

Note sur les lois locales conjointes de la fonction nombre de facteurs premiers*

Gérald Tenenbaum

Abstract. Let $\alpha \in]0, 1]$ and let Q_j ($1 \leq j \leq r$) denote distinct irreducible polynomials with integer coefficients. We show that, for vectors with coordinates not exceeding a constant multiple of their mean, the joint local distribution of the number of prime factors of the $Q_j(n)$ for $x < n \leq x + x^\alpha$ is majorized by a constant multiple of the pairwise independency model, and we provide an upper bound for the constant in terms of the coefficients of the Q_j .

Keywords : number of prime factors, shifted integers, polynomial values, additive functions.

2010 Mathematics Subject Classification : 11N25, 11N32, 11N37, 11N60.

Notons $\omega(n)$ le nombre des facteurs premiers distincts d'un entier naturel n . Soit $\pi_{k,\ell}(x)$ le nombre des entiers n n'excédant pas x et tels que $\omega(n) = k$, $\omega(n+1) = \ell$. Un cas particulier d'un récent résultat de É. Goudout [2] stipule que la majoration

$$(1) \quad \pi_{k,\ell}(x) \ll \frac{x(\log_2 x)^{k+\ell-2}}{(\log x)^2(k-1)!(\ell-1)!} \quad (x \geq 3)$$

est valable uniformément, pour toute constante $R > 0$, dans le domaine

$$1 \leq k, \ell \leq R \log_2 x.$$

Goudout établit en fait un théorème plus général, relatif à un produit de deux polynômes linéaires et fournit une borne uniforme dans les coefficients. Il mentionne également que sa démonstration s'adapte au cas d'un produit quelconque de polynômes linéaires.

Nous proposons ici une preuve simple d'une généralisation de (1), basée sur la méthode d'Erdős dans [1].

Nous considérons une famille $\{Q_j\}_{1 \leq j \leq r}$ de polynômes irréductibles de $\mathbb{Z}[X]$, deux à deux premiers entre eux et sans diviseur fixe et posons $Q := \prod_{1 \leq j \leq r} Q_j$. Nous désignons par $\varrho_j(m)$, resp. $\varrho_0(m)$, ($m \geq 1$) le nombre de racines de Q_j , resp. de Q , dans $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, notons D_j le discriminant de Q_j , D celui de Q , et posons

$$g_j := \deg Q_j \quad (1 \leq j \leq r), \quad g := \sum_{1 \leq j \leq r} g_j = \deg Q,$$

$$Q(X) = \sum_{0 \leq i \leq g} \beta_i X^i, \quad \beta := \beta_g, \quad \|Q\| := \max_{1 \leq i \leq g} |\beta_i|,$$

$$\varphi_j(n) := n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{\varrho_j(p)}{p}\right) \quad (n \geq 1, 0 \leq j \leq r).$$

* Nous incluons ici quelques corrections mineures relativement à la version publiée.

Ici et dans la suite nous réservons la lettre p pour désigner un nombre premier.

En vertu du théorème des idéaux premiers, il existe des constantes positives M_j ($1 \leq j \leq r$) telles que

$$\left| \sum_{p \leq x} \frac{\varrho_j(p)}{p} - \log_2 x \right| \leq M_j \quad (x \geq 2).$$

Notre résultat principal dépend fondamentalement de ces quantités.

Posons $M := \sum_{1 \leq j \leq r} M_j$.

Théorème 1. Soient $R > 0$, $r \geq 1$, $\alpha \in]0, 1[$. Nous avons uniformément pour $x \geq c_0 \|Q\|$, $x^\alpha \leq y \leq x$, $k_j \in [1, R \log_2 x]$ ($1 \leq j \leq r$),

$$(2) \quad \sum_{\substack{x < n \leq x+y \\ \omega(Q_j(n))=k_j \ (1 \leq j \leq r)}} 1 \ll \left(\frac{\beta D}{\varphi_0(\beta D)} \right)^K \frac{e^M y}{(\log x)^r} \prod_{1 \leq j \leq r} \frac{(\log_2 x + M_j)^{k_j-1}}{(k_j-1)!},$$

où K , c_0 et la constante implicite dépendent au plus de α , R , r , g .

