FONCTIONS Δ DE HOOLEY ET APPLICATIONS

Gérald Tenenbaum

1 - Introduction

Posons pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel u

$$\Delta(n,u) := \text{card}\,\{d : d|n,\ u < \log d \leq u+1\}$$

et

$$\Delta(n) := \max_{u \in \mathbb{R}} \Delta(n,u).$$

Dans les années 30, Erdös a conjecturé sur la base d'un argument probabiliste heuristique que l'on a

$$(1) \qquad \Delta(n) > 1, \qquad (\text{p.p.})$$

où, ici et dans la suite, la mention p.p. signifie que la relation ainsi désignée a lieu pour un ensemble d'entiers de densité unité. Erdös a établi en 1948 que la suite des entiers n satisfaisant (1) possède effectivement une densité naturelle, mais sa méthode n'en permettait pas le calcul. Ce n'est finalement qu'en 1983 que la conjecture a été confirmée [17]. On possède aujourd'hui un encadrement relativement précis de l'ordre normal de $\Delta(n)$:

Théorème 1 (Maier-Tenenbaum 1984 - 1985). On a

$$(2) \qquad (\log_2 n)^{\gamma} < \Delta(n) < \psi(n) \log_2 n, \qquad (\text{p.p.})$$

pour toute constante $\gamma < -\log 2/\log(1-1/\log 3) = 0{,}28754\ldots$, et toute fonction $\psi(n)$ tendant vers l'infini.

Nous notons $\log_k$ la k-ième itérée de la fonction log.

Le Théorème 1, qui contient la conjecture d'Erdös (1), a été présenté en 1984 dans le cadre de ce Séminaire par Deshouillers. Un schéma de sa démonstration et de celle de résultats adjacents figure dans le compte rendu de Deshouillers et l'auteur (1983-84).

Nous conjecturons que la borne supérieure de (2) est optimale et, plus précisément, que la fonction $\Delta(n)/\log_2 n$ possède une mesure de répartition. Un corollaire immédiat de cette conjecture est la validité de l'encadrement

$$(3) \qquad \frac{\log_2 n}{\psi(n)} < \Delta(n) < \psi(n)\log_2 n, \qquad (\text{p.p.}).$$

Désignons par $\{p_j(n) : 1 \leq j \leq \omega(n)\}$ la suite croissante des facteurs premiers distincts de l'entier n. Un théorème bien connu d'Erdös (1946) énonce que

$$(4) \qquad \log p_j(n) = \exp\{j + O_\varepsilon(\psi(n) j^{\frac{1}{2}+\varepsilon})\}, \quad (1 \leq j \leq \omega(n)), \qquad (\text{p.p.})$$

pour tout $\varepsilon > 0$ et toute fonction $\psi(n) \to \infty$. C'est un fait remarquable que la conjecture (1) est fausse dans le modèle heuristique obtenu en annulant (ou en réduisant suffisamment) les termes restes de (4). En effet l'ensemble des valeurs de $\log d$, $d|n$, tendrait alors vers

$$\{\sum_{j=1}^{\omega(n)} \varepsilon_j e^j : \varepsilon_j = 0,1 \ (1 \leq j \leq \omega(n))\}$$

qui est manifestement ordonné lexicographiquement et dont la distance minimale de deux éléments est $e^2 - e > 1$. On peut en fait utiliser (4) pour montrer que, si l'on désigne par $\{d_j(n) : 1 \leq j \leq \tau(n)\}$ la suite croissante des diviseurs de n, alors

$$(5) \qquad \log d_j(n) = j^{\alpha+o(1)}, \quad (\psi(n) < j \leq \tau(n)), \qquad (\text{p.p.})$$

avec $\alpha = 1/\log 2 > 1$. Cela explique en partie pourquoi la conjecture d'Erdös est un problème difficile : c'est parce que le modèle usuel de la croissance exponentielle itérée des facteurs premiers <u>n'est pas exact</u> que la conclusion n'est pas en défaut.

