

# Entiers ultrafriables en progressions arithmétiques

Cécile Dartyge, David Feutrie & Gérald Tenenbaum

(version 7/4/2021, 2h56)

## Abstract

A natural integer is called  $y$ -ultrafriable if none of the prime powers occurring in its canonical decomposition exceed  $y$ . We investigate the distribution of  $y$ -ultrafriable integers not exceeding  $x$  among arithmetic progressions to the modulus  $q$ . Given a sufficiently small, positive constant  $\varepsilon$ , we obtain uniform estimates valid for  $q \leq y^{c/\log_2 y}$  whenever  $\log y \leq (\log x)^\varepsilon$ , and for  $q \leq \sqrt{y}$  if  $(\log x)^{2+\varepsilon} \leq y \leq x$ .

**Keywords :** ultrafriable integers, friable integers, saddle-point estimates, sieve, Siegel zero, Gaussian distribution, local behaviour.

**2010 Mathematics Subject Classification :** primary 11N25; secondary 11N35, 11N37, 11N60.

## 1 Introduction

Soit  $y > 0$ . Un entier positif  $n$  est dit  $y$ -friable si son plus grand facteur premier, noté  $P^+(n)$  avec la convention  $P^+(1) = 1$ , n'excède pas  $y$ . Pour  $x > 0$ ,  $y > 0$ , nous désignons par  $S(x, y)$  l'ensemble des entiers  $y$ -friables inférieurs ou égaux à  $x$  et par  $\Psi(x, y)$  son cardinal. Les propriétés structurelles de l'ensemble  $S(x, y)$  ont fait l'objet d'une abondante littérature depuis une trentaine d'années, notamment concernant sa répartition dans les progressions arithmétiques : voir par exemple Fouvry & Tenenbaum [5], Hildebrand & Tenenbaum [9, 10], La Bretèche & Tenenbaum [2], Granville [6, 7], Soundararajan [14], Harper [8].

Quoique également susceptible d'intéressantes applications dans diverses branches des mathématiques — cf. [16] et la bibliographie incluse — une notion voisine, celle d'entier *ultrafriable*, a reçu beaucoup moins d'attention. Un entier naturel est dit  $y$ -ultrafriable s'il n'est divisible par aucune puissance de nombre premier excédant  $y$ . Pour  $x > 0$ ,  $y > 0$ , nous désignons par  $U(x, y)$  l'ensemble des entiers  $y$ -ultrafriables n'excédant pas  $x$  et par  $\Upsilon(x, y)$  son cardinal.

Des estimations satisfaisantes de  $\Upsilon(x, y)$  ont été obtenues dans [16]. Nous nous proposons ici d'aborder la question de la répartition des entiers ultrafriables dans les progressions arithmétiques en évaluant le comportement asymptotique des quantités

$$\Upsilon_q(x, y) := \sum_{\substack{n \in U(x, y) \\ (n, q) = 1}} 1, \quad \Upsilon(x, y; a, q) := \sum_{\substack{n \in U(x, y) \\ n \equiv a \pmod{q}}} 1$$

sous des conditions aussi peu restrictives que possibles concernant les variables  $x$ ,  $y$  et  $q$ . Notons toutefois qu'une prise en compte plus fine de la répartition des zéros des fonctions  $L$  de Dirichlet permettrait d'étendre, dans les résultats présentés ci-dessous, le domaine de variation de la variable  $q$ . Nous avons préféré reporter ces complications à un prochain travail.

Désignons classiquement par  $\tau(n)$  le nombre des diviseurs d'un entier naturel  $n$ , et par  $\omega(n)$  le nombre de ses facteurs premiers, comptés sans multiplicité. Notons par ailleurs  $\pi(y)$  le nombre des nombres premiers n'excédant pas  $y$ .

Soit  $y \geq 1$ . Pour tout nombre premier  $p$ , nous avons  $p^\nu \leq y$  si, et seulement si,  $\nu \leq \nu_p = \nu_p(y) := \lfloor \log y / \log p \rfloor$ . Posant

$$\psi_q(y) := \sum_{\substack{p \leq y \\ p \nmid q}} \nu_p \log p, \quad N_{q,y} := e^{\psi_q(y)},$$

il s'ensuit que  $x \mapsto \Upsilon_q(x, y)$  est la fonction de comptage des diviseurs de  $N_{q,y}$ . Ainsi

$$\Upsilon_q(x, y) = \tau(N_{q,y}) = \prod_{\substack{p \leq y \\ p \nmid q}} (1 + \nu_p) \quad (x \geq N_{q,y})$$

et donc

$$\Upsilon_q(x, y) = 2^{\pi(y) + O(\sqrt{y}/\log y)} \quad (x \geq N_{q,y}, \omega(q) \ll \sqrt{y}/\log y),$$

Comme la symétrie des diviseurs de  $N_{q,y}$  autour de  $\sqrt{N_{q,y}}$  implique

$$\Upsilon_q(x, y) = \tau(N_{q,y}) - \Upsilon_q\left(\left(N_{q,y}/x\right)^-, y\right) \quad \left(\sqrt{N_{q,y}} \leq x \leq N_{q,y}\right),$$

nous pouvons restreindre l'étude de  $\Upsilon_q(x, y)$  au cas

$$x < \sqrt{N_{q,y}}, \quad \text{i.e.} \quad \psi_q(y) > 2 \log x.$$

Pour simplifier l'exposition, nous considérerons en fait le domaine légèrement étendu

$$(1.1) \quad x \geq y \geq 2, \quad \psi(y) > 2 \log x,$$

où  $\psi(y) := \psi_1(y)$  désigne la fonction de Tchébychev.

Nous restreignons également l'étude de  $\Upsilon(x, y; a, q)$  au cas  $(a, q) = 1$ . Cette contrainte pourrait être levée au prix de quelques complications techniques. En effet, posant  $d := (a, q)$ , de sorte que  $(a/d, q/d) = 1$ , nous avons  $\Upsilon(x, y; a, q) = 0$  si  $d \notin U(x, y)$ , et, dans le cas contraire,

$$\Upsilon(x, y; a, q) = \sum_{\substack{m \leq x/d \\ m \equiv a/d \pmod{q/d} \\ p^\nu \parallel m \Rightarrow \nu \leq \nu_p - \nu_p(d)}} 1,$$

où  $\nu_p(d)$  désigne la valuation  $p$ -adique de  $d$ . Les techniques développées dans le présent travail peuvent être adaptées pour évaluer cette quantité : il suffit essentiellement de remplacer la série de Dirichlet  $Z_q(s, y)$  introduite en (2.4) *infra* par

$$Z_q(s, y) \prod_{\substack{p^\nu \parallel d \\ p \nmid q/d}} \frac{1 - p^{-(\nu_p + 1 - \nu)s}}{1 - p^{-s}}.$$

Un exemple de l'estimation subséquente est donné à la Remarque 2.8 *infra*.

## 2 Résultats

### 2.1 Évaluation de $\Upsilon_q(x, y)$

Tenenbaum [16] a obtenu, pour tout  $\varepsilon > 0$ , l'estimation

$$(2.1) \quad \Upsilon(x, y) = \Psi(x, y) \left\{ 1 + O\left(\frac{u \log 2u}{\sqrt{y} \log y}\right) \right\} \quad (x \geq y \geq (\log x)^{2+\varepsilon}),$$

où, ici et dans la suite, nous notons  $u := \log x / \log y$  ( $x \geq 2, y \geq 2$ ). La même méthode permet d'établir la pertinence de l'approximation de  $\Upsilon_q(x, y)$  par

$$\Psi_q(x, y) := \sum_{\substack{n \in S(x, y) \\ (n, q) = 1}} 1$$

pour ces mêmes « grandes » valeurs de  $y$ , et un large domaine en  $q$ . Nous renvoyons à [9, 2, 3] et à la bibliographie de ces travaux pour des évaluations explicites et implicites de  $\Psi_q(x, y)$ .

**Théorème 2.1.** *Soit  $\varepsilon > 0$ . Sous les conditions*

$$(2.2) \quad x \geq y \geq (\log x)^{2+\varepsilon}, \quad P^+(q) \leq y, \quad \omega(q) \ll \sqrt{y},$$

*nous avons*

$$(2.3) \quad \Upsilon_q(x, y) = \Psi_q(x, y) \left\{ 1 + O\left( \frac{qu \log 2u}{\varphi(q) \sqrt{y} \log y} \right) \right\}.$$

Notons que le terme d'erreur de (2.3) tend bien vers 0 dans le domaine (2.2) : il est en fait  $\ll 1/(\log x)^{\varepsilon/2}$ .

L'énoncé relatif aux petites valeurs de  $y$  nécessite quelques notations supplémentaires. Nous désignons par

$$(2.4) \quad Z_q(s, y) := \prod_{\substack{p \leq y \\ p \nmid q}} \frac{1 - p^{-(\nu_p+1)s}}{1 - p^{-s}} \quad (\Re s > 0).$$

la série de Dirichlet associée à la fonction de comptage  $\Upsilon_q(x, y)$ , convenons de poser  $Z(s, y) := Z_1(s, y)$ , et notons

$$\varphi_1(s, y) := -\frac{Z'(s, y)}{Z(s, y)} = \sum_{p \leq y} \left\{ \frac{\log p}{p^s - 1} - \frac{(\nu_p + 1) \log p}{p^{(\nu_p+1)s} - 1} \right\} \quad (\Re s > 0, y \geq 2).$$

Ainsi qu'observé dans [16], l'équation

$$(2.5) \quad \varphi_1(\sigma, y) = \log x \quad (\sigma > 0)$$

possède, sous la condition (1.1), une unique solution  $\beta = \beta(x, y)$ , qui est donc le point-selle relatif à l'intégrale de Perron pour  $\Upsilon(x, y)$ .

