

# Sur la densité divisorielle d'une suite d'entiers

GÉRALD TENENBAUM\*

*U.E.R. de Mathématiques et d'Informatique,  
Université de Bordeaux I,  
F 33405 Talence Cedex, France*

*Communicated by H. Halberstam*

Received November 3, 1980

The condition  $\sum_{k < x} |\sum_{n < x} (\chi(n) - z) / 4^{\Omega(n)} n| = o(\sqrt{\log x})$ , where  $\Omega(n)$  stands for the number of prime factors, counted according to multiplicity, of the positive integer  $n$ , is shown to be necessary and sufficient for the integer sequence with characteristic function  $\chi$  to have divisor density  $z$ , i.e.,  $\sum_{d|n} \chi(d) = (z + o(1)) \sum_{d|n} 1$  when  $n \rightarrow \infty$  if one neglects a sequence of asymptotic density zero. Among the applications, the following result, first conjectured by R. R. Hall, is proved: given any positive  $\alpha$ , we have, for almost all  $n$ 's, and uniformly with respect to  $z$  in  $[0, 1]$ ,

$$\text{card}\{d: d|n, (\log d)^\alpha < z \pmod{1}\} = (z + o(1)) \sum_{d|n} 1.$$

## 1. INTRODUCTION

Soit  $n$  un nombre entier et  $\tau(n)$  le nombre de ses diviseurs; pour toute suite d'entiers strictement croissante  $\mathcal{A}$ , on désigne par  $\tau(n, \mathcal{A})$  le nombre des diviseurs de  $n$  qui appartiennent à  $\mathcal{A}$ . Dans [7], Hall introduit la définition suivante:

**DÉFINITION 1 (HALL).** *On dit qu'une suite d'entiers  $\mathcal{A}$  possède une densité divisorielle  $z$ , et l'on note  $D\mathcal{A} = z$ , s'il existe une suite d'entiers  $\mathcal{L}$  de densité asymptotique 1 telle que l'on ait*

$$\tau(n, \mathcal{A}) \sim z\tau(n)$$

*lorsque  $n$  tend vers l'infini en restant dans  $\mathcal{L}$ .*

Contrairement à ce que laisserait supposer la relation asymptotique

$$\sum_{n < x} \tau(n, \mathcal{A}) \sim x \sum_{\substack{d < x \\ d \in \mathcal{A}}} 1/d,$$

\* Laboratoire associé au CNRS n° 226.

qui a lieu dès que la série  $\sum_{d \in \mathcal{A}} 1/d$  diverge, les notions de densités divisorielle et logarithmique sont assez indépendantes: Hall construit, pour tout couple  $(z, w)$  de  $[0, 1]^2$  une suite  $\mathcal{A}$  satisfaisant à  $D\mathcal{A} = z$  et  $\delta\mathcal{A} = w$  (ici et dans la suite,  $\delta$  désigne la densité logarithmique). Il prouve cependant le résultat suivant, conjecturé par Erdős, qui établit l'existence d'un lien entre les deux densités pour une suite constituée par des blocs suffisamment longs d'entiers consécutifs.

**THÉORÈME A (HALL [7]).** *Soit  $\{b_j\}$  une suite de nombres réels satisfaisant à  $b_{j+1} \geq cb_j$  pour tout  $j$ , avec  $c > 1$ , et soit  $\mathcal{A}$  la suite d'entiers définie par*

$$\mathcal{A} = \{d: \exists j: b_{2j} \leq d < b_{2j+1}\}.$$

*Alors, si  $\delta\mathcal{A} = z$ , on a aussi  $D\mathcal{A} = z$ .*

La notion de densité divisorielle est également liée à celle d'équirépartition modulo 1 sur les diviseurs.

**DÉFINITION 2 (HALL [6]).** *Pour toute fonction arithmétique réelle  $f$ , on pose*

$$\Delta(n; f) := \sup_{0 \leq u < v \leq 1} \left| \frac{1}{\tau(n)} \text{card} \{d: d|n, f(d) \in [u, v] \pmod{1}\} - (v - u) \right|.$$

*On dit que  $f$  est équirépartie (mod 1) sur les diviseurs s'il existe une suite d'entiers  $\mathcal{X}$  de densité asymptotique 1 telle que l'on ait:*

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n \in \mathcal{X}}} \Delta(n; f) = 0. \quad (1)$$

Considérons, pour  $z$  dans  $[0, 1]$ , la suite

$$\mathcal{A}(z; f) := \{d: f(d) < z \pmod{1}\}.$$

Il est clair que (1) implique

$$D\mathcal{A}(z; f) = z; \quad (2)$$

réciroquement, si (2) a lieu pour tout  $z$  de  $[0, 1]$  alors  $f$  est équirépartie (mod 1) sur les diviseurs (Hall [8]).