En 1979, Hooley a montré que la valeur moyenne de $\Delta(n)$, <u>i.e.</u> l'ordre de grandeur de fonction sommatoire

$$S(x) := \sum_{n \leq x} \Delta(n),$$

est riche d'implications dans des branches variées de l'Arithmétique. Il établit la majoration

$$(6) \qquad S(x) \ll x(\log x)^{4/\pi - 1}$$

avec, entre autres, les conséquences suivantes.

<u>Théorème 2</u> (Hooley, 1979).

(i) Soit $\nu(x)$ le nombre des entiers n'excédant pas x et qui peuvent s'écrire comme somme d'un carré et de deux bicarrés. Alors on a

$$\nu(x) > x(\log x)^{1-4/\pi-\varepsilon}, \quad (x > x_0(\varepsilon)).$$

(ii) Soit θ un nombre réel irrationnel et ξ un nombre réel quelconque. Alors l'inéquation

$$(7) \qquad \|\theta n^2 - \xi\| < n^{-\frac{1}{2}}(\log n)^{2/\pi - \frac{1}{2} + \varepsilon}$$

possède, pour tout $\varepsilon > 0$, une infinité de solutions entières n.

L'assertion (i) précise la minoration antérieurement connue $x^{1-\varepsilon}$. Au vu de la majoration triviale $\nu(x) \ll x$, cela représente une contraction appréciable de l'intervalle d'incertitude pour $\nu(x)$.

Le point (ii) améliore un résultat de Heilbronn (1948). On conjecture que le membre de gauche de (7) est $O(n^{\varepsilon-1})$ pour une infinité d'entiers n et Friedlander a récemment présenté une preuve conditionnelle de cette hypothèse [7].

Pour d'autre applications, Hooley introduit des généralisations de $\Delta(n)$. Etant donné un entier $r \geq 2$, il pose

$$\Delta_r(n) := \max_{u_1,\ldots,u_{r-1}} \operatorname{card}\{d_1,\ldots,d_{r-1} : d_1 \ldots d_{r-1} | n, \ u_i < \log d_i < u_i + 1 \ (1 \leq i < r)\}$$

et

$$S_r(x) := \sum_{n \leq x} \Delta_r(n) .$$

Hooley annonce dans [16] la majoration

$$(8) \qquad S_r(x) \ll_r x(\log x)^{\sqrt{r}-1}, \qquad (r \geq 2).$$

Comme conséquence du cas $r = 3$, il établit le résultat suivant.

Théorème 3 (Hooley, 1979).

Soit $R_8(n)$ le nombre de représentations de l'entier n sous forme d'une somme de 8 cubes non négatifs. On a

$$R_8(n) < n^{5/3} (\log n)^{\sqrt{3}-1+\varepsilon}, \qquad (n > n_0(\varepsilon)).$$

L'étude en moyenne des fonctions Δ_r a fait l'objet de plusieurs travaux récents. Les meilleurs résultats actuellement connus sont les suivants :

Théorème 4 (Hall-Tenenbaum, 1982-1985).

Posons $L(u) = \exp \sqrt{u \log u}$, $(u > 1)$. Pour chaque entier $r \geq 2$, il existe une constante α_r telle que l'on ait pour tout $\varepsilon > 0$

$$(9) \qquad x \log_2 x \ll S_r(x) \ll_{\varepsilon,r} x L(\log_2 x)^{\alpha_r+\varepsilon}.$$

En particulier on a

$$(10) \qquad \alpha_r \leq (r-1)\sqrt{\tfrac{1}{2}r(r+2)}\ , \qquad (r \geq 2).$$

La minoration de (9) [11] améliore le théorème d'Erdös énonçant que $S(x)/x \to \infty$ et dont Hooley donne la démonstration dans [16]. La borne supérieure a d'abord été établie par l'auteur [20] dans le cas $r = 2$ et sans donner de majoration explicite pour α_2. Le cas général [13] relève essentiellement de la même méthode, que nous présentons brièvement au paragraphe 3. Notons en particulier l'inégalité $\alpha_2 \leq 2$.

On a pour tout $\varepsilon > 0$

$$L(\log_2 x) \ll_\varepsilon (\log x)^\varepsilon .$$

La majoration de (9) améliore donc (6) ou (8) d'un ordre de grandeur. En intégrant ce résultat à la technique de Hooley, on obtient immédiatement le résultat suivant.

