

Actas del Congreso de teoría de los números (Zarantzy, 1984),  
Universidad del País Vasco (E. Aparicio, C. Calderín, J. C. Peral eds)  
(1989), 79-99

## Une fonction de concentration arithmétique

Gérald Tenenbaum

A la mémoire de Jean Coquet

Dans son fameux mémoire de 1937 sur l'addition des variables aléatoires, Paul Lévy introduit la notion de fonction de concentration. Cela consiste à considérer, pour chaque variable aléatoire  $X$ , les quantités

$$Q(\ell) = Q_X(\ell) = \sup_{x \in \mathbb{R}} \text{Prob}(x < X \leq x + \ell) .$$

Depuis lors, ce concept a été abondamment utilisé par les probabilistes, notamment pour les problèmes de convergence. Une description exhaustive des résultats connus fait l'objet du livre de Hengartner et Theodorescu [14] .

En théorie des nombres, l'étude des fonctions de concentration a été introduite par Erdős, en liaison avec la répartition asymptotique des fonctions additives [1] . De récents développements sont dus à Halász [6] et Ruzsa [19] .

Nous nous intéressons ici à une fonction de concentration d'un autre type, liée à une célèbre conjecture d'Erdős, datant de la fin des années 30, selon laquelle presque tout entier  $n$  possède au moins deux diviseurs  $d, d'$  satisfaisant à

$$d < d' \leq 2d .$$

Soit  $\tau(n)$  le nombre des diviseurs de  $n$  et  $D_n$  la variable aléatoire prenant les valeurs  $\log d$ ,  $d$  divisant  $n$ , avec probabilité uniforme  $1/\tau(n)$ . Désignons par  $Q_n(\ell)$  la fonction de concentration de  $D_n$  : la conjecture d'Erdős peut encore s'énoncer sous la forme

$$(1) \quad \tau(n) Q_n(\log 2) > 1 \quad , \quad \text{p.p.}$$

Ici et dans tout l'article, la mention p.p. (presque partout) indique que la relation ainsi qualifiée a lieu sur un ensemble d'entiers de densité unité.

On peut déjà remarquer que la fonction  $Q_n(x)$  est bien dans l'esprit de la définition de Paul Lévy : à la décomposition de  $n$  en produit de facteurs premiers correspond l'écriture canonique de  $D_n$  comme somme de variables aléatoires indépendantes

$$(2) \quad D_n = \sum_{p^v \parallel n} D_{p^v} .$$

Nous verrons plus loin qu'il est plus agréable, et parfaitement anodin, de remplacer la constante  $\log 2$  figurant dans (1) par 1. Cela conduit à définir la fonction arithmétique

$$(3) \quad \Delta(n) := \tau(n)Q_n(1) = \max_u \text{card}\{d:d|n, e^u < d \leq e^{u+1}\} .$$

La conjecture d'Erdős, transformée en

$$(4) \quad \Delta(n) > 1 \quad , \quad \text{p.p.} \quad ,$$

pose donc la question de l'ordre normal de la fonction  $\Delta$ , que nous traiterons au § 2 — réservant le § 1 à l'étude de la valeur moyenne.

### 1. Ordres moyens.

Abordée dans [2,18], l'étude de l'ordre moyen de  $\Delta(n)$  s'est enrichie de perspectives nouvelles à la suite de l'important travail de Hooley [15] publié en 1979. L'auteur y montre que la détermination asymptotique de la quantité

$$(5) \quad S(x) := \sum_{n \leq x} \Delta(n)$$

possède une influence drastique sur des questions arithmétiques aussi variées que le problème de Waring, l'approximation diophantienne, ou les sommes d'exponentielles.

De la double inégalité triviale

$$1 \leq \Delta(n) \leq \tau(n) \quad , \quad (n \geq 1) \quad ,$$

on déduit immédiatement l'encadrement

$$(6) \quad [x] \leq S(x) \leq x \log x + O(x) \quad , \quad (x \geq 1) \quad .$$

Il s'avère qu'il n'est pas facile d'améliorer l'une ou l'autre de ces estimations. On peut déduire une majoration non triviale de  $S(x)$  du théorème combinatoire de Sperner.

**Théorème (Sperner).** Soit  $E$  un ensemble à  $k$  éléments. Si  $A_1, A_2, \dots, A_r$  sont des sous-ensembles distincts de  $E$  tels que

$$(7) \quad A_i \not\subset A_j \quad , \quad (i \neq j) \quad ,$$

alors on a 
$$r \leq \binom{k}{\lfloor k/2 \rfloor} .$$

Ce résultat est optimal : lorsque  $n = 2^m$ , les  $\binom{2^m}{m}$  sous-ensembles à  $m$  éléments de  $E$  satisfont (7).

Considérons maintenant un entier sans facteur carré  $n = p_1 \dots p_k$ . A chaque diviseur  $d$  de  $n$  on peut associer le sous-ensemble de  $E = \{1, 2, \dots, k\}$  défini par  $A(d) := \{j : 1 \leq j \leq k, p_j | d\}$ . Alors  $A(d) \subset A(d')$  si, et seulement si,  $d | d'$ . Il s'ensuit que si  $n$  possède  $r$  diviseurs  $d_1 < d_2 < \dots < d_r$  dans un intervalle du type  $]u, 2u]$ , on a  $A(d_i) \not\subset A(d_j)$  dès que  $i \neq j$  puisque  $d_i \not\subset d_j$ . Cela implique

$$r \leq \binom{k}{\lfloor k/2 \rfloor} \leq 2^k k^{-\frac{1}{2}}$$

d'où, puisque  $e < 2^2$ ,

$$(8) \quad \Delta(n) \leq 2\tau(n)\omega(n)^{-\frac{1}{2}} \quad (n \geq 1, \mu(n)^2 = 1)$$

où  $\omega(n)$  désigne le nombre des facteurs premiers distincts de  $n$  et  $\mu$  la fonction de Möbius.