La méthode naturelle pour établir des résultats du type (1) consiste à majorer les sommes de Weyl

$$\sigma_r(n, f) := \sum_{d|n} e(vf(d)),$$

où  $v \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  et où  $e(x) := e^{2i\pi x}$ , et à appliquer l'inégalité d'Erdős–Turán. Lorsque  $f$  est additive, les sommes de Weyl sont multiplicatives et cela représente un atout précieux dans la conduite des calculs. La fonction  $f(d) = \log d$  a été étudiée dans [2, 4, 5]; elle est équirépartie et l'on a pour tout  $\lambda < (\log \pi / \log 2) - 1 = 0.651\dots$  et presque tout entier  $n$

$$A(n; \log) \leq \tau(n)^{-\lambda}.$$

Le cas des fonctions  $f$  non additives est plus délicat. On peut utiliser le Théorème A pour montrer par exemple que  $(\log d)^\alpha$  et  $(\log \log d)^\beta$  sont équiréparties respectivement pour  $0 < \alpha < 1$  et  $\beta > 1$  (cf. [7]). La restriction concernant  $\beta$  est nécessaire mais Hall a conjecturé qu'il suffit de supposer  $\alpha > 0$  (cf. [6]). Dans [8], il a montré que l'on peut prendre  $0 < \alpha < 1 + \log 2$ .

Nous avons cherché une condition nécessaire et suffisante simple pour  $D\mathcal{C} = z$  s'exprimant sous forme de propriétés de moyennes. Bien entendu, le critère obtenu permet également de prouver des résultats d'équirépartition.

**THÉORÈME 1.** *Soit  $\mathcal{C}$  une suite d'entiers de fonction caractéristique  $\chi$ . Alors  $D\mathcal{C} = z$  si, et seulement si, on a pour  $x$  infini*

$$\sum_{k < x} \left| \sum_{\substack{n < x \\ n \equiv 0 \pmod{k}}} \frac{\chi(n) - z}{4^{\Omega(n)} n} \right| = o(\sqrt{\log x}) \tag{3}$$

où  $\Omega(n)$  désigne le nombre des facteurs premiers d'un entier  $n$ , comptés avec leur ordre de multiplicité.

*Remarques.* (i) Ce résultat permet de vérifier directement certaines propriétés connues, comme le fait que les progressions arithmétiques distinctes de  $\mathbb{N}$  ou la suite des entiers sans facteur carré ne possèdent pas de densité divisorielle ou encore que, si  $\psi(n) \rightarrow \infty$ , la suite des entiers  $n$  satisfaisant à

$$|\Omega(n) - \frac{1}{2} \log \log n| \leq \psi(n) \sqrt{\log \log n} \tag{4}$$

est de densité divisorielle unité (cf. [3, 7]). Pour ce dernier point il suffit de constater que  $D\mathcal{C} = 1$  si et seulement si

$$\sum_{n < x} \frac{\chi(n) \tau(n)}{4^{\Omega(n)} n} \sim \sum_{n < x} \frac{\tau(n)}{4^{\Omega(n)} n}$$

et la conclusion découle du fait classique que la somme de droite est dominée par les entiers  $n$  satisfaisant à (4).

(ii) On peut aussi donner une nouvelle démonstration du Théorème 2 de [8].

Soit  $f$  une fonction multiplicative satisfaisant à

(a)  $f(p) = 1 + O(p^{-\sigma})$ , où  $\sigma$  est un réel positif fixé, uniformément pour tout nombre premier  $p$ ,

(b)  $0 \leq f(p^r) \leq \theta_1 \theta_2^r$ , où  $\theta_1$  et  $\theta_2$  sont deux réels positifs,  $\theta_2 < 2$ , uniformément pour tout nombre premier  $p$  et tout entier non négatif  $v$ .

Alors la condition (3) implique

$$\sum_{n < x} \frac{f(n) \chi(n)}{n \tau(n)} = (z + o(1)) \sum_{n < x} \frac{f(n)}{n \tau(n)}.$$

En effet, si l'on définit une fonction multiplicative  $g$  par l'identité

$$\sum_{d|n} g(d) = \frac{f(n) 4^{\Omega(n)}}{\tau(n)}$$

on constate facilement que  $g$  satisfait (a) et que, pour tout nombre premier  $p$  et tout entier non négatif  $v$ , on a

$$g(p^r) \leq \theta_1' (4\theta_2)^r.$$

De plus,

$$\begin{aligned} S(x) &:= \sum_{n < x} \frac{(\chi(n) - z) f(n)}{n \tau(n)} = \sum_{n < x} \frac{\chi(n) - z}{4^{\Omega(n)} n} \sum_{k|n} g(k) \\ &= \sum_{k < x} g(k) \sum_{\substack{n < x \\ n \equiv 0 \pmod{k}}} \frac{\chi(n) - z}{4^{\Omega(n)} n} = \sum_{k < x} g(k) A_k(x), \quad \text{disons.} \end{aligned}$$

