

Théorèmes taubériens  
avec restes

Gérald Tenenbaum

En Théorie des Nombres, les théorèmes taubériens servent surtout à relier le comportement analytique d'une série de Dirichlet,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s},$$

au comportement asymptotique de la fonction sommatoire de ses coefficients

$$A(x) = \sum_{n \leq x} a_n.$$

Ces théorèmes sont usuellement valables sous des hypothèses très générales et, partant, d'emploi facile. Ils présentent en revanche un défaut de précision endémique, dont la nature intrinsèque est attestée par de nombreux contre-exemples.

Il est pourtant fréquent que l'existence d'un terme reste explicite se révèle indispensable à l'utilisation d'une estimation taubérienne. Considérons par exemple une somme double

$$\sum_{mn \leq x} a_{mn} = \sum_{n \leq x} \sum_{m \leq x/n} a_{mn}.$$

Alors qu'un simple équivalent, pour chaque  $m$  fixé, de la somme intérieure est insuffisant dans la plupart des cas, une formule uniforme avec terme reste explicite permet le report dans la somme externe et l'évaluation de l'expression initiale. Dans ce contexte, la qualité de la dépendance en  $x/n$  du terme reste s'avère relativement secondaire et c'est l'uniformité en  $m$  qui joue un rôle crucial.

Nous nous proposons de présenter ici des formes avec restes des deux théorèmes taubériens les plus utilisés en Arithmétique : le Théorème de Hardy-Littlewood-Karamata, et celui de Wiener-Ikehara.

### 1. Le Théorème de Hardy-Littlewood-Karamata.

Citons d'abord la forme classique du résultat.

**Théorème 1.** *Soit  $A(u)$  une fonction non décroissante telle que l'intégrale de Laplace-Stieltjes*

$$(1) \quad f(\sigma) = \int_0^{\infty} e^{-\sigma u} dA(u)$$

converge pour  $\sigma > 0$ . S'il existe deux réels  $c, \omega, \omega > 0$ , tels que

$$(2) \quad f(\sigma) = (c + o(1)) \sigma^{-\omega}, \quad (\sigma \rightarrow 0+),$$

alors on a

$$(3) \quad A(x) = \left( \frac{c}{\Gamma(\omega+1)} + o(1) \right) x^{\omega}, \quad (x \rightarrow +\infty).$$

Le schéma de la démonstration de Karamata [13] est le suivant. La relation (1) implique

$$\int_0^{\infty} e^{-n\sigma u} e^{-\sigma u} dA(u) = \frac{c+o(1)}{[(n+1)\sigma]^{\omega}} = \left( \frac{c}{\Gamma(\omega+1)} + o(1) \right) \sigma^{-\omega} \int_0^{\infty} e^{-nu} e^{-u} u^{\omega-1} du,$$

$$(n = 0, 1, 2, \dots),$$

d'où

$$\int_0^{\infty} P(e^{-\sigma u}) e^{-\sigma u} dA(u) = \left( \frac{c+o(1)}{\Gamma(\omega)} \right) \sigma^{-\omega} \int_0^{\infty} P(e^{-u}) e^{-u} u^{\omega-1} du,$$

pour chaque polynôme fixé  $P$ . On utilise ensuite le Théorème d'Approximation de Weierstrass pour montrer que l'on peut remplacer dans la formule précédente le polynôme  $P$  par la fonction  $\chi$  définie sur  $[0,1]$  par

$$e^{-u} \chi(e^{-u}) = \begin{cases} 1, & (0 \leq u \leq 1), \\ 0, & (u > 1). \end{cases}$$

Cela fournit exactement l'estimation souhaitée.

On peut s'attendre à ce qu'une forme effective du Théorème d'Approximation permette de rendre effectif le résultat. Ce projet a été réalisé par G. Freud au début des années 50 [5].

**Théorème 2 (Freud).** Dans les hypothèses du Théorème 1, et si l'on suppose en outre que le terme reste de (2) est  $O(\sigma^{\delta})$  pour un  $\delta > 0$  fixé, alors le terme reste de (3) est  $O(1/\log x)$ .