En utilisant (8) et l'inégalité triviale

$$(9) \quad \Delta(ab) \leq \Delta(a) \tau(b) \quad , \quad (a, b \geq 1) \quad ,$$

on obtient facilement l'estimation

$$(10) \quad S(x) \ll x \log x (\log \log x)^{-\frac{1}{2}},$$

qui représente une première amélioration significative de la borne supérieure de (6).

Il est remarquable que l'inégalité générale de Kolmogorov-Rogozin concernant les fonctions de concentration fournisse également l'inégalité (8) — peut-être avec une constante différente — mais sans aucune restriction sur  $n$ . On a en effet (cf. [14])

$$(11) \quad Q_X(1) \ll \left\{ \sum_{i=1}^k (1 - Q_{X_i}(1)) \right\}^{-\frac{1}{2}}$$

pour toute somme  $X = X_1 + \dots + X_k$  de variables aléatoires indépendantes. La validité de (8) à une constante multiplicative près découle donc de (2) puisque  $Q_{p^v}(1) = 1/(v+1)$  pour tout nombre premier  $p > 2$  et tout entier  $v \geq 1$ .

On peut poursuivre l'étude de  $S(x)$  en utilisant un autre résultat général de la théorie des fonctions de concentration.

**Lemme.** Soit  $F$  une fonction de répartition,  $Q = \sup_{u \in \mathbb{R}} (F(u+1) - F(u))$  sa concentration en  $\ell = 1$  et

$$\varphi(\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\theta u} dF(u)$$

sa fonction caractéristique. Alors on a

$$(12) \quad \frac{1}{7} \int_{-1}^1 |\varphi(\theta)|^2 d\theta \leq Q \leq 2 \int_{-1}^1 |\varphi(\theta)| d\theta .$$

**Démonstration.** La majoration découle du calcul suivant :

$$\begin{aligned} F(u + \frac{1}{2}) - F(u - \frac{1}{2}) &= \int_{u-\frac{1}{2}}^{u+\frac{1}{2}} dF(v) \leq 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{\sin((u-v)/2)}{(u-v)/2} \right)^2 dF(v) \\ &= 2 \int_{-1}^1 (1-|\theta|) \varphi(\theta) e^{iu\theta} d\theta . \end{aligned}$$

Pour obtenir la minoration, on écrit

$$\begin{aligned} Q &= Q \int_{-\infty}^{+\infty} (F(u + \frac{1}{2}) - F(u - \frac{1}{2})) du \geq \int_{-\infty}^{+\infty} (F(u + \frac{1}{2}) - F(u - \frac{1}{2}))^2 du \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin(\theta/2)}{\theta/2}\right)^2 |\varphi(\theta)|^2 d\theta \geq \frac{2(\sin(\frac{1}{2}))^2}{\pi} \int_{-1}^1 |\varphi(\theta)|^2 d\theta \end{aligned}$$

où la seconde égalité découle, par la formule de Parseval, de l'identité

$$F(u + \frac{1}{2}) - F(u - \frac{1}{2}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iu\theta} \left(\frac{\sin(\theta/2)}{\theta/2}\right) \varphi(\theta) d\theta .$$

R.R. Hall, qui a simplifié la preuve de cette minoration, a également établi que les deux inégalités (12) sont, aux constantes près, optimales.

Pour chaque entier  $n \geq 1$ , la fonction de répartition (non normalisée)

$$F_n(u) := \text{card}\{d : d|n, d \leq e^u\}$$

contient toute l'information concernant la répartition des diviseurs de  $n$ . Il en va naturellement de même de sa transformée de Fourier-Stieltjes

$$(13) \quad \tau(n, \theta) = \sum_{d|n} d^{i\theta} = \prod_{p^v || n} \sum_{j=0}^v p^{ij\theta}$$

qui a été définie et étudiée dès 1975 par Hall [7]. Lorsque  $F = F_n$ , on a  $Q = \Delta(n)$  et (12) s'écrit

$$(14) \quad (7\tau(n))^{-1} \int_{-1}^1 |\tau(n, \theta)|^2 d\theta \leq \Delta(n) \leq 2 \int_{-1}^1 |\tau(n, \theta)| d\theta .$$

En sommant cette double inégalité pour  $n \leq x$  et en appliquant, à quelques détails près, les estimations de Hall pour  $\sum_{n \leq x} |\tau(n, \theta)|^\lambda$ ,  $\lambda = 1$  ou  $2$ , on obtient

$$(15) \quad x \log \log x \ll S(x) \ll x(\log x)^{4/\pi-1} .$$

Cela représente un net progrès sur (6) et (10). La borne supérieure est exactement celle de Hooley dans [15]. Quoique présentée dans un contexte plus complexe, sa méthode est identique. La borne inférieure a été établie pour la

première fois dans [10] ; l'inégalité de gauche dans (14) y apparaît sous la forme essentiellement équivalente

$$\sum_{k=-1}^{\infty} \Delta(n,k)^2 \leq \Delta(n)\tau(n)$$

où l'on a posé

$$(16) \quad \Delta(n,u) = \text{card}\{d : d|n, e^u < d \leq e^{u+1}\} .$$

Cela précise un résultat d'Erdős présenté dans [2] et [15]

$$(17) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x^{-1} S(x) = +\infty .$$