Théorème 2'. Avec les notations du Théorème 2, on a pour tout $\varepsilon > 0$

(i) $\nu(x) > x L(\log_2 x)^{-2-\varepsilon}$

(ii) L'inéquation

$$\|\theta n^2 - \xi\| < n^{-\frac{1}{2}} L(\log_2 n)^{1+\varepsilon}$$

possède une infinité de solutions entières n.

On pourrait également employer le Théorème 4 pour obtenir une amélioration équivalente dans le cadre du Théorème 3. Cependant, en introduisant plusieurs idées nouvelles dans la méthode du cercle, Vaughan [21] a tout récemment obtenu le résultat optimal suivant, dont la majoration du Théorème 4 constitue un ingrédient essentiel.

Théorème 5 (Vaughan, 1985).

Pour $k \geq 3$, posons $s = 2^k$ et désignons par $R_s(n)$ le nombre de représentations de l'entier n comme somme de s puissances k-ièmes non négatives. Alors on a

$$(11) \qquad R_s(n) = \frac{\Gamma(1+1/k)^s}{\Gamma(s/k)} \mathfrak{S}(n) n^{s/k-1} + O_\varepsilon(n^{s/k-1}(\log n)^{-1+\varepsilon})$$

où l'on a posé

$$\mathfrak{S}(n) = \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}} \left(\frac{1}{q}\sum_{m=1}^{q} \exp\{2i\pi \frac{am^k}{q}\}\right)^s e^{-2i\pi an/q} \gg 1 .$$

La formule (11) était connue pour $k \geq 11$ depuis les travaux de Vinogradov datant de la fin des années 30. Le terme d'erreur peut dans ce cas être ramené à $O(n^{s/k-1-\delta})$, où δ est une constante positive. Il est remarquable que le raffinement des techniques mises en oeuvre dans la méthode du cercle soit aujourd'hui parvenu à un degré tel qu'il rende crucial le gain de puissances de logarithmes - et puisse par conséquent bénéficier d'estimations fines du type de (9).

Dans certaines applications, on est amené à considérer les sommes pondérées

$$S_r(x,y) := \sum_{n \leq x} \Delta_r(n)\, y^{\omega(n)} ,$$

où $\omega(n)$ désigne le nombre des facteurs premiers distincts de n. Cela permet, par exemple, de prendre en compte le caractère multiplicatif du comportement asymptotique d'une éventuelle somme intérieure. On peut aussi utiliser les brutales variations de $y^{\omega(n)}$ pour restreindre essentiellement la sommation aux entiers n ayant une quantité prescrite de facteurs premiers. Ainsi, le résultat suivant, prouvé dans [13], implique très facilement que $S_r(x,y)$ est dominée, pour $y<1$, par les entiers ayant $(y+o(1))\log_2 x$ facteurs premiers et, pour $y>1$, par les entiers ayant $(ry+o(1))\log_2 x$ facteurs premiers. Pour $y=1$, un phénomène inhabituel se produit : la distribution des sous-sommes de $S_r(x)=S_r(x,1)$ correspondant aux conditions $\omega(n)=k$ présente apparemment deux pics d'égale importance, aux voisinages de $k=\log_2 x$ et de $k=r\log_2 x$.

Théorème 6 (Hall-Tenenbaum, 1985).

Pour $0<y<1$, on a

$$(12)\qquad S_r(x,y) \ll_r x(\log x)^{y-1}\exp\{\frac{cr\log r}{1-y}(\log_3 x)^2\}.$$

Pour $y\geq 1$, $\varepsilon>0$, on a

$$(13)\qquad S_r(x,y) \ll_{r,y,\varepsilon} x(\log x)^{r(y-1)}L(\log_2 x)^{\alpha_r+\varepsilon}$$

où les constantes α_r satisfont (10).

Les exposants de $\log x$ dans ces majorations sont optimaux, comme le montre la minoration triviale

$$\Delta_r(n) \geq \max(1, \tau_r(n)(\log en)^{-(r-1)}),$$

où $\tau_r(n)$ désigne le nombre de solutions entières de l'équation $n=d_1d_2\ldots d_r$. Pour y assez petit ou assez grand, on peut même supprimer dans (12) et (13) le facteur à croissance lente en $\log x$: cf. Hall [10].