Désignons par

$$(2.6) \quad \Phi(z) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_z^\infty e^{-t^2/2} dt \quad (z \in \mathbb{R})$$

la fonction de répartition décroissante de la loi gaussienne, et posons

$$G(z) := e^{z^2/2} \Phi(z) \quad (z \in \mathbb{R}),$$

de sorte que

$$(2.7) \quad G(z) = \frac{1}{2} + O(z) \quad (z \rightarrow 0), \quad G(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}z} \left\{ 1 - \frac{1}{z^2} + O\left(\frac{1}{z^4}\right) \right\} \quad (z \rightarrow +\infty).$$

L'estimation suivante a été établie dans [16] :

$$(2.8) \quad \Upsilon(x, y) = x^\beta Z(\beta, y) G(\beta \sqrt{\sigma_2}) \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{u}\right) \right\} \quad (2 \log x < \psi(y) \ll (\log x)^3),$$

où nous avons posé

$$\sigma_2 := -\varphi_1'(\beta, y) = \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{\log y}\right) \right\} \frac{w-1}{w} u (\log y)^2 \quad (2 \log x < \psi(y) \ll (\log x)^3),$$

avec  $w := \psi(y) / \log x$ .

Nous évaluons le rapport  $\Upsilon_q(x, y)/\Upsilon(x, y)$  en exploitant l'approximation (2.8), relevant du paramètre implicite  $\beta$ . La démarche est analogue à celle de [2], où La Bretèche et Tenenbaum recourent à l'approximation de  $\Psi(x, y)$  par la méthode du col — cf. [9] — pour évaluer  $\Psi_q(x, y)/\Psi(x, y)$ . Dans ce dernier cas, le col de l'intégrale de Perron est défini comme l'unique solution positive  $\alpha := \alpha(x, y)$  de l'équation

$$(2.9) \quad \sum_{p \leq y} \frac{\log p}{p^\alpha - 1} = \log x.$$

Notant  $p_k$  le  $k$ -ième nombre premier, de sorte que  $p_k \asymp k \log 2k$  ( $k \geq 1$ ), et

$$(2.10) \quad z_q := p_{\omega(q)} \quad (q \geq 1)$$

avec la convention  $p_0 := 2$ , nous posons ensuite

$$(2.11) \quad \eta = \eta(x, y) := \frac{\psi(y)}{\log x} - 2, \quad \vartheta_q = \vartheta_q(y) := \frac{\log z_q}{\log y} \asymp \frac{\log\{2 + \omega(q)\}}{\log y} \quad (q \geq 1),$$

et introduisons les termes d'erreur  $\Delta_q = \Delta_q(x, y)$  et  $D_q = D_q(x, y)$  définis par

$$(2.12) \quad \Delta_q := \begin{cases} \frac{(\log x)^{\vartheta_q}}{\log y} \left(1 + \frac{1}{\vartheta_q \log(1 + \eta)}\right) & \text{si } 2 \log x < \psi(y) \ll (\log x)^2, \\ \frac{\vartheta_q \{u \log 2u\}^{\vartheta_q}}{1 + \vartheta_q \log 2u} & \text{si } y > (\log x)^2, \end{cases}$$

et  $D_q := \min\{\omega(q), \Delta_q\}$ . Il est à noter que, lorsque  $y = (\log x)^{1+\lambda}$  avec  $\lambda \asymp 1$ , les deux expressions de  $\Delta_q$  apparaissant dans (2.12) sont du même ordre de grandeur.

Posant

$$g_q(s) := \prod_{p|q} \frac{1 - p^{-s}}{1 - p^{-(\nu_p+1)s}} \quad (q \geq 1, s \in \mathbb{C}),$$

et notant, ici et dans la suite,  $\log_k$  la  $k$ -ième itérée de la fonction logarithme ( $k \geq 1$ ), nous obtenons le résultat suivant, où  $x_0$  désigne une constante absolue assez grande.

**Théorème 2.2.** *Soit  $\varepsilon > 0$ . Les assertions suivantes sont valides sous les conditions*

$$(2.13) \quad x \geq y \geq 2, \quad x > x_0, \quad 2 \log x < \psi(y) \leq \exp\left((\log x)^{1/5}/(\log_2 x)^{(1+\varepsilon)/5}\right),$$

$$(2.14) \quad q \geq 1, \quad P^+(q) \leq y, \quad \omega(q) \ll y^{1/2-(1+\varepsilon)(\log_2 u)/\log u}.$$

(i) *Nous avons*

$$(2.15) \quad \begin{aligned} \Upsilon_q(x, y) &= g_q(\beta) \Upsilon(x, y) \left\{ 1 + O\left(\frac{1 + D_q^2}{u} + \frac{D_q(1 + \eta)}{\sqrt{u} + \eta u}\right) \right\} \\ &= x^\beta Z_q(\beta, y) G(\beta \sqrt{\sigma_2}) \left\{ 1 + O\left(\frac{1 + D_q^2}{u} + \frac{D_q(1 + \eta)}{\sqrt{u} + \eta u}\right) \right\}, \end{aligned}$$

et donc, lorsque  $\eta \gg 1$ ,

$$\Upsilon_q(x, y) = g_q(\beta) \Upsilon(x, y) \left\{ 1 + O\left(\frac{1 + \Delta_q^2}{u}\right) \right\}.$$

(ii) *Si de plus  $\eta \leq \frac{1}{2}$ , alors*

$$(2.16) \quad \Upsilon_q(x, y) = g_q(\beta) \Upsilon(x, y) \left\{ 1 + R + O\left(\frac{1 + \omega(q)^2}{u}\right) \right\}$$

avec  $R \asymp \omega(q)/(\sqrt{u} + \eta u)$ .

(iii) Sous la condition supplémentaire  $\eta = o(1/\sqrt{u})$ , nous avons

$$(2.17) \quad \Upsilon_q(x, y) = g_q(\beta) \Upsilon(x, y) \left\{ 1 + \frac{\omega(q)}{\sqrt{\pi u}} + O\left(\eta\omega(q) + \frac{\log q}{\sqrt{u} \log y} + \frac{\omega(q)^2}{u}\right) \right\}.$$

**Remarques 2.3.** (a) Sous la condition (2.14), et si en outre  $0 < \eta \leq 1$ , nous avons  $\Delta_q \asymp \{1 + \omega(q)\}/\eta$  et donc  $D_q \asymp \omega(q)$ .

(b) Ainsi que l'attestent les formules (3.3) et (3.4) infra, les points-selles  $\alpha$  et  $\beta$  sont proches lorsque  $y > (\log x)^{1+\varepsilon}$ , ce qui implique alors  $\Delta_q \asymp E_q$ , où  $E_q$  est le terme d'erreur introduit dans [2]. Cela permet de faire appel à certaines estimations établies dans [2], notamment

$$(2.18) \quad \Delta_q(1 + \Delta_q) \ll \vartheta_q \log(u+1) \ll 1 \quad \left( y > (\log x)^{1+\varepsilon}, \omega(q) \ll y^{1/\log(u+2)} \right).$$

Il s'ensuit en particulier que, dans les hypothèses du Théorème 2.2, tous les termes d'erreur  $y$  apparaissant tendent vers 0.

(c) Le terme principal de la seconde formule (2.15) constitue également une bonne approximation dans le domaine complémentaire

$$(2.19) \quad y > (\log x)^{2+\varepsilon}, \quad \omega(q) \ll \sqrt{y}/\log y.$$

En effet, il résulte de [2, Cor. 2.2], (2.3) avec  $q = 1$ , (2.8), et (3.3), (3.4) infra, que, sous l'hypothèse (2.19), nous avons

$$\begin{aligned} \Psi_q(x, y) &= g_q(\alpha) \Psi(x, y) \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{u}\right) \right\} = g_q(\alpha) \Upsilon(x, y) \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{u}\right) \right\} \\ &= g_q(\alpha) x^\beta Z(\beta, y) G(\beta\sqrt{\sigma_2}) \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{u}\right) \right\} \\ &= x^\beta Z_q(\beta, y) G(\beta\sqrt{\sigma_2}) \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{u}\right) \right\}. \end{aligned}$$

Par (2.3), nous obtenons donc, sous les mêmes hypothèses,

$$(2.20) \quad \Upsilon_q(x, y) = x^\beta Z_q(\beta, y) G(\beta\sqrt{\sigma_2}) \left\{ 1 + O\left(\frac{qu \log 2u}{\varphi(q)\sqrt{y} \log y} + \frac{1}{u}\right) \right\}.$$

(d) Comme  $\Upsilon_q(x, y)$  ne dépend que du noyau sans facteur carré de  $q$  et comme  $\log q \leq \omega(q) \log y$  si  $\mu(q)^2 = 1$  (où  $\mu$  désigne la fonction de Möbius),  $P^+(q) \leq y$ , l'ordre de grandeur du second terme d'erreur de (2.17) ne dépasse pas celui du terme principal complémentaire  $\omega(q)/\sqrt{\pi u}$ .

## 2.2 Évaluation de $\Upsilon(x, y; a, q)$

Notre approche repose, d'une part, sur une majoration des quantités

$$\Upsilon(x, y; \chi) := \sum_{n \in U(x, y)} \chi(n),$$

lorsque  $\chi$  est un caractère de Dirichlet de module  $q$  distinct du caractère principal  $\chi_0$ , et, d'autre part, sur l'évaluation de Granville [7]

$$(2.21) \quad \Psi(x, y; a, q) := \sum_{\substack{n \in S(x, y) \\ n \equiv a \pmod{q}}} 1 = \frac{\Psi_q(x, y)}{\varphi(q)} \left\{ 1 + O\left(\frac{\log q}{u^\varepsilon \log y} + \frac{1}{\log y}\right) \right\},$$

valable, pour tout  $\varepsilon > 0$ , sous les conditions  $x \geq y \geq q^{1+\varepsilon}$ , et avec  $c = c(\varepsilon) > 0$ .

Le résultat suivant rassemble nos résultats relatifs à la première voie. Nous posons

$$(2.22) \quad Y_\varepsilon := Y_\varepsilon(y) = e^{(\log y)^{3/2-\varepsilon}} \quad (\varepsilon > 0, y \geq 2)$$

et convenons de désigner, dans toute la suite, par  $c_j$  ( $j = 1, 2, \dots$ ) des constantes absolues positives convenablement choisies.