Maintenant, si  $r$  est un réel  $> 1$  tel que  $(4\theta_2)^r < 8$  et si  $s = r/(r-1)$ , l'inégalité de Hölder implique

$$|S(x)| \leq \left\{ \sum_{k < x} |g(k)|^r |A_k(x)| \right\}^{1/r} \left\{ \sum_{k < x} |A_k(x)| \right\}^{1/s};$$

la relation (3) montre que le second facteur est  $o(\log x)^{1/2s}$  et l'estimation triviale  $|A_k(x)| \ll ((\log x)^{1/4} / 4^{\Omega(k)} k)$ , valable uniformément pour  $k < x$ , permet de majorer le second par

$$\begin{aligned}
 & (\log x)^{1/4r} \left\{ \sum_{k < x} \frac{|g(k)|^r}{4^{\Omega(k)} k} \right\}^{1/r} \\
 & \ll (\log x)^{1/4r} \left\{ \prod_{p < x} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{|g(p^v)|^r}{(4p)^v} \right\}^{1/r} \ll (\log x)^{1/2r},
 \end{aligned}$$

d'où la conclusion souhaitée.

L'emploi du Théorème 1 permet de généraliser le Théorème A de la manière suivante:

**THÉORÈME 2.** *Soit  $\{b_j\}$  une suite croissante de nombres réels satisfaisant pour  $x$  infini à*

$$\text{card} \{j: b_j < x\} \ll (\log x)^\alpha, \tag{5}$$

où  $\alpha$  est une constante positive, et soit  $\mathcal{A}$  la suite d'entiers définie par

$$\mathcal{A} = \{d: \exists j: b_{2j} \leq d < b_{2j+1}\}.$$

Alors, si  $\delta\mathcal{A} = z$ , on a aussi  $D\mathcal{A} = z$ .

**COROLLAIRE 1.** *Soit  $f$  une fonction dérivable réelle, définie sur  $\mathbb{R}^+$ . Si  $f'(x) \rightarrow 0$  et si la suite  $\{f(n): n = 1, 2, \dots\}$  est équirépartie (mod 1), alors la fonction  $f((\log d)^\alpha)$  est, pour tout réel positif  $\alpha$ , équirépartie (mod 1) sur les diviseurs.*

**COROLLAIRE 2.** *Soit  $g$  une fonction dérivable réelle, définie sur  $\mathbb{R}^+$ . Si  $|xg'(x) \log x| \rightarrow +\infty$  et s'il existe un réel  $\alpha > -1$  tel que la fonction  $xg'(x)(\log x)^{-\alpha}$  soit monotone et tende vers 0 à l'infini, alors  $g$  est équirépartie (mod 1) sur les diviseurs.*

L'un ou l'autre de ces corollaires implique l'équirépartition de  $(\log d)^\alpha$  pour tout  $\alpha > 0$ .

Le théorème suivant donne un critère d'équirépartition (mod 1) sur les diviseurs qui est l'analogie du critère de Weyl dans le cadre de l'équirépartition classique.

**THÉORÈME 3.** *Une condition nécessaire et suffisante pour que  $f$  soit équirépartie (mod 1) sur les diviseurs est que l'on ait, pour tout entier non nul  $v$  et  $x$  infini,*

$$\sum_{k < x} \left| \sum_{\substack{n < x \\ n \equiv 0 \pmod{k}}} \frac{e(vf(n))}{4^{\Omega(n)} n} \right| = o(\sqrt{\log x}). \tag{6}$$

Je tiens à remercier ici Richard R. Hall qui m'a éclairé, au cours de nombreuses et amicales discussions, sur les notions nouvelles qui sont à la base de ce travail.

2. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1

Établissons d'abord la nécessité de la condition (3). Si  $D\mathcal{A} = z$ , on a

$$\sum_{n < x} \left( \frac{\tau(n, \mathcal{A})}{\tau(n)} - z \right)^2 = o(x)$$

d'où l'on déduit

$$\sum_{n < x} \frac{(\tau(n, \mathcal{A}) - z\tau(n))^2}{4^{\Omega(n)}} = o(x)$$

et donc, grâce à une intégration par parties,

$$f(\sigma) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\tau(n, \mathcal{A}) - z\tau(n))^2}{4^{\Omega(n)} n^{1+\sigma}} = o(\sigma^{-1}) \tag{7}$$

lorsque  $\sigma \rightarrow 0+$ . Posons:

$$g(\sigma) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^{\Omega(n)} n^{1+\sigma}};$$

on a pour  $\sigma > 0$

$$\begin{aligned} f(\sigma) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^{\Omega(n)} n^{1+\sigma}} \sum_{d, d' | n} (\chi(d) - z)(\chi(d') - z) \\ &= g(\sigma) \sum_{d, d'=1}^{\infty} \frac{(\chi(d) - z)(\chi(d') - z)}{4^{\Omega((d, d'))} [d, d']^{1+\sigma}} \end{aligned}$$