La démonstration originale de (17) était fondée sur l'estimation d'Erdős

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow \infty} x^{-1} H(u,x) = 0$$

où l'on a posé

$$H(u,x) := \text{card}\{n \leq x : \exists d, d|n, e^u < d \leq e^{u+1}\} .$$

On sait aujourd'hui (cf. [21]) que l'on a uniformément pour  $3 \leq u \leq \frac{1}{2} \log x$

$$(18) \quad H(u,x) = x u^{-\delta} \exp\{O(\sqrt{\log u \cdot \log \log u})\}$$

avec

$$(19) \quad \delta = 1 - (1 + \log \log 2) / \log 2 = 0,08607\dots .$$

Cependant, il ne semble pas que cela permette de déduire par la même méthode une version effective de (17) meilleure que

$$S(x) \gg x \log \log \log x . .$$

Il est très délicat de se faire une idée, même heuristique, du véritable ordre de croissance de  $S(x)$  . Dans [15] , Hooley exprime la conviction que

$S(x)$  se comporte comme  $x(\log x)^A$  où  $A$  est une constante excédée de peu par  $(4/\pi)-1$ . Nous verrons que cette supposition est erronée. En fait, certains arguments exposés au § 2 portent à conjecturer que la minoration de (15) fournit l'ordre exact de  $S(x)$ .

Une méthode entièrement différente pour majorer  $S(x)$  consiste à adopter une approche élémentaire, fondée sur l'inégalité

$$(20) \quad \Delta(n)^2 \leq \sum_{dd'|n}^* \Delta(n/dd') \quad , \quad (n \geq 1) \quad ,$$

où, ici et dans la suite, l'astérisque indique que les diviseurs  $d, d'$  sont astreints à la condition supplémentaire  $|\log(d'/d)| \leq 1 = (d, d')$ . Pour établir (20), supposons que  $u$  est un point où  $\Delta(n, u)$  atteint son maximum  $\Delta(n)$  et que  $n$  possède  $k = \Delta(n)$  diviseurs  $d_1 < d_2 < \dots < d_k$  dans  $]e^u, e^{u+1}]$ . Alors les  $\Delta(n)^2$  rapports  $d_i/d_j$  ( $1 \leq i, j \leq k$ ), sont tous de la forme  $md/md'$ , avec  $(d, d') = 1$  (donc  $dd'|n$ ),  $|\log(d'/d)| \leq 1$  et  $m \in ]e^u/d, e^{u+1}/d]$ . Comme  $m|(n/d, n/d') = n/dd'$ , il y a, pour chaque couple  $\{d, d'\}$  admissible, au plus  $\Delta(n/dd')$  valeurs possibles de  $m$ . Cela implique bien (20).

Par sommation sur  $n \leq x$ , on obtient

$$(21) \quad T(x) := \sum_{n \leq x} \Delta(n)^2 \leq \sum_{dd' \leq x}^* S(x/dd') \quad .$$

De plus, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$(22) \quad S(x)^2 \leq xT(x) \quad .$$

Ainsi, une majoration pour  $S(x)$  fournit, par (21), une majoration pour  $T(x)$  qui, à son tour, implique par (22) une nouvelle majoration pour  $S(x)$ . On voit ici l'ébauche d'un procédé itératif qui, inefficace en l'état, devient pertinent lorsqu'on pondère la somme  $S(x)$  par un coefficient arithmétique privilégiant les entiers  $n$  ayant une quantité prescrite de facteurs premiers. Nous utilisons la fonction  $y^{\omega(n)}$ ,  $y > 0$ , "centrée" sur les entiers pour lesquels  $\omega(n) \sim y \log \log n$ . Ce facteur de poids possède des variations suffisamment brutales en fonction de  $\omega(n)$  mais sa nature multiplicative

permet de ne pas trop perburber les calculs. On introduit ainsi naturellement le nombre  $\alpha(y)$ , égal à l'infimum des réels  $\xi$  tels que

$$(23) \quad S(x,y) := \sum_{n \leq x} \Delta(n) y^{\omega(n)} \ll_{\xi} x(\log x)^{\xi} .$$

La méthode itérative décrite plus haut fournit une inéquation fonctionnelle pour  $\alpha(y)$ . Dans [10], on obtient en particulier

$$(24) \quad \alpha(y) \leq y-1 \quad , \quad (0 < y \leq \frac{1}{2})$$

et

$$\alpha(1) \leq 0,23454 .$$

Cela représente un gain non négligeable sur la majoration de (15) dans laquelle figurait l'exposant  $(4/\pi)-1 = 0,27323\dots$ .

