

ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

PÁL ERDÖS

GÉRALD TENENBAUM

Sur la structure de la suite des diviseurs d'un entier

Annales de l'institut Fourier, tome 31, n° 1 (1981), p. 17-37.

http://www.numdam.org/item?id=AIF_1981__31_1_17_0

© Annales de l'institut Fourier, 1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LA STRUCTURE DE LA SUITE DES DIVISEURS D'UN ENTIER

par P. ERDÖS et G. TENENBAUM(*)

1. Introduction.

Le point de départ de ce travail est une conjecture d'Erdős datant de plus de quarante ans :

C1 : *Presque tout entier n possède au moins deux diviseurs d, d' tels que $d < d' \leq 2d$.*

En 1948, Erdős a montré que la suite des entiers satisfaisant à cette condition possède effectivement une densité asymptotique mais sa méthode ne permet pas d'établir que cette densité a pour valeur 1 [2]. Une justification heuristique de C1 peut être formulée ainsi : comme le nombre des valeurs distinctes des quantités $\log d'/d$, d et d' parcourant les diviseurs de n , est égal à

$$\text{card} \{d|n, d'|n : (d, d') = 1\} = \prod_{p^{\nu} || n} (2\nu + 1)$$

et peut donc, grâce à un argument classique, être évalué par $(\log n)^{\log 3 + o(1)}$ pour presque tout n , on peut s'attendre à ce qu'un intervalle I inclus dans $[-\log n, \log n]$ et de longueur λ contienne usuellement $\lambda (\log n)^{\log 3 - 1 + o(1)}$ points $\log d/d'$ distincts ; la conjecture C1 exprime que dans le cas $I = [-\log 2, \log 2]$ le nombre de ces points est au moins égal à 2.

Cet argument a conduit Erdős à formuler la conjecture plus forte suivante, qu'il a annoncé pouvoir établir en 1964 [3] :

(*) Laboratoire Associé au C.N.R.S. n° 226.

C2 : Pour tout réel positif ϵ et presque tout entier n , on a :

$$1 + (\log n)^{1 - \log 3 - \epsilon} < \min \left\{ \frac{d'}{d} : d|n, d'|n, d < d' \right\} < 1 + (\log n)^{1 - \log 3 + \epsilon}.$$

Malheureusement, alors que l'inégalité de gauche a été récemment prouvée, sous une forme légèrement plus précise, par Erdős et Hall [6], celle de droite doit pour le moment rester conjecturale.

Fondée sur le même argument heuristique, une autre conjecture est énoncée par Hall et Tenenbaum dans [9] :

C3 : Pour tout réel α de $[0, 1]$ et presque tout entier n , on a :

$$U(n, \alpha) := \text{card} \left\{ d|n, d'|n : (d, d') = 1, \left| \log \frac{d'}{d} \right| \leq (\log n)^\alpha \right\} = (\log n)^{\log 3 - 1 + \alpha + o(1)}.$$

Dans leur article les auteurs prouvent que l'inégalité

$$U(n, \alpha) \leq (\log n)^{\log 3 - 1 + \alpha + o(1)}$$

a effectivement lieu pour presque tout n , mais ils n'obtiennent pas la borne inférieure souhaitée.

Désignons par $\tau(n)$ le nombre des diviseurs d'un entier n ; dans le but de prouver C1, Erdős a introduit la fonction arithmétique $n \rightarrow \tau^+(n)$ égale au nombre des entiers k pour lesquels l'intervalle $[2^k, 2^{k+1}[$ contient au moins un diviseur de n . On a toujours $\tau^+(n) \leq \tau(n)$ et il suffirait, pour prouver C1, d'établir, pour presque tout n , l'inégalité stricte.

Cela a conduit Erdős (voir par exemple [4]) à émettre la conjecture suivante :

C4 : *Quitte à négliger une suite d'entiers de densité nulle, le rapport $\tau^+(n)/\tau(n)$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.*

L'un des objets de cet article est de réfuter C4, prouvant même que toute suite \mathcal{A} telle que $\lim_{n \in \mathcal{A}} \frac{\tau^+(n)}{\tau(n)} = 0$ est de densité nulle

Plus précisément, nous obtenons le résultat quantitatif suivant :

THEOREME 1. — Pour tout réel positif ϵ il existe une constante positive $c(\epsilon)$ telle que, pour tout réel α , $0 \leq \alpha \leq 1$, la densité supérieure de la suite des entiers n satisfaisant à $\tau^+(n) \leq \alpha \tau(n)$ ne dépasse pas $c(\epsilon) \alpha^{1-\epsilon}$.

Remarque. — Ce résultat laisse augurer que la fonction arithmétique τ^+/τ possède une fonction de répartition continue et croissante sur $[0, 1]$.

Le reste de cette introduction est consacré plus spécifiquement aux propriétés de l'ensemble ordonné des diviseurs d'un entier ; nous notons $1 = d_1 < d_2 < \dots < d_\tau = n$ la suite croissante des diviseurs d'un entier générique n .

Les conjectures C1 et C2 peuvent être traduites par des évaluations de la quantité $\min \left\{ \frac{d_{i+1}}{d_i} : 1 \leq i \leq \tau - 1 \right\}$. Dans [10], Tenenbaum a établi que la fonction

$$\psi(n) := (\log n)^{-1} \max \left\{ \log \frac{d_{i+1}}{d_i} : 1 \leq i \leq \tau - 1 \right\}$$

possède une fonction de répartition continue sur $[0, 1]$ et «voisine» de l'identité. A une légère modification près, la démonstration du lemme 7 de [10] implique le résultat suivant :

Soit n un entier dont la décomposition en produit de facteurs premiers est $n = \prod_{i=1}^k p_i^{\nu_i}$, avec $p_1 < p_2 < \dots < p_k$; alors on a $\max_{i=1}^{\tau-1} \frac{d_{i+1}}{d_i} = \max_{j=1}^k p_j / \prod_{i=1}^{k-1} p_i^{\nu_i}$.

Erdős et Hall se sont intéressés à la fonction

$$f(n) := \text{card} \{i(1 \leq i \leq \tau - 1) : (d_i, d_{i+1}) = 1\},$$

fournissant en particulier une minoration non triviale de son ordre maximal [5]. Cependant, aucun résultat satisfaisant n'a pu être obtenu pour l'ordre moyen de $f(n)$.

Parallèlement à l'étude de $f(n)$, on peut considérer la fonction

$$g(n) := \text{card} \{i(1 \leq i \leq \tau - 1) : d_i | d_{i+1}\}.$$

Nous montrons le résultat suivant :

THEOREME 2. — Pour tout réel α de $[0, 1]$, désignons par $\Delta(\alpha)$ la densité supérieure de la suite des entiers n satisfaisant à $g(n) \leq \alpha \tau(n)$. Alors on a $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \Delta(\alpha) = 0$.

