

NOTE SUR LES VALEURS MOYENNES CRIBLÉES
DE CERTAINES FONCTIONS ARITHMÉTIQUES ⁽¹⁾

A. LACHAND ET G. TENENBAUM

ABSTRACT. We provide, in a wide range of the parameters, an estimate for the mean-value over sifted integers of certain arithmetic functions with Dirichlet series analytically close to $1/\zeta_{\mathbb{K}}(s)$, where \mathbb{K} is a number field and $\zeta_{\mathbb{K}}$ its Dedekind zeta function.

1. INTRODUCTION ET ÉNONCÉS

Soient \mathbb{K} un corps de nombres et $\zeta_{\mathbb{K}}$ sa fonction zêta de Dedekind. Nous nous proposons ici d’apporter des précisions sur le comportement asymptotique des valeurs moyennes criblées de fonctions arithmétiques dont la série de Dirichlet est analytiquement proche d’une puissance réelle $\zeta_{\mathbb{K}}^{\kappa}$ de $\zeta_{\mathbb{K}}$. Par souci de simplicité, et compte tenu de l’application visée dans le travail [Lac14], nous nous limitons au cas $\kappa = -1$, mais la méthode est facilement adaptable au cas général.

Plus précisément, pour $c_0 \in]0, 1]$ et $\kappa \in \mathbb{Z}^*$, désignons par $\mathcal{E}_{\mathbb{K}}^*(\kappa; c_0)$ la classe des fonctions multiplicatives h dont la série de Dirichlet associée $\mathcal{H}(s) := \sum_{n \geq 1} h(n)/n^s$ s’écrit sous la forme

$$(1.1) \quad \mathcal{H}(s) = \mathcal{G}(s)\zeta_{\mathbb{K}}(s)^{\kappa}$$

où la série $\mathcal{G}(s) := \sum_{n \geq 1} g(n)/n^s$ est développable en un produit eulérien absolument convergent pour $\Re(s) \geq 1 - c_0$. Introduisons encore, pour $\kappa_0 \in \mathbb{N}^*$ le sous-ensemble $\mathcal{E}_{\mathbb{K}}(\kappa_0, \kappa; c_0)$ de $\mathcal{E}_{\mathbb{K}}^*(\kappa; c_0)$ constitué des fonctions arithmétiques h dont la série de Dirichlet $\mathcal{H}(s)$ possède une série majorante associée à une fonction \tilde{h} de $\mathcal{E}_{\mathbb{K}}^*(\kappa_0; c_0)$. Des hypothèses moins restrictives sont considérées dans [HTW08] : ici encore, il serait facile, si nécessaire, d’étendre nos résultats au cadre considéré dans ce travail.

Notant $P^-(n)$ le plus petit facteur premier d’un entier naturel n avec la convention $P^-(1) = \infty$, notre résultat principal consiste à fournir, dans un large domaine, une formule asymptotique pour la quantité

$$\Phi_h(x, y) := \sum_{\substack{n \leq x \\ P^-(n) > y}} h(n)$$

lorsque $h \in \mathcal{E}_{\mathbb{K}}(1, -1; c_0)$. La présente étude s’inscrit notamment dans le prolongement des travaux correspondants apparaissant dans [HTW08] et au paragraphe 2 de [BBDT12], où les valeurs moyennes friables et criblées des éléments de $\mathcal{E}_{\mathbb{K}}(\kappa_0, \kappa; c_0)$ sont considérées sous les hypothèses respectives $\kappa > 0$ et $\kappa = 1$.

Nous obtenons le résultat suivant. Ici et dans la suite, nous désignons par ϱ la fonction de Dickman (voir par exemple le chapitre III.5 de [Ten08]) et employons systématiquement la notation traditionnelle $u := (\log x)/\log y$ ($x \geq 2, y \geq 2$).

¹ Nous incluons ici certaines corrections relativement à la version publiée.

Date: May 15, 2022.