L'inégalité (24) est en fait une égalité. Cela découle de la formule asymptotique classique, prouvée par intégration complexe,

$$\sum_{n \leq x} y^{\omega(n)} \sim C(y) x(\log x)^{y-1} \quad , \quad (y > 0)$$

où  $C(y)$  est une constante positive. Comme  $\Delta(n) \geq 1$ , il vient

$$(25) \quad \alpha(y) \geq y-1 \quad , \quad (y > 0) .$$

Dans un travail ultérieur en commun avec R.R. Hall [11] nous combinons la méthode itérative et la technique de Fourier pour obtenir l'amélioration

$$\alpha(1) < 0,21969 .$$

Ce résultat, maintenant caduque, ne doit sa place dans cet exposé que parce qu'il repose sur une curieuse inégalité améliorant la majoration de (14). Dans le cas d'un entier  $n$  sans facteur carré, elle s'écrit

$$(26) \quad \Delta(n) \leq 2 \int_{-1}^1 \prod_{p|n} |\lambda p^{-i\theta} + 1 + p^{i\theta} + \lambda p^{2i\theta}| d\theta$$

où  $\lambda$  est un paramètre  $\geq 0$  arbitraire. On a en effet

$$(27) \quad 2 \int_{-1}^1 (1-|\theta|) e^{iu\theta} \prod_{p|n} (\lambda p^{i\theta} + 1 + p^{i\theta} + \lambda p^{2i\theta}) d\theta$$

$$= 2 \sum_{dkh|n} \lambda^{\omega(kh)} \left\{ \frac{\sin((\log(dh^2/k)-u)/2)}{(\log(dh^2/k)-u)/2} \right\}^2 .$$

Pour  $u$  convenablement choisi, la contribution correspondant à  $k = h = 1$  est  $\geq \Delta(n)$ , alors que celle des autres valeurs est  $\geq 0$ .

Il peut paraître au premier abord surprenant que (26) puisse fournir une quelconque amélioration sur (14). Une analyse plus approfondie révèle que, même si la présence du paramètre  $\lambda$  augmente sensiblement le membre de droite de (27), elle atténue la perte de précision provoquée en prenant le module de l'intégrande dans le membre de gauche.

C'est finalement une troisième technique, également élémentaire, qui nous a permis de déterminer exactement la fonction  $\alpha(y)$ . Nous avons montré dans [22] que  $\alpha(1) = 0$  et, par la même méthode, nous avons obtenu dans l'article [12], en commun avec R.R. Hall, la formule exacte

$$(28) \quad \alpha(y) = y-1 + \max(0, y-1), \quad (y > 0) .$$

Plus précisément, dans le cas  $y = 1$ , nous établissons dans [13] la majoration

$$(29) \quad S(x) \ll_{\varepsilon} x L(\log x)^{\sqrt{2+\varepsilon}}$$

où l'on a posé

$$L(u) := \exp\{\sqrt{\log u \log \log u}\}, \quad (u \geq 3) .$$

Ces résultats sont fondés sur l'estimation, par double induction, des normes  $-L^q$

$$m_q(n_k) = \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta(n_k, u)^q du \right)^{1/q}$$

où  $n_k$  désigne le produit des  $k$  plus petits facteurs premiers distincts de  $n$ .

Lorsque  $q$  est suffisamment grand, ces normes constituent une approximation acceptable de  $\Delta(n_k)$ , et partant de  $\Delta(n)$ , si le paramètre entier  $k$  est lui-même convenablement choisi. Le point de départ de la méthode est l'identité

$$\Delta(n_{k+1}, u) = \Delta(n_k, u) + \Delta(n_k, u - \log p_{k+1})$$

où  $p_{k+1}$  désigne le  $(k+1)$ -ième facteur premier de  $n$ . En développant  $\Delta(n_{k+1}, u)^q$  par la formule du binôme, on exprime  $m_q(n_{k+1})$  au moyen de  $m_q(n_k)$  et de convolées, prises au point  $\log p_{k+1}$  de puissances de  $\Delta(n_k, u)$ . Grâce aux propriétés du comportement en moyenne de  $p_k = p_k(n)$ , on peut montrer que la contribution de ces convolées est, pour certaines valeurs relatives de  $k$  et  $q$ , assimilable à un terme reste. Les détails techniques sont de nature voisine de ceux qui apparaissent dans le processus de majoration de l'ordre normal de  $\Delta(n)$ , que nous décrivons à la section suivante. Plusieurs variantes apparaissent, selon les intervalles de variation de  $y$  (cf. [13] Chapitres 6 et 7). L'un des points-clefs, implicite ou explicite, est l'inégalité

$$\sum'_{n \leq x} \mu(n)^2 (\log p_k(n))^{-t} \leq c_1 x e^{c_2 t} (1+t)^{-k},$$

valable pour  $t \geq 0$  et  $1 \leq k \ll \log \log x$ , et où l'apostrophe indique que la sommation est restreinte aux entiers  $n$  possédant au moins  $k$  facteurs premiers dans l'intervalle  $[2, \exp \{ \frac{\log x}{\log \log x} \}]$ .

La majoration (29) est utilisable telle quelle dans la plupart des applications développées par Hooley. On obtient ainsi, par exemple, que l'inégalité

$$\|n^{2\theta} - \gamma\| < L(\log n)^{\sqrt{2}/2+\epsilon} n^{-1/2}, \quad (\epsilon > 0)$$

possède pour tout irrationnel  $\theta$  et tout réel  $\gamma$  une infinité de solutions entières  $n$  — la notation  $\|x\|$  désignant, comme c'est l'usage, la distance de  $x$  à l'ensemble des entiers. Ce résultat est la forme la plus précise actuellement connue d'un théorème de Heilbronn.

Pour plus de détails concernant les applications, et en particulier la définition des fonctions  $\Delta_r(n)$  généralisant  $\Delta(n)$ , nous renvoyons le lecteur

à l'article original de Hooley [15], aux divers travaux subséquents [8, 11, 12, 13], et au survol [23].