2 - Description approfondie d'une application modèle

Nous nous proposons ici d'exposer plus précisément la méthode de Hooley permettant d'utiliser les majorations de $S(x)$ dans les différents contextes mentionnés précédemment.

Nous porterons spécifiquement notre attention sur le point (i) du Théorème 2, i.e. la minoration du nombre $\nu(x)$ des entiers $n\leq x$ possédant au moins une représentation du type

$$(14)\qquad n=a^2+b^4+c^4, \qquad (a,b,c\geq 0).$$

Ce choix permet de saisir la méthode dans toute sa complexité, mais aussi d'en apprécier les limites : nous verrons en particulier pourquoi elle ne s'applique pas au problème des sommes de trois cubes. Sa mise en oeuvre dans le cadre de l'approximation diophantienne et de la méthode du cercle a été décrite par Deshouillers dans les actes de ce Séminaire [3].

Désignons par $r(n)$ le nombre de solutions en a,b,c de (14). L'inégalité de Cauchy-Schwarz sous la forme

$$(15)\qquad \Big(\sum_{n\leq x} r(n)\Big)^2 \leq \nu(x)\sum_{n\leq x} r(n)^2$$

est la base de toutes les minorations dans les problèmes de ce type lorsque la méthode du cercle n'est pas en cause. Comme on a trivialement

$$\sum_{n\leq x} r(n) \asymp x,$$

il suffit de majorer le second facteur du membre de droite de (15), soit

$$W := \sum_{n\leq x} r(n)^2 = \operatorname{card}\{a,b,c,u,v,w : a^2+b^4+c^4=u^2+v^4+w^4\leq x\}.$$

Le nombre W_1 des solutions telles que $a=u$ satisfait manifestement à

$$(16)\qquad W_1 \ll \sqrt{x}\sum_{n\leq x}\rho(n)^2$$

où $\rho(n)$ est le nombre de solutions de l'équation $n=b^4+c^4$. Par une formule asymptotique due à Greaves [8], on a

$$(17)\qquad \sum_{n\leq x}\rho(n)^2 \ll \sqrt{x}$$

Il est à noter que, si la méthode de Hooley que nous décrivons ici est effectivement applicable pour majorer le membre de gauche de (17), elle ne fournit, en l'état actuel, qu'une majoration du type $O(\sqrt{x}(\log x)^2\mathcal{L}(x))$ où $\mathcal{L}(x)$ est une fonction à croissance lente de $\log x$ (1). C'est donc insuffisant pour obtenir le Théorème 2 (i) ou, a fortiori, le Théorème 2' (i).

Nous pouvons nous restreindre, grâce à (17), au cas où, disons, $a>u$ dans W. Alors $m=a^2-u^2=(a+u)(a-u)$ est produit de deux entiers $\leq 2\sqrt{x}$. Le nombre W_2 de telles solutions satisfait donc

$$W_2 \leq 2 \sum_{1 \leq m \leq x} R(m)T(m)$$

où $R(m)$ est le nombre de solutions de l'équation

$$m = v^4 + w^4 - b^4 - c^4, \qquad (0 \leq v,w,b,c \leq x^{1/4})$$

et où l'on a posé

$$T(m) = \sum_{\substack{dd'=m \\ d,d' \leq 2\sqrt{x}}} 1 \leq \tau(m).$$

Si chacun des diviseurs d,d' comptés dans $T(m)$ est $\leq x^{\frac12}(\log x)^{-\alpha}$, alors $m \leq x(\log x)^{-2\alpha}$. Dans le cas contraire, on a pour $x > x_0(\alpha)$

$$T(m) \leq 2 \sum_{\substack{d \mid m \\ x^{\frac12}(\log x)^{-\alpha} < d \leq 2x^{\frac12}}} 1 \ll \alpha(\log_2 x)\Delta(m).$$