(où  $[d, d']$  désigne le plus petit commun multiple à  $d$  et  $d'$ )

$$\begin{aligned} &= g(\sigma) \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{\substack{m, m'=1 \\ (m, m')=1}}^{\infty} \frac{(\chi(mt) - z)(\chi(m't) - z)}{4^{\Omega(mm't)} (mm't)^{1+\sigma}} \\ &= g(\sigma) \sum_{t, t', d, d'=1}^{\infty} \frac{(\chi(dtt') - z)(\chi(d'tt') - z) \mu(t')}{4^{\Omega(dd'tt'^2)} (dd'tt'^2)^{1+\sigma}} \\ &= g(\sigma) \sum_{t, t'=1}^{\infty} \frac{\mu(t')}{4^{\Omega(tt'^2)} (tt'^2)^{1+\sigma}} \left| \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\chi(dtt') - z}{4^{\Omega(d)} d^{1+\sigma}} \right|^2 \\ &= g(\sigma) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda(k, \sigma)}{4^{\Omega(k)} k^{1+\sigma}} f_k(\sigma)^2, \tag{8} \end{aligned}$$

où l'on a posé

$$\lambda(k, \sigma) := \sum_{t'|k} \frac{\mu(t')}{4^{\Omega(t')} t'^{1+\sigma}} = \prod_{p|k} \left(1 - \frac{1}{4p^{1+\sigma}}\right),$$

et

$$f_k(\sigma) := \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\chi(kd) - z}{4^{\Omega(d)} d^{1+\sigma}}.$$

Comme on a

$$g(\sigma) = (c + o(1)) \sigma^{-1/4}$$

avec  $c = \prod_{p \text{ premier}} (1 - 1/4p)^{-1} (1 - 1/p)^{1/4}$ , on déduit de (7) et (8)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda(k, \sigma)}{4^{\Omega(k)} k^{1+\sigma}} f_k(\sigma)^2 = o(\sigma^{-3/4}). \tag{9}$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a de plus

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|f_k(\sigma)|}{4^{\Omega(k)} k^{1+\sigma}} \\ & \leq \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda(k, \sigma) 4^{\Omega(k)} k^{1+\sigma}} \right)^{1/2} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda(k, \sigma) f_k(\sigma)^2}{4^{\Omega(k)} k^{1+\sigma}} \right)^{1/2}; \end{aligned}$$

en remarquant que le premier facteur de cette majoration est  $\ll \sigma^{-1/8}$  lorsque  $\sigma \rightarrow 0+$ , on voit que (9) implique

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|f_k(\sigma)|}{4^{\Omega(k)} k^{1+\sigma}} = o(\sigma^{-1/2}). \tag{10}$$

Posons

$$A_k(u) := \sum_{\substack{n < e^u \\ n \equiv 0 \pmod{k}}} \frac{\chi(n) - z}{4^{\Omega(n)} n};$$

la condition (10) s'écrit encore

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \int_0^{\infty} e^{-\sigma u} dA_k(u) \right| = o(\sigma^{-1/2}). \tag{11}$$

Cela implique, pour tout entier  $j \geq 0$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \int_0^{\infty} e^{-j\sigma u} e^{-\sigma u} dA_k(u) \right| = o(\sigma^{-1/2})$$

et donc, pour tout polynôme  $P$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \int_0^{\infty} P(e^{-\sigma u}) e^{-\sigma u} dA_k(u) \right| = o(\sigma^{-1/2}). \quad (12)$$

En tenant compte de la majoration entre mesures de Stieltjes

$$\sum_{k=1}^{\infty} |dA_k(u)| \leq d \left\{ \sum_{n < e^u} \frac{\tau(n)}{4^{\Omega(n)} n} \right\}, \quad (13)$$

nous allons déduire de (12) que toute fonction  $h$  continue sur  $[0, 1]$  satisfait à

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \int_0^{\infty} h(e^{-\sigma u}) e^{-\sigma u} dA_k(u) \right| = o(\sigma^{-1/2}). \quad (14)$$

En effet, pour tout réel positif  $\varepsilon$ , il existe un polynôme  $P$  satisfaisant à  $\max_{0 \leq v \leq 1} |P(v) - h(v)| \leq \varepsilon$ ; le membre de gauche de (14) est donc majoré par

$$\begin{aligned} & o(\sigma^{-1/2}) + \varepsilon \int_0^{\infty} e^{-\sigma u} \sum_{k=1}^{\infty} |dA_k(u)| \\ & \leq o(\sigma^{-1/2}) + \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{4^{\Omega(n)} n^{1+\sigma}} \leq o(\sigma^{-1/2}) + c\varepsilon \sigma^{-1/2}, \end{aligned}$$

où  $c$  est une constante absolue. Cela implique bien (14). Maintenant en approchant la fonction  $h_0$ , définie sur  $[0, 1]$  par

$$\begin{aligned} h_0(v) &= 0 & \text{si } 0 \leq v < e^{-1}, \\ &= 1/v & \text{si } e^{-1} \leq v \leq 1, \end{aligned}$$

par une suite de fonctions continues et en utilisant encore (13) on obtient que (14) est réalisée pour  $h = h_0$ , soit

$$\sum_{k=1}^{\infty} |A_k(1/\sigma)| = o(\sigma^{-1/2}),$$

ce qui est exactement (3).