**Théorème 2.4.** *Soit  $A > 0$ . Pour  $\varepsilon > 0$ ,  $c_0 > 0$ ,  $c_1 > 0$  assez petits, sous les conditions*

$$(2.23) \quad x \geq 2, \quad 2 \log x < \psi(y) \leq e^{(\log x)^\varepsilon},$$

$$(2.24) \quad 2 \leq q \leq y^{c_0/\log_2 y},$$

et pour tout caractère de Dirichlet non principal  $\chi$  de module  $q$ , nous avons

$$(2.25) \quad \Upsilon(x, y; \chi) \ll \Upsilon_q(x, y) \left\{ e^{-c_1 u / \{1 + \vartheta(\chi)(\log u)^4\}} + Y_\varepsilon^{-1} \right\}$$

où  $\vartheta(\chi)$  vaut 0 ou 1 et n'est non nul que si  $q > (\log y)^A$  et si  $\chi$  est égal à un unique caractère exceptionnel, réel.

Le caractère exceptionnel apparaissant dans cet énoncé est précisément défini au § 4.4 — voir notamment la formule (4.24).

Le terme principal attendu pour  $\Upsilon(x, y; a, q)$  est  $\Upsilon_q(x, y)/\varphi(q)$ , où  $\varphi$  désigne la fonction indicatrice d'Euler. Nous déduisons du Théorème 2.4 l'évaluation suivante, valable pour les petites valeurs de  $y$ .

**Théorème 2.5.** *Soit  $\varepsilon > 0$ . Pour  $a \in \mathbb{Z}$ ,  $q \geq 1$ ,  $(a, q) = 1$ , et sous les hypothèses (2.23), (2.24), nous avons*

$$(2.26) \quad \Upsilon(x, y; a, q) = \frac{\Upsilon_q(x, y)}{\varphi(q)} \left\{ 1 + O\left( e^{-c_1 u / (\log u)^4} + Y_\varepsilon^{-1} \right) \right\}.$$

En l'absence de caractère de Siegel modulo  $q$ , on peut substituer  $u$  à  $u/(\log u)^4$  dans le terme d'erreur de (2.26).

Le résultat suivant, dont la démonstration repose sur (2.21), fournit une évaluation de  $\Upsilon(x, y; a, q)$  pour les grandes valeurs de  $y$ .

**Théorème 2.6.** *Pour une valeur convenable de  $c_2 > 0$ , tout  $\varepsilon > 0$ , et sous les conditions  $x \geq y \geq (\log x)^{2+\varepsilon}$ ,  $q \leq \sqrt{y}$ , et  $(a, q) = 1$ , nous avons*

$$(2.27) \quad \Upsilon(x, y; a, q) = \frac{\Upsilon_q(x, y)}{\varphi(q)} \left\{ 1 + O\left( \frac{\log q}{u^{c_2 \log y}} + \frac{1}{\log y} \right) \right\}.$$

**Remarque 2.7.** *Dans le domaine de validité commun à (2.26) et (2.27), le terme d'erreur de (2.26) est le plus précis des deux. La discontinuité qualitative observée d'un domaine à l'autre reflète la disparité des méthodes employées.*

**Remarque 2.8.** *Ainsi qu'évoqué plus haut, les démonstrations des Théorèmes 2.4, 2.5 et 2.6 peuvent être adaptées pour traiter le cas  $d := (a, q) > 1$ . Supposons par exemple  $\mu(d)^2 = 1$  et  $(q/d, d) = 1$ . Pour tout  $\varepsilon > 0$  et sous les conditions (2.23) et (2.24), nous avons alors*

$$\Upsilon(x, y; a, q) = \frac{h_d(\beta) \Upsilon_{q/d}(x/d, y)}{\varphi(q/d)} \left\{ 1 + O\left( e^{-c_1 u / (\log u)^4} + Y_\varepsilon^{-1} \right) \right\}$$

où

$$h_d(s) := \prod_{p|d} \frac{1 - p^{-\nu_p s}}{1 - p^{-(\nu_p+1)s}} \quad (\Re s > 0).$$

### 3 Cols

Pour  $v > 1$ , désignons par  $\xi(v)$  l'unique solution de l'équation  $e^{\xi(v)} = 1 + v\xi(v)$ , et convenons que  $\xi(1) := 0$ . Nous avons

$$(3.1) \quad \xi(v) = \log(v \log v) + O\left(\frac{\log_2 v}{\log v}\right) \quad (v \geq 3),$$

et renvoyons par exemple aux articles [10, 11] ou à [15, ch. III.5] pour une description plus précise du comportement asymptotique de  $\xi(v)$  lorsque  $v \rightarrow \infty$ .

Posons encore

$$(3.2) \quad L_\varepsilon(y) := e^{(\log y)^{3/5-\varepsilon}} \quad (\varepsilon > 0, y \geq 2).$$

Il est établi dans [9] que, pour tout  $\varepsilon > 0$ , nous avons

$$(3.3) \quad \alpha = 1 - \frac{\xi(u)}{\log y} + O\left(\frac{1}{u(\log y)^2} + \frac{1}{L_\varepsilon(y)}\right) \quad ((\log x)^{1+\varepsilon} < y \leq x).$$

Les estimations suivantes du col  $\beta$  ont été obtenues dans [16]. Rappelons la définition du paramètre  $\eta$  en (2.11).

**Lemme 3.1.** *Soit  $\varepsilon > 0$ . Nous avons*

$$(3.4) \quad \beta(x, y) = \begin{cases} 1 - \frac{\xi(u)}{\log y} + O\left(\frac{1}{u(\log y)^2} + \frac{1}{L_\varepsilon(y)}\right) & ((\log x)^{1+\varepsilon} < y \leq x), \\ \frac{1 + O(1/\log y)}{\log y} \log(1 + \eta) & (2 \log x < \psi(y) \ll (\log x)^3). \end{cases}$$

Compte tenu de (3.1), nous pouvons noter, à fins de référence ultérieure, que

$$(3.5) \quad 1 - \beta \asymp \frac{\log(2u)}{\log y} \quad (\psi(y) > 2 \log x).$$

**Lemme 3.2.** *Uniformément pour  $x \geq y \geq 2$ ,  $\psi(y) > 2 \log x$ , nous avons*

$$(3.6) \quad \frac{y^{1-\beta} - 1}{1 - \beta} \asymp \log x,$$

$$(3.7) \quad y^{1-\beta} \asymp u \log 2u.$$

*Démonstration.* Ces estimations découlent du Lemme 3.1 via quelques calculs. On peut également observer que, lorsque  $y \geq (\log x)^2$ , l'estimation (3.6) résulte directement du lemme 3 de [9] et de la première formule (3.4). Sous la condition  $2 \log x < \psi(y) \ll (\log x)^3$ , elle découle de l'estimation (2.16) de [16] et de (3.5) sous la forme  $(1 - \beta) \asymp 1$ . La relation (3.7) est une conséquence immédiate.  $\square$

### 4 Lemmes

#### 4.1 Majoration du terme d'erreur $D_q$

**Lemme 4.1.** *Soit  $\varepsilon > 0$ . Sous la condition (2.14), nous avons*

$$(4.1) \quad D_q \ll \frac{\sqrt{u}}{(\log 2u)^{1/2+\varepsilon}}.$$

*Démonstration.* Lorsque  $\eta \leq 1$ , l'estimation  $D_q \asymp \omega(q)$  résulte de la Remarque 2.3(a). Comme cette hypothèse implique  $y \ll \log x$  et donc  $\log y \asymp \log 2u$ , il suit

$$D_q \asymp \omega(q) \ll (u \log y)^{1/2 - (1+\varepsilon)(\log_2 2u)/\log 2u} \ll \frac{\sqrt{u}}{(\log 2u)^{1/2+\varepsilon}}.$$

Lorsque  $\eta > 1$ , la condition (2.14) implique

$$\vartheta_q \leq \frac{1}{2} - (1+\varepsilon) \frac{\log_2(2u)}{\log 2u} + O\left(\frac{1}{\log y}\right),$$

d'où (4.1), en reportant dans (2.12).  $\square$

## 4.2 Estimations relatives à la fonction $g_q(s)$

Posons

$$\gamma_q(s) := \log g_q(s) = \sum_{p|q} \left\{ \log(1 - p^{-s}) - \log(1 - p^{-(\nu_p+1)s}) \right\} \quad (\Re s > 0),$$

où, dans le membre de droite, les logarithmes complexes sont pris en détermination principale. Introduisons également la quantité

$$(4.2) \quad C_q := \min\{\omega(q), \Delta_q^2\}$$

et, dans toute la suite, convenons que  $u_0$  désigne une constante absolue assez grande.

**Lemme 4.2.** *Sous les conditions (2.14) et*

$$(4.3) \quad \psi(y) > 2 \log x, \quad u \geq u_0,$$

*nous avons*

$$(4.4) \quad \gamma'_q(\beta) \ll D_q \log y, \quad -\gamma''_q(\beta) \ll C_q (\log y)^2.$$

*Sous l'hypothèse supplémentaire  $\eta \ll 1$ , nous avons*

$$(4.5) \quad \begin{aligned} \gamma'_q(\beta) &= \frac{1}{2} \omega(q) \log y + O(\eta \omega(q) \log y + \log q), \\ \gamma''_q(\beta) &= \frac{1}{12} \omega(q) (\log y)^2 + O(\eta \omega(q) (\log y)^2 + (\log q) \log y). \end{aligned}$$

*Démonstration.* Ainsi qu'il a été observé au lemme 3.13 de [2], les fonctions  $\gamma'_q$  et  $-\gamma''_q$  sont décroissantes et positives sur  $]0, \infty[$ . Nous avons

$$\begin{aligned} \gamma'_q(\sigma) &= \sum_{p|q} \left\{ \frac{\log p}{p^\sigma - 1} - \frac{(\nu_p + 1) \log p}{p^{(\nu_p+1)\sigma} - 1} \right\}, \\ -\gamma''_q(\sigma) &= \sum_{p|q} \left\{ \frac{(\log p)^2 p^\sigma}{(p^\sigma - 1)^2} - \frac{(\nu_p + 1)^2 (\log p)^2 p^{(\nu_p+1)\sigma}}{(p^{(\nu_p+1)\sigma} - 1)^2} \right\}. \end{aligned}$$

Un développement limité à l'ordre 3 en 0 fournit donc

$$\begin{aligned} \gamma'_q(0) &= \frac{1}{2} \sum_{p|q} \nu_p \log p \ll \omega(q) \log y, \\ -\gamma''_q(0) &= \frac{1}{12} \sum_{p|q} \nu_p (\nu_p + 2) (\log p)^2 \ll \omega(q) (\log y)^2. \end{aligned}$$

Pour achever la preuve de (4.4), il reste à montrer que

$$(4.6) \quad \gamma_q^{(j)}(\beta) \ll (\Delta_q \log y)^j \quad (j = 1, 2).$$

À cette fin, nous pouvons supposer que  $\eta > 1$ , puisque, dans le cas contraire, nous avons  $\Delta_q \gg 1 + \omega(q)$ , ainsi qu'observé à la Remarque 2.3(a). Nous utiliserons les majorations

$$(4.7) \quad \gamma_q'(\sigma) \ll \frac{z_q^{1-\sigma} - 1}{(1 - z_q^{-\sigma})(1 - \sigma)}, \quad -\gamma_q''(\sigma) \ll \frac{(z_q^{1-\sigma} - 1) \log z_q}{(1 - z_q^{-\sigma})^2(1 - \sigma)} \quad (0 < \sigma < 1),$$

établies au lemme 3.13 de [2].