D'où

$$(18) \qquad W_2 \ll_\alpha \sum_{m \leq x(\log x)^{-2\alpha}} R(m)\tau(m) + (\log_2 x) \sum_{m \leq x} R(m)\Delta(m)$$

Posons

$$F(v,w,b,c) = v^4 + w^4 - b^4 - c^4$$

et désignons par $N(d)$ le nombre de solutions distinctes de la congruence

$$F(v,w,b,c) \equiv 0 \pmod d .$$

Alors $N(d)$ est une fonction multiplicative de d et l'on montre classiquement que

$$N(p) = p^3 + O(p^{3/2})$$

- cf. par exemple [1], pp. 15-16. On en déduit facilement par récurrence que

$$N(p^\nu) \ll p^{3\nu} \qquad , \qquad (\nu \geq 1)$$

d'où

$$(19) \qquad N(d) \leq c^{\overline{\omega}(d)} d^3 , \qquad (d \geq 1)$$

où l'on a posé

$$\overline{\omega}(d) = \sum_{p^2 \mid d} 1.$$

La majoration (19) est une composante importante du processus de majoration de W_2. Un ingrédient non moins essentiel est l'inégalité de van der Corput (1939)

$$(20) \qquad \tau(n) \ll_\varepsilon \sum_{\substack{d \mid n \\ d \leq n^\varepsilon}} \tau(d)^{\beta(\varepsilon)} , \qquad (n \geq 1),$$

valable pour tout $\varepsilon > 0$, et dans laquelle on peut choisir $\beta(\varepsilon) = 2^{4/\varepsilon}$.

Cela étant, on a pour tout y, $1 \leq y \leq x$,

$$(21) \qquad \sum_{m \leq y} R(m)\tau(m) = \sum_{\substack{0 \leq v,w,b,c \leq x^{\frac14} \\ F(v,w,b,c) \leq y}} \tau(F(v,w,b,c))$$

$$\ll \sum_{d \leq y^{\frac14}} \tau(d)^{\beta(\frac14)} \sum_{\substack{0 \leq v,w,b,c \leq x^{\frac14} \\ F(v,w,b,c) \leq y \\ F(v,w,b,c) \equiv 0 \pmod d}} 1$$

$$\ll \sum_{d \leq y^{\frac14}} \tau(d)^{\beta(')} N(d)\left(\frac{x^{\frac14}}{d} + 1\right)^3 \left(\frac{y^{\frac14}}{d} + 1\right)$$

$$\ll x^{3/4} y^{\frac14} (\log 2y)^\gamma ,$$

avec $\gamma = 2^{\beta(\frac14)}$. En choisissant $\alpha = 2\gamma$, on obtient donc que le premier terme du membre de droite de (18) est $O(x)$.

Il reste à majorer

$$(22) \qquad Z := \sum_{m \leq x} R(m)\Delta(m) \leq \sum_{v,w,b,c \leq x^{\frac14}} \Delta(F(v,w,b,c)).$$

On emploie à cette fin une méthode de crible. Notons respectivement s,t un entier générique dont tous les facteurs premiers sont $\leq$ ou $>$ à z. Ainsi chaque entier m se décompose canoniquement sous la forme $m = st$. On choisit $z = \exp\{\eta \log x/\log_2 x\}$, où $\eta > 0$ sera fixé ultérieurement, et l'on scinde la somme Z en deux parties, Z_1 et Z_2, correspondant aux conditions supplémentaires $s > x^{1/10}$ et $s \leq x^{1/10}$.

Si m est compté dans Z_1, on a

$$\Omega(m) \geq \Omega(s) \geq \left(\frac{1}{10\eta}\right) \log_2 x$$

d'où

$$\tau(m) \leq \tau(m)\, e^{\Omega(m)/2\beta}\, (\log x)^{-1/20\eta\beta}$$

$$\ll \sum_{\substack{d \leq m^{1/10} \\ d \mid m}} \tau(d)^{\beta}\, e^{\Omega(d)/2}\, (\log x)^{-1/20\eta\beta}$$

où l'on a posé $\beta = \beta(1/10)$ et où la dernière inégalité découle d'une généralisation facile de (20). En majorant $\Delta(m)$ par $\tau(m)$, on en déduit, comme dans (21), l'existence d'une constante γ_1 telle que