Théorème 1.1. Soient $c_0 > 0$ et $\varepsilon > 0$. Sous la condition

$$(G_\varepsilon^*) \quad x \geq 2, \quad \exp \{(\log x)^{2/5+\varepsilon}\} \leq y \leq x/2,$$

et uniformément pour $h \in \mathcal{E}_{\mathbb{K}}(1, -1; c_0)$, nous avons

$$(1.2) \quad \Phi_h(x, y) = \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{L_\varepsilon(y)}\right) \right\} x \int_0^\infty \frac{\varrho'(u-v)}{y^v} dv$$

où $L_\varepsilon(y) := e^{(\log y)^{3/5-\varepsilon}}$. En particulier, nous avons, uniformément dans le domaine G_ε^* ,

$$(1.3) \quad \Phi_h(x, y) = \left\{ 1 + O\left(\frac{\log(u+1)}{\log y}\right) \right\} \frac{x\varrho'(u) + y}{\log y}.$$

Il est à noter que, dans le domaine $x/2 < y \leq x$ non couvert par G_ε^* , nous avons

$$\Phi_h(x, y) = \pi(y) - \pi(x) + O(x/L_\varepsilon(x)).$$

Le cas particulier donné par $h := \mu$, la fonction de Möbius, du Théorème 1.1 est emblématique. Nous obtenons alors, dans le domaine G_ε^* ,

$$(1.4) \quad \sum_{\substack{n \leq x \\ P^-(n) > y}} \mu(n) = x \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{L_\varepsilon(y)}\right) \right\} \int_0^\infty \frac{\varrho'(u-v)}{y^v} dv \\ = \left\{ 1 + O\left(\frac{\log(u+1)}{\log y}\right) \right\} \frac{x\varrho'(u) + y}{\log y}.$$

La seconde formule découle de la première par intégration par parties. Une sommation d'Abel supplémentaire tenant compte de la convention $P^-(1) = \infty$ fournit alors, à partir de la première évaluation,

$$(1.5) \quad \sum_{\substack{n \leq x \\ P^-(n) > y}} \frac{\mu(n)}{n} = \left\{ 1 + O\left(\frac{\log(u+1)}{\log y}\right) \right\} \varrho(u) + O\left(\frac{1}{L_\varepsilon(y)}\right) \quad ((x, y) \in G_\varepsilon),$$

où G_ε désigne le domaine obtenu en adjoignant à G_ε^* les couples (x, y) tels que $x/2 < y \leq x$ ¹. Cette formule peut être comparée à l'évaluation suivante, découlant immédiatement de la formule asymptotique de Hildebrand [Hil86] pour le nombre $\Psi(x, y)$ des entiers y -friables n'excédant pas x ,

$$(1.6) \quad \sum_{\substack{n \leq x \\ P^-(n) > y}} \frac{\mu(n)}{x} \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor = \left\{ 1 + O\left(\frac{\log(u+1)}{\log y}\right) \right\} \varrho(u) \quad ((x, y) \in H_\varepsilon),$$

où l'on a posé

$$(H_\varepsilon) \quad x \geq 2, \quad \exp \{(\log_2 x)^{5/3+\varepsilon}\} \leq y \leq x.$$

Mentionnons incidemment qu'à partir des résultats de [Ten90], une sommation d'Abel fournit la formule duale de (1.5)

$$(1.7) \quad \sum_{n \in S(x, y)} \frac{\mu(n)}{n} = \frac{\omega(u)}{\log y} \int_1^{x/y} \frac{m(t)}{t} dt + O\left(\frac{1}{(\log y)^2}\right) \quad (x \geq y \geq 2),$$

où $S(x, y)$ désigne l'ensemble des entiers y -friables n'excédant pas x , ω désigne la fonction de Buchstab, et $t \mapsto m(t)$ est la fonction sommatoire de la fonction $\mu(n)/n$.