Ce résultat avait été conjecturé par Montgomery lors du Symposium de Théorie Analytique des Nombres de Durham (1979). Son argument heuristique était le suivant : soit n un entier et p son plus petit facteur premier ; quitte à négliger une suite de n de densité nulle on peut supposer $\log p \leq (\log n)^{o(1)}$; de plus, la moitié au moins des diviseurs de n divisent n/p , et, si $d_i \mid \frac{n}{p}$ mais $d_i \nmid d_{i+1}$ on a $d_{i+1} < p d_i$, or la mesure de $\bigcup_{d_i \mid (n/p)}] \log d_i, \log p d_i [$ ne dépasse pas $\tau(n) \log p$, elle est donc usuellement $\leq (\log n)^{\log 2 + o(1)}$ et l'on peut s'attendre à ce que la proportion des $\log d_{i+1}$ contenus dans cette réunion tende vers 0 comme $(\log n)^{\log 2 - 1 + o(1)}$; le résultat espéré nécessite seulement qu'elle soit majorée par une constante $< \frac{1}{2}$.

Ainsi une même idée sous-tend les théorèmes 1 et 2 : les diviseurs d'un entier usuel ne sont pas trop souvent trop proches. Le théorème 2 appelle encore quelques remarques :

(i) Si le rapport de deux diviseurs consécutifs d'un entier n est entier, il est égal au plus petit facteur premier de n .

En effet, si p est ce facteur premier, avec $p^\nu \parallel n$, et si $d_i \mid d_{i+1}$ ou bien $p^\nu \nmid d_i$ et l'on a $d_{i+1} = p d_i$, ou bien $p^\nu \mid d_i$ et l'on a $d_{i+1} = q d_i$, où q est un facteur premier de n supérieur à p , or ce second cas est absurde : il implique que le diviseur $q \frac{d_i}{p}$ de n appartient à l'intervalle $] d_i, d_{i+1} [$.

(ii) Le théorème 2 est le meilleur possible, en ce sens que pour tout $\alpha > 0$ on a $\Delta(\alpha) > 0$. En effet, notons $2 = p_1 < p_2 < \dots$ la suite croissante des nombres premiers et désignons, pour chaque indice k , par $r = r(k)$ le plus grand entier satisfaisant à $p_{k+r} < 2p_k$. Alors $r(k) \rightarrow \infty$ et pour k assez grand on a $(r+2)2^{-r-1} \leq \alpha$. Considérons la suite \mathcal{A} des entiers sans facteur carré qui sont multiples de $p_k \dots p_{k+r}$; \mathcal{A} est de densité positive ; de plus, si $n \in \mathcal{A}$ et si d_i est un diviseur de n divisible par p_{k+j} mais non par p_{k+s} avec $0 \leq j < s \leq r$ alors $d_{i+1} \leq \frac{p_{k+s}}{p_{k+j}} d_i < 2d_i$ donc $d_i \nmid d_{i+1}$;

on en déduit, pour n dans \mathcal{A}

$$g(n) \leq \sum_{j=0}^{r+1} \text{card} \left\{ d|n : \left(d, \prod_{i=0}^{j-1} p_{k+i} \right) = 1 \text{ et } \prod_{i=j}^r p_{k+i} | d \right\} \\ \leq (r+2) 2^{-r-1} \tau(n) \leq \alpha \tau(n).$$

(iii) Notre démonstration du théorème 2 pourrait donner une majoration explicite de $\Delta(\alpha)$ en fonction de α . Cette majoration est certainement très éloignée de l'ordre de grandeur véritable de $\Delta(\alpha)$, aussi nous n'avons pas cherché à la calculer.

(iv) Il est probable que la fonction arithmétique g/τ possède une fonction de répartition continue et croissante sur $[0, 1]$ mais nous ne pouvons pas le prouver.

Un autre aspect de la structure d'ordre des diviseurs d'un entier est considéré dans le résultat suivant :

THEOREME 3. — Pour tout entier n et tout réel $\xi > 1$, posons $h(\xi, n) = \prod' \frac{d_{i+1}}{d_i}$ où l'apostrophe signifie que le produit est étendu aux valeurs de $i \in \{1, 2, \dots, \tau - 1\}$ pour lesquelles on a $\frac{d_{i+1}}{d_i} \leq n^{1/\xi}$. Si $\xi = \xi(n)$ est une fonction croissante tendant vers l'infini avec n de façon que $\xi(n)/\log n$ tende vers 0 en décroissant, on a, pour presque tout n , $\frac{\log h(\xi, n)}{\log n} = \xi^{\log 2 - 1 + o(1)}$.

Comme nous le verrons dans la démonstration, ce résultat signifie que les rapports $\frac{d_{i+1}}{d_i}$ intervenant dans le produit $h(\xi, n)$ sont essentiellement ceux pour lesquels d_i et d_{i+1} ont les mêmes facteurs premiers supérieurs à $n^{1/\xi}$.

2. Notations.

Les lettres $a, b, d, i, j, k, m, n, \nu, r, s, t$ désignent des entiers non négatifs, alors que les lettres p et q sont utilisées exclusivement pour des nombres premiers.

$a|b$ signifie a divise b ; $a|b^\infty$ signifie que chaque facteur premier de a divise b ; $p^\nu || a$ signifie que l'exposant de p dans la décomposition de a est exactement ν .

Les lettres c, c_1, c_2 désignent des constantes absolues positives. Dans l'utilisation des symboles \ll de Vinogradov, toute dépendance éventuelle en fonction des paramètres σ, θ, \dots sera indiquée sous la forme $\ll_{\sigma, \theta, \dots}$.

Nous notons $\tau(n)$ le nombre des diviseurs d'un entier n et $\Omega(n)$ (resp. $\omega(n)$) le nombre de ses facteurs premiers, comptés avec (resp. sans) leur ordre de multiplicité.

Le plus grand (resp. le plus petit) facteur premier d'un entier $n > 1$ est noté $P^+(n)$ (resp. $P^-(n)$). Par convention $P^+(1) = 1$, $P^-(1) = +\infty$. Pour chaque valeur du paramètre réel $\sigma \geq 2$, on note $n \mapsto \chi(n, \sigma)$ la fonction caractéristique de l'ensemble des entiers $n \geq 1$ satisfaisant à $P^-(n) \geq \sigma$ et l'on pose :

$$\tau(n, \sigma) := \sum_{d|n} \chi(d, \sigma),$$

$$\Omega(n, \sigma) := \sum_{p^\nu || n, p < \sigma} \nu$$

$$\omega(n, \sigma) := \sum_{p^\nu || n, p < \sigma} 1.$$

Pour tout réel $\theta > 1$, nous définissons une fonction arithmétique $\tau^+(n, \theta)$ par la formule

$$\tau^+(n, \theta) := \text{card} \{k \in \mathbf{N} : \exists d|n : \theta^k \leq d < \theta^{k+1}\};$$

dans le cas $\theta = 2$, nous notons simplement $\tau^+(n, 2) = \tau^+(n)$.