$$Z_1 \ll x\,(\log x)^{\gamma_1 - 1/20\eta\beta}.$$

En choisissant η assez petit, on obtient donc

$$Z_1 \ll x.$$

On traite Z_2 en utilisant l'inégalité triviale $\Delta(st) \leq \Delta(s)\tau(t)$ et (20) avec $n = t$, $\varepsilon = 1/10$. Il vient

$$Z_2 \leq \sum_{s \leq x^{1/10}} \Delta(s) \sum_{\substack{v,w,b,c \leq x^{\frac14} \\ F(v,w,b,c) = st}} \sum_{\substack{t_1 \mid t \\ t_1 \leq x^{1/10}}} \tau(t_1)^{\beta}$$

$$\leq \sum_{s \leq x^{1/10}} \Delta(s) \sum_{t_1 \leq x^{1/10}} \tau(t_1)^{\beta} \sum_{\substack{v,w,b,c \leq x^{\frac14} \\ F(v,w,b,c) \equiv 0\,(st_1) \\ p \mid F(v,w,b,c) \Rightarrow p > z \text{ ou } p \mid s}} 1$$

Le crible de Selberg (cf. [9; Theorem 4.1, p. 133]) permet de majorer la somme intérieure par

$$O\left(\frac{x\, N(st_1)}{s^3 \varphi(s) t_1^4} \cdot \frac{1}{\log z}\right)$$

d'où finalement grâce à (19)

$$Z_2 \ll \frac{x \log_2 x}{\log x} \sum_{s \leq x} \frac{\Delta(s)}{\varphi(s)}\, C^{\overline{\omega}(s)} \sum_{t_1 \leq x} \frac{\tau(t_1)^{\beta} C^{\overline{\omega}(t_1)}}{t_1}.$$

La somme intérieure est

$$\ll \prod_{z < p \leq x} \left(1 + \frac{2^{\beta}}{p}\right) \ll (\log_2 x)^{\gamma_2}, \qquad (\gamma_2 = 2^{\beta}).$$

En décomposant chaque entier s sous la forme $s = qr^2$, avec $\mu(q)^2 = 1$, on a

$$\sum_{s \leq x} \frac{\Delta(s)}{\varphi(s)}\, C^{\overline{\omega}(s)} \leq \sum_{q \leq x} \mu(q)^2 \frac{\Delta(q)}{\varphi(q)} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\tau(r^2) C^{\omega(r)}}{\varphi(r^2)}$$

$$\ll \sum_{n \leq x} \frac{\Delta(n)}{n} \log_2 x.$$

En regroupant toutes les estimations impliquées, il vient

$$W \ll x (\log_2 x)^{2+\gamma_2} \frac{1}{\log x} \sum_{n \leq x} \frac{\Delta(n)}{n}$$

$$\ll_{\varepsilon} x\, L\, (\log_2 x)^{2+\varepsilon}$$

d'après le Théorème 4, via une intégration par parties. Par (15), cela montre donc

$$\nu(x) \gg_{\varepsilon} x\, L\, (\log_2 x)^{-2-\varepsilon}, \qquad \text{cqfd.}$$

Nous pouvons comprendre maintenant pourquoi la technique précédente ne s'applique pas aux sommes de trois cubes. En effet, alors que dans le contexte du Théorème 2 (i) on majore, pour $m \geq 1$, le nombre de solutions de l'équation $a^2 - u^2 = m$, $a \leq x^{\frac12}$, $u \leq x^{\frac12}$, par $T(m)$ (ce qui fournit essentiellement le bon ordre de grandeur), il faudrait maintenant estimer le nombre des solutions de $a^3 - u^3 = m$, $a \leq x^{1/3}$, $u \leq x^{1/3}$, par

$$T'(m) = \sum_{\substack{dd' = m \\ d \leq 2x^{1/3},\, d' \leq 3x^{2/3}}} 1.$$

Or, on sait [19] que le nombre des entiers $m \leq x$ tels que $T'(m) \neq 0$ vaut

$$x\,(\log x)^{-\delta + o(1)}$$

avec $\delta = 1 - (1 + \log_2 2)/\log 2 = 0{,}08607\ldots$. Le nombre des entiers m en cause n'excédant manifestement pas $x^{2/3}$, il est facile d'imaginer que les conséquences d'une estimation aussi grossière sont largement prohibitives.