Considérons d'abord le cas  $y \leq (\log x)^2$ . Parallèlement à la preuve du lemme 3.15 de [2], nous observons que les relations (4.7), (3.4), (3.5) et (3.7) impliquent

$$\begin{aligned} \gamma_q'(\beta) &\ll y^{(1-\beta)\vartheta_q} \left(1 + \frac{1}{\beta \log z_q}\right) \ll (\log x)^{\vartheta_q} \left(1 + \frac{1}{\vartheta_q \log(1+\eta)}\right) = \Delta_q \log y, \\ -\gamma_q''(\beta) &\ll (\log x)^{\vartheta_q} \left(1 + \frac{1}{\beta \log z_q}\right)^2 \vartheta_q \log y = (\Delta_q \log y)^2 \frac{\vartheta_q \log y}{(\log x)^{\vartheta_q}} \ll (\Delta_q \log y)^2, \end{aligned}$$

ce qui fournit bien (4.6).

Lorsque  $y > (\log x)^2$ , compte tenu de la Remarque 2.3(b), l'estimation (4.6) est une conséquence directe de [2, lemme 3.14] sous la forme

$$\gamma_q^{(j)}(\beta) \ll \Delta_q \vartheta_q^{j-1} (\log y)^j \quad (j = 1, 2)$$

et de la majoration  $\vartheta_q \ll \Delta_q$ , énoncée à la formule (2.10) du même article.  $\square$

### 4.3 Estimations impliquant les séries $Z_q(s, y)$

Posons

$$(4.8) \quad \varphi_{j,q}(s, y) := (-1)^j \frac{d^{j-1}}{ds^{j-1}} \frac{Z_q'(s, y)}{Z_q(s, y)}, \quad \sigma_{j,q} := \varphi_{j,q}(\beta, y) \quad (j \geq 1, q \geq 1),$$

et convenons d'omettre le second indice lorsque  $q = 1$ . Le lemme suivant est une adaptation relative aux quantités (4.8) de [16, lemme 2.5], correspondant au cas  $q = 1$ .

**Lemme 4.3.** *Soit  $j \in \mathbb{N}^*$ . Sous les conditions (2.14) et (4.3), nous avons*

$$(4.9) \quad \sigma_{j,q} \ll u(\log y)^j.$$

Lorsque  $j = 3$ , on peut multiplier le membre de droite par  $\min(1, \beta \log y) + 1/\sqrt{u}$ . De plus, dans les mêmes hypothèses,

$$(4.10) \quad \sigma_{2,q} = \sigma_2 \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{\log u}\right) \right\}.$$

Sous les conditions supplémentaires  $q = 1$  et  $\psi(y) \ll (\log x)^3$ , nous avons

$$(4.11) \quad \sigma_2 = \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{\log y}\right) \right\} \frac{1+\eta}{2+\eta} u(\log y)^2.$$

*Démonstration.* Lorsque  $y \ll (\log x)^3$ , toutes les majorations découlent directement de [16, lemme 2.5] et des inégalités  $\sigma_{j,q} \leq \sigma_j$  ( $j \geq 1$ ). Dans le domaine  $y > (\log x)^2$ , la même approche fonctionnelle, *mutatis mutandis*, en utilisant (3.7). L'égalité (4.11) coïncide avec [16, formule (2.21)].

Il reste à établir (4.10). Par (4.4), nous avons

$$\sigma_2 - \sigma_{2,q} = -\gamma_q''(\beta) \ll C_q(\log y)^2.$$

Comme la majoration (4.1) implique  $\omega(q) \ll \sqrt{u}$  lorsque  $\psi(y) \ll \log x$  et

$$\Delta_q^2 \ll u/\log u$$

dans la circonstance complémentaire, nous obtenons bien l'évaluation annoncée.  $\square$

Rappelons la définition (2.22) de  $Y_\varepsilon$  ( $\varepsilon > 0$ ).

La démonstration du lemme suivant étend à  $Z_q(s, y)$  celle de [16, lemme 2.6].

**Lemme 4.4.** *Il existe une constante  $c_3 > 0$  telle que, pour tout  $\varepsilon > 0$ , et sous les conditions (2.14), (4.3), nous ayons*

$$(4.12) \quad \left| \frac{Z_q(\beta + i\tau, y)}{Z_q(\beta, y)} \right| \leq \begin{cases} e^{-c_3 u (\tau \log y)^4} & (|\tau| \leq 1/\log y), \\ e^{-c_3 u \tau^4 / (1 + \tau^4)} & (1/\log y < |\tau| \leq Y_\varepsilon). \end{cases}$$

*Démonstration.* Posons  $s = \beta + i\tau$  ( $\tau \in \mathbb{R}$ ) et notons  $\|z\|$  la distance du nombre réel  $z$  à l'ensemble des entiers. Les calculs des pages 342-343 de [16] fournissent, pour une constante convenable  $\kappa > 0$ ,

$$\left| \frac{Z_q(s, y)}{Z_q(\beta, y)} \right| \leq e^{-\kappa W_q}$$

avec

$$W_q := \sum_{\substack{p \leq y \\ p \nmid q}} \frac{\|(\tau/2\pi) \log p\|^4}{p^\beta}.$$

Lorsque  $|\tau| \leq 1/\log y$ , et puisque (2.14) implique  $z_q \leq y^{3/4}$ , nous avons, grâce à (3.7),

$$(4.13) \quad \begin{aligned} \sum_{p \mid q} \frac{\|(\tau/2\pi) \log p\|^4}{p^\beta} &\ll \tau^4 (\log z_q)^3 \frac{z_q^{1-\beta} - 1}{1-\beta} \\ &\ll \tau^4 (\log y)^3 \frac{y^{3(1-\beta)/4} - 1}{1-\beta} \ll \frac{(\tau \log y)^4 u^{3/4}}{(\log 2u)^{1/4}}. \end{aligned}$$

Comme la minoration (2.27) de [16] implique

$$(4.14) \quad W_1 \gg \frac{\tau^4 (\log y)^3 (y^{1-\beta} - 1)}{1-\beta} \gg u (\tau \log y)^4,$$

et comme  $u$  peut être choisi assez grand en vertu de (4.3), il suit  $W_q \gg u (\tau \log y)^4$ , ce qui implique bien (4.12) dans ce cas.

Lorsque  $1/\log y \leq |\tau| \leq \sqrt{y}$ , l'argument employé dans la démonstration de [13, lemme 5.12] fournit

$$(4.15) \quad \sum_{\substack{z/2 < p \leq z \\ p \nmid q}} \|(\tau/2\pi) \log p\|^4 \gg \frac{\tau^4}{1 + \tau^4} \sum_{\substack{z/2 < p \leq z \\ p \nmid q}} 1 \quad (y^{3/4} < z \leq y).$$

Or, l'hypothèse (2.25) implique  $\omega(q) = o(z/\log z)$ . Il suit

$$(4.16) \quad \sum_{\substack{z/2 < p \leq z \\ p \nmid q}} 1 \gg \frac{z}{\log z},$$

d'où  $W_q \gg \tau^4 u / (1 + \tau^4)$  par sommation d'Abel, compte tenu de (3.6) — cf. [16].

Lorsque  $\sqrt{y} < |\tau| \leq Y_\varepsilon$ , le terme de gauche de (4.15) est

$$\gg \sum_{\substack{z/2 < p \leq z \\ p \nmid q}} \sin^4\left(\frac{1}{2}\tau \log p\right) = \frac{3}{8} \sum_{\substack{z/2 < p \leq z \\ p \nmid q}} 1 - \frac{1}{2} \sum_{\substack{z/2 < p \leq z \\ p \nmid q}} \left\{ \cos(\tau \log p) - \frac{1}{4} \cos(2\tau \log p) \right\}.$$

Comme  $\omega(q) = o(z/\log z)$ , l'argument de [16, lemme 2.6] (relatif au cas  $q = 1$ ) permet de montrer que la dernière somme est  $o(z/\log z)$ . Compte tenu de (4.16), une sommation d'Abel permet de conclure.  $\square$

**Lemme 4.5.** *Il existe une constante  $c_4 > 0$  telle que, pour tout  $\varepsilon > 0$  et sous les conditions (2.14), (4.3) et  $1 \leq z \leq \min\{Y_\varepsilon, e^{c_4 u}\}$ , nous ayons*

$$(4.17) \quad \Upsilon_q(x + x/z, y) - \Upsilon_q(x, y) \ll x^\beta Z_q(\beta, y)/z.$$

*Démonstration.* La preuve est identique à celle de [16, lemme 2.7] en remplaçant  $Z$  par  $Z_q$ , et en faisant appel au Lemme 4.4.  $\square$

#### 4.4 Estimations relatives aux séries $Z(s, \chi; y)$

Pour tout caractère de Dirichlet  $\chi$  non principal modulo  $q$ , posons

$$Z(s, \chi; y) := \prod_{p \leq y} \frac{1 - \chi(p)^{\nu_p+1} p^{-(\nu_p+1)s}}{1 - \chi(p)p^{-s}} \quad (\Re(s) > 0),$$

et, sous la condition supplémentaire  $|\tau| \leq Y_\varepsilon$ , définissons également

$$(4.18) \quad \mathcal{W}_q(y, \tau; \chi) := \sum_{\substack{p \leq y \\ p \nmid q}} \frac{\{1 - \Re(\chi(p)/p^{i\tau})\}^2}{p^\beta},$$

et convenons d'omettre l'indice  $q$  lorsque  $q = 1$ .