Le symbole $\sum_{d, d'}^\theta$ indique une sommation restreinte aux couples d'entiers (d, d') satisfaisant à $d \neq d'$ et $\frac{1}{\theta} < \frac{d'}{d} < \theta$.

Enfin, par convention, une somme (resp. un produit) portant sur l'ensemble vide est nulle (resp. égal à 1).

3. Résultats préliminaires.

Nous ferons grand usage du résultat suivant, dû à Halberstam et Richert [7] et généralisant un résultat de Hall.

LEMME 1. — Soit h un fonction multiplicative réelle satisfaisant, pour tout p , à $0 \leq h(p^j) \leq \lambda_1 \lambda_2^j$ ($j = 0, 1, 2, \dots$) où

$\lambda_1 \geq 0$ et $0 \leq \lambda_2 < 2$; on a pour $x \geq 2$

$$\sum_{n < x} h(n) \ll \frac{x}{\log x} \prod_{p < x} \sum_{j=0}^{\infty} h(p^j) p^{-j}.$$

Au cours de la démonstration des théorèmes 1 et 2, nous utiliserons la généralisation suivante du lemme 1 :

LEMME 2. — Soient u et v deux fonctions arithmétiques multiplicatives réelles satisfaisant, pour tout p , à

$$0 \leq u(p^{i+j}) v(p^j) \leq \lambda_i \lambda^j \quad (i, j = 0, 1, 2, \dots)$$

où $\lambda_i \geq 0$ ($i = 0, 1, 2, \dots$) et $0 \leq \lambda < 2$.

Si l'on pose, pour tout p ,

$$w(p^i) = \frac{\sum_{j=0}^{\infty} u(p^{i+j}) v(p^j) (1 + j \log p) p^{-j}}{\sum_{j=0}^{\infty} u(p^j) v(p^j) p^{-j}} \quad (i = 1, 2, \dots),$$

alors on a uniformément en $k \geq 1$ et $x \geq 2$

$$\sum_{n < x} u(kn) v(n) \ll \prod_{\substack{p^i \parallel k \\ p < x}} w(p^i) \prod_{\substack{p^i \parallel k \\ p \geq x}} u(p^i) \frac{x}{\log x} \prod_{p < x} \sum_{j=0}^{\infty} u(p^j) v(p^j) p^{-j}. \quad (1)$$

Remarque. — Sous certaines hypothèses supplémentaires (par exemple $u(n) > 0$ pour tout n) on peut supprimer le facteur $(1 + j \log p)$ dans la définition de $w(p^i)$, ce qui rend le résultat optimal — cf. par exemple [1] Théorème T. Dans le cas général, cependant, ce facteur supplémentaire est indispensable, comme le montre l'exemple suivant : k est un nombre premier de l'intervalle $\left[\frac{x}{2}, x \right]$, $u(1) = u(k^2) = 1$, $u(n) = 0$ pour $n \neq 1$ ou k^2 , $v(n) = 1$ pour tout n ; l'inégalité (1) s'écrit alors : $1 \ll \frac{1 + \log k}{k} \frac{x}{\log x}$.

Démonstration du lemme 2. — Le cas des facteurs premiers $\geq x$ de k est trivial ; nous supposons donc $P^+(k) < x$.

On a :

$$\sum_{n < x} u(kn) v(n) \log x = \sum_{d \mid k^{\infty}} u(kd) v(d) \sum_{\substack{m < x/d \\ (m, k) = 1}} u(m) v(m) \left\{ \log \frac{x}{d} + \log d \right\}.$$

Dans un premier temps, le lemme 1 appliqué à

$$n \mapsto h(n) = \begin{cases} u(n) v(n) & \text{si } (n, k) = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

permet d'écrire

$$\sum_{\substack{m < x/d \\ (m, k) = 1}} u(m) v(m) \log x/d \ll \frac{x}{d} \prod_{\substack{p < x \\ p \nmid k}} \sum_{j=0}^{\infty} u(p^j) v(p^j) p^{-j};$$

ensuite on a la majoration triviale

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{m < x/d \\ (m, k) = 1}} u(m) v(m) \log d &\leq \frac{x}{d} \log d \sum_{\substack{m < x \\ (m, k) = 1}} \frac{u(m) v(m)}{m} \\ &\leq \frac{x}{d} \log d \prod_{\substack{p < x \\ p \nmid k}} \sum_{j=0}^{\infty} u(p^j) v(p^j) p^{-j} \end{aligned}$$

on obtient donc

$$\begin{aligned} \sum_{n < x} u(kn) v(n) \\ \ll \frac{x}{\log x} \sum_{d|k^{\infty}} \frac{u(kd) v(d)}{d} (1 + \log d) \prod_{\substack{p < x \\ p \nmid k}} \sum_{j=0}^{\infty} u(p^j) v(p^j) p^{-j}; \end{aligned}$$

le résultat s'en déduit en remarquant que, pour tout d ,

$$1 + \log d \leq \prod_{p^j \parallel d} (1 + j \log p).$$

LEMME 3. — Pour tout couple (β, σ) des réels satisfaisant à $1 < \beta < 2$ et $\sigma \geq 2$, notons $\delta(\beta, \sigma)$ la densité supérieure de la suite des entiers n satisfaisant à $\tau(n, \sigma) \leq \tau(n) (\log \sigma)^{-\beta \log 2}$. On a $\delta(\beta, \sigma) \ll_{\beta} (\log \sigma)^{\beta-1-\beta \log \beta}$.

Démonstration. — On a, pour tout n , $\tau(n, \sigma) \geq 2^{-\Omega(n, \sigma)} \tau(n)$, d'où $\delta(\beta, \sigma) \leq \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \text{card} \{n < x : \Omega(n, \sigma) \geq \beta \log \log \sigma\}$. D'après le lemme 1, on a pour $1 < y < 2$

$$\sum_{n < x} y^{\Omega(n, \sigma)} \ll_y x (\log \sigma)^{y-1};$$

cela implique

$$\delta(\beta, \sigma) \leq \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \sum_{n < x} y^{\Omega(n, \sigma) - \beta \log \log \sigma} \ll_y (\log \sigma)^{y-1-\beta \log y},$$

d'où l'on tire le résultat annoncé en choisissant $y = \beta$.