Remarques. (i) Nous avons $\varrho_0(p) \leq g$ pour tout nombre premier p . Notant φ la fonction indicatrice d'Euler, cela implique,

$$\frac{\beta D}{\varphi_0(\beta D)} \ll \left(\frac{\beta D}{\varphi(\beta D)} \right)^g \ll \left(\log \{2 + \omega(\beta D)\} \right)^g.$$

(ii) Le membre de droite de (2) n'excède pas

$$\left(\frac{\beta D}{\varphi_0(\beta D)} \right)^K \frac{e^{(R+1)M} y}{(\log x)^r} \prod_{1 \leq j \leq r} \frac{(\log_2 x)^{k_j-1}}{(k_j-1)!}.$$

Démonstration. Soit $\varepsilon \in]\alpha/4g, \alpha/3g[$. Pour chaque entier n de $]x, x+y]$, désignons par ξ_n le plus grand entier tel que

$$\prod_{\substack{p^\nu \parallel Q(n) \\ p \leq \xi_n}} p^\nu \leq x^{2g\varepsilon}.$$

Notant classiquement $P^+(n)$ (resp. $P^-(n)$) le plus grand (resp. le plus petit) facteur premier d'un entier n avec la convention $P^+(1) = 1$, $P^-(1) = \infty$, nous obtenons la décomposition canonique

$$Q(n) = \prod_{1 \leq j \leq r} a_{jn} b_n$$

avec

$$P^+ \left(\prod_{1 \leq j \leq r} a_{jn} \right) \leq \xi_n, \quad a_{jn} \mid Q_j(n) \ (1 \leq j \leq r),$$

$$p_n := P^-(b_n) > \xi_n, \quad p_n^{v_n} \parallel b_n, \quad x^{2g\varepsilon} / p_n^{v_n} < \prod_{1 \leq j \leq r} a_{jn} \leq x^{2g\varepsilon}.$$

Désignons alors par $N_j(x)$ ($1 \leq j \leq 3$) le nombre des entiers n comptés dans le membre de gauche de (2) et satisfaisant respectivement aux conditions suivantes

$$\begin{aligned} (N_1) \quad & a_{1n} \cdots a_{rn} \leq x^{g\varepsilon} \text{ et } p_n > x^{\varepsilon/3}, \\ (N_2) \quad & a_{1n} \cdots a_{rn} \leq x^{g\varepsilon} \text{ et } p_n \leq x^{\varepsilon/3}, \\ (N_3) \quad & a_{1n} \cdots a_{rn} > x^{g\varepsilon}. \end{aligned}$$

Si n est compté dans $N_1(x)$, alors $\omega(b_n) \leq E := 3(g+1)/\varepsilon$ dès que x et c_0 sont assez grands. Notons $\mathcal{D}(U)$ le discriminant d'un polynôme $U \in \mathbb{Z}[X]$ et $\mathcal{R}(U, V)$ le résultant de $(U, V) \in \mathbb{Z}[X]^2$. L'argument développé dans [4], p. 134, une fois rectifié, comme indiqué dans [3], en tenant compte de la formule

$$c^{\deg U} d^{\deg V} \mathcal{D}(UV) = \mathcal{D}(U)\mathcal{D}(V)\mathcal{R}(U, V)^2,$$

valable pour tous polynômes U, V de $\mathbb{Z}[X]$ de coefficients dominants respectifs c, d , nous permet alors d'écrire

$$a_{jn} = t_{jn}d_{jn} \quad (1 \leq j \leq r)$$

avec

$$\begin{aligned} t_{jn} | (\beta D)^\infty, \quad (d_{jn}, \beta D) &= 1 \quad (1 \leq j \leq r), \\ (d_{in}, d_{jn}) &= 1 \quad (1 \leq i < j \leq r). \end{aligned}$$

Introduisons les noyaux sans facteur carré t_{jn}^*, d_{jn}^* des t_{jn}, d_{jn} . Chaque entier n compté dans $N_1(x)$ est donc tel que

$$\begin{cases} t_{jn}^* d_{jn}^* | Q_j(n) \quad (1 \leq j \leq r), \\ t_{1n}^* \cdots t_{rn}^* | (\beta D)^r, \\ \prod_{1 \leq j \leq r} \mu(t_{jn}^*)^2 \mu(\prod_{1 \leq j \leq r} d_{jn}^*)^2 = 1. \end{cases}$$

De plus, la condition $\omega(Q_j(n)) = k_j$ implique $\omega(t_{jn}d_{jn}) \in [k_j - E, k_j]$, où la borne supérieure découle de l'hypothèse $a_{jn} \leq x^{g\varepsilon}$.