La conclusion est optimale, comme le montre le contre-exemple suivant de Karamata : pour le choix

$$A(u) = \int_0^u (1 + \cos((\log t)^2)) dt ,$$

une étude de l'intégrale (1) par la formule de Cauchy (cf [12], p.p. 168-169) permet d'établir que

$$f(\sigma) = \frac{c}{\sigma} + o(1) , \quad (\sigma \rightarrow 0+) ,$$

alors qu'une intégration par parties implique

$$A(x) = Cx + O\left(\frac{x}{\log x}\right) , \quad (x \rightarrow +\infty) .$$

Il est expliqué dans [5], [7], comment le Théorème 2 découle simplement du résultat d'approximation unilatérale en norme  $L^1$  suivant.

**Théorème 3** (Freud [5]; Freud et Ganelius [6]). *Soit  $h$  une fonction à variation bornée sur  $[0,1]$ . Il existe des constantes  $A = A(h)$  et  $B = B(h)$  telles qu'à chaque entier  $n > 1$  correspondent des polynômes de degré  $n$ ,  $P^+$  et  $P^-$ , dont les coefficients ne dépassent pas  $B^n$  en valeur absolue, et qui satisfont à*

$$P^-(x) \leq h(x) \leq P^+(x) , \quad (0 \leq x \leq 1) ,$$

$$\int_0^1 (P^+(x) - P^-(x)) dx \leq A/n .$$

Si l'on affaiblit légèrement la conclusion en remplaçant la dernière majoration par  $A(h;\varepsilon) n^{\varepsilon-1}$  (où  $\varepsilon > 0$  est arbitrairement petit), le résultat peut être prouvé très simplement. Nous donnons les détails, à titre de curiosité, dans l'Appendice 1. Le point essentiel est l'utilisation des puissances du noyau de Fejer. Il serait intéressant de savoir si l'emploi d'un autre noyau permet d'obtenir la conclusion optimale du Théorème 3.

En termes de séries de Dirichlet, le Théorème de Hardy-Littlewood-Karamata lie le comportement de  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-\sigma}$  pour  $\sigma > 1$  à celui de  $\sum_{n \leq x} a_n n^{-1}$ . On peut concevoir ce théorème comme un passage à la limite, du cas  $\sigma > 1$  au cas  $\sigma = 1$ . Un tel "théorème taubérien limite" ne suppose rien sur les valeurs en des points non réels de la série de Dirichlet et ne permet pas de prouver le Théorème des Nombres Premiers. Ainsi le Théorème 2, par exemple, appliqué à

$$A(u) = \sum_{n \leq e^u} (1 + \mu(n))/n ,$$

fournit seulement l'estimation

$$\sum_{n \leq x} \mu(n)/n \ll \log x / \log \log x, \quad (x \rightarrow +\infty).$$

## 2. Le Théorème de Wiener-Ikehara.

Il s'agit maintenant de donner une information asymptotique sur la fonction sommatoire  $\sum_{n \leq x} a_n$  en n'utilisant que des hypothèses sur les valeurs de la série de Dirichlet en des points  $s = \sigma + i\tau$  d'abscisse  $\sigma > 1$ . Intuitivement, on passe du cas  $\sigma > 1$  au cas  $\sigma = 0$ ; il y a discontinuité entre l'hypothèse et la conclusion - ce qui suggère l'appellation de "théorème taubérien transcendant". Un résultat de ce type est de "profondeur" équivalente à celle du Théorème des Nombres Premiers.

Enonçons maintenant une forme classique [4], essentiellement due à Ingham [11], du Théorème de Wiener-Ikehara, dont elle constitue en fait une généralisation.

**Théorème 4 (Wiener-Ikehara-Ingham).** Soit  $A(u)$  une fonction non décroissante telle que l'intégrale

$$(4) \quad f(s) = \int_0^{\infty} e^{-su} dA(u)$$

converge pour  $\sigma > a > 0$ . S'il existe des constantes  $c, \omega, \omega > -1$ , telles que la fonction

$$(5) \quad g(s) = \frac{f(s+a)}{s+a} - \frac{c}{s^{\omega+1}}, \quad (\sigma > 0),$$

satisfasse pour chaque  $T > 0$  fixé à

$$(6) \quad \eta(\sigma, T) := \sigma^{\omega} \int_{-T}^T |g(2\sigma+i\tau) - g(\sigma+i\tau)| d\tau = o(1), \quad (\sigma \rightarrow 0+),$$

alors on a

$$(7) \quad A(x) = \left( \frac{c}{\Gamma(\omega+1)} + o(1) \right) e^{ax} x^{\omega}, \quad (x \rightarrow +\infty).$$