LEMME 4. — Il existe une fonction d'une variable $\epsilon \mapsto \xi_0(\epsilon)$ telle que, pour tous réels $\epsilon, \xi, \sigma, \theta$ satisfaisant à $0 < \epsilon \leq \frac{1}{5}$, $\xi \geq \xi_0(\epsilon)$, $\sigma \geq \theta \geq 2$, il existe une suite d'entiers \mathcal{A} possédant les propriétés suivantes :

- (i) Pour tout n de \mathcal{A} , $P^-(n) \geq \theta$.
- (ii) La densité inférieure de \mathcal{A} est au moins égale à

$$(1 - (\log \xi)^{-(9/10)\epsilon^2}) \prod_{p < \theta} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

(iii) Pour tout n de \mathcal{A} , $\sum_{d|n} \chi(d, \sigma) \chi^*(d) \geq \frac{9}{10} \tau(n, \sigma)$ où χ^* est la fonction caractéristique de l'ensemble des entiers d satisfaisant à

$$\sup \left\{ \frac{|\Omega(d, u) - \frac{1}{2} \log(\log u / \log \sigma)|}{\log(\log u / \log \sigma)} : \exp\{\rho \log \xi \cdot \log \sigma\} \leq u < n \right\} \leq \epsilon. \tag{2}$$

Démonstration. — Supposons σ et θ donnés comme indiqué et définissons, pour tout y de $]0, 2[$ et tout $u > \sigma$ une fonction arithmétique par

$$f(y, u, n) = \chi(n, \theta) \tau(n, \sigma)^{-1} \sum_{d|n} y^{\Omega(d, u)} \chi(d, \sigma);$$

c'est une fonction multiplicative ; on a pour $\nu \geq 1$

$$f(y, u, p^\nu) = \begin{cases} 0 & \text{si } p < \theta \\ 1 & \text{si } \theta \leq p < \sigma \\ (\nu + 1)^{-1} \sum_{j=0}^{\nu} y^j & \text{si } \sigma \leq p < u \\ 1 & \text{si } u \leq p. \end{cases}$$

En particulier, on a pour tout $\nu \geq 1$

$$0 \leq f(y, u, p^\nu) \leq (\max\{1, y\})^\nu;$$

on peut donc appliquer le lemme 1 ; on obtient pour x infini

$$\sum_{n < x} f(y, u, n) \ll_y x \prod_{p < \theta} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \left(\frac{\log u}{\log \sigma}\right)^{(y-1)/2}, \tag{3}$$

la constante impliquée étant localement uniforme en y .

En remarquant que l'on a pour tout n

$$\begin{aligned} \chi(n, \theta) \tau(n, \sigma)^{-1} \sum \left\{ \chi(d, \sigma) : d|n, \Omega(d, u) > \frac{y}{2} \log \frac{\log u}{\log \sigma} \right\} \\ \leq f(y, u, n) \left(\frac{\log u}{\log \sigma} \right)^{-\frac{1}{2} y \log y}, \quad \text{si } 1 < y < 2, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \chi(n, \theta) \tau(n, \sigma)^{-1} \sum \left\{ \chi(d, \sigma) : d|n, \Omega(d, u) < \frac{y}{2} \log \frac{\log u}{\log \sigma} \right\} \\ \leq f(y, u, n) \left(\frac{\log u}{\log \sigma} \right)^{-\frac{1}{2} y \log y}, \quad \text{si } 0 < y < 1, \end{aligned}$$

on obtient, grâce à (3), en choisissant successivement

$$y = y_1 = 1 + 1,96 \epsilon \quad \text{et} \quad y = y_2 = 1 - 1,96 \epsilon, \quad \text{pour } \epsilon \leq \frac{1}{5}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n < x} \frac{\chi(n, \theta)}{\tau(n, \sigma)} \sum \left\{ \chi(d, \sigma) : d|n, \left| \Omega(d, u) - \frac{1}{2} \log \frac{\log u}{\log \sigma} \right| \right. \\ \left. \geq 0,98 \epsilon \log \frac{\log u}{\log \sigma} \right\} \\ \ll x \prod_{p < \theta} \left(1 - \frac{1}{p} \right) \sum_{i=1}^2 \left(\frac{\log u}{\log \sigma} \right)^{\frac{1}{2} (y_i - 1 - y_i \log y_i)} \\ \ll x \prod_{p < \theta} \left(1 - \frac{1}{p} \right) \left(\frac{\log u}{\log \sigma} \right)^{-0,901 \epsilon^2} \quad (4) \end{aligned}$$

Posons :

$$\Lambda(d, u) = \frac{\Omega(d, u) - \frac{1}{2} \log \frac{\log u}{\log \sigma}}{\log \frac{\log u}{\log \sigma}}$$

et

$$u_k = \exp \{ e^k \log \sigma \cdot \log \xi \} \quad (k = 0, 1, 2, \dots);$$

d'après (4), on a :

$$\begin{aligned} \sum_{n < x} \frac{\chi(n, \theta)}{\tau(n, \sigma)} \sum \{ \chi(d, \sigma) : d|n, \sup_{u_k < x} |\Lambda(d, u_k)| \geq 0,98 \epsilon \} \\ \leq c x \prod_{p < \theta} \left(1 - \frac{1}{p} \right) \sum_{k=0}^{\infty} (e^k \log \xi)^{-0,901 \epsilon^2} \\ \leq \frac{1}{10} x \prod_{p < \theta} \left(1 - \frac{1}{p} \right) (\log \xi)^{-(9/10) \epsilon^2}, \end{aligned}$$

pour $\xi \geq \xi_1(\epsilon)$.

Comme pour $u \in [u_k, u_{k+1}]$ on a :

$$\left(1 - \frac{1}{\log \log \xi}\right) \left(\Lambda(d, u_k) - \frac{1}{\log \log \xi}\right) \leq \Lambda(d, u) \\ \leq \left(\Lambda(d, u_{k+1}) + \frac{1}{\log \log \xi}\right) \left(1 + \frac{1}{\log \log \xi}\right)$$

pour tout d et tout $\xi \geq \xi_2$, on voit finalement que, pour

$$\xi \geq \xi_0(\epsilon) := \max \{ \xi_1(\epsilon), \xi_2, \exp \exp 1/0, 01 \epsilon \},$$

$$\sum \left\{ \chi(n, \theta) : n < x, \sum_{d|n} \chi(d, \sigma) \chi^*(d) \leq \frac{9}{10} \tau(n, \sigma) \right\} \\ \leq x \prod_{p < \theta} \left(1 - \frac{1}{p}\right) (\log \xi)^{-(9/10)\epsilon^2},$$

ce qui achève la démonstration du lemme 4.

Remarques. – (i) L'énoncé du lemme 4 reste évidemment valable si l'on y remplace $\Omega(d, u)$ par $\omega(d, u)$ et, quitte à restreindre ϵ , la constante $\frac{9}{10}$ par toute autre constante numérique < 1 .