Nous nous proposons ici d'établir les propositions auxiliaires nécessaires aux démonstrations des Théorèmes 2.4 et 2.5.

La preuve de l'énoncé suivant est analogue à celle de [16, lemme 2.6].

**Lemme 4.6.** *Pour un choix convenable des constantes  $c_0 > 0$ ,  $c_5 > 0$ , nous avons*

$$(4.19) \quad \left| \frac{Z(\beta + i\tau, \chi; y)}{Z_q(\beta, y)} \right| \leq e^{-c_5 \mathcal{W}_q(y, \tau; \chi)} \quad \left( \tau \in \mathbb{R}, q \leq y^{c_0 / \log_2 y} \right).$$

*Démonstration.* Soit  $s := \beta + i\tau$ . Un calcul de routine fournit

$$(4.20) \quad \left| \frac{Z(s, \chi; y)}{Z_q(\beta, y)} \right|^2 = \prod_{\substack{p \leq y \\ p \nmid q}} \frac{1 + 4 \sin^2\left(\frac{1}{2}\alpha_p(\nu_p+1)\right) / \{p^{\beta(\nu_p+1)}(1 - p^{-\beta(\nu_p+1)})^2\}}{1 + 4 \sin^2\left(\frac{1}{2}\alpha_p\right) / \{p^\beta(1 - p^{-\beta})^2\}}$$

où  $\alpha_p \in ]-\pi, \pi]$  est l'argument du nombre complexe  $\chi(p)/p^{i\tau}$ .

Posons  $\tau_p := \|\alpha_p/2\pi\|$  et  $B_p := p^\beta(1 - p^{-\beta})^2$ . En raisonnant comme dans la preuve de [16, lemme 2.6], on obtient que le terme général du produit de (4.20) n'excède pas

$$1 - \frac{8\tau_p^2 \sin^2(\pi\tau_p)}{3B_p + 12 \sin^2(\pi\tau_p)}.$$

L'inégalité  $|\sin \pi \tau_p| \geq 2\tau_p$  fournit donc, pour une constante convenable  $\kappa_0 > 0$ ,

$$(4.21) \quad \left| \frac{Z(s, \chi; y)}{Z_q(\beta, y)} \right|^2 \leq e^{-\kappa_0 \mathcal{V}_q}$$

où l'on a posé

$$\mathcal{V}_q := \sum_{\substack{p \leq y \\ p \nmid q}} \frac{\tau_p^4}{B_p + 4\tau_p^2} \gg \sum_{\substack{p \leq y \\ p \nmid q}} \frac{\sin^4(\pi \tau_p)}{p^\beta} = \sum_{\substack{p \leq y \\ p \nmid q}} \frac{(1 - \cos(\alpha_p))^2}{4p^\beta}.$$

Cette minoration implique bien le résultat annoncé.  $\square$

Posons à présent

$$(4.22) \quad \mathcal{D}(y, \tau; \chi) := \sum_{p \leq y} \frac{\{1 - \Re e(\chi(p)/p^{i\tau})\} \log p}{p^\beta}, \quad S(y, \tau; \chi) := \sum_{n \leq y} \frac{\chi(n) \Lambda(n)}{n^{\beta+i\tau}}.$$

**Lemme 4.7.** *Sous la condition (1.1), nous avons*

$$(4.23) \quad \mathcal{D}(y, \tau; \chi) = \frac{y^{1-\beta}}{1-\beta} - \Re e(S(y, \tau; \chi)) + O\left(\frac{y^{1-\beta}}{1-\beta} \left\{ e^{-\sqrt{\log y}} + \frac{1}{u} \right\}\right).$$

*Démonstration.* Compte tenu de (3.5) et (3.7), une forme forte du théorème des nombres premiers fournit par sommation d'Abel — cf. [2, Lemme 3.5] —

$$\sum_{p \leq y} \frac{\log p}{p^\beta} = \frac{y^{1-\beta}}{1-\beta} \left\{ 1 + O\left( e^{-\sqrt{\log y}} + \frac{1}{u \log 2u} \right) \right\}.$$

De plus,

$$\begin{aligned} \sum_{p \leq y} \frac{\chi(p) \log p}{p^{\beta+i\tau}} - S(y, \tau; \chi) &\ll \sum_{\substack{p^\nu \leq y \\ \nu \geq 2}} \frac{\log p}{p^{\nu\beta}} \ll (1 + y^{1/2-\beta}) \log y \\ &\ll \frac{y^{1-\beta}}{1-\beta} \left( \frac{1}{u} + \frac{\log u}{\sqrt{y} \log y} \right). \end{aligned}$$

La formule annoncée découle de ces estimations.  $\square$

Le lemme suivant est consacré à l'étude de  $S(y, \tau; \chi)$  par l'approche développée dans [15, lemme III.5.16]. Nous notons  $\chi_1$  l'éventuel caractère de Siegel de module  $q > 1$  et  $\beta_1$  le zéro correspondant. Posons

$$\eta(T) := 1/\{(\log T)^{2/3}(\log_2 T)^{1/3}\}, \quad \eta_q(T) := \min(1/\log q, \eta(T)),$$

de sorte que le théorème de Vinogradov-Korobov (cf. par exemple, [12, ch. 9, p. 176]), garantit que, pour une constante positive convenable  $c_6 > 0$ , le domaine

$$\{\sigma + i\tau : |\tau| \leq T, \sigma > 1 - c_6 \eta_q(T)\}$$

est une région sans zéro de  $L(s, \chi)$  lorsque  $\chi \neq \chi_1$ . Pour  $c_7$  assez grande,  $c_0 > 0$  assez petite, et  $q \leq y^{c_0/\log_2 y}$ , il existe donc, dès que  $y$  est assez grand, au plus un zéro de  $\prod_{\chi \neq \chi_0} L(s, \chi)$  dans la demi-bande horizontale  $\sigma > 1 - 3c_7(\log_2 y)/\log y$ ,  $|\tau| \leq Y_\varepsilon$ . Nous posons

$$(4.24) \quad \vartheta(\chi) := \begin{cases} 1 & \text{si } \chi = \chi_1 \text{ et } \beta_1 > 1 - c_7(\log_2 y)/\log y \\ 0 & \text{dans le cas contraire.} \end{cases}$$

**Lemme 4.8.** *Soit  $\varepsilon > 0$  assez petit. Lorsque  $q$  satisfait (2.24) et sous la condition*

$$(4.25) \quad \chi \neq \chi_0, \quad |\tau| \leq Y_\varepsilon, \quad x \geq 2, \quad \psi(y) > 2 \log x, \quad y \leq e^{(\log x)^\varepsilon},$$

*nous avons*

$$(4.26) \quad S(y, \tau; \chi) = -\vartheta(\chi) \frac{y^{\beta_1 - \beta - i\tau}}{\beta_1 - \beta - i\tau} + O\left(\frac{y^{1-\beta}}{(\log y)^3}\right).$$

*Démonstration.* Nous pouvons supposer  $x$ , et donc  $y$ , assez grand. Notons

$$w := \beta + i\tau, \quad v := 1 - \beta + 1/\log y.$$

(Ici  $\beta$  désigne bien le point-selle, et non la partie réelle d'un zéro de  $L(s, \chi)$ , comme souvent dans la littérature.) Il résulte de la formule de Perron effective (cf. [15, cor. II.2.4]) que, sous la condition  $|\tau| \leq Y_\varepsilon$ , nous avons

$$(4.27) \quad S(y, \tau; \chi) = \frac{-1}{2i\pi} \int_{v-iY_\varepsilon}^{v+iY_\varepsilon} \frac{L'(s+w, \chi)y^s}{L(s+w, \chi)s} ds + O\left(\frac{y^{1-\beta}(\log y)^3}{Y_\varepsilon}\right).$$

Pour  $\varepsilon$  assez petit, l'hypothèse (4.25) implique

$$1 - \beta > 4c_7(\log_2 y)/\log y,$$

en vertu de (3.5).

Déplaçons alors le segment d'intégration vers la gauche jusque

$$\delta := 1 - \beta - \{1 + \vartheta(\chi)\}c_7(\log_2 y)/\log y > 2c_7(\log_2 y)/\log y.$$

Lorsque  $\chi \neq \chi_1$ , la zone traversée ne contient aucun pôle de l'intégrande, alors qu'elle en contient exactement un, à savoir  $s = \beta_1 - w$  lorsque  $\chi = \chi_1$ . De plus, dans les deux cas, le segment translaté est à distance  $\geq c_7(\log_2 y)/\log y$  d'un pôle de l'intégrande.

Le théorème des résidus implique alors que l'intégrale de (4.27) vaut

$$(4.28) \quad \frac{-1}{2i\pi} \int_{\mathfrak{W}} \frac{L'}{L}(s+w, \chi) \frac{y^s}{s} ds - \vartheta(\chi) \frac{y^{\beta_1 - w}}{\beta_1 - w}$$

où  $\mathfrak{W}$  désigne la ligne brisée  $[v - iY_\varepsilon, \delta - iY_\varepsilon, \delta + iY_\varepsilon, v + iY_\varepsilon]$  parcourue dans le sens trigonométrique inverse.

