son élève et futur collaborateur Littlewood en 1914 se serait contenté de cette information qualitative. La philosophie scientifique a changé. Norman Levinson, se sachant atteint d'une maladie incurable, a jeté ses dernières forces dans la bataille et a établi en 1974

que plus d'un zéro sur trois est effectivement placé sur la droite critique. C'est le point de vue moderne. Le journal *Le Monde* titrait « L'hypothèse de Riemann partiellement démontrée », ce qui est mathématiquement infondé : même une proportion asymptotique de 100% n'aurait pas atteint l'objectif souhaité.

Ainsi, si le zéro et l'infini sont des concepts duaux et limites, c'est moins l'information de la tendance qu'ils indiquent que la manière de s'en rapprocher qui préoccupe les chercheurs d'aujourd'hui. Les quantités définies par les mathématiciens ne sont plus nulles ou infinies, elles sont petites ou grandes et l'enjeu consiste à savoir comment et combien.

Ces zéros et infinis approchés véhiculent souvent un souci de définition rigoureuse d'une notion intuitive : telle droite est tangente à telle courbe, telle courbe est plus courbée que telle autre, tel domaine du plan a une surface qui vaut exactement π , un nombre entier sur deux est pair, un nombre premier sur deux donne le reste 5 dans la division par 6, etc. Autant de concepts mathématiques obtenus par un passage à la limite, quelque chose qui tend vers 0 lorsqu'un certain paramètre tend, par exemple, vers l'infini et qui correspondent à une idée naturelle, pour laquelle le bon sens commun ne demanderait *aucune* définition.

De là à imaginer que nos modèles intimes du zéro et de l'infini sont plus subtils qu'on ne l'imagine d'ordinaire, il n'y a qu'un pas que je franchirai volontiers. C'est en interrogeant les limites de l'expérience, en lui demandant du quantitatif, du calcul, et donc de la prédiction, là où elle ne produit que du qualitatif, du constat, de la description, que se forge l'expérience des limites.

Il en va de ces notions comme de presque toutes celles qui sont issues de notre imagination et de notre réflexion : répondant à un besoin effectif, y compris dans une théorie en voie d'élaboration, elles sont un support pour la pensée qui devient graduellement si familier que nous lui attribuons le statut de vérité naturelle ou universelle. Ainsi ces zéros et infinis que nous portons en nous accèdent à la sphère de la sensation et de l'intuition. Le mathématicien qui manipule ces quantités abstraites, évanescences, finit par les éprouver et être capable, miracle d'une expérience au-delà de l'expérience tangible, de sentir ou de deviner comment et vers quoi elles évoluent.

On retrouve ainsi, par un biais plutôt inattendu, une extraordinaire convergence, c'est le cas de le dire, entre la notion mathématique de limite, comme état ultime d'un processus infini, et la notion commune, comme marque d'une frontière, comme séparation entre plusieurs états possibles d'un même objet donné à penser. La limite mathématique est par définition, hors de l'épure, elle est hors champ, elle marque la séparation, elle « dé-limite » le monde de l'expérience et le modèle abstrait que nous forgeons pour comprendre, elle matérialise la frontière entre le réel et la construction mathématique qui permet de l'appréhender.

Pour provisoirement conclure sur ce point avant de passer la parole à Véronique Montémont, donnons encore deux exemples de ces convergences entre sens savant et sens vulgaire.

Arthur Koestler a publié *Le Zéro et l'Infini* en 1940. Ici le zéro symbolise la place accordée par le régime soviétique à l'individu, l'infini celle que lui attribuent les humanistes. Le titre original *Darkness at noon*, qu'on pourrait traduire par « Obscurité en plein midi », dans un même souci de contraste et de dialectique, véhicule une autre idée s'appliquant à l'ordre social incriminé : tout y est à l'envers, tout y est contre nature, tout y est faux. Mais le titre français, une fois n'est pas coutume, est plus profond. Par ce raccourci saisissant, Koestler nous invite non seulement à un passage à la limite, mais aussi à une réflexion sur la dualité : le zéro et l'infini n'existent que l'un par rapport à l'autre, un régime n'est condamnable qu'en fonction de ce dont il nous prive, c'est dans le mouvement entre ces extrémités abstraites que se situe notre champ d'action, c'est dans la dynamique que s'exerce notre liberté... les concepts mathématiques au service de la philosophie !

Une autre œuvre, dans un tout autre genre, possède une place privilégiée dans l'illustration de cette problématique. Il s'agit du film de Jack Arnold *L'Homme qui rétrécit*, sorti en 1957. L'histoire, tirée d'un roman de science-fiction de Richard Matheson, se résume en une phrase : suite à une contamination radioactive, un homme voit son propre corps diminuer de volume dans un processus sans fin. Nous voilà bien au cœur du sujet : il rétrécit *infiniment*, il tend infiniment vers zéro, alors que le temps s'écoule... à l'infini. Tout y est, la dynamique, la dualité et, bien sûr, la limite. C'est là que la subjectivité peut enfin prendre sa revanche sur le rationnel : un dernier soliloque apocalyptique fait basculer le héros dans un univers mental où se rejoignent les deux infinis pascaliens, l'infiniment grand et l'infiniment petit. Sur un plan de ciel étoilé sans fond, alors qu'il est lui-même réduit à une dimension atomique, il se réfugie au bord d'une infranchissable frontière de la Nature, dans un *no man's land* spirituel dont toute notion de taille a disparu et il s'écrie : *Pour Dieu, il n'y pas de zéro !*

Comme quoi, sur ce sujet comme sur tant d'autres, les mathématiques ne constituent pas la seule approche pertinente...