(ii) Il est bien connu que, pour presque tout diviseur d d'un entier usuel n , et u assez grand, on a $\Omega(d, u) \sim \frac{1}{2} \Omega(n, u)$; cela découle, par exemple, facilement de l'inégalité suivante, valable pour tout n , et établie par Hall dans [8],

$$\sum_{d|n} |\omega(d) - \frac{1}{2} \omega(n)|^2 \leq \frac{1}{4} \tau(n) \{ |\omega(n) - \Omega(n)|^2 + \omega(n) \}.$$

Notre lemme 4 exprime la même idée, de façon quantitative, et, en se restreignant aux diviseurs d tels que $P^-(d) \geq \sigma$ des entiers n tels que $P^-(n) \geq \theta$.

(iii) Si l'on désire obtenir un résultat valable pour presque tout n et une estimation plus précise de la différence entre $\Omega(d, u)$ et son ordre normal lorsque $u \rightarrow \infty$ avec n , on peut appliquer, à quelques légères modifications près, la méthode employée au lemme 4 pour prouver le résultat suivant :

Soit ϵ un réel positif et $\xi = \xi(n) \rightarrow \infty$, alors on a pour presque tout entier n

$$\text{card} \left\{ d : d|n, \sup_{\xi < u < n} \frac{|\Omega(d, u) - \frac{1}{2} \log \log u|}{(\log \log u \cdot \log \log \log u)^{1/2}} \geq 1 + \epsilon \right\} = o(\tau(n)).$$

4. Preuve des théorèmes 1 et 2.

PROPOSITION 1. — Soit $(\epsilon, \xi, \sigma, \theta)$ un système de nombres réels satisfaisant aux conditions du lemme 4 et \mathcal{A} une suite d'entiers possédant les propriétés (i), (ii) et (iii) du lemme 4.

Alors on a, pour tout n de \mathcal{A} ,

$$\frac{4}{5} \frac{\tau(n, \sigma)}{\tau^+(n, \theta)} \leq 1 + \frac{1}{\tau(n, \sigma)} \sum_{d, d' | n}^{\theta} \chi(d, \sigma) \chi^*(d). \quad (5)$$

Démonstration. — Pour tout n de \mathcal{A} , désignons par $k_1 < \dots < k_r$ la suite des entiers k pour lesquels on a

$$\nu(k) := \sum \{ \chi(d, \sigma) \chi^*(d) : d | n, \theta^k \leq d < \theta^{k+1} \} \geq 1.$$

Alors $r \leq \tau^+(n, \theta)$ et

$$\sum_{d, d' | n}^{\theta} \chi(d, \sigma) \chi^*(d) \geq \sum_{i=1}^r \nu(k_i) (\nu(k_i) - 1) \geq \sum_{i=1}^r \nu(k_i)^2 - \tau(n, \sigma).$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a donc

$$\left\{ \sum_{d | n} \chi(d, \sigma) \chi^*(d) \right\}^2 = \left\{ \sum_{i=1}^r \nu(k_i) \right\}^2 \leq r \sum_{i=1}^r \nu(k_i)^2 \\ \leq \tau^+(n, \theta) \left\{ \sum_{d, d' | n}^{\theta} \chi(d, \sigma) \chi^*(d) + \tau(n, \sigma) \right\}.$$

La conclusion souhaitée découle de cette inégalité puisque, grâce au lemme 4, on peut minorer le membre de gauche par $\frac{4}{5} \tau(n, \sigma)^2$.

PROPOSITION 2. — Soit $(\epsilon, \xi, \sigma, \theta)$ un système de nombres réels satisfaisant aux conditions du lemme 4, et supposons donné un réel y de $]0, 1[$. Si l'on pose pour tout n

$$f(n) := \frac{\chi(n, \theta)}{\tau(n)} \sum_{d, d' | n}^{\theta} \chi(d, \sigma) \chi^*(d), \text{ et}$$

$$f_k(y, n) := \frac{1}{\tau(n)} \sum_{\substack{d, d' | n \\ \theta^k < d < \theta^{k+1}}} \chi(d, \sigma) \sum_{t | \frac{n}{dd'}} y^{\Omega(dt, \theta^k)} \chi(t, \sigma), \\ (k = 0, 1, 2, \dots)$$

alors on a

$$f(n) \leq \left(\frac{2 \log \xi \cdot \log \theta}{\log \sigma} \right)^{-(\frac{1}{2} + \epsilon) \log y} \sum_{k > \frac{1}{2} \frac{\log \sigma}{\log \theta}} k^{-(\frac{1}{2} + \epsilon) \log y} f_k(y, n). \quad (6)$$

Démonstration. — On a :

$$f(n) = \frac{\chi(n, \theta)}{\tau(n)} \sum_{k > \left[\frac{\log \sigma}{\log \theta} \right]} \sum_{\substack{\theta \\ d, d' | n \\ (d, d')=1, \theta^k < d < \theta^{k+1}}} \sum_{t | \frac{n}{dd'}} \chi(dt, \sigma) \chi^*(dt)$$

il suffit donc de montrer que

$$\chi^*(m) \leq \left(2k \frac{\log \xi \cdot \log \theta}{\log \sigma} \right)^{-(\frac{1}{2} + \epsilon) \log y} y^{\Omega(m, \theta^k)} \quad (7)$$

pour tout $m \geq 1$ et tout $k \geq \left[\frac{\log \sigma}{\log \theta} \right] \geq \frac{1}{2} \frac{\log \sigma}{\log \theta}$.

D'une part, si $k \geq \frac{\log \sigma}{\log \theta} \cdot \log \xi$ et $\chi^*(m) = 1$ on a :

$$\Omega(m, \theta^k) \leq \left(\frac{1}{2} + \epsilon \right) \log \left(\frac{k \log \theta}{\log \sigma} \right)$$

donc

$$y^{\Omega(m, \theta^k)} k^{-(\frac{1}{2} + \epsilon) \log y} \geq \left(\frac{\log \sigma}{\log \theta} \right)^{-(\frac{1}{2} + \epsilon) \log y}$$

et (7) est bien vérifiée.

D'autre part si $\frac{1}{2} \frac{\log \sigma}{\log \theta} \leq k < \frac{\log \sigma}{\log \theta} \cdot \log \xi$, on a :

$$\Omega(m, \theta^k) \leq \Omega(m, \exp \{ \log \xi \cdot \log \sigma \}) \leq \left(\frac{1}{2} + \epsilon \right) \log \log \xi$$

d'où l'on déduit encore que l'inégalité (7) est satisfaite.