Réciproquement, supposons (3) satisfaite. On a

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \left| \int_0^{\infty} e^{-\sigma u} dA_k(u) \right| &= \sigma \sum_{k=1}^{\infty} \left| \int_0^{\infty} e^{-\sigma u} A_k(u) du \right| \\ &\leq \sigma \int_0^{\infty} e^{-\sigma u} \sum_{k=1}^{\infty} |A_k(u)| du = \sigma \int_0^{\infty} e^{-\sigma u} o(\sqrt{u}) du \\ &= o(\sigma^{-1/2}). \end{aligned}$$

La condition (10) est donc satisfaite. Comme on a pour tout  $k \geq 1$   $|f_k(\sigma)| \leq g(\sigma)$  on obtient (9) et finalement, grâce à (8),

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{a(m)}{4^{\Omega(m)} m^{1+\sigma}} = o(\sigma^{-3/4}), \tag{15}$$

où l'on a posé, pour tout entier  $m$ ,

$$a(m) := \sum_{\{d, d'\} = m} (\chi(d) - z)(\chi(d') - z).$$

Comme  $|a(m)| \leq 3^{\Omega(m)}$  pour chaque  $m$ , on déduit de (15) grâce au théorème taubérien de Karamata (cf., par exemple, [11, p. 192])

$$\sum_{m < x} \frac{a(m) + 3^{\Omega(m)}}{4^{\Omega(m)} m} \sim \sum_{m < x} \left(\frac{3}{4}\right)^{\Omega(m)} \frac{1}{m};$$

compte tenu de la relation asymptotique due à Selberg [10]

$$\sum_{n < x} y^{\Omega(n)} = C(y) x (\log 2x)^{y-1} + O(x (\log 2x)^{y-2}) \tag{16}$$

qui est valable pour tout nombre complexe  $y$  de module  $< 2$ , on obtient, après sommation d'Abel dans (16) avec  $y = \frac{3}{4}$ ,

$$\sum_{m < x} \frac{a(m)}{4^{\Omega(m)} m} = o((\log x)^{3/4}). \tag{17}$$

Maintenant, observons que

$$\begin{aligned} \sum_{n < x} \frac{(\tau(n, \mathcal{A}) - z\tau(n))^2}{4^{\Omega(n)}} &= \sum_{m < x} a(m) \sum_{\substack{n < x \\ n \equiv 0 \pmod{m}}} 4^{-\Omega(n)} \\ &= C\left(\frac{1}{4}\right) x \sum_{m < x} \frac{a(m)}{4^{\Omega(m)} m} \left\{ \left(\log \frac{2x}{m}\right)^{-3/4} \right. \\ &\quad \left. + O\left(\left(\log \frac{2x}{m}\right)^{-7/4}\right) \right\} \end{aligned}$$

où, pour la seconde égalité, nous avons utilisé (16) avec  $y = \frac{1}{4}$ . On peut traiter le terme d'erreur en majorant simplement  $|a(m)|$  par  $3^{\Omega(m)}$  et en utilisant (16) avec  $y = \frac{3}{4}$ ; on obtient une quantité  $O(x(\log x)^{-1/4})$ . Posons:

$$A(u) := \sum_{m < u} \frac{a(m)}{4^{\Omega(m)} m} \quad \text{et} \quad J(x) := \int_1^x \left(\log \frac{2x}{u}\right)^{-3/4} dA(u);$$

on a donc

$$\sum_{n < x} \frac{(\tau(n, \mathcal{O}) - z\tau(n))^2}{4^{\Omega(n)}} = C \left( \frac{1}{4} \right) xJ(x) + O(x(\log x)^{-1/4}). \quad (18)$$

Nous allons montrer que  $J(x) = o(1)$  en utilisant non seulement l'hypothèse (17), soit  $A(u) = o((\log u)^{3/4})$ , mais aussi la majoration

$$|dA(u)| \leq d \left\{ \sum_{m < u} \left( \frac{3}{4} \right)^{\Omega(m)} \frac{1}{m} \right\}. \quad (19)$$

Soit  $\varepsilon$  un nombre réel positif; décomposons  $J(x)$  en une somme

$$J(x) = J_1(x) + J_2(x)$$

où  $J_1(x)$  et  $J_2(x)$  correspondent respectivement aux intervalles d'intégration  $|1, x^{1-\varepsilon}|$  et  $|x^{1-\varepsilon}, x|$ .