De nombreuses démonstrations de ce théorème ou de ses variantes ou généralisations sont disponibles dans la littérature - cf. par exemple [2], [3], [4], [11]. A notre connaissance, la seule qui conduise à un terme reste est celle de Ganelius dans son livre [9]. Son argument repose sur une version locale de l'inégalité de Bohr [1]

$$\|f\|_{\infty} \ll \|f'\|_{\infty} / T$$

valable pour toute fonction  $f$  intégrable, bornée ainsi que sa dérivée sur  $\mathbb{R}$ , et

dont la transformée de Fourier  $\hat{f}(\tau)$  est nulle pour  $|\tau| \leq T$ . Nous citons ici une forme légèrement affaiblie du théorème de Ganelius, qui est cependant suffisante pour les applications que nous envisageons. La démonstration procède d'idées très voisines de celle du Théorème de Berry et Esseen en Probabilités.

**Théorème 5 (Ganelius).** Soit  $g$  une fonction intégrable et bornée sur  $\mathbb{R}$ . Il existe une constante absolue  $C$  telle que, sous les conditions

$$(8) \quad \sup_{x < y \leq x+1/T} (g(y) - g(x)) \leq K, \quad (x \in \mathbb{R}),$$

$$\hat{g}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\tau u} g(u) du = 0, \quad (|\tau| \leq T),$$

on ait

$$\|g\|_{\infty} = \sup_{x \in \mathbb{R}} |g(x)| \leq CK.$$

Un emploi du Théorème 5 calqué sur celui qu'en fait Ganelius conduirait à un théorème taubérien effectif aux hypothèses assez inhabituelles et ne généralisant pas entièrement le Théorème 4. Nous procédons d'une manière un peu différente, en remarquant que le Théorème 5 implique directement un résultat qui contient à la fois le théorème de Berry et Esseen (cf. Appendice 2) et une forme avec reste du Théorème 4.

**Théorème 6.** Soit  $g$  une fonction intégrable et bornée sur  $\mathbb{R}$ . Sous l'hypothèse (8), on a

$$\|g\|_{\infty} \ll K + \int_{-T}^T |\hat{g}(\tau)| d\tau.$$

**Démonstration.** Il suffit d'appliquer le Théorème 5 à  $g - f$  où  $f$  est la convolée de  $g$  avec la fonction intégrable  $\alpha(u) = (2/\pi u^2 \varepsilon) \sin(\varepsilon u/2) \sin(u(T+\varepsilon/2))$  dont la transformée de Fourier est la fonction trapezoïdale

$$\hat{\alpha}(\tau) = \begin{cases} 1 & , \quad (|\tau| \leq T), \\ (T + \varepsilon - |\tau|)/\varepsilon & , \quad (T < |\tau| \leq T + \varepsilon), \\ 0 & , \quad (|\tau| > T + \varepsilon). \end{cases}$$

Comme  $\hat{f} = \hat{g} \hat{\alpha}$  est à support compact, on a

$$\|f\|_{\infty} \leq \frac{1}{2\pi} \|\hat{f}\|_1 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-T-\varepsilon}^{T+\varepsilon} |\hat{g}(\tau)| d\tau$$

La conclusion en découle en faisant tendre  $\varepsilon$  vers 0 .

**Théorème 7** (Wiener-Ikehara-Ingham "effectif"). Avec les hypothèses et les notations du Théorème 4, posons

$$\rho(x) = \inf_{T > 0} \left( \frac{1}{T} + \eta(T, \frac{1}{x}) + \left(\frac{1}{Tx}\right)^{\omega+1} \right)$$

Alors on a

$$A(x) = \left( \frac{c}{\Gamma(\omega+1)} + O(\rho(x)) \right) e^{ax} x^\omega .$$

**Démonstration.** Supposons sans restreindre la généralité que  $A(0) = 0$  et prolongeons  $A(u)$  par 0 pour  $u < 0$ . Dans un premier temps, nous appliquons le Théorème 6 à la fonction

$$g_\sigma(u) := A(u) e^{-(\alpha+\sigma)u} (1 - e^{-\sigma u}), \quad (\sigma > 0),$$

dont la transformée de Fourier est donnée par

$$\hat{g}_\sigma(\tau) = g(\sigma + i\tau) - g(2\sigma + i\tau) + c((\sigma + i\tau)^{-\omega} - (2\sigma + i\tau)^{-\omega}).$$