Compte tenu du placement de  $\mathfrak{W}$  par rapport aux pôles de l'intégrande, on peut établir classiquement, via la formule explicite en fonction des zéros (cf., par exemple, [15, pp. 380-381], que

$$\left| \frac{L'}{L}(s+w, \chi) \right| \ll (\log q Y_\varepsilon)^2 \quad (s \in \mathfrak{W}).$$

L'intégrale de (4.28) est donc

$$\ll (\log y Y_\varepsilon)^3 y^\delta + \frac{y^{1-\beta}(\log y)^3}{Y_\varepsilon} \ll \frac{y^{1-\beta}}{(\log y)^3},$$

quitte à augmenter la valeur de  $c_7$ . Cela complète la démonstration.  $\square$

**Lemme 4.9.** *Sous les conditions (2.24) et (4.25), nous avons*

$$(4.29) \quad \mathcal{D}(y, \tau; \chi) \gg \frac{y^{1-\beta}}{(1-\beta)\{1 + \vartheta(\chi)(\log_2 x)^2\}}.$$

*Démonstration.* Conservons les notations de la démonstration du Lemme 4.8. Par (4.23) et (4.26), nous pouvons écrire, sous les hypothèses effectuées,

$$\mathcal{D}(y, \tau; \chi) = \frac{y^{1-\beta}}{1-\beta} + \vartheta(\chi) \Re e \left( \frac{y^{\beta_1 - \beta - i\tau}}{\beta_1 - \beta - i\tau} \right) + O \left( \frac{y^{1-\beta}}{1-\beta} \left\{ \frac{1}{(\log y)^3} + \frac{1}{u} \right\} \right).$$

Cela implique immédiatement (4.29) si  $\vartheta(\chi) = 0$ . Dans le cas contraire, nous avons  $\chi = \chi_1$ ,  $\beta_1 > 1 - c_7 \log_2 y / \log y$  et  $\beta_1 - \beta \gg (\log_2 x) / \log y$ .

Si  $|\tau| \leq 1 / \log y$ , posant  $\varphi := \tau \log y - \arctan\{\tau / (\beta_1 - \beta)\}$  il suit

$$\Re e \left( \frac{y^{\beta_1 - \beta - i\tau}}{\beta_1 - \beta - i\tau} \right) = \frac{y^{\beta_1 - \beta} \cos \varphi}{|\beta_1 - \beta + i\tau|} \geq 0,$$

d'où (4.29).

Si  $1 / \log y < |\tau| \leq Y_\varepsilon$ , nous avons, pour une constante convenable  $c_3 > 0$ ,

$$(4.30) \quad \left| \Re e \left( \frac{y^{\beta_1 - \beta - i\tau}}{\beta_1 - \beta - i\tau} \right) \right| \leq \left| \frac{y^{\beta_1 - \beta}}{\beta_1 - \beta - i\tau} \right| \leq \frac{y^{1-\beta}}{|1 - \beta + i / \log y|} \\ \leq \frac{y^{1-\beta}}{1-\beta} \left\{ 1 - \frac{c_3}{(\log_2 x)^2} \right\}. \quad \square$$

## 5 Preuve du Théorème 2.1

Plaçons-nous dans les hypothèses (2.2) avec, disons,  $\varepsilon \in ]0, \frac{1}{3}[$ , et posons

$$(5.1) \quad f_q(s) := \prod_{p|q} (1 - p^{-s}) \quad (s \in \mathbb{C}).$$

Lorsque  $x$  est suffisamment grand, nous avons  $\alpha > \frac{1}{2} + \frac{1}{5}\varepsilon$  d'après (3.3). Il suit

$$(5.2) \quad 0 \leq \Psi_q(x, y) - \Upsilon_q(x, y) \leq \sum_{\substack{p \leq y \\ p \nmid q}} \Psi_q \left( \frac{x}{p^{\nu_p + 1}}, y \right).$$

Sous la condition supplémentaire  $y \leq x^{1/3}$ , les théorèmes 2.4.(i) et 2.1 de [2] fournissent

$$(5.3) \quad \Psi_q \left( \frac{x}{p^{\nu_p + 1}}, y \right) \ll \frac{f_q(\alpha)}{p^{(\nu_p + 1)\alpha}} \Psi(x, y) \ll \frac{\Psi_q(x, y)}{p^{(\nu_p + 1)\alpha}}.$$

En vertu des inégalités (5.2) et (5.3), il suit

$$(5.4) \quad \Psi_q(x, y) - \Upsilon_q(x, y) \leq \Psi_q(x, y) S,$$

où l'on a posé

$$(5.5) \quad S := \sum_{\substack{p \leq y \\ p \nmid q}} \frac{1}{p^{(\nu_p + 1)\alpha}} \ll \frac{y^{1/2 - \alpha}}{\log y} \ll \frac{u \log 2u}{\sqrt{y} \log y},$$

d'après [16, formule (31)]. Cela implique bien (2.3) dans le cas considéré.

Lorsque  $x^{1/3} \leq y \leq x$ , nous avons  $u \leq 3$  et  $\Psi_q(x, y) \ll f_q(\alpha)\Psi(x, y) \asymp f_q(\alpha)x$  en vertu de [2, th. 2.4(i)] et, par exemple, [4]. De plus, on déduit aisément de (3.3) que  $f_q(\alpha) \asymp f_q(1) = \varphi(q)/q$ . La majoration triviale  $\Psi_q(x/p^{\nu_p+1}, y) \leq x/p^{\nu_p+1}$  fournit donc

$$\Psi_q(x, y) - \Upsilon_q(x, y) \leq \sum_{p \leq y} \frac{x}{p^{\nu_p+1}} \ll \frac{\Psi(x, y)}{\sqrt{y} \log y} \ll \frac{\Psi_q(x, y)}{f_q(\alpha)\sqrt{y} \log y} \ll \frac{q\Psi_q(x, y)}{\varphi(q)\sqrt{y} \log y}.$$

Cela complète la preuve de (2.3).

## 6 Preuve du Théorème 2.2

Le lemme suivant étend à  $\Upsilon_q(x, y)$  la formule (3.4) de [16].

**Lemme 6.1.** *Soit  $c_4$  la constante apparaissant au Lemme 4.5. Pour un choix convenable de  $c_8 > 0$ , et tout  $\varepsilon > 0$ , nous avons, sous les hypothèses (2.13) et (2.14),*

$$(6.1) \quad \Upsilon_q(x, y) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\beta-iT}^{\beta+iT} \frac{Z_q(s, y)x^s}{s} ds + O\left(\frac{x^\beta Z_q(\beta, y) \log T}{T}\right)$$

avec  $T := e^{2c_8(\log u)^{4/3}} \leq \min(Y_{1/20}, e^{c_4 u})$ .

*Démonstration.* Une version effective de la formule de Perron (cf. [15, thm. II.2.3]) permet de montrer que la différence entre le membre de gauche de (6.1) et le terme principal du membre de droite est

$$\begin{aligned} &\ll \frac{1}{T} \sum_{\substack{n \geq 1 \\ n \in U(y)}} \frac{x^\beta}{n^\beta \{1 + T|\log(x/n)|\}} \\ &\ll \frac{x^\beta Z_q(\beta, y)}{T} + \sum_{|h| \leq T} \frac{x^\beta}{1 + |h|} \left\{ \Upsilon_q(xe^{(h+1)/T}, y) - \Upsilon_q(xe^{h/T}, y) \right\} \\ &\ll \frac{x^\beta Z_q(\beta, y)}{T} \left\{ 1 + \sum_{|h| \leq T} \frac{1}{|h| + 1} \right\}, \end{aligned}$$

d'après le Lemme 4.5. Cela implique bien (6.1).  $\square$

Pour  $1 \leq U \leq V$ , désignons par  $I_q(U, V)$  la contribution du domaine  $U < |\tau| \leq V$  à l'intégrale de (6.1). Nous posons  $T_0 := (\log u)^{(1+\varepsilon)/2} / \{\sqrt{u} \log y\}$ .

**Lemme 6.2.** *Pour un choix convenable de  $c_9 > 0$  et tout  $\varepsilon > 0$ , nous avons, sous les hypothèses (2.13) et (2.14),*

$$(6.2) \quad I_q(T_0, T) \ll x^\beta Z_q(\beta, y) e^{-c_9(\log 2u)^{1+\varepsilon}}.$$

*Démonstration.* Posons  $T_1 := u^{-1/3} / \log y$ ,  $T_2 := u^{-1/5} / \log y$ . D'après le Lemme 4.4, nous pouvons écrire

$$I_q(T_2, T) \ll x^\beta Z_q(\beta, y) \{I_{21} + I_{22}\},$$

avec

$$I_{21} := \int_{T_2}^{1/\log y} e^{-c_3 u (\tau \log y)^4} \frac{d\tau}{\beta + \tau} \ll e^{-c_3 u (T_2 \log y)^4} \log u \ll e^{-\frac{1}{2} c_3 u^{1/5}}$$

et

$$I_{22} := \int_{1/\log y}^T e^{-c_3 u \tau^4 / (1+\tau^4)} \frac{d\tau}{\tau} \ll x^{-\frac{1}{2} c_3 u / (\log y)^4} \log_2 y + e^{-\frac{1}{2} c_3 u (\log u)^{4/3}}.$$

Il s'ensuit que

$$(6.3) \quad I_q(T_2, T) \ll x^\beta Z_q(\beta, y) e^{-c_9(\log(2u))^{1+\varepsilon}}.$$

Lorsque  $T_1 < |\tau| \leq T_2$ , nous avons  $\tau^2 \sigma_{2,q} \gg u^{1/3}$  et  $\tau^4 \sigma_{4,q} \ll u^{1/5}$ , en vertu Lemme 4.3. Il résulte alors d'un développement limité que

$$(6.4) \quad \begin{aligned} Z_q(s, y) x^s &= Z_q(\beta, y) x^\beta e^{i\tau \gamma'_q(\beta) - \tau^2 \sigma_{2,q}/2 + i\tau^3 \sigma_{3,q}/6 + \sigma_{4,q} \tau^4/24 + O(1)} \\ &\ll Z_q(\beta, y) x^\beta e^{-c_{10} u^{1/3}}, \end{aligned}$$

ce qui implique

$$(6.5) \quad I_q(T_1, T_2) \ll x^\beta Z_q(\beta, y) e^{-c_{11} u^{1/3}}.$$

Lorsque  $T_0 < |\tau| \leq T_1$ , nous avons  $\tau^2 \sigma_{2,q} \gg (\log(2u))^{1+\varepsilon}$  et  $\tau^4 \sigma_{4,q} \ll u^{-1/3}$  d'après le Lemme 4.3. Un développement limité fournit donc

$$(6.6) \quad x^s Z_q(s, y) \ll x^\beta Z_q(\beta, y) e^{-\tau^2 \sigma_{2,q}/2 + \tau^4 \sigma_{4,q}/4 + O(1)} \ll x^\beta Z_q(\beta, y) e^{-c_{12}(\log(2u))^{1+\varepsilon}}.$$

L'estimation (6.2) découle de (6.3), (6.5) et (6.6).  $\square$

Nous sommes à présent en mesure de compléter la preuve du Théorème 2.2. D'après (6.1) et (6.2), nous avons

$$(6.7) \quad \Upsilon_q(x, y) = I_q(0, T_0) + O\left(x^\beta Z_q(\beta, y) e^{-c_9(\log(2u))^{1+\varepsilon}}\right).$$

Évaluons à présent le terme principal de (6.7).