D'une part, grâce à (19),

$$\begin{aligned} |J_2(x)| &\leq \sum_{x^{1-\varepsilon} \leq m < x} \left( \log \frac{2x}{m} \right)^{-3/4} \left( \frac{3}{4} \right)^{\Omega(m)} \frac{1}{m} \\ &\ll \frac{1}{x} \sum_{x^{1-\varepsilon} \leq m < x} \left( \frac{3}{4} \right)^{\Omega(m)} \sum_{n < x/m} (\log 2n)^{-3/4} \\ &\leq \frac{1}{x} \sum_{n < x^\varepsilon} (\log 2n)^{-3/4} \sum_{m < x/n} \left( \frac{3}{4} \right)^{\Omega(m)} \\ &\ll \sum_{n < x^\varepsilon} (\log 2n)^{-3/4} \left( \log \frac{2x}{n} \right)^{-1/4} \frac{1}{n} \\ &\ll \int_1^{x^\varepsilon} (\log u)^{-3/4} \left( \log \frac{x}{u} \right)^{-1/4} \frac{du}{u} \\ &= \int_0^\varepsilon v^{-3/4} (1-v)^{-1/4} dv \ll \varepsilon^{1/4}. \end{aligned}$$

D'autre part, soit  $\{c_k\}$  la suite de réels définie par l'identité

$$\frac{1}{(1-w)^{3/4}} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k w^k$$

et soit  $K = K(\varepsilon)$  un entier tel que l'on ait

$$\sum_{k > K} |c_k| (1-\varepsilon)^k \leq \varepsilon;$$

on a

$$\begin{aligned}
 J_1(x) &= \sum_{k=0}^K c_k (\log 2x)^{-k-3/4} \int_1^{x^{1-\epsilon}} (\log u)^k dA(u) \\
 &\quad + O\left(\epsilon (\log 2x)^{-3/4} \int_1^x |dA(u)|\right) \\
 &= \sum_{k=0}^K c_k (\log 2x)^{-k-3/4} \left\{ \left[ (\log u)^k A(u) \right]_1^{x^{1-\epsilon}} \right. \\
 &\quad \left. - k \int_1^{x^{1-\epsilon}} (\log u)^{k-1} A(u) \frac{du}{u} \right\} + O(\epsilon) \\
 &\leq o(1) \cdot \sum_{k=0}^K |c_k| + O(\epsilon).
 \end{aligned}$$

Nous avons donc finalement obtenu

$$|J(x)| \leq o(1) \sum_{k=0}^K |c_k| + O(\epsilon^{1/4});$$

en faisant tendre  $x$  vers l'infini puis  $\epsilon$  vers 0, cela implique  $J(x) = o(1)$  et donc grâce à (18)

$$\sum_{n < x} \frac{(\tau(n, \mathcal{C}) - z\tau(n))^2}{4^{\Omega(n)}} = o(x). \tag{20}$$

Comme la densité supérieure de la suite des entiers  $n$  satisfaisant à  $\tau(n) \leq \epsilon 2^{\Omega(n)}$  tend vers 0 avec  $\epsilon$ , on obtient que (20) implique  $\tau(n, \mathcal{C}) \sim z\tau(n)$  pour presque tout  $n$ , ce qui achève la démonstration.

### 3. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2 ET DES COROLLAIRES

Considérons, pour  $u \geq 1$ ,

$$M(u) := \sum_{n < u} (1/4)^{\Omega(n)};$$

nous utiliserons au cours de la démonstration le résultat suivant, qui est un cas particulier d'un théorème de Delange [1]:

Pour tout entier non négatif  $q$  il existe un polynôme  $P_q$  de degré  $q$  tel que l'on ait, uniformément pour  $u \geq 2$ ,

$$M(u) = u(\log u)^{-3/4} \left\{ P_q \left( \frac{1}{\log u} \right) + O \left( \frac{1}{(\log u)^{q+1}} \right) \right\}. \tag{21}$$

Nous noterons  $\varphi_q(u) := u(\log u)^{-3/4} P_q(1/\log u)$  et  $R_q(u) := M(u) - \varphi_q(u)$ . Soit  $\chi$  la fonction caractéristique, définie sur  $\mathbb{R}^+$ , de  $\cup_j [b_{2j}, b_{2j+1}]$ ; quitte à supposer les  $b_j$  non entiers, on peut écrire, pour  $1 \leq k < x$ ,

$$S_k(x) := \sum_{m < x/k} \frac{\chi(km) - z}{4^{\Omega(m)}} = \int_1^{x/k} \frac{(\chi(ku) - z)}{u} dM(u).$$

Sous les hypothèses

$$\int_1^x \frac{(\chi(u) - z)}{u} du = o(\log x) \tag{22}$$

et

$$\int_1^x |d\chi(u)| = O((\log x)^\alpha) \tag{23}$$

nous allons montrer que l'on a, uniformément pour  $k < x$ ,

$$S_k(x) = o \left( \log x \cdot \left( \log \frac{2x}{k} \right)^{-3/4} \right); \tag{24}$$

comme cette relation implique  $\sum_{k < x} |S_k(x)|/4^{\Omega(k)} k = o(\sqrt{\log x})$ , cela suffira à établir le Théorème 2.