¹L'extension est triviale car la somme est dominée par la contribution du terme correspondant à $n = 1$ lorsque $x/2 < y \leq x$.

2. PREUVE

La démonstration du Théorème 1.1 est essentiellement fondée sur des arguments détaillés aux chapitres III.5 et III.6 de l'ouvrage [Ten08].

Posons $\kappa := 1 + 1/\log x$, $\alpha_0 := 1 - \xi(u)/\log y$ où $\xi(u)$ est défini, pour $u > 1$, comme l'unique solution réelle de l'équation $e^\xi = 1 + u\xi$, et où l'on convient que $\xi(1) = 0$. Notons encore

$$T = T(x, y) := \begin{cases} L_{\varepsilon/2}(y) & \text{si } u \leq (\log y)^{3(1-\varepsilon)/5}, \\ \mathcal{Y}_\varepsilon := e^{(\log y)^{3/2-\varepsilon/3}} & \text{dans le cas contraire,} \end{cases}$$

de sorte que l'intérieur du contour rectangulaire \mathcal{R} de sommets $\kappa \pm iT$, $\alpha_0 \pm iT$, est inclus dans le domaine de Vinogradov

$$(2.1) \quad \sigma > 1 - \frac{c(\mathbb{K})}{\{\log(|\tau| + 3)\}^{2/3} \{\log \log(|\tau| + 3)\}^{1/3}} \quad (s = \sigma + i\tau),$$

sans zéro de $\zeta_{\mathbb{K}}(s)$ dès lors que la constante $c(\mathbb{K})$ est convenablement choisie [Mit68, Sok68].

La formule de Perron effective (voir par exemple le théorème II.2.3 de [Ten08]), permet d'écrire

$$(2.2) \quad \Phi_h(x, y) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT} \frac{x^s \mathcal{H}(s)}{s \mathcal{H}(s, y)} ds + R_1$$

avec

$$\mathcal{H}(s, y) := \prod_{p \leq y} \sum_{\nu \geq 0} \frac{h(p^\nu)}{p^{\nu s}}, \quad R_1 \ll x \sum_{\substack{n \geq 1 \\ P^-(n) > y}} \frac{|h(n)|}{n^\kappa (1 + T |\log(x/n)|)}.$$

Désignons par g le degré de \mathbb{K} . Par la méthode standard d'intégration complexe, nos hypothèses fournissent, pour tout σ , $0 < \sigma < c_0/\max(g, 2)$, et uniformément en $x \geq 2$,

$$(2.3) \quad \tilde{H}(x) := \sum_{n \leq x} \tilde{h}(n) = \lambda_{\mathbb{K}} \tilde{\mathcal{G}}(1)x + O(x^{1-\sigma})$$

où $\lambda_{\mathbb{K}}$ dénote le résidu de $\zeta_{\mathbb{K}}(s)$ en $s = 1$ et $\tilde{\mathcal{G}}(1) := \lim_{s \rightarrow 1} \tilde{H}(s)/\zeta_{\mathbb{K}}(s)$. Une manipulation classique (voir par exemple la démonstration du lemme 4.4 de [HTW08]) fournit alors $R_1 \ll x(\log x)/T$.

Le quotient $\mathcal{H}(s)/\mathcal{H}(s, y)$ étant holomorphe à l'intérieur du contour \mathcal{R} , nous pouvons déplacer l'abscisse d'intégration du terme principal de (2.2) jusque $\sigma = \alpha_0$ au prix d'un terme d'erreur

$$R_2 := \int_{\kappa-iT}^{\alpha_0-iT} \frac{\mathcal{H}(s)x^s}{s \mathcal{H}(s, y)} ds + \int_{\alpha_0+iT}^{\kappa+iT} \frac{\mathcal{H}(s)x^s}{s \mathcal{H}(s, y)} ds.$$