On a d'abord

$$\int_{-T}^T |\hat{g}_\sigma(\tau)| d\tau \ll \sigma^{-\omega} (T + \eta(T, \sigma)), \quad (0 < \sigma < 1).$$

De plus, la croissance et la positivité de  $A$  impliquent pour  $x, y > 0$

$$\begin{aligned} g_\sigma(x+y) - g_\sigma(x) &\geq A(x) e^{-(\alpha+\sigma)x} (1 - e^{-\sigma x}) (e^{-(\alpha+\sigma)y} - 1) \\ &\geq -(\alpha+\sigma) \|g_\sigma\|_\infty y . \end{aligned}$$

Appliquant le Théorème 6 avec  $K = (\alpha+\sigma) \|g_\sigma\|_\infty / T$ , il vient

$$\|g_\sigma\|_\infty \ll \sigma^{-\omega} (T + \eta(T, \sigma)) + \|g_\sigma\|_\infty T^{-1} .$$

En choisissant  $T$  grand mais fixé, on en déduit que

$$\|g_\sigma\|_\infty \ll \sigma^{-\omega} .$$

Posons

$$F(u) = \begin{cases} \frac{c}{\Gamma(\omega+1)} e^{-u} (1-e^{-u}) u^\omega, & (u > 0) \\ 0 & (u \leq 0) \end{cases}.$$

La seconde étape de la démonstration consiste à appliquer une nouvelle fois le Théorème 6, mais à la fonction

$$G_\sigma(u) := g_\sigma(u) - \sigma^{-\omega} F(\sigma u),$$

dont la transformée de Fourier vaut

$$\hat{G}_\sigma(\tau) = g(\sigma + i\tau) - g(2\sigma + i\tau).$$

Si  $\omega \geq 0$ , on a  $F'(u) = O(1)$ . Si  $-1 < \omega < 0$ , on a  $F'(u) = O(\min(1, u^\omega))$  et  $F(u) = O(\min(1, u^{\omega+1}))$ . On en déduit dans tous les cas, pour  $x \geq 0$ ,  $0 \leq y \leq 1/T \leq 1$ ,

$$F(\sigma x + \sigma y) - F(\sigma x) \leq O((\sigma/T) + (\sigma/T)^{\omega+1}).$$

D'où

$$\begin{aligned} G_\sigma(x+y) - G_\sigma(x) &\geq -(\alpha + \sigma) \|g\|_\infty y - \sigma^{-\omega} (F(\sigma x + \sigma y) - F(\sigma x)) \\ &\geq -O(\sigma^{-\omega} T^{-1} + \sigma T^{-\omega-1}). \end{aligned}$$

Par le Théorème 6, il vient finalement

$$|G_\sigma(x)| \ll \sigma^{-\omega} (T^{-1} + \eta(T, \sigma) + (\sigma/T)^{\omega+1})$$

d'où la conclusion, en choisissant  $\sigma = 1/x$ .

En utilisant seulement les majorations élémentaires

$$\begin{aligned} \zeta(s) &\ll \log(2 + |\tau|) \\ \zeta'(s) &\ll (\log(2 + |\tau|))^2 \end{aligned} \quad (\sigma \geq 1)$$

et la minoration classique de de la Vallée Poussin

$$\zeta(\sigma)^3 |\zeta(\sigma + i\tau)|^4 |\zeta(\sigma + 2i\tau)| \geq 1, \quad (\sigma \geq 1),$$

le Théorème 6 fournit l'estimation

$$\sum_{n \leq x} \mu(n) \ll x \frac{(\log \log x)^8}{\sqrt{\log x}}.$$

## Appendice 1.

Nous établissons ici la forme affaiblie du Théorème 3 dans laquelle la dernière majoration  $A/n$  est remplacée par  $An^{\varepsilon-1}$ , avec  $A = A(h; \varepsilon)$ .