Soit  $\eta(x)$  une fonction tendant vers 0 lorsque  $x \rightarrow \infty$  de façon que  $|\int_1^x (\chi(u) - z)/u du| \leq \eta(x) \log x$ , et que la fonction  $x \mapsto \eta(x) \log x$  soit croissante et partout minorée par  $\sqrt{\log x}$ ; posons  $x_1 := x \exp \{-\eta(x) \log x\}$ . Pour  $k \geq x_1$ , on a

$$|S_k(x)| \leq \sum_{m < x/x_1} \frac{1}{4^{\Omega(m)} m} \ll (\eta(x) \log x)^{1/4} = o((\log x)^{1/4})$$

donc (24) est satisfaite; pour  $k < x_1$ , on a

$$S_k(x) = \int_{x/x_1}^{x/k} \frac{(\chi(ku) - z)}{u} dM(u) + o((\log x)^{1/4}).$$

Choisissons un entier  $q > 2\alpha$ ; il vient, par (21),

$$S_k(x) = T_k(x) + U_k(x) + o((\log x)^{1/4})$$

avec

$$T_k(x) := \int_{x/x_1}^{x/k} \frac{(\chi(ku) - z)}{u} \varphi'_q(u) du$$

et

$$U_k(x) := \int_{x/x_1}^{x/k} \frac{(\chi(ku) - z)}{u} dR_q(u).$$

D'une part

$$\begin{aligned} U_k(x) &= \left[ \frac{(\chi(ku) - z)}{u} R_q(u) \right]_{x/x_1}^{x/k} + \int_{x/x_1}^{x/k} \frac{(\chi(ku) - z)}{u^2} R_q(u) du \\ &\quad + \int_{x/x_1}^{x/k} \frac{R_q(u)}{u} d\chi(ku); \end{aligned}$$

grâce à (21) et (23) on en déduit

$$U_k(x) = O((\log x)^{-q/2} + (\log x)^{\alpha - q/2}) = o(1).$$

D'autre part, on peut écrire

$$T_k(x) = \int_{\log x/x_1}^{\log x/k} \theta'(v) \psi(v) dv \tag{25}$$

avec  $\theta(v) := \int_{x/x_1}^{e^v} (\chi(ku) - z)/u du$  et  $\psi(v) := \varphi'_q(e^v) = v^{-3/4} Q(1/v)$  où  $Q$  est un polynôme. On a, pour  $\log(x/x_1) \leq v < \log(x/k)$ ,

$$|\theta(v)| = \left| \int_{kx/x_1}^{ke^v} \frac{(\chi(w) - z)}{w} dw \right| \leq 2\eta(x) \log x;$$

en intégrant (25) par parties, on obtient donc

$$\begin{aligned} T_k(x) &= [\theta(v) \psi(v)]_{\log x/x_1}^{\log x/k} - \int_{\log x/x_1}^{\log x/k} \theta(v) \psi'(v) dv \\ &= O \left( \eta(x) \log x \left( \log \frac{x}{k} \right)^{-3/4} + \eta(x) \log x \left( \log \frac{x}{x_1} \right)^{-3/4} \right) \\ &= o \left( \log x \cdot \left( \log \frac{x}{k} \right)^{-3/4} \right), \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration du Théorème 2.

Le Corollaire 1 se déduit du Théorème 2 de la même manière que se

déduit le *Corollary* du *Theorem 1* dans [7]. Il suffit de modifier la définition des suites  $\mathcal{A}^+$  et  $\mathcal{A}^-$  en

$$\mathcal{A}^\pm = \{d : f(|(\log d)^\alpha|) \leq z \pm \xi \pmod{1}\}$$

et de constater qu'elles sont constituées de blocs d'entiers consécutifs dont les bornes sont de la forme  $\exp\{m^{1/\alpha}\}$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$ , et, par conséquent, que le Théorème 2 peut leur être appliqué. Les autres détails sont laissés au lecteur.

Le Corollaire 2 est immédiat, quitte à remarquer que la fonction  $f(x) = g(\exp x^{1/(\alpha+1)})$  satisfait les hypothèses du Corollaire 1:  $f'(x)$  tend vers 0 et  $\{f(n) : n = 1, 2, \dots\}$  est équirépartie (mod 1) car  $f$  satisfait un critère de Fejer (cf., par exemple, [9, p. 43]).