En sommant selon les fibres

$$(t_{1n}^*, \dots, t_{rn}^*, d_{1n}^*, \dots, d_{rn}^*) = (t_1, \dots, t_r, d_1, \dots, d_r),$$

nous pouvons donc écrire

$$(3) \quad N_1(x) \leq \sum_{\substack{(k_j - E)^+ \leq \kappa_j < k_j \\ (1 \leq j \leq r)}} \sum_{t_1 \cdots t_r | (\beta D)^r} \sum_{\substack{\omega(t_j d_j) = \kappa_j \quad (1 \leq j \leq r) \\ t_1 d_1 \cdots t_r d_r \leq x^{g\varepsilon} \\ (d_j, \beta D) = 1 \quad (1 \leq j \leq r)}} \prod_{1 \leq j \leq r} \mu(t_j)^2 \mu\left(\prod_{1 \leq j \leq r} d_j\right)^2 \sum_{x < n \leq x+y}^* 1$$

avec les conditions de sommation

$$(*) \quad \begin{cases} t_1 \cdots t_r | (\beta^r D^r, Q(n)), \\ d_j | Q_j(n) \quad (1 \leq j \leq r) \\ p | Q(n) \Rightarrow p | t_1 d_1 \cdots t_r d_r \text{ ou } p > x^{\varepsilon/3}. \end{cases}$$

Notant $T := t_1 \cdots t_r$, nous pouvons supposer sans perte de généralité que $\varrho_0(T) \prod_{1 \leq j \leq r} \varrho_j(d_j) \geq 1$, puisque $N_1(x) = 0$ dans le cas contraire. La somme intérieure peut alors être majorée par le crible de Selberg comme au lemme 3.4 de [6] puisque l'ensemble

$$\mathcal{A} := \{n \in]x, x+y] : T|Q(n), d_j|Q_j(n) (1 \leq j \leq r)\}$$

vérifie $|\mathcal{A}| = X + O(R)$ avec

$$X := y \frac{\varrho_0(T)}{T} \prod_{1 \leq j \leq r} \frac{\varrho_j(d_j)}{d_j} \geq x^{2\alpha/3}, \quad R := \varrho_0(T) \prod_{1 \leq j \leq r} \varrho_j(d_j) \leq x^{g\varepsilon} \leq x^{\alpha/3}.$$

Nous obtenons

$$\begin{aligned} \sum_{x < n \leq x+y}^* 1 &\ll X \prod_{\substack{p \leq x^{\varepsilon/3} \\ p \nmid t_1 d_1 \cdots t_r d_r}} \left(1 - \frac{\varrho_0(p)}{p}\right) \\ &\ll X \prod_{\substack{p \leq x^{\varepsilon/3} \\ p \nmid \beta D d_1 \cdots d_r}} \left(1 - \sum_{1 \leq j \leq r} \frac{\varrho_j(p)}{p}\right) \\ &\ll X \left(\frac{\beta D}{\varphi_0(\beta D)}\right)^r \prod_{1 \leq j \leq r} \frac{d_j}{\varphi_j(d_j)} \exp\left\{-\sum_{1 \leq j \leq r} \sum_{p \leq x^{\varepsilon/3}} \frac{\varrho_j(p)}{p}\right\} \\ &\ll e^M \left(\frac{\beta D}{\varphi_0(\beta D)}\right)^r \prod_{1 \leq j \leq r} \frac{\varrho_j(d_j)}{\varphi_j(d_j)} \frac{y \varrho_0(T)}{T(\log x)^r}. \end{aligned}$$

Notant $\tau_r(n)$ le nombre de décompositions d'un entier n en produit de r facteurs, il suit

$$N_1(x) \ll \frac{Hy}{(\log x)^r} \sum_{T|(\beta D)^r} \frac{\varrho_0(T) \tau_r(T)}{T} S(T),$$

avec

$$\begin{aligned} H &:= e^M \left(\frac{\beta D}{\varphi_0(\beta D)}\right)^r, \\ S(T) &:= \sum_{\substack{(k_j - E - \omega(T))^+ \leq \kappa_j < k_j \\ (1 \leq j \leq r)}} \prod_{1 \leq j \leq r} \frac{1}{\kappa_j!} \left(\sum_{p \leq x} \frac{\varrho_j(p)}{p - \varrho_j(p)}\right)^{\kappa_j} \\ &\ll \{\omega(T) + E\}^r \prod_{1 \leq j \leq r} \frac{(\log_2 x + M_j)^{k_j - 1}}{(k_j - 1)!} (R + 1)^{r\omega(T) + rE}, \end{aligned}$$