Le réel positif  $\varepsilon$  étant fixé, définissons  $q$  comme le plus petit entier tel que  $(2q-1)\varepsilon \geq 1$  et posons  $r = [n/2q]$ . Nous désignons par  $K_r$  le noyau de Fejer d'ordre  $r$  :

$$K_r(t) = \left( \frac{\sin((r+1)t/2)}{\sin(t/2)} \right)^2 = r+1 + 2 \sum_{j=1}^r (r+1-j) \cos jt.$$

Nous introduisons les quantités :

$$\alpha_n = n^{\varepsilon-1} \ll_{\varepsilon} n^{\varepsilon-1}, \quad \beta_n = \left( \int_{\pi}^{\pi} K_r(t)^q dt \right)^{-1} \ll_{\varepsilon} n^{1-2q}, \text{ et.}$$

$$\gamma_n = \beta_n \int_{|t| > \alpha_n} K_r(t)^q dt \ll_{\varepsilon} n^{-\varepsilon(2q-1)} \ll n^{-1}.$$

Après avoir remarqué que, par différence, nous pouvons nous restreindre au cas où  $h$  est non décroissante sur  $[0,1]$ , nous définissons deux fonctions  $g^+$  et  $g^-$ , paires et périodiques de période  $2\pi$ , par

$$g^{\pm}(u) = \begin{cases} h(0), & (0 \leq u < \pi/2 \mp \alpha_n) \\ h(-\sqrt{2} \cos(u \pm \alpha_n)), & (\pi/2 \mp \alpha_n < u \leq 3\pi/4 \mp \alpha_n) \\ h(1), & (3\pi/4 \mp \alpha_n < u \leq \pi). \end{cases}$$

Nous supposons  $n$  suffisamment grand pour que les inégalités précédentes soient cohérentes. Les fonctions  $g^+$  et  $g^-$  sont non décroissantes sur  $[0, \pi]$ . Nous notons  $V$  leur variation commune sur cet intervalle et nous posons, pour  $x = -\cos u$ ,

$$Q^{\pm}(x) = \beta_n \int_{-\pi}^{\pi} g^{\pm}(t) K_r(t-u)^q dt.$$

Ces fonctions sont des combinaisons linéaires à coefficients  $O_q(1)$  des polynômes de Tchebychef  $T_j(x) = \cos(ju)$ ,  $0 \leq j \leq n$ . En effet, on a

$$K_r(t)^q = \sum_{0 \leq j \leq 2qr} a_j \cos(jt) , \text{ avec } a_j = O_q(r^{q+1}) \text{ d'où}$$

$$Q^\pm(x) = \sum_{0 \leq j \leq 2qr} b_j^\pm T_j(x)$$

avec  $b_j^\pm = a_j \beta_n \int_{-\pi}^{\pi} g^\pm(t) \cos(jt) dt$ . De plus, on a pour  $\pi/2 \leq u \leq 3\pi/4$ ,

$$\begin{aligned} Q^-(x) &= \beta_n \int_{-\pi}^{\pi} g^-(t+u) K_r(t)^q dt \leq \beta_n g^-(u+\alpha_n) \int_{-\alpha_n}^{\alpha_n} K_r(t)^q dt + \gamma_n g^-(\pi) \\ &= h(\sqrt{2}x) + \gamma_n (g^-(\pi) - g^-(u+\alpha_n)) \leq h(\sqrt{2}x) + \gamma_n V \end{aligned}$$

et similairement

$$Q^+(x) \geq h(\sqrt{2}x) - \gamma_n V .$$

Comme les coefficients des  $T_j$  ne dépassent pas  $3^n$  en valeur absolue, on voit que les polynômes

$$P^\pm(x) = Q^\pm(x/\sqrt{2}) \pm \gamma_n V$$

satisfont aux deux premières conditions du Théorème 3. Enfin, on a

$$\begin{aligned} \int_0^1 (P^+(x) - P^-(x)) dx &\leq \int_0^1 (P^+(x) - P^-(x)) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2/2}} \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{2}} \gamma_n V + \beta_n \int_{\pi/2}^{3\pi/4} \int_{-\pi}^{\pi} (g^+(t+u) - g^-(t+u)) K_r(t)^q dt du \\ &= O(\gamma_n + \alpha_n) = O_q(n^{\varepsilon-1}) . \end{aligned}$$

Cela achève la démonstration.

## Appendice 2.

Nous montrons ici comment le Théorème 6 implique l'inégalité classique de Berry et Esseen.