#### 4. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 3

Posons, pour  $1 \leq k < x$  et  $z$  dans  $[0, 1]$ ,

$$\Phi_{x,k}(z) := \sum_{\substack{n < x \\ n \equiv 0 \pmod{k} \\ f(n) < z \pmod{1}}} \frac{1}{4^{\Omega(n)} n}$$

D'après le Théorème 1,  $f$  est équirépartie (mod 1) sur les diviseurs si, et seulement si, on a pour tout  $z$

$$\sum_{k < x} |\Phi_{x,k}(z) - z\Phi_{x,k}(1)| = o(1). \tag{26}$$

Nous allons montrer l'équivalence de (26) et de la condition (6) écrite sous la forme

$$\sum_{k < x} \left| \int_0^1 e(vz) d\Phi_{x,k}(z) \right| = o(1) \quad (v = \pm 1, \pm 2, \dots). \tag{27}$$

Comme on a pour tout  $v$

$$\int_0^1 e(vz) d\Phi_{x,k}(z) = -2i\pi v \int_0^1 e(vz) \{\Phi_{x,k}(z) - z\Phi_{x,k}(1)\} dz$$

et que le membre de gauche de (26) est majoré par une constante absolue, uniformément pour  $x \geq 2$  et  $z$  dans  $[0, 1]$ , on voit, grâce au théorème de convergence dominée de Lebesgue, que (26) implique (27).

Réciproquement, on montre par un argument identique à celui qui a été

employé dans la démonstration du Théorème 1, et, en utilisant la majoration entre mesures de Stieltjes

$$\sum_{k < x} |d\Phi_{x,k}(z) - \Phi_{x,k}(1) dz| \leq (\log x)^{-1/2} d \left\{ \sum_{\substack{n < x \\ f(n) < z \pmod{1}}} \frac{\tau(n)}{4^{\Omega(n)} n} \right\},$$

que (27) implique, pour toute fonction continue  $h$  définie sur  $[0, 1]$ ,

$$\sum_{k < x} \left| \int_0^1 h(z) d\Phi_{x,k}(z) - \Phi_{x,k}(1) \int_0^1 h(z) dz \right| = o(1). \tag{28}$$

Maintenant, soit  $\zeta$  un réel de  $]0, 1[$  n'appartenant pas à la suite des parties fractionnaires de  $f(n)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , et soit  $h_0$  la fonction caractéristique de l'intervalle  $[0, \zeta]$ . Étant donné un réel  $\varepsilon$  dans  $]0, \min(\zeta, 1 - \zeta)[$ , il existe deux fonctions continues sur  $[0, 1]$ ,  $h_1$  et  $h_2$ , telles que  $h_1 - h_0$  s'annule hors de  $[\zeta - \varepsilon, \zeta + \varepsilon]$ ,  $|h_1(z) - h_0(z)| \leq h_2(z)$  pour tout  $z$ , et  $\int_0^1 h_2(z) dz \leq 3\varepsilon$ . D'après (28) on a alors

$$\begin{aligned} & \sum_{k < x} |\Phi_{x,k}(\zeta) - \zeta \Phi_{x,k}(1)| \\ & \leq \sum_{k < x} \left( \int_0^1 h_2(z) d\Phi_{x,k}(z) + \Phi_{x,k}(1) \int_0^1 h_2(z) dz \right) + o(1) \\ & \leq 2 \left( \int_0^1 h_2(z) dz \right) \sum_{k < x} \Phi_{x,k}(1) + o(1) = O(\varepsilon) + o(1). \end{aligned}$$

En faisant tendre  $x$  vers l'infini puis  $\varepsilon$  vers 0, on obtient que (26) est satisfaite pour presque tout  $z$  de  $[0, 1]$ ; les fonctions  $z \mapsto \Phi_{x,k}(z)$  étant croissantes, on peut supprimer cette dernière restriction, et cela achève la démonstration.

REFERENCES

1. H. DELANGE. Sur des formules de Atle Selberg, *Acta Arith.* **19** (1971), 105–146.
2. P. ERDÖS ET R. R. HALL. Some distribution problems concerning the divisors of integers, *Acta Arith.* **26** (1974), 175–188.
3. P. ERDÖS ET G. TENENBAUM. Sur la structure de la suite des diviseurs d'un entier, *Ann. Inst. Fourier* (1) **31** (1981), 17–37.
4. R. R. HALL. The divisors of integers, I, *Acta Arith.* **26** (1974), 41–46.
5. R. R. HALL. Sums of imaginary powers of the divisors of integers, *J. London Math. Soc.* (2), **9** (1975), 571–580.
6. R. R. HALL. The distribution of  $f(d) \pmod{1}$ , *Acta Arith.* **31** (1976), 91–97.
7. R. R. HALL. A new definition of the density of an integer sequence, *J. Austral. Math. Soc. Ser. A* **26** (1978), 487–500.

8. R. R. HALL, The divisor density of integer sequences, *J. London Math. Soc.* (2) **24** (1981), 41–53.
9. G. RAUZY, “Propriétés statistiques de suites arithmétiques,” P. U. F., Collection SUP, 1976.
10. A. SELBERG, Note on a paper by L. G. Sathe, *J. Indian Math. Soc. (N. S.)* **18** (1954), 83–87.
11. D. V. WIDDER, “The Laplace Transform,” Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1946.