compte tenu de la majoration

$$\begin{aligned} \frac{1}{\kappa_j!} \left(\sum_{p \leq x} \frac{\varrho_j(p)}{p - \varrho_j(p)}\right)^{\kappa_j} &\ll \frac{1}{\kappa_j!} (\log_2 x + M_j)^{\kappa_j} \\ &\ll \frac{(\log_2 x + M_j)^{k_j - 1}}{(k_j - 1)!} \left(1 + \frac{k_j}{\log x}\right)^\ell \leq (R + 1)^\ell \frac{(\log_2 x + M_j)^{k_j - 1}}{(k_j - 1)!}, \end{aligned}$$

valable pour $k_j - \ell \leq \kappa_j < k_j \leq R \log_2 x$. Nous pouvons donc écrire

$$\begin{aligned} N_1(x) &\ll \frac{Hy}{(\log x)^r} \prod_{1 \leq j \leq r} \frac{(\log_2 x + M_j)^{k_j-1}}{(k_j-1)!} \sum_{T | (\beta D)^r} \frac{\varrho_0(T) \tau_r(T) (R+2)^{r\omega(T)}}{T} \\ &\ll \left(\frac{\beta D}{\varphi_0(\beta D)} \right)^K \frac{e^M y}{(\log x)^r} \prod_{1 \leq j \leq r} \frac{(\log_2 x + M_j)^{k_j-1}}{(k_j-1)!}. \end{aligned}$$

Considérons à présent un entier n compté dans $N_2(x)$. Nous avons $p_n^{v_n} > x^{g\varepsilon}$ et $p_n \leq x^{\varepsilon/3}$. Pour chaque nombre premier p n'excédant pas $x^{\varepsilon/3}$, désignons par $\nu(p)$ le plus petit entier tel que $p^{\nu(p)} > x^{g\varepsilon}$. Alors $\nu(p) \geq 3g$ et $p^{\nu(p)-1} \leq x^{g\varepsilon}$, donc $p^{\nu(p)} \leq x^{2g\varepsilon} \leq y$. La majoration universelle $\varrho_0(p^\nu) \leq gp^{\nu(1-1/g)}$, établie par Stewart dans [5] pour toute puissance de nombre premier p^ν , nous permet alors d'écrire

$$\begin{aligned} N_2(x) &\leq \sum_{p \leq x^{\varepsilon/3}} \sum_{\substack{x < n \leq x+y \\ Q(n) \equiv 0 \pmod{p^{\nu(p)}}}} 1 \leq 2 \sum_{x^{g\varepsilon/\nu(p)} < p \leq x^{\varepsilon/3}} \frac{y \varrho_0(p^{\nu(p)})}{p^{\nu(p)}} \\ &\ll y \sum_{x^{g\varepsilon/\nu(p)} < p \leq x^{\varepsilon/3}} \frac{1}{p^{\nu(p)/g}} \ll \frac{y}{x^{2\varepsilon/3}}. \end{aligned}$$

Cette majoration est clairement compatible avec l'estimation annoncée (2).

Pour évaluer $N_3(x)$, nous introduisons le paramètre $q_n := P^+(a_{1n} \cdots a_{rn})$ et notons que $\omega(b_n) \leq \eta(q_n) := (g+1)(\log x)/\log q_n$. Nous avons

$$\begin{aligned} N_3(x) &\leq \sum_{q \leq x^{2g\varepsilon}} \sum_{\substack{(k_j - \eta(q))^+ \leq \kappa_j < k_j \\ (1 \leq j \leq r)}} \sum_{t_1 \cdots t_r | (\beta D)^r} \\ &\quad \sum_{\substack{\omega(t_j d_j) = \kappa_j \ (1 \leq j \leq r) \\ P^+(t_1 d_1 \cdots t_r d_r) = q \\ (d_i, \beta D d_j) = 1 \ (1 \leq i < j \leq r) \\ x^{g\varepsilon} < t_1 d_1 \cdots t_r d_r \leq x^{2g\varepsilon}}} \prod_{1 \leq j \leq r} \mu(t_j)^2 \mu \left(\prod_{1 \leq j \leq r} d_j \right)^2 \sum_{x < n \leq x+y}^{**} 1 \end{aligned}$$

avec les conditions

$$(**) \begin{cases} t_1 \cdots t_r \mid (\beta^r D^r, Q(n)) \\ d_j \mid Q_j(n) \ (1 \leq j \leq r) \\ p \mid Q(n) \Rightarrow p \mid t_1 d_1 \cdots t_r d_r \text{ ou } p > q. \end{cases}$$