3 - Principe de la démonstration du Théorème 4

Par souci de simplicité, nous nous limiterons au cas $r=2$. La méthode consiste à étudier les normes-L^q de la fonction $\Delta(n,u)$ définie au début du paragraphe 1. Posant

$$M_q(n) := \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta(n,u)^q \, du , \qquad (q \geq 1),$$

on établit sans peine l'inégalité

$$\Delta(n) \leq 2(M_q(n))^{1/q}.$$

De plus, l'inégalité triviale

$$\Delta(mn) \leq \Delta(m)\tau(n)$$

permet de ramener l'étude de $S(x)$ à celle de

$$\sum_{n \leq x} \mu(n)^2 \frac{\Delta(n)}{n}$$

ou encore, ce qui revient au même mais conduit à des calculs plus agréables, à celle de la série de Dirichlet

$$D(\sigma) := \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n)^2 \Delta(n) n^{-\sigma},$$

lorsque $\sigma \to 1+$. Nous renvoyons par exemple à [13] pour les détails de cette manipulation.

Le point crucial est l'utilisation de l'identité fonctionnelle

(23) $$\Delta(pm,u) = \Delta(m,u) + \Delta(m,u-\log p) ,$$

qui permet de majorer $M_q(pm)$ en fonction de $M_q(m)$ et d'une somme de produits de convolutions de puissances de $\Delta(m,u)$. Posons

$$L_q(\sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n)^2 \, M_q(n)^{1/q} \, n^{-\sigma}.$$

On a

$$-L_q'(\sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n)^2 M_q(n)^{1/q} n^{-\sigma} \sum_{p|n} \log p \leq \sum_{m=1}^{\infty} \mu(m)^2 m^{-\sigma} \sum_{p} \log p \, M_q(pm)^{1/q} p^{-\sigma}.$$

En exprimant $M_q(pm)$ à l'aide de (23) on peut majorer la somme intérieure en fonction de $M_q(m)$. On parvient ainsi à l'inéquation différentielle

$$-L_q'(\sigma) \leq 2^{1/q} L_q(\sigma)(\sigma-1)^{-1} + Cq \, L_q(\sigma)^{(q-2)/(q-1)} (\sigma-1)^{-1-1/(q-1)-1/q(q-1)}$$

Une solution de l'équation associée est

$$X(\sigma) = \left(\frac{Cq}{1+(1/q)-2^{1/q}}\right)^{q-1} (\sigma-1)^{-1-1/q}$$

et c'est ensuite un simple exercice que de montrer

$$L_q(\sigma) \leq X(\sigma) , \qquad (1 < \sigma \leq 2).$$

Choisissant alors q optimalement en fonction de σ, on obtient

$$D(\sigma) \leq 2L_q(\sigma) \ll_\varepsilon (\sigma-1)^{-1} L\left(\log \frac{1}{\sigma-1}\right)^{2+\varepsilon}$$

d'où l'on déduit l'estimation souhaitée pour $S(x)$.

Note

(1) p. 231 : Puisque a^4+b^4 n'a pas de factorisation rationnelle non triviale, on ne peut introduire de localisation de diviseurs (via une fonction du type $T(n)$) qu'en remplaçant $\sum_{n \leq x} \rho(n)^2$ par $\sum_{n \leq x} \rho_1(n)^2$ où $\rho_1(n) := \text{card}\,\{a,b \leq x^{\frac{1}{4}} : a^4-b^4=n\}$. Or, a^4-b^4 ne possède pas deux facteurs mais trois. Cela implique une perte d'ordre $(\log x)^2$ dans l'estimation de $\sum_{n \leq x} \rho_1(n)\Delta(n)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Z.I. Borevitch et I.R. Chafarevitch.- Théorie des nombres, Gauthier-Villars, Paris (1967).