## 2. Ordres normaux

Ainsi que nous l'avons mentionné dans l'introduction, la question de l'ordre normal de  $\Delta(n)$  est directement liée à la conjecture d'Erdős

$$(30) \quad \Delta(n) > 1 \quad , \quad \text{p.p.}$$

On peut également introduire la fonction

$$E(n) := \min\{\log(d'/d) : d, d' | n, d < d'\} \quad .$$

La relation (30) équivaut alors à

$$(31) \quad E(n) < 1 \quad , \quad \text{p.p.}$$

Alors qu'il paraît difficile de deviner a priori l'ordre normal de  $\Delta(n)$ , un argument heuristique simple, qui constitue aussi la motivation initiale d'Erdős, fournit une conjecture raisonnable quant à l'ordre normal de  $E(n)$ .

Le nombre des rapports distincts  $d'/d$ ,  $d|n$ ,  $d'|n$  vaut pour chaque  $n$

$$u(n) = \prod_{p^v || n} (2v+1) \quad .$$

Il satisfait donc à la double inégalité

$$3^{\omega(n)} \leq u(n) \leq 3^{\Omega(n)}$$

où  $\omega(n)$  (resp.  $\Omega(n)$ ) désigne le nombre des facteurs premiers de  $n$  comptés sans (resp. avec) leur ordre de multiplicité. D'après le théorème de Hardy et Ramanujan, on a

$$\omega(n), \Omega(n) \sim \log \log n \quad , \quad \text{p.p.}$$

En supposant l'équirépartition asymptotique des nombres  $\log(d'/d)$ , on obtient donc que chaque sous-intervalle de longueur  $\lambda$  de  $[-\log n, \log n]$  contient

une quote-part de

$$\lambda u(n)/(2 \log n) = \lambda (\log n)^{\log 3 - 1 + o(1)} \quad , \quad \text{p.p.} \quad ,$$

valeurs distinctes  $\log(d'/d)$  . Cela suggère

$$(32) \quad E(n) = (\log n)^{1 - \log 3 + o(1)} \quad , \quad \text{p.p.}$$

Un raisonnement similaire concernant  $\Delta(n)$  serait immédiatement en défaut. En effet, si l'on note

$$1 = d_1 < d_2 < \dots < d_{\tau} = n$$

la suite ordonnée des diviseurs de  $n$  , l'identité

$$\sum_{1 \leq i < \tau(n)} \log(d_{i+1}/d_i) = \log n$$

et l'estimation classique

$$(33) \quad \tau(n) = (\log n)^{\log 2 + o(1)} \quad , \quad \text{p.p.}$$

montrent que la valeur moyenne des  $\log(d_{i+1}/d_i)$  est  $(\log n)^{1 - \log 2 + o(1)}$  . Cela suggère que  $\Delta(n) = 1$  sauf lorsque la distribution est, au moins localement, très éloignée de l'équirépartition.

Deux résultats récents viennent d'ailleurs corroborer l'idée que les  $\log(d_i)$  sont très irrégulièrement répartis. Pour toute fonction  $\xi(n) \rightarrow \infty$ , on a d'une part [5, 13]

$$(34) \quad \text{card}\{i : 1 \leq i < \tau(n) , d_i | d_{i+1}\} \geq \tau(n)/\xi(n) \quad , \quad \text{p.p.}$$

et d'autre part [20]

$$(35) \quad \max_{1 \leq i < \tau(n)} \log(d_{i+1}/d_i) \geq \xi(n)^{-1} \log n \quad , \quad \text{p.p.}$$

La minoration (34) découle d'une conjecture de Montgomery établie dans [5]. Elle doit être interprétée à la lumière du fait suivant : la relation  $d_i | d_{i+1}$  implique  $d_{i+1} = P^-(n) d_i$  où  $P^-(n)$  est le plus petit facteur premier de  $n$ . Comme on a par la théorie du Crible

$$(36) \quad 2 \leq P^-(n) \leq \log \xi(n) \quad , \quad p.p. ,$$

la relation (34) implique

$$(37) \quad \text{card}\{i : 1 \leq i < \tau(n), 2 \leq d_{i+1}/d_i \leq \xi(n)\} \geq \xi(n)^{-1} \tau(n) \quad , \quad p.p. .$$

La formule (32) a été récemment démontrée, en deux étapes. La minoration correspondante a été obtenue par Erdős et Hall en 1979 (cf. [4]) et la majoration par Maier et l'auteur en 1983 (cf. [16]). Plus précisément, si l'on désigne par  $\varepsilon(n)$  la fonction définie pour  $n > 1$  par

$$E(n) = (\log n)^{1 - \log 3 + \varepsilon(n)}$$

on a

$$(38) \quad - C \sqrt{\frac{\log \log \log \log n}{\log \log n}} < \varepsilon(n) < \frac{\xi(n)}{\sqrt{\log \log n}} \quad , \quad p.p. .$$

pour toute constante  $C > \sqrt{2} \cdot \log 3$  et toute fonction  $\xi(n)$  tendant vers l'infini.

La majoration de (38) implique la conjecture d'Erdős (30). La validité de (32), en regard des constats d'irrégularité (34) ou (35), constitue un nouvel exemple, dans le cadre des diviseurs d'un entier normal, du principe selon lequel un ensemble-différence (i.e. du type  $A - A = \{a - a' : a, a' \in A\}$ ) possède une structure beaucoup plus régulière que l'ensemble dont il est issu. Cela explique peut-être pourquoi l'ordre normal de  $\Delta(n)$  n'est pas connu avec une précision aussi satisfaisante que celui de  $E(n)$ . Le meilleur encadrement actuellement connu est (cf. [13, 16, 17])

$$(39) \quad (\log \log n)^\gamma < \Delta(n) < \xi(n) \log \log n \quad , \quad p.p. .$$

pour toute constante  $\gamma < (\log 2)/\log(\log 3/(\log 3-1)) = 0,28754\dots$ , et toute fonction  $\xi(n) \rightarrow \infty$ .