PROPOSITION 3. — Avec les hypothèses et notations de la proposition 2, on a uniformément pour $x > \theta^{2k-1}$ et $k \geq 1$

$$\sum_{n < x} f_k(y, n) \ll_{\theta} x (\log \sigma)^{-y} k^{(y-3)/2} \left\{ k^{(y-1)/2} + (\log 2x \theta^{1-2k})^{(y-1)/2} + \frac{(\log \sigma)^{y/2}}{(\log 2x \theta^{1-2k})^{1/2}} \right\}.$$

Démonstration. — Posons : $S_k(x, y) = \sum_{n < x} f_k(y, n)$. Après interversion de sommations on peut écrire

$$S_k(x, y) = \sum_{\substack{d, d' \\ \theta^k \leq d < \theta^{k+1}}}^{\theta} \sum_{t < x/dd'} \chi(dt, \sigma) y^{\Omega(dt, \theta^k)} \sum_{m < x/tdd'} \tau(mtd d')^{-1}. \quad (8)$$

Nous dirons qu'une fonction multiplicative w est «de type τ^{-1} » s'il existe un réel $\delta > 0$ tel que $w(p^\nu) = \frac{1}{\nu + 1} + O(p^{-\delta})$ pour tout $\nu \geq 1$.

Le lemme 2 permet de majorer la somme intérieure de (8) : on a

$$\begin{aligned} \sum_{m < x/tdd'} \tau(mtd d')^{-1} &\ll x \frac{w_1(tdd')}{tdd'} \left(\log \frac{x}{tdd'} \right)^{-\frac{1}{2}} \\ &\ll w_1(tdd') \sum_{m < x/tdd'} (\log m)^{-\frac{1}{2}} \quad (*) \end{aligned}$$

où w_1 est de type τ^{-1} .

En reportant dans (8), on déduit

$$S_k(x, y) \ll \sum_{\substack{d, d' \\ \theta^k \leq d < \theta^{k+1}}}^{\theta} \chi(d, \sigma) y^{\Omega(d, \theta^k)} \sum_{\substack{m < x/dd' \\ t < x/mdd'}} (\log m)^{-\frac{1}{2}} \sum_{t < x/mdd'} y^{\Omega(t, \theta^k)} \chi(t, \sigma) w_1(tdd').$$

Le lemme 2 permet à nouveau d'estimer la somme intérieure, on a :

$$\sum_{t < z} y^{\Omega(t, \theta^k)} \chi(t, \sigma) w_1(tdd') \ll \begin{cases} zw_2(dd') (\log \sigma)^{-y/2} k^{\frac{y-1}{2}} (\log z)^{-\frac{1}{2}} & \text{si } z \geq \theta^k \\ zw_2(dd') (\log \sigma)^{-y/2} (\log z)^{\frac{y}{2}-1} & \text{si } \sigma \leq z < \theta^k \\ w_1(dd') & \text{si } z < \sigma \end{cases}$$

où w_2 est de type τ^{-1} .

Il existe donc une fonction w_3 de type τ^{-1} telle que

$$S_k(x, y) \ll_{\theta} (\log \sigma)^{-y/2} \sum_{\substack{d, d' \\ \theta^k \leq d < \theta^{k+1}}}^{\theta} \chi(d, \sigma) y^{\Omega(d, \theta^k)} w_3(dd') \{A_k(x) + B_k(x) + C_k(x)\} \quad (9)$$

où l'on a posé

(*) Ici et dans les calculs qui vont suivre, $(\log 1)^{-1}$ est systématiquement interprété comme valant 1 dans une sommation.

$$A_k(x) = \frac{x}{\theta^{2k}} \sum_{m < x\theta^{1-3k}} (\log m)^{-\frac{1}{2}} k^{\frac{y-1}{2}} m^{-1} \left(\log \frac{x\theta^{1-2k}}{m} \right)^{-\frac{1}{2}} \\ \ll \frac{x}{\theta^{2k}} k^{\frac{y-1}{2}}$$

$$B_k(x) = \frac{x}{\theta^{2k}} \sum_{x\theta^{1-3k} < m < x\theta^{1-2k}} (\log m)^{-\frac{1}{2}} m^{-1} \left(\log \frac{x\theta^{1-2k}}{m} \right)^{\frac{y}{2}-1} \\ \ll_{\theta} \frac{x}{\theta^{2k}} (\log 2x\theta^{1-2k})^{\frac{y-1}{2}}$$

et

$$C_k(x) = \frac{x}{\theta^{2k}} (\log \sigma)^{y/2} (\log 2x\theta^{1-2k})^{-\frac{1}{2}}.$$

Enfin, d'après le lemme 2,

$$\sum_{\substack{\theta \\ d, d' \\ \theta k < d < \theta k + 1}} \chi(d, \sigma) y^{\Omega(d, \theta^k)} w_3(dd') \\ \ll_{\theta} \theta^k \sum_{\theta^{k-1} < d' < \theta^{k+2}} w_4(d') (\log \sigma)^{-y/2} k^{\frac{y}{2}-1}$$

(où w_4 est de type τ^{-1})

$$\ll_{\theta} \theta^{2k} (\log \sigma)^{-y/2} k^{\frac{y-3}{2}}.$$

En reportant dans (9) et en tenant compte des évaluations de $A_k(x)$, $B_k(x)$, $C_k(x)$, on obtient le résultat annoncé.

PROPOSITION 4. — Soit f la fonction arithmétique définie à la proposition 2. On a pour $0 < y < 1$ et $0 < \epsilon < -\frac{1-y + \frac{1}{2} \log y}{\log y}$

$$\sum_{n < x} f(n) \ll_{\theta, y, \epsilon} (\log \xi)^{-\left(\frac{1}{2} + \epsilon\right) \log y} (\log \sigma)^{-1} x + o(x). \quad (10)$$

Démonstration. — On a, d'après (6),

$$\sum_{n < x} f(n) \ll_{\theta, y} \left(\frac{\log \xi}{\log \sigma} \right)^{-\left(\frac{1}{2} + \epsilon\right) \log y} \sum_{\frac{1}{2} \frac{\log \sigma}{\log \theta} < k < \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\log x}{\log \theta}\right)} k^{-\left(\frac{1}{2} + \epsilon\right) \log y} \\ \sum_{n < x} f_k(y, n);$$

utilisant la majoration de la proposition 3, il vient

$$\sum_{n < x} f(n) \ll_{\theta, y} (\log \xi)^{-\left(\frac{1}{2} + \epsilon\right) \log y} (\log \sigma)^{-y + \left(\frac{1}{2} + \epsilon\right) \log y} \left\{ x \sum_{\frac{1}{2} \frac{\log \sigma}{\log \theta} < k < \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\log x}{\log \theta}\right)} k^{y-2 - \left(\frac{1}{2} + \epsilon\right) \log y + o(x)} \right\},$$

la quantité $o(x)$ provenant de la sommation des termes en $(\log 2x\theta^{1-2k})$, traitée par intégration par parties.

Pour $\epsilon < -\frac{1-y + \frac{1}{2} \log y}{\log y}$ la série en k est convergente, d'où (10).