Soient  $F$  et  $G$  deux fonctions de répartitions de fonctions caractéristiques respectives  $f$  et  $g$ . On suppose que  $G$  est dérivable et que  $G'$  est bornée sur  $\mathbb{R}$ . Nous allons montrer que l'on a pour tout  $T > 0$

$$\|F - G\|_{\infty} \ll \|G'\|_{\infty}/T + \int_{-T}^T |(f(\tau) - g(\tau))/\tau| d\tau .$$

A cette fin, posons  $H = F - G$  et introduisons pour chaque  $\varepsilon < 0$  une fonction

$$H_{\varepsilon}(x) = - \int_0^{\infty} e^{-\varepsilon u} dH(x-u) = e^{-\varepsilon x} \int_{-\infty}^x e^{\varepsilon u} dH(u) .$$

On vérifie aisément que  $H_{\varepsilon}$  est intégrable et que sa transformée de Fourier vaut

$$\widehat{H}_{\varepsilon}(\tau) = \frac{f(-\tau) - g(-\tau)}{\varepsilon + i\tau} .$$

De plus, on a par intégration par parties

$$H_{\varepsilon}(x) = H(x) - \varepsilon e^{-\varepsilon x} \int_{-\infty}^x e^{\varepsilon u} H(u) du .$$

Comme  $H(u) \rightarrow 0$  quand  $u \rightarrow -\infty$ , cela implique que  $H_{\varepsilon}(x) \rightarrow H(x)$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ .  
En outre, posant  $\alpha := \|G'\|_{\infty}$ , on a pour  $y > 0$

$$H(x+y) - H(x) \geq -\alpha y$$

et

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \left\{ \varepsilon e^{-\varepsilon x} \int_{-\infty}^x e^{\varepsilon u} H(u) du \right\} \\ &= -\varepsilon^2 e^{-\varepsilon x} \int_{-\infty}^x e^{\varepsilon u} H(u) du + \varepsilon H(x) \leq 4\varepsilon . \end{aligned}$$

On peut donc appliquer le Théorème 6 à  $-H_{\varepsilon}$ , avec  $K = (\alpha + 4\varepsilon)/T$ . Il vient

$$H(x) \ll (\alpha + 4\varepsilon)/T + \int_{-T}^T |(f(\tau) - g(\tau))/\tau| d\tau ,$$

d'où le résultat annoncé, en faisant tendre  $\varepsilon$  vers 0.

#### Bibliographie

- [1] Bohr, H., Ein allgemeiner Satz über die Integration eines trigonometrischen Polynoms, *Prace Matem. Fiz.* 43 (1935), 273-288 (= *Collected Mathematical Works* II, C 36)
- [2] Delange, H., Généralisation du Théorème de Ikehara, *Ann. Sci. Ec. Norm. Sup.* (3) 71 (1954), 213-242.

- [3] Diamond, H.G., Changes of sign of  $\pi(x) - \varrho_i(x)$ , *L'enseignement math.* 21 fasc. 1 (1975), 1-14.
- [4] Ellison, W.J., Mendes France, M., *Les nombres premiers*, Hermann (1975).
- [5] Freud, G., Restglied eines Tauberschen Satzes I, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* 2 (1951), 299-308 ; II, *ibid.* 3 (1952), 299-307 ; III, *ibid.* 5 (1955), 275-288.
- [6] Freud, G., Über einseitige Approximation durch Polynome I, *Acta Sci. Math. Szeged* 16 (1955), 12-28.
- [7] Freud, G., Ganelius, T., Some remarks on one-sided approximation, *Math. Scand.* 5 (1957), 276-284.
- [8] Ganelius, T., On one sided approximation by trigonometrical polynomials, *Math. Scand.* 4 (1956), 247-258.
- [9] Ganelius, T., *Tauberian Remainder Theorems*, Lecture Notes 232, Springer (1971).
- [10] Ikehara, S., An extension of Landau's theorem in the analytic theory of numbers, *J. of Math. and Phys.*, Mass. Inst. of Techn. 10 (1931), 1-12.
- [11] Ingham, A.E., On Wiener's method in tauberian theorems, *Proc. London Math. Soc.* (2) 38 (1935), 458-480.
- [12] Ingham, A.E., On tauberian theorems, *Proc. London Math. Soc.* (3) 14A (1965), 157-173.
- [13] Karamata, J., Neuer Beweis und Verallgemeinerung der Tauberschen Sätze, welche die Laplacesche und Stieltjesche Transformation betreffen, *J. für die Reine und ang. Math* 164 (1931), 27-39.

G. Tenenbaum  
 UER de Mathématiques  
 Université de Nancy I  
 Boîte Postale 239  
 54506 Vandoeuvre les Nancy Cedex