Nous allons d'abord donner un bref aperçu de la manière dont on peut établir la conjecture d'Erdős sous sa forme initiale (30) ou (31).

Etant donné un réel  $x \geq 3$ , nous posons

$$L = L(x) = \left[ \frac{1}{2} \log \log x \right], \quad M = M(x) = \left[ \frac{3}{4} \log \log x \right],$$

et nous introduisons pour chaque  $k$ ,  $L \leq k \leq M$ , et chaque  $n \leq x$  le produit partiel

$$(40) \quad n_k := \prod_{p|n, p \leq \exp \exp k} p.$$

Il est à noter que  $n_k$  est une fonction multiplicative de  $n$ . D'après un théorème d'Erdős [1,3], on a

$$(41) \quad \omega(n_k) \sim k, \quad (L \leq k \leq M), \quad \text{p.p.x}$$

où la mention p.p.x signifie que la relation ainsi désignée est satisfaite pour au moins  $x + o(x)$  entiers  $n \leq x$ .

Nous voulons établir que

$$(42) \quad E(n_M) < 1, \quad \text{p.p.x}$$

A cette fin, nous introduisons la fonction de répartition

$$G_k(z) := \sum_{\substack{d d' | n_k \\ \log d' / d \leq z}} 1$$

et l'ensemble de ses points d'accroissement local

$$\mathcal{L}(n_k) := \{z \in \mathbb{R} : G_k(z+1) > G_k(z-1)\}.$$

On pose enfin

$$\lambda(n_k) = \text{mes } \mathcal{L}(n_k) = \int \mathcal{L}(n_k) dz .$$

Il est facile de vérifier que la transformée de Fourier-Stieltjes de  $G_k$  vaut

$$S(n_k; \theta) := \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iz\theta} dG_k(z) = \prod_{p|n_k} (1+2\cos(\theta \log p))$$

et une double application de la formule de Parseval, semblable à celle du Lemme du § 1, conduit à l'évaluation

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (G_k(z+1) - G_k(z-1))^2 dz \leq 8\pi \int_{-1}^1 S(\theta; n_k)^2 d\theta .$$

Comme le support de  $G_k(z+1) - G_k(z-1)$  est  $\mathcal{L}(n_k)$ , on peut écrire l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$(2 \cdot 3^{\omega(n_k)})^2 = \left( \int_{-\infty}^{+\infty} (G_k(z+1) - G_k(z-1)) dz \right)^2 \leq \lambda(n_k) \int_{-\infty}^{+\infty} (G_k(z+1) - G_k(z-1))^2 dz$$

d'où

$$(43) \quad \lambda(n_k) \geq 3^{2\omega(n_k)} \left( 2\pi \int_{-1}^1 S(n_k; \theta)^2 d\theta \right)^{-1} .$$

Une technique de moyenne pondérée permet maintenant d'obtenir une majoration valable p.p.x de la dernière intégrale (cf. [13,17]).

On obtient

$$(44) \quad \lambda(n_k) > e^k \xi(x)^{-1} , \quad (L \leq k \leq M) , \quad \text{p.p.x}$$

pour toute fonction  $\xi(x) \rightarrow \infty$ .

Soit  $N_k$  le nombre des entiers  $n \leq x$  tels que  $E(n_k) \geq 1$ . Par un résultat classique de crible, on peut montrer que la proportion des entiers  $n$  comptés dans  $N_k$  qui possèdent deux facteurs premiers  $p, q$  tels que

$$(45) \quad \left\{ \begin{array}{l} e^k < \log p , \log q \leq e^{k+2} \\ \log q - \log p \in \mathcal{L}(n_k) \end{array} \right.$$

est

$$\gg \sum_{k < \log \log p \leq k+l} \frac{1}{p} \log q \in \log p + \mathcal{L}(n_k) \frac{1}{q} .$$

Une simple application du théorème des nombres premiers permet, grâce à (44), de minorer cette somme double par  $c \xi(x)^{-3}$  dès que  $l \geq 1 + [\log(4\xi(x))]$ . Or, la seconde des relations (45) implique l'existence d'un couple  $\{d, d'\}$ ,  $dd' | n_k$ , tel que  $|\log(pd'/qd)| \leq 1$ . Donc les entiers satisfaisant (45) ne sont pas comptés dans  $N_{k+l}$  et il découle de ce qui précède que

$$N_k - N_{k+l} \geq c N_k \xi(x)^{-3}$$

c'est-à-dire

$$N_{k+l} \leq N_k (1 - c \xi(x)^{-3}) .$$

En itérant cette inégalité  $[(M-L)/l]$  ( $\sim (\log \log x)/\log \xi(x)$ ) fois, on obtient que  $N_M = o(x)$  si  $\xi(x)$  tend vers l'infini assez lentement. Cela établit (42).