Posons systématiquement $s = \sigma + i\tau$. L'inégalité triviale

$$(2.4) \quad |\zeta_{\mathbb{K}}(s, y)| \leq \zeta_{\mathbb{K}}(\alpha_0, y) \quad (\sigma \geq \alpha_0),$$

et l'estimation classique (voir par exemple le lemme 4 de [Wu96])

$$(2.5) \quad 1/\zeta_{\mathbb{K}}(s) \ll_{\mathbb{K}} (\log |\tau|)^g \quad (|\tau| \geq 3),$$

valide dans le domaine (2.1), fournissent aisément la majoration

$$R_2 \ll \frac{x \zeta_{\mathbb{K}}(\alpha_0, y) (\log y)^c}{T}.$$

Lorsque $T = \mathcal{Y}_\varepsilon$, nous tronquons l'intégrale sur le segment déplacé de manière à ne conserver que le segment $|\tau| \leq L_{\varepsilon/2}(y)$. Cela induit un nouveau terme résiduel

$$R_3 \ll \int_{L_{\varepsilon/2}(y) \leq |\tau| \leq T} \frac{x^{\alpha_0+i\tau} \mathcal{H}(\alpha_0+i\tau)}{\tau \mathcal{H}(\alpha_0+i\tau, y)} d\tau \ll \int_{L_{\varepsilon/2}(y) \leq |\tau| \leq T} \frac{x^{\alpha_0} |\zeta_{\mathbb{K}}(\alpha_0+i\tau, y)|}{|\tau \zeta_{\mathbb{K}}(\alpha_0+i\tau)|} d\tau.$$

Les arguments du lemme III.6.12 de [Ten08] sont valides *mutatis mutandis* en remplaçant $\zeta(s)$ par $\zeta_{\mathbb{K}}(s)$. Nous obtenons ainsi, pour une constante positive convenable $c = c_{\mathbb{K}}$,

$$(2.6) \quad \zeta_{\mathbb{K}}(\alpha_0 + it, y) \ll \zeta_{\mathbb{K}}(\alpha_0, y) \exp\left(-\frac{c\tau^2 u}{(1 - \alpha_0)^2 + \tau^2}\right) \quad \left(\frac{1}{\log y} \leq |\tau| \leq \mathcal{Y}_\varepsilon\right).$$

En faisant de nouveau appel à la majoration (2.5) et compte tenu de l'hypothèse $u > (\log y)^{3(1-\varepsilon)/5}$, nous obtenons

$$R_3 \ll \frac{x^{\alpha_0} \zeta_{\mathbb{K}}(\alpha_0, y)}{L_{4\varepsilon/5}(y)}.$$

Il reste à évaluer le nouveau terme principal

$$(2.7) \quad P := \frac{1}{2i\pi} \int_{\alpha_0 - iL}^{\alpha_0 + iL} \frac{x^s \mathcal{H}(s)}{s \mathcal{H}(s, y)} ds$$

où l'on a posé $L := L_{\varepsilon/2}(y)$. La formule (4.1) de [HTW08] permet alors d'écrire, pour tout s du segment d'intégration,

$$(2.8) \quad \mathcal{H}(s) = \mathcal{H}(s, y)(s-1)(\log y) \widehat{\varrho}((s-1)\log y) \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{L_\varepsilon(y)}\right) \right\}$$

où $\widehat{\varrho}$ désigne la transformée de Laplace de la fonction de Dickman ϱ .

La contribution à P du terme d'erreur est

$$\ll R_4 := \frac{x^{\alpha_0}}{L} \int_{-L}^L \left| \frac{\mathcal{H}(\alpha_0 + i\tau)}{\mathcal{H}(\alpha_0 + i\tau, y)} \right| \frac{d\tau}{|\tau| + 1} \ll \frac{x^{\alpha_0} \zeta_{\mathbb{K}}(\alpha_0, y)}{L_{4\varepsilon/5}(y)}.$$