[2] J.G. van der Corput.- Une inégalité relative au nombre des diviseurs, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 42 (1939), 547-553.

[3] J.-M. Deshouillers.- La "nouvelle technique" de Hooley, Séminaire Delange-Pisot-Poitou 1978-79, exposé n° 5, Belgodère, Paris 1980.

[4] J.-M. Deshouillers et G. Tenenbaum.- Survol de la Théorie probabiliste des nombres et de quelques progrès récents, Séminaire de Théorie des Nombres, Paris 1983-84, Prog. Math., 59 (1985), 49-69.

[5] P. Erdös.- On the distribution function of additive functions, Ann. of Math. 47 (1946), 1-20.

[6] P. Erdös.- On the density of some sequences of integers, Bull. Amer. Math. Soc. 54 (1948), 685-692.

[7] J.B. Friedlander.- $\|n^2\theta\|$, communication orale au Symposium de Théorie analytique des nombres en l'honneur de K.F. Roth, Londres, juillet 1985.

[8] G. Greaves.- On the representation of a number as a sum of two fourth powers, Math. Z. 94 (1966), 223-234.

[9] H. Halberstam et H.-E. Richert.- Sieve Methods, London, New York, San Francisco, Academic Press (1974).

[10] R.R. Hall.- Hooley's Δ_r-functions when r is large, Michigan Math. Journal, à paraître.

[11] R.R. Hall et G. Tenenbaum.- On the average and normal orders of Hooley's Δ-function, J. London Math. Soc. (2) 25 (1982), 392-406.

[12] R.R. Hall et G. Tenenbaum.- The average orders of Hooley's Δ_r-functions, Mathematika 31 (1984), 98-109.

[13] R.R. Hall et G. Tenenbaum.- The average orders of Hooley's Δ_r-functions, II, prépublication.

[14] H.A. Heilbronn.- On the distribution of the sequence $n^2\theta(\text{mod } 1)$, Quart. J. Math. Oxford 19 (1948), 223-234.

[15] C. Hooley.- On the representation of a number as the sum of two cubes, Math. Z. 82 (1963), 259-266.

[16] C. Hooley.- On a new technique and its applications to the theory of numbers, P. London Math. Soc. (3) 38 (1979), 115-151.

[17] H. Maier et G. Tenenbaum.- On the set of divisors of an integer, Invent. Math. 76 (1984), 121-128.

[18] H. Maier et G. Tenenbaum.- On the normal concentration of divisors, J. London Math. Soc., (2) 31 (1985), 393-400.

[19] G. Tenenbaum.- Sur la probabilité qu'un entier possède un diviseur dans un intervalle donné, Compositio Math. 51 (1984), 243-263.

[20] G. Tenenbaum.- Sur la concentration moyenne des diviseurs, Comment. Math. Helvetici, 60 (1985), 411-428.

[21] R.C. Vaughan.- On Waring's Problem I, Communication orale au Symposium de Théorie analytique des nombres en l'honneur de K.F. Roth, Londres, juillet 1985.

G. Tenenbaum
UER Sciences Mathématiques
B.P. 239

54506 Vandoeuvre Cedex

FRANCE

Voir corrigendum page suivante.

Corrigendum

Gérald Tenenbaum

La formule pour $N(p)$ au bas de la page 232 doit être modifiée en

$$N(p) = p^3 + O(p^2).$$

Il faut donc remplacer la majoration (19) par

$$N(d) \leqslant h(d)d^3$$

où h est une fonction multiplicative telle que $h(p) = 1+O(1/p)$, $h(p^\nu) = C$ ($\nu \geqslant 2$). Comme

$$\prod_{p|d}(1 + 1/p) \ll \log_2 2d \qquad (d \geqslant 1),$$

on obtient que la majoration (21) est valable en remplaçant γ par toute constante $\gamma' > \gamma$. Le choix $\alpha = 2\gamma'$ permet alors de poursuivre la démonstration sans changement ultérieur.

Gérald Tenenbaum
Institut Élie Cartan
Université de Lorraine
BP 70239
54506 Vandœuvre Cedex
France

internet : gerald.tenenbaum@univ-lorraine.fr