Nous avons donc prouvé que  $\Delta(n) \geq 2$ , p.p. . Pour minorer plus finement l'ordre normal de  $\Delta(n)$ , on choisit un paramètre  $\rho > 1$  et on cherche à appliquer la méthode précédente à

$$n(j) := \prod_{\rho^j < \log \log p \leq \rho^{j+1}} p .$$

L'argument heuristique exposé plus haut nous laisse espérer une conclusion positive dès que  $3^{\omega(n(j))} > \log(n(j))$ . Or on a

$$\omega(n(j)) \sim \rho^{j(\rho-1)} , \quad \log \log n(j) \sim \rho^{j+1} , \quad \text{p.p.}$$

Il faut donc choisir  $\rho$  tel que  $(\rho-1)\log 3 > \rho$ , i.e.

$$\rho > (1 - 1/\log 3)^{-1} .$$

On obtient alors effectivement pour chaque  $j$ ,  $\sqrt{J} < j < J$ , avec  $J = [(\log \log \log x)/\log \rho]$ , l'existence d'un couple  $\{d_j(1), d_j(2)\}$  de diviseurs de  $n(j)$  tels que  $(d_j(1), d_j(2)) = 1$  et  $|\log(d_j(1)/d_j(2))| \leq 1$ .

Considérons alors tous les produits

$$\prod_{\sqrt{J} < j \leq J} d_j(\varepsilon_j) \quad , \quad (\varepsilon_j = 1 \text{ ou } 2) \quad .$$

Il y a deux choix possibles pour chacun des  $r = J - [\sqrt{J}]$  facteurs, donc cette construction fournit  $2^r$  diviseurs de  $n$  dans un intervalle du type  $]e^u, e^{u+r}]$ . Par le principe des tiroirs, il vient

$$\Delta(n) \geq 2^r/r \quad , \quad \text{p.p.x.}$$

Cela implique la minoration de (39). Il est clair que cette construction n'est pas optimale, et il serait très intéressant de savoir comment on pourrait l'améliorer.

La méthode utilisée pour établir la majoration de (39) est élémentaire. Elle repose sur l'étude des moments

$$M_q(n) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta(n,u)^q du$$

où  $\Delta(n,u)$  est défini par (16). La relation fonctionnelle évidente

$$\Delta(mp,u) \leq \Delta(m,u) + \Delta(m,u-\log p) \quad , \quad (m,p \geq 1)$$

(où  $p$  désigne un nombre premier) conduit à l'inégalité

$$M_q(mp) \leq 2M_q(m) + \sum_{j=1}^{q-1} \binom{q}{j} \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta(m,u)^j \Delta(m,u-\log p)^{q-j} du \quad .$$

Sans entrer plus avant dans les détails, signalons que l'idée essentielle de la démonstration consiste à intégrer cette majoration sur le "cylindre" constitué des entiers  $n$  dont le produit  $n_k$  des  $k$  plus petits facteurs premiers est fixé alors que le  $(k+1)$ -ième facteur  $p_{k+1}$  et tous les autres facteurs premiers varient. On aboutit ainsi à la formule de récurrence

$$M_q(n_{k+1}) \leq 2M_q(n_k) + e^{-(1-\varepsilon)k} \sum_{j=1}^{q-1} \binom{q}{j} M_j(n_k) M_{q-j}(n_k)$$

$(1 \leq q \leq k) \quad , \quad \text{p.p.}$

valable pour  $\xi(n) < k \leq \omega(n) - \xi(n)$ . Le passage du rang  $k$  au rang  $(k+1)$  nécessite une information intrinsèquement nouvelle — une majoration de  $M_{k+1}(n_k)$  en fonction de  $M_k(n_k)$ .

On a trivialement

$$(46) \quad M_{k+1}(n_k) \leq \Delta(n_k) M_k(n_k)$$

et l'on peut aussi établir facilement que

$$(47) \quad \Delta(n) \leq 2M_q(n)^{1/q}, \quad (n, q \geq 1).$$

Cependant, (46) et (47) sont insuffisantes pour permettre la preuve du résultat annoncé. Par la technique d'Erdős et Hall dans [4], on établit d'abord que pour les valeurs de  $k$  considérés, on a

$$E(n_k) > (e/3)^{(1+\varepsilon)k}, \quad \text{p.p.}$$

En utilisant alors le fait que  $\Delta(n_k, u) \geq \Delta(n_k) - 1$  sur un intervalle en  $u$  de longueur au moins  $E(n_k)$ , il vient

$$M_k(n_k) \geq (e/3)^{(1+\varepsilon)k} \{\Delta(n_k) - 1\}^k$$

c'est-à-dire

$$\Delta(n_k) \leq 1 + (3/e)^{(1+\varepsilon)} M_k(n_k)^{1/k}.$$

Cette amélioration de (47) dans le cas  $n = n_k$  rend alors possible la mise en œuvre de la récurrence en  $k$  et  $q$  à fins d'établir

$$M_q(n_k) \leq 2^{\delta k} q!, \quad \text{p.p.}$$

pour tout  $\delta > 1$ , et uniformément pour  $\xi(n) < k \leq \omega(n) - \xi(n)$ ,  $1 \leq q \leq k$ . En élevant à la puissance  $1/k$  et en faisant appel à (9), on obtient alors facilement la majoration annoncée.

La même technique est applicable aux entiers tels que  $\omega(n) \sim c \log \log n$ , tant que  $c < 1/\log 2$ . Cela porte à conjecturer que la somme  $S(x) = \sum_{n \leq x} \Delta(n)$  est dominée par les entiers "normaux" (i.e. tels que  $\omega(n) \sim \log \log n$ ) et que l'on a en fait

$$S(x) \sim Ax \log \log x$$

pour une constante positive convenable  $A$ .