Pour évaluer celle du terme principal, nous étendons le domaine d'intégration à la droite $\sigma = \alpha_0$ tout entière au prix d'une erreur

$$\ll R_5 := \int_{|\tau| > L} x^s (s-1) \log y \widehat{\varrho}((s-1)\log y) \frac{ds}{s}.$$

La formule (III.5.50) de [Ten08], soit

$$(2.9) \quad s \widehat{\varrho}(s) = 1 + O\left(\frac{1 + u\xi(u)}{s}\right) \quad (|\tau| > 1 + u\xi(u),$$

et la seconde formule de la moyenne fournissent alors, comme dans la dernière partie de la preuve du théorème III.6.10 de [Ten08],

$$R_5 \ll \frac{x^{\alpha_0}}{L_{4\varepsilon/5}(y)}.$$

En rassemblant les termes d'erreur successifs et en utilisant la formule (III.6.62) de [Ten08] sous la forme

$$(2.10) \quad \zeta_{\mathbb{K}}(\alpha_0, y) \asymp \varrho(u) e^{u\xi(u)} \sqrt{u} \log y,$$

nous obtenons

$$(2.11) \quad \Phi_h(x, y) = \frac{x}{2i\pi} \int_{\alpha_0 - i\infty}^{\alpha_0 + i\infty} \frac{s \widehat{\varrho}(s) e^{us}}{s + \log y} ds + O\left(\frac{x \varrho(u)}{L_\varepsilon(y)}\right).$$

Comme $s \widehat{\varrho}(s)/(s + \log y)$ est la transformée de Laplace de

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\varrho'(u-v)}{y^v} dv &= \frac{\varrho'(u) + y/x}{\log y} - \frac{1}{\log y} \int_0^\infty \frac{\varrho''(u-v)}{y^v \log y} dv \\ &= \left\{ 1 + O\left(\frac{\log(u+1)}{\log y}\right) \right\} \frac{\varrho'(u) + y/x}{\log y} \quad ((x, y) \in G_\varepsilon^*), \end{aligned}$$

nous obtenons bien (1.2) et (1.3).

RÉFÉRENCES

- [BBDT12] A. Balog, V. Blomer, C. Dartyge, and G. Tenenbaum, *Friable values of binary forms*, Comment. Math. Helv. **87** (2012), no. 3, 639–667.
- [Hil86] A. Hildebrand, *On the number of positive integers $\leq x$ and free of prime factors $> y$* , J. Number Theory **22** (1986), no. 3, 289–307.
- [HTW08] G. Hanrot, G. Tenenbaum, et J. Wu, *Moyennes de certaines fonctions multiplicatives sur les entiers friables. II*, Proc. Lond. Math. Soc. (3) **96** (2008), no. 1, 107–135.
- [Lac14] Armand Lachand, *Valeurs friables d’une forme quadratique et d’une forme linéaire*, Prépublication (2014).
- [Mit68] T. Mitsui, *On the prime ideal theorem*, J. Math. Soc. Japan **20** (1968), 233–247.
- [Sok68] A. V. Sokolovskii, *A theorem on the zeros of Dedekind’s zeta-function and the distance between “neighboring” prime ideals*, Acta Arith. **13** (1967/1968), 321–334.
- [Ten90] G. Tenenbaum, *Sur un problème d’Erdős et Alladi*, Séminaire de Théorie des Nombres, Paris 1988–1989, Progr. Math., vol. 91, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990, pp. 221–239.
- [Ten08] ———, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, 3ième édition, Échelles, Belin, 2008.
- [Wu96] J. Wu, *A sharpening of effective formulas of Selberg-Delange type for some arithmetic functions on the semigroup G_K* , J. Number Theory **59** (1996), no. 1, 1–19.

INSTITUT ÉLIE CARTAN, UNIVERSITÉ DE LORRAINE, B.P. 70239,

54506 VANDEUVRE-LÈS-NANCY CEDEX, FRANCE

Email address: armand.lachand@univ-lorraine.fr

Email address: gerald.tenenbaum@univ-lorraine.fr