Puisque  $T_0^j \sigma_{j,q} \ll 1$  lorsque  $j = 3, 4$  et  $\varphi_{4,q}(\beta + i\tau, y) \ll \sigma_4^* := u(\log y)^4$  pour  $|\tau| \leq 1/\log y$  et  $T_0 \gamma'_q(\beta) \ll 1$  grâce à (4.1) et (4.4), nous pouvons écrire

$$(6.8) \quad \begin{aligned} I_q(0, T_0) &= \frac{x^\beta Z_q(\beta, y)}{2\pi} \int_{-T_0}^{T_0} e^{i\tau \gamma'_q(\beta) - \tau^2 \sigma_{2,q}/2 + i\tau^3 \sigma_{3,q}/6 + O(\tau^4 \sigma_4^*)} \frac{d\tau}{\beta + i\tau} \\ &= \frac{x^\beta Z_q(\beta, y)}{2\pi} \left\{ J_0 + iJ_1 + \frac{1}{6} iJ_2 + O(K) \right\} \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} J_0 &:= \int_{-T_0}^{T_0} e^{-\tau^2 \sigma_{2,q}/2} \frac{d\tau}{\beta + i\tau}, \quad J_1 := \gamma'_q(\beta) \int_{-T_0}^{T_0} \tau e^{-\tau^2 \sigma_{2,q}/2} \frac{d\tau}{\beta + i\tau}, \\ J_2 &:= \sigma_{3,q} \int_{-T_0}^{T_0} \tau^3 e^{-\tau^2 \sigma_{2,q}/2} \frac{d\tau}{\beta + i\tau}, \\ K &:= \int_{-T_0}^{T_0} e^{-\tau^2 \sigma_{2,q}/2} \left( \tau^6 \sigma_{3,q}^2 + \tau^4 \sigma_4^* + \tau^2 \gamma'_q(\beta)^2 \right) \frac{d\tau}{\beta + |\tau|}. \end{aligned}$$

Des calculs semblables à ceux de la fin de la proposition 2.13 de [1], utilisant le Lemme 4.3, fournissent

$$(6.9) \quad J_0 = 2\pi G(\beta \sqrt{\sigma_{2,q}}) + O(e^{-c_9 u^{1/3}}), \quad J_2 \ll \frac{1}{u(1 + \beta \sqrt{\sigma_{2,q}})}.$$

Par le changement de variables  $v = \tau \sqrt{\sigma_{2,q}}$ , nous pouvons écrire

$$(6.10) \quad \begin{aligned} K &= \int_{-T_0 \sqrt{\sigma_{2,q}}}^{T_0 \sqrt{\sigma_{2,q}}} e^{-v^2/2} \left( \frac{\sigma_{3,q}^2 v^6}{\sigma_{2,q}^3} + \frac{\sigma_4^* v^4}{\sigma_{2,q}^2} + \frac{\gamma'_q(\beta)^2 v^2}{\sigma_{2,q}} \right) \frac{dv}{\beta \sqrt{\sigma_{2,q}} + |v|} \\ &\ll \frac{1 + D_q^2}{u(1 + \beta \sqrt{\sigma_{2,q}})}, \end{aligned}$$

la dernière majoration découlant des Lemmes 4.2 et 4.3.

En tenant à nouveau compte du fait que l'intégrale d'une fonction impaire sur un intervalle symétrique par rapport à l'origine est nulle, le même changement de variables fournit

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{-i\gamma'_q(\beta)}{\sqrt{\sigma_{2,q}}} \int_{-T_0\sqrt{\sigma_{2,q}}}^{T_0\sqrt{\sigma_{2,q}}} \frac{v^2 e^{-v^2/2} dv}{\beta^2\sigma_{2,q} + v^2}, \\ &= \frac{-i\gamma'_q(\beta)}{\sqrt{\sigma_{2,q}}} \left\{ \int_{-T_0\sqrt{\sigma_{2,q}}}^{T_0\sqrt{\sigma_{2,q}}} e^{-v^2/2} dv - \beta^2\sigma_{2,q} \int_{-T_0\sqrt{\sigma_{2,q}}}^{T_0\sqrt{\sigma_{2,q}}} \frac{e^{-v^2/2} dv}{\beta^2\sigma_{2,q} + v^2} \right\}. \end{aligned}$$

Nous avons

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-T_0\sqrt{\sigma_{2,q}}}^{T_0\sqrt{\sigma_{2,q}}} e^{-v^2/2} dv &= 1 + O\left(e^{-(\log u)^{1+\varepsilon/2}}\right), \\ \beta\sqrt{\sigma_{2,q}} \int_{-T_0\sqrt{\sigma_{2,q}}}^{T_0\sqrt{\sigma_{2,q}}} \frac{e^{-v^2/2} dv}{\beta^2\sigma_{2,q} + v^2} &= J_0, \end{aligned}$$

et donc

$$(6.11) \quad \frac{iJ_1}{2\pi} = \frac{\gamma'_q(\beta)}{\sqrt{2\pi\sigma_{2,q}}} \left\{ 1 - \beta\sqrt{2\pi\sigma_{2,q}} G(\beta\sqrt{\sigma_{2,q}}) \right\} + O\left(e^{-(\log u)^{1+\varepsilon/2}}\right).$$

En reportant (6.9), (6.10) et (6.11) dans (6.8) puis (6.7), nous obtenons

$$(6.12) \quad \Upsilon_q(x, y) = x^\beta Z_q(\beta, y) G(\beta\sqrt{\sigma_{2,q}}) \left\{ 1 + R_q(\beta) + O\left(\frac{1 + D_q^2}{u}\right) \right\}$$

avec

$$R_q(\beta) := \beta\gamma'_q(\beta) \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{2,q}}\beta G(\beta\sqrt{\sigma_{2,q}})} - 1 \right).$$

Comme (2.7) implique

$$(6.13) \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}zG(z)} - 1 \asymp \frac{1}{z(z+1)} \quad (z > 0),$$

il vient, par (4.4) et (3.4),

$$(6.14) \quad R_q(\beta) \ll \frac{D_q}{\sqrt{u}(1 + \beta\sqrt{\sigma_{2,q}})} \ll \frac{D_q(1 + \eta)}{\sqrt{u} + \eta u}.$$

Pour obtenir (2.15), il suffit donc de montrer que l'on peut remplacer  $\sigma_{2,q}$  par  $\sigma_2$  dans (6.12) et (6.14) sans altérer le terme d'erreur.

Au vu de (4.10), c'est clair dans le cas de (6.14). Pour traiter le cas de (6.12), observons que l'on a  $\sigma_{2,q} - \sigma_2 \ll C_q(\log y)^2$  en vertu de la seconde majoration (4.4), et donc

$$\sqrt{\sigma_{2,q}} - \sqrt{\sigma_2} \ll C_q(\log y)^2 / \sqrt{\sigma_2} \ll C_q(\log y) / \sqrt{u}.$$

Comme il résulte de (2.7) que

$$(6.15) \quad \frac{G'(z)}{G(z)} = z - \frac{1}{\sqrt{2\pi}G(z)} \asymp \frac{-1}{1+z} \quad (z > 0),$$

nous obtenons, par la formule des accroissements finis,

$$(6.16) \quad G(\beta\sqrt{\sigma_{2,q}}) = \left\{ 1 + O\left(\frac{C_q\beta\log y}{\sqrt{u}(1 + \beta\sqrt{\sigma_2})}\right) \right\} G(\beta\sqrt{\sigma_2}).$$

Par (4.10) et l'évaluation de  $C_q = \min(\omega(q), \Delta_q^2)$  résultant de la Remarque 2.3(a), le terme d'erreur de (6.16) est en toute circonstance

$$\ll \frac{C_q \beta \log y}{\sqrt{u} + u \beta \log y} \ll \frac{C_q \eta}{\sqrt{u} + \eta u} \ll \begin{cases} \frac{D_q \eta}{\sqrt{u} + \eta u} & \text{si } \eta \leq 1 \\ \frac{D_q^2}{u} & \text{si } \eta > 1. \end{cases}$$

Cela établit bien (2.15).

Pour prouver (2.16), précisons le terme d'erreur de (2.15) lorsque  $\eta \leq \frac{1}{2}$ . Grâce à (2.8), nous pouvons supposer  $q \geq 2$ . Nous pouvons également supposer  $\eta$  arbitrairement petit. D'après (3.4), nous avons  $\beta \log y \leq 1$  dès que  $y$  est assez grand.

En vertu de (4.5), nous pouvons écrire

$$(6.17) \quad \gamma'_q(\beta) = \frac{1}{2} \omega(q) \log y \{1 + O(\mathfrak{R})\}$$

avec  $\mathfrak{R} := \eta + (\log q) / \{\omega(q) \log y\}$ . Nous pouvons donc remplacer le signe  $\ll$  par  $\asymp$  dans l'estimation (6.14).

De plus, la seconde estimation (4.5) permet d'écrire

$$(6.18) \quad \sigma_2 - \sigma_{2,q} = \frac{1}{12} \omega(q) (\log y)^2 \{1 + O(\mathfrak{R})\}.$$

Il suit

$$(6.19) \quad \sqrt{\sigma_2} - \sqrt{\sigma_{2,q}} \asymp \frac{\omega(q) \log y}{\sqrt{u}},$$

d'où, par (6.15),

$$(6.20) \quad \frac{G(\beta \sqrt{\sigma_{2,q}})}{G(\beta \sqrt{\sigma_2})} - 1 \asymp \frac{\eta \omega(q)}{\sqrt{u}(1 + \eta \sqrt{u})}.$$

La formule (2.16) découle de ces observations, en reportant dans (6.12).