En employant à nouveau le crible de Selberg, nous obtenons

$$\sum_{n \leq x}^{**} 1 \ll \frac{Hy}{(\log q)^r} \frac{\varrho_0(t_1 \cdots t_r)}{t_1 \cdots t_r} \prod_{1 \leq j \leq r} \frac{\varrho_j(d_j)}{\varphi_j(d_j)}.$$

Nous majorons alors la somme r -uple par la méthode de Rankin en introduisant un poids $(t_1 d_1 \cdots t_r d_r / x^{g\varepsilon})^v$, avec $v := C/\log q$, où C est une constante assez grande.

Il suit comme précédemment

$$N_3(x) \ll H \sum_{T|\beta^r D^r} \frac{\varrho_0(T)\tau_r(T)}{T^{1-v}} \sum_{q \leq x^{2g\varepsilon}} \frac{y}{q(\log q)^r x^{Cg\varepsilon/\log q}} \\ \sum_{\substack{(k_j - \eta(q) - \omega(T))^+ \leq \kappa_j < k_j \\ (1 \leq j \leq r)}} \prod_{1 \leq j \leq r} \frac{(\log_2 q + M_j)^{\kappa_j}}{\kappa_j!}.$$

Pour chaque r -uplet $(\kappa_1, \dots, \kappa_r)$ apparaissant dans la somme intérieure, nous avons

$$\prod_{1 \leq j \leq r} \frac{(\log_2 q + M_j)^{\kappa_j}}{\kappa_j!} \leq \prod_{1 \leq j \leq r} \frac{(\log_2 x + M_j)^{k_j - 1}}{(k_j - 1)!} (R + 1)^{r\eta(q) + r\omega(T)}.$$

Dès que $Cg\varepsilon > 1 + r(g + 1)\log(R + 1)$, nous obtenons donc, pour une constante K convenable,

$$N_3(x) \\ \ll \left(\frac{\beta D}{\varphi_0(\beta D)} \right)^K \frac{e^M y}{(\log x)^r} \prod_{1 \leq j \leq r} \frac{(\log_2 x + M_j)^{k_j - 1}}{(k_j - 1)!} \sum_{q \leq x^\varepsilon} \left(\frac{\log x}{\log q} \right)^{2r} \frac{x^{-1/\log q}}{q} \\ \ll \left(\frac{\beta D}{\varphi_0(\beta D)} \right)^K \frac{e^M y}{(\log x)^r} \prod_{1 \leq j \leq r} \frac{(\log_2 x + M_j)^{k_j - 1}}{(k_j - 1)!}. \quad \square$$

Remerciements. L'auteur tient à exprimer ses chaleureux remerciements, d'une part, à l'arbitre pour avoir détecté une erreur significative dans une version initiale de ce travail et, d'autre part, à Régis de la Bretèche pour son aide amicale et pertinente.

Bibliographie

- [1] P. Erdős, The sum $\sum d\{f(n)\}$, *J. London Math. Soc.* **27** (1952), 7-15.
- [2] É. Goudout, Lois locales de la fonction ω dans presque tous les petits intervalles, *Proc. London Math. Soc.*(3) **115** (2017), 599-637.
- [3] K. Henriot, Nair–Tenenbaum uniform [bounds] with respect to the discriminant–ERRATUM, *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.* **157** (2014), 375-377.
- [4] M. Nair & G. Tenenbaum, Short sums of certain arithmetic functions, *Acta Math.* **180** (1998), 119-144.
- [5] C. L. Stewart, On the number of solutions of polynomial congruences and Thue equations, *J. Amer. Math. Soc.* **4** (1991), 793-835.
- [6] G. Tenenbaum, Sur une question d'Erdős et Schinzel, in : A. Baker, B. Bollobás, A. Hajnal (eds.) *A Tribute to Paul Erdős*, Cambridge University Press (1990), 405-443.

Gérald Tenenbaum
 Institut Élie Cartan
 Université de Lorraine
 BP 70239
 54506 Vandœuvre-lès-Nancy Cedex
 France
 internet : gerald.tenenbaum@univ-lorraine.fr