Démonstration du théorème 1. — Choisissons $\sigma = \theta = 2$, y

dans $]0, 1[$ et ϵ dans $\left\{ 0, -\frac{1-y + \frac{1}{2} \log y}{\log y} \right\}$; d'après la proposition 1, on a $\frac{\tau(n)}{\tau^+(n)} \leq \frac{5}{4} (1 + f(n))$ sauf pour une suite de valeurs de n de densité supérieure $\leq (\log \xi)^{-(9/10)\epsilon^2}$. Comme (10) implique l'existence d'une constante $c_1(y, \epsilon)$ telle que

$$\sum_{n < x} f(n) \leq c_1(y, \epsilon) (\log \xi)^{-\left(\frac{1}{2} + \epsilon\right) \log y} x + o(x);$$

on en déduit que la densité de la suite des entiers n pour lesquels $\frac{\tau(n)}{\tau^+(n)} \geq \frac{1}{\alpha}$ ne dépasse pas

$$c_2(y, \epsilon) \alpha (\log \xi)^{-\left(\frac{1}{2} + \epsilon\right) \log y} + (\log \xi)^{-(9/10)\epsilon^2}.$$

Si $y > \frac{1}{2}$, on peut prendre $\epsilon = \frac{1}{5}$; en choisissant alors, pour y suffisamment voisin de 1, la valeur optimale de ξ , soit $\xi = \text{exp exp} \left\{ \frac{-\log \alpha}{0,036 - 0,7 \log y} \right\}$, on obtient, comme majoration, une puissance arbitrairement proche de l'unité de α .

Démonstration du théorème 2. — Choisissons $\xi = \exp \{(\log \sigma)^{\frac{1}{2}}\}$, $y = \frac{1}{2}$, et $\epsilon = \frac{1}{10}$. D'après la proposition 4, on a

$$\sum_{n < x} f(n) \ll_{\theta} (\log \sigma)^{0,3 \cdot \log 2 - 1} x + o(x). \quad (11)$$

Maintenant, rappelons que

$$f(n) = \frac{\chi(n, \theta)}{\tau(n)} \sum_{d, d' | n}^{\theta} \chi(d, \sigma) \chi^*(d)$$

et que, d'après le lemme 3, pour $1 < \beta < 2$,

$$\frac{\tau(n, \sigma)}{\tau(n)} \geq (\log \sigma)^{-\beta \log 2}$$

sauf pour une suite d'entiers n de densité supérieure majorée par une puissance négative de $\log \sigma$. Comme $0,3 \cdot \log 2 - 1 < -\log 2$, on déduit de (11) l'existence de deux réels positifs δ_1, δ_2 , et de deux fonctions $\lambda_1(\theta), \lambda_2(\theta)$, tels que l'on ait

$$\chi(n, \theta) \sum_{d, d' | n}^{\theta} \chi(d, \sigma) \chi^*(d) \leq \lambda_1(\theta) (\log \sigma)^{-\delta_1} \tau(n, \sigma)$$

sauf pour une suite d'entiers n de densité supérieure majorée par $\lambda_2(\theta) (\log \sigma)^{-\delta_2}$.

En utilisant maintenant le lemme 4 et une nouvelle fois le lemme 3, on obtient ainsi l'existence d'une fonction $\theta \rightarrow \sigma_0(\theta)$ et de deux constantes positives δ_3 et δ_4 telles qu'à tout couple de réels (σ, θ) satisfaisant à $\sigma \geq \sigma_0(\theta)$ on puisse associer une suite $\mathcal{B}(\theta, \sigma)$, de densité inférieure au moins égale à $(1 - (\log \sigma)^{-\delta_3}) \prod_{p < \theta} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$ et telle que tout entier n de $\mathcal{B}(\theta, \sigma)$ vérifie

$$P^-(n) \geq \theta \tag{12}$$

$$\sum_{d | n} \chi(d, \sigma) \chi^*(d) \geq \frac{9}{10} \tau(n, \sigma) \tag{13}$$

$$\sum_{d, d' | n}^{\theta} \chi(d, \sigma) \chi^*(d) \leq (\log \sigma)^{-\delta_4} \tau(n, \sigma) \tag{14}$$

$$\tau(n, \sigma) \geq \frac{\tau(n)}{\log \sigma} \tag{15}$$

De plus, si $n \in \mathcal{B}(\theta, \sigma)$, la conjugaison des inégalités (13) et (14) implique

$$\sum \left\{ \chi(d, \sigma) : d | n, \exists d' | n, d' \neq d, \frac{d}{\theta} < d' < \theta d \right\} \tag{16}$$

$$\leq \left(\frac{1}{10} + (\log \sigma)^{-\delta_4} \right) \tau(n, \sigma) \leq \frac{\tau(n, \sigma)}{5},$$

quitte à modifier $\sigma_0(\theta)$.

Notons $1 = d_1 < d_2 < \dots < d_\tau = n$ la suite croissante des diviseurs de n . Les inégalités (15) et (16) impliquent

$$\text{card} \left\{ i \ (2 \leq i \leq \tau - 1) : \theta d_{i-1} \leq d_i \leq \frac{d_{i+1}}{\theta} \right\} \geq \frac{4}{5} \frac{\tau(n)}{\log \sigma}. \quad (17)$$

Nous pouvons maintenant achever la démonstration du théorème 2 en prouvant que, pour tout réel positif η , il existe un réel positif ζ tel que la suite des entiers n satisfaisant à

$$g(n) := \text{card} \{ i \ (1 \leq i \leq \tau - 1) : d_i | d_{i+1} \} \geq \zeta \tau(n), \quad (18)$$

soit de densité inférieure au moins égale à $1 - \eta$.

Soit, donc, $\eta > 0$, et, k un entier tel que

$$\sum_{j=1}^k \frac{1}{p_j} \prod_{r=1}^{j-1} \left(1 - \frac{1}{p_r} \right) \geq 1 - \frac{\eta}{2},$$

où $2 = p_1 < p_2 < \dots$ désigne la suite croissante des nombres premiers. Choisissons un réel $\sigma \geq \max_{j=1}^k \sigma_0(p_j)$ et tel que $(\log \sigma)^{-\delta_3} \leq \frac{\eta}{2}$.

On pose $\zeta = \frac{2}{5 \log \sigma}$ et $\mathcal{C} = \bigcup_{j=1}^k \{ p_j m : m \in \mathcal{B}(p_j, \sigma) \}$.

Si $n = p_j m$ appartient à \mathcal{C} , chaque diviseur d_i de m vérifiant $p_j d_{i-1} \leq d_i \leq \frac{d_{i+1}}{p_j}$ est tel que le diviseur de n qui suit immédiatement d_i soit $p_j d_i$; d'après (17) il y a au moins $2\zeta \tau(m) \geq \zeta \tau(n)$ tels diviseurs d_i ; donc n satisfait (18). Enfin, la densité inférieure de \mathcal{C} est au moins égale à

$$\sum_{j=1}^k \frac{1}{p_j} \prod_{r=1}^{j-1} \left(1 - \frac{1}{p_r} \right) \{ 1 - (\log \sigma)^{-\delta_3} \} \geq \left(1 - \frac{\eta}{2} \right)^2 \geq 1 - \eta,$$

ce qui achève la démonstration.