Pour terminer, signalons deux résultats nouveaux que nous avons pu obtenir par la méthode de [16].

Soit  $D(x)$  le nombre des entiers  $n \leq x$  tels que  $\Delta(n) = 1$ . Nous avons vu que  $D(x) = o(x)$ . Une version quantitative de ce résultat est évidemment souhaitable, et dans cette direction, nous avons pu montrer

$$(48) \quad D(x) \ll_{\varepsilon} x (\log \log x)^{-\beta + \varepsilon}$$

avec

$$\beta = 1 - (1 + \log \log 3) / \log 3 = 0,00415\dots$$

Il serait intéressant de savoir si  $D(x)/x$  se comporte en fait comme une puissance de  $\log \log x$  ou une puissance de  $\log x$ .

Soit  $\alpha$  un paramètre réel,  $\alpha \leq 1$ , la fonction de Hall

$$U(n, \alpha) := \text{card}\{d, d' | n : (d, d') = 1, |\log d'/d| \leq (\log n)^{\alpha}\}$$

est un bon indicateur de la régularité de l'ensemble des différences  $\log d'/d$  ( $d, d' | n$ ). Par exemple  $\Delta(n) > 1$  si et seulement si  $U(n, 0) > 1$  et  $U(n, \alpha) > 1$  équivaut à  $E(n) < (\log n)^{\alpha}$ . Dans [9], nous avons donné une majoration de l'ordre normal de  $U(n, \alpha)$  pour  $0 \leq \alpha \leq 1$  et conjecturé son optimalité. Nous pouvons aujourd'hui confirmer cette hypothèse : on a pour tout  $\alpha \leq 1$

$$U(n, \alpha) = 1 + (\log n)^{\log 3 - 1 + \alpha + o(1)}, \quad \text{p.p.}$$

Ce résultat constitue une validation radicale du raisonnement heuristique présenté, au début de cette section, à l'appui de la conjecture d'Erdős.

### Bibliographie

- [1] P. Erdős, On the distribution function of additive functions, Ann. of Math. 47 (1946), 1-20.
- [2] P. Erdős, Problem 218 and Solution, Can. Math. Bull. 17 (1974), 621-622.
- [3] P. Erdős, Some unconventional problems in number theory, Astérisque 61 (1979), 73-82.
- [4] P. Erdős et R.R. Hall, The propinquity of divisors, Bull. London Math. Soc. 11 (1979), 304-307.
- [5] P. Erdős et G. Tenenbaum, Sur la structure de la suite des diviseurs d'un entier, Ann. Inst. Fourier 31 (1981), 17-37.
- [6] G. Halász, On the distribution of additive arithmetical functions, Acta Arith. 27 (1975), 143-152.
- [7] R.R. Hall, Sums of imaginary powers of the divisors of an integer, J. London Math. (2) 9 (1975), 571-580.
- [8] R.R. Hall, Hooley's  $\Delta_r$ -functions when  $r$  is large, Michigan Math. J. 33 (1986), 95-104.
- [9] R.R. Hall et G. Tenenbaum, Sur la proximité des diviseurs, Recent Progress in Analytic Number Theory (H. Halberstam and C. Hooley eds) Academic Press, vol. 1 (1981), 103-113.
- [10] R.R. Hall et G. Tenenbaum, On the average and normal orders of Hooley's  $\Delta$ -function, J. London Math. Soc. (2) 25 (1982), 392-406.
- [11] R.R. Hall et G. Tenenbaum, The average orders of Hooley's  $\Delta_r$ -functions, Mathematika 31 (1984), 98-109.
- [12] R.R. Hall et G. Tenenbaum, The average orders of Hooley's  $\Delta_r$ -functions, II, Compositio Math. 60 (1986), 163-186.

- [13] R.R. Hall et G. Tenenbaum, Divisors, Cambridge University Press, à paraître.
- [14] W. Hengartner et R. Theodorescu, Concentration functions, Academic Press (1973).
- [15] C. Hooley, On a new technique and its applications to the theory of numbers, Proc. London Math. Soc (3) 38 (1979), 115-151.
- [16] H. Maier et G. Tenenbaum, On the set of divisors of an integer, Invent. Math. 76 (1984), 121-128.
- [17] H. Maier et G. Tenenbaum, On the normal concentration of divisors, J. London Math. Soc. (2) 31 (1985), 393-400.
- [18] J.-L. Nicolas, Quelques méthodes élémentaires en théorie des nombres, Sém. Bordeaux (1974/75), n° 13.
- [19] I.Z. Rusza, On the concentration of additive functions, Acta Mathematica Acad. Sci. Hung. 36 (1980), 215-232.
- [20] G. Tenenbaum, Lois de répartition des diviseurs, 5, J. London Math. Soc. (2) 20 (1979), 165-176.
- [21] G. Tenenbaum, Sur la probabilité qu'un entier possède un diviseur dans un intervalle donné, Compositio Math. 51 (1984), 243-263.
- [22] G. Tenenbaum, Sur la concentration moyenne des diviseurs, Comment. Math. Helvetici 60 (1985), 411-428.
- [23] G. Tenenbaum, Fonctions  $\Delta$  de Hooley et applications, Séminaire de Théorie des Nombres Paris 1984-85, Prog. Math. 63 (1986), 225-239.

Université de Nancy I  
Département de Mathématiques  
B.P. 239  
54506 Vandœuvre Cedex (France)

Recibido, Agosto 1984