Prouvons à présent l'estimation (2.17), relative au cas  $\eta = o(1/\sqrt{u})$ . Il résulte de (6.19) que

$$\sqrt{\sigma_{2,q}} = \sqrt{\sigma_2} \left\{ 1 + O\left(\frac{\omega(q)}{u}\right) \right\}$$

et de (4.11) que

$$\sqrt{\sigma_2} = \frac{\sqrt{u} \log y}{\sqrt{2}} \left\{ 1 + O\left(\eta + \frac{1}{\log y}\right) \right\}.$$

Grâce à (6.17), il suit

$$\frac{\gamma'_q(\beta)}{\sqrt{2\pi\sigma_{2,q}}} = \frac{\omega(q)}{2\sqrt{\pi u}} \{1 + O(\mathfrak{R})\}.$$

Compte tenu de (2.7), (6.12) et (6.20), nous obtenons bien (2.17) lorsque

$$\beta \sqrt{\sigma_2} \asymp \eta \sqrt{u} = o(1).$$

## 7 Preuve du Théorème 2.4

Plaçons-nous dans les hypothèses (2.23) et (2.24).

Parallèlement à (6.1), nous pouvons écrire, pour  $\chi \neq \chi_0$  et  $T := Y_{2\varepsilon}$ ,

$$(7.1) \quad \Upsilon(x, y; \chi) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\beta-iT}^{\beta+iT} Z(s, \chi; y) x^s \frac{ds}{s} + O\left(\frac{x^\beta Z_q(\beta, y) \log T}{T}\right),$$

et, d'après (4.19), pour une constante convenable  $\kappa > 0$ ,

$$(7.2) \quad |Z(s, \chi; y)| \leq Z_q(\beta, y) e^{-\kappa \mathcal{W}_q(y, \tau; \chi)} \quad (s = \beta + i\tau, |\tau| \leq T).$$

où  $\mathcal{W}_q(y, \tau; \chi)$  a été défini en (4.18).

Grâce à (3.6), une sommation d'Abel — cf. [2, lemme 3.6] — fournit également, sous la seule condition (1.1),

$$(7.3) \quad \sum_{p \leq y} \frac{1}{p^\beta} \asymp u.$$

La quantité  $\mathcal{D}(y, \tau; \chi)$  étant définie en (4.22), nous déduisons donc de (3.5), (3.7), et (4.29), via l'inégalité de Cauchy-Schwarz, que

$$(7.4) \quad \mathcal{W}(y, \tau; \chi) \geq \frac{\mathcal{D}(y, \tau; \chi)^2}{(\log y)^2 \sum_{p \leq y} p^{-\beta}} \gg \frac{u}{1 + \vartheta(\chi)(\log u)^4},$$

où  $\vartheta(\chi)$  a été défini par (4.24).

Rappelons la notation (2.10) et observons que l'hypothèse (2.24) implique  $z_q \ll \log y$ , et donc, compte tenu de (3.5), pour tout  $\varepsilon > 0$ ,

$$(7.5) \quad \sum_{p|q} \frac{1}{p^\beta} \ll \frac{z_q^{1-\beta} - 1}{(1-\beta) \log z_q} \ll_\varepsilon u^\varepsilon.$$

Compte tenu de (7.4), il vient, pour un choix convenable de  $c_2 > 0$ ,

$$(7.6) \quad |Z(s, \chi; y)| \leq Z_q(\beta, y) e^{-c_2 u(\chi)} \quad (|\tau| \leq Y_{2\varepsilon}),$$

où l'on a posé  $u(\chi) := u / \{1 + \vartheta(\chi)(\log u)^4\}$ .

En reportant (7.6) dans (7.1), nous obtenons

$$\Upsilon(x, y; \chi) \ll x^\beta Z_q(\beta, y) \left\{ (\log y)^{3/2} e^{-c_2 u(\chi)} + Y_\varepsilon^{-1} \right\},$$

et donc, compte tenu de (2.20),

$$\Upsilon(x, y; \chi) \ll \Upsilon_q(x, y) \sqrt{u} \log y \left\{ (\log y)^{3/2} e^{-c_2 u(\chi)} + Y_\varepsilon^{-1} \right\}.$$

La condition supplémentaire (2.23) permet de conclure.

## 8 Preuve du Théorème 2.5

La relation d'orthogonalité des caractères permet d'écrire

$$\Upsilon(x, y; a, q) = \frac{1}{\varphi(q)} \left\{ \Upsilon_q(x, y) + \sum_{\chi \neq \chi_0} \overline{\chi(a)} \Upsilon(x, y; \chi) \right\}.$$

L'estimation annoncée découle donc immédiatement du Théorème 2.4.

## 9 Preuve du Théorème 2.6

Plaçons-nous dans les hypothèses de l'énoncé. Il résulte de (2.3) et de l'estimation  $q/\varphi(q) \ll \log_2 q$  que

$$(9.1) \quad \Psi_q(x, y) - \Upsilon_q(x, y) \ll \frac{qu \log(2u) \Psi_q(x, y)}{\varphi(q) \sqrt{y} \log y} \ll \frac{\Psi_q(x, y)}{(\log y)^2}.$$

De plus

$$(9.2) \quad \begin{aligned} \Psi(x, y; a, q) - \Upsilon(x, y; a, q) &\leq \sum_{\substack{p \leq y \\ p \nmid q}} \Psi\left(\frac{x}{p^{\nu_p+1}}, y; a/p^{\nu_p+1}, q\right) \\ &\leq \sum_{p \leq y} \sup_{(b, q)=1} \Psi\left(\frac{x}{p^{\nu_p+1}}, y; b, q\right) \end{aligned}$$

où, dans la première inégalité,  $a/p^{\nu_p+1}$  désigne la classe des entiers  $b$  tels que

$$p^{\nu_p+1}b \equiv a \pmod{q}.$$

D'après (2.21), (5.3), sous la condition supplémentaire  $y \leq x^{1/3}$ , chaque terme de la dernière somme est

$$\ll \Psi_q\left(\frac{x}{p^{\nu_p+1}}, y\right) \ll \frac{f_q(\alpha) \Psi(x, y)}{p^{(\nu_p+1)\alpha}} \ll \frac{\Psi_q(x, y)}{p^{(\nu_p+1)\alpha}} \ll \frac{\Upsilon_q(x, y)}{p^{(\nu_p+1)\alpha}}.$$

Les estimations (5.5) et (2.21) impliquent alors (2.27).<sup>1</sup>

Lorsque  $x^{1/3} < y \leq x$ , nous déduisons simplement de (9.2) que

$$\Psi(x, y; a, q) - \Upsilon(x, y; a, q) \ll \sum_{p \leq y} \frac{x}{p^{\nu_p+1}} \ll \frac{\Psi(x, y)}{\sqrt{y} \log y} \ll \frac{\Psi_q(x, y)}{\varphi(q) \log y}.$$

Nous obtenons encore (2.27).

## Bibliographie

- [1] R. de la Bretèche et G. Tenenbaum. Sur les lois locales de la répartition du  $k$ -ième diviseur d'un entier. *Proc. London Math. Soc.* (3), 84(2) :289–323, 2002.
- [2] R. de la Bretèche et G. Tenenbaum. Propriétés statistiques des entiers friables. *Ramanujan J.*, 9(1-2) :139–202, 2005.
- [3] R. de la Bretèche et G. Tenenbaum. Une nouvelle approche dans la théorie des entiers friables. *Compos. Math.*, 153(3) :453–473, 2017.
- [4] K. Dickman. On the frequency of numbers containing prime factors of a certain relative magnitude. *Ark. Mat. Astr. Fys.*, 22 :1–14, 1930.
- [5] E. Fouvry et G. Tenenbaum. Entiers sans grand facteur premier en progressions arithmétiques. *Proc. London Math. Soc.*, 63(3) :449–494, 1991.
- [6] A. Granville. Integers, without large prime factors, in arithmetic progressions. I. *Acta Math.*, 170(2) :255–273, 1993.
- [7] A. Granville. Integers, without large prime factors, in arithmetic progressions. II. *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A*, 345(1676) :349–362, 1993.
- [8] A. Harper. On a paper of K. Soundararajan on smooth numbers in arithmetic progressions. *J. Number Theory*, 132(1) :182–199, 2012.
- [9] A. Hildebrand et G. Tenenbaum. On integers free of large prime factors. *Transactions of the American mathematical society*, 296(1) :265–290, July 1986.

1. Il est à noter que dans ce cas, la condition sur  $q$  peut être relâchée en  $q \leq y^{1-\varepsilon}$ .

- [10] A. Hildebrand et G. Tenenbaum. Integers without large prime numbers. *J. Théor. Nombres Bordeaux*, 5(2) :411–484, 1993.
- [11] A. Hildebrand et G. Tenenbaum. On a class of differential-difference equations arising in number theory. *J. Anal. Math.*, 61 :145–179, 1993.
- [12] H. L. Montgomery. *Ten lectures on the interface between analytic number theory and harmonic analysis*, volume 84 of *CBMS Regional Conference Series in Mathematics*. Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC ; by the American Mathematical Society, Providence, RI, 1994.
- [13] O. Robert et G. Tenenbaum. Sur la répartition du noyau d’un entier. *Indagationes Math.*, 24 :802–914, 2013.
- [14] K. Soundararajan. The distribution of smooth numbers in arithmetic progressions. *Anatomy of integers, CRM Proc. and Lect. Notes*, 46 :115–128, 2008. Amer. Math. Soc., Providence, RI.
- [15] G. Tenenbaum. *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*. coll. Échelles, quatrième édition. Belin, Paris, 2015.
- [16] G. Tenenbaum. On ultrafriable integers. *Quart. J. Math. (Oxford)*, 66(1) :333–351, 2015.

Institut Élie Cartan,  
Université de Lorraine  
BP 70239  
54506 Vandœuvre-lès-Nancy Cedex,  
France  
`cecile.dartyge@univ-lorraine.fr`,  
`david.feutrie@univ-lorraine.fr`,  
`gerald.tenenbaum@univ-lorraine.fr`