5. Preuve du théorème 3.

Décomposons chaque entier n sous la forme $n = mt$ avec

$$m = \prod_{\substack{p^v || n \\ p < n^{1/\xi}}} p^v.$$

Les hypothèses de croissance faites sur ξ permettent de montrer facilement que l'on a pour presque tout n

$$\log m = (1 + o(1)) \frac{\log n}{\xi} \tag{19}$$

et

$$\Omega(t) = (1 + o(1)) \log \xi. \tag{20}$$

Les preuves de (19) et (20) sont classiques et, partant, laissées au lecteur.

Désignons par

$$1 = m_1 < m_2 < \dots < m_s = m \text{ (resp. } 1 = t_1 < t_2 < \dots < t_k = t)$$

la suite croissante des diviseurs de m (resp. t) et notons pour chaque

$j, 1 \leq j \leq k, h_j := \prod_{(d_{i+1}, t) = t_j} \frac{d_{i+1}}{d_i}$, le produit des rapports $\frac{d_{i+1}}{d_i}$ de diviseurs consécutifs de n , étendu aux valeurs de i pour lesquelles $\frac{d_{i+1}}{d_i} \leq n^{1/k}$ et $(d_{i+1}, t) = t_j$. Si l'on note encore

$$t_j^* = \begin{cases} t_j & \text{si } \forall d|n \ (d < t_j \implies d < t_j n^{-1/k}) \\ \max \{d|n : t_j n^{-1/k} \leq d < t_j\} & \text{sinon} \end{cases}$$

on a

$$h_j \leq \frac{t_j}{t_j^*} \frac{t_j m_2}{t_j m_1} \frac{t_j m_3}{t_j m_2} \dots \frac{t_j m_s}{t_j m_{s-1}} = \frac{t_j}{t_j^*} m \leq n^{1/k} m$$

d'où

$$h(\xi, n) = \prod_{j=1}^k h_j \leq (n^{1/k} m)^k = \exp \left\{ (2 + o(1)) \frac{k \log n}{\xi} \right\},$$

d'après (19). Comme (20) implique $k \leq \xi^{\log 2 + o(1)}$, on obtient,

pour presque tout $n, \frac{\log h(\xi, n)}{\log n} \leq \xi^{\log 2 - 1 + o(1)}$.

Pour établir la minoration, fixons un ϵ dans $\left] 0, \frac{1}{2} \right[$ et considérons $T(n) := \text{card} \left\{ d|t, d'|t : 1 \leq \frac{d'}{d} \leq n^{\epsilon-1+\epsilon} \right\}$; un argument identique à celui qui a été utilisé dans [9] pour majorer $T(n, \alpha)$ permet d'établir que pour presque tout n on a :

$$T(n) \leq \tau(t) \xi^{\epsilon+o(1)} \leq \xi^{\log 2 + \epsilon + o(1)} ;$$

cela implique l'existence d'au moins r diviseurs $\tilde{t}_1 < \tilde{t}_2 < \dots < \tilde{t}_r$, de t tels que $\frac{\tilde{t}_{j+1}}{\tilde{t}_j} \geq n^{\epsilon-1+\epsilon+o(1)}$ ($1 \leq j \leq r-1$) et $r \geq \xi^{\log 2 - \epsilon + o(1)}$.

Maintenant, pour chaque j ($1 \leq j \leq r$), \tilde{t}_j est un certain diviseur d_i de n ; comme on a $d_{i+i_1} = m_2 d_i \leq n^{1/\xi} d_i$ pour un indice $i_1 \geq 1$, on voit que le facteur $m_2 = \frac{d_{i+i_1}}{d_i} = \prod_{\nu=0}^{i_1-1} \frac{d_{i+\nu+1}}{d_{i+\nu}}$ est compté dans $h(\xi, t)$; il en va de même pour $\frac{m_3}{m_2} = \frac{m_3 d_i}{m_2 d_i} = \frac{d_{i+i_2}}{d_{i+i_1}}$ et ainsi de suite; finalement cela montre que l'on peut écrire

$$m = \frac{m_2}{m_1} \dots \frac{m_s}{m_{s-1}} = \prod_{\nu=1}^{i+i_s-1} \frac{d_{\nu+1}}{d_\nu}$$

où chaque $\frac{d_{\nu+1}}{d_\nu}$ est $\leq n^{1/\xi}$ et où chaque d_ν appartient à l'intervalle $[\tilde{t}_j, \tilde{t}_j m]$; on en déduit

$$h(\xi, n) \geq m^r \geq \exp \left\{ (1 + o(1)) \frac{\log n}{\xi} \cdot \xi^{\log 2 - \epsilon + o(1)} \right\};$$

comme on peut choisir ϵ arbitrairement petit, cela achève la démonstration.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J.-M. DESHOILLERS, F. DRESS, G. TENENBAUM, Lois de répartition des diviseurs, 1, *Acta Arithm.*, (4) 34 (1979), 273-285.
- [2] P. ERDÖS, On the density of some sequences of integers, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 54 (1948), 685-692.
- [3] P. ERDÖS, On some applications of probability to analysis and number theory, *J. London Math. Soc.*, 39 (1964), 692-696.
- [4] P. ERDÖS, Some unconventional problems in number theory, *Astérisque*, 61 (1979), 73-82.
- [5] P. ERDÖS and R.R. HALL, On some unconventional problems on the divisors of integers, *J. Austral. Math. Soc.*, Séries A, 25 (1978), 479-485.
- [6] P. ERDÖS and R.R. HALL, The propinquity of divisors, *Bull. London Math. Soc.*, 11 (1979), 304-307.

- [7] H. HALBERSTAM and H.-E. RICHERT, On a result of R.R. Hall, *J. Number Theory*, (1) 11 (1979), 76-89.
- [8] R.R. HALL, A new definition of the density of an integer sequence, *J. Austral. Math. Soc., Series A*, 26 (1978), 487-500.
- [9] R.R. HALL et G. TENENBAUM, Sur la proximité des diviseurs, *Proc. of the Symposium on progress in Analytic Number Theory* (Durham 1979), à paraître.
- [10] G. TENENBAUM, Lois de répartition des diviseurs, 5, *J. London Math. Soc.*, (2) 20 (1979), 165-176.

Manuscrit reçu le 19 mai 1980.

P. ERDOS,
 Institut de Mathématiques
 Académie des Sciences de Hongrie
 Budapest (Hongrie)

G. TENENBAUM,
 U.E.R. de Mathématiques
 Université de Bordeaux I
 F 33405 Talence Cedex.

et
 Département de Mathématiques
 UER des Sciences de Limoges
 F 87100 Limoges.