*Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*
**126** (1999), 399–415.

# Sur l'écart quadratique moyen des diviseurs d'un entier normal*

PAR A. RAOUJ

*Département de mathématiques, Université Cadi Ayyad,*
*Faculté des sciences Semlalia BP S15, Marrakech, Maroc*

ET G. TENENBAUM

*Institut Élie Cartan, Université Henri Poincaré–Nancy 1,*
*BP 239, 54506 Vandœuvre Cedex, France*

## 1. *Introduction et énoncé des résultats*

Introduite par Hall [4] en 1979 et étudiée de manière systématique par Hall & Tenenbaum ([6], [7]), la fonction

$$T(n,\alpha) := \sum_{\substack{d|n,\, d'|n \\ |\log(d'/d)|\leqslant(\log n)^\alpha}} 1 \qquad (n>1, \alpha\in\mathbb{R})$$

est une mesure quadratique de la proximité des diviseurs.

On a trivialement $\tau(n) \leqslant T(n,\alpha) \leqslant T(n,1) = \tau(n)^2$ pour tout $\alpha$, où, ici et dans la suite, $\tau(n)$ désigne le nombre de diviseurs d'un entier générique $n$. Le statut de l'inégalité de gauche pour presque tout entier $n$ est une question difficile qui a inspiré une conjecture d'Erdős (cf. [1]) assez connue. Convenons de désigner par pp (presque partout) une relation valable sur un ensemble d'entiers de densité unité et posons

$$T^*(n,\alpha) := T(n,\alpha) - \tau(n).$$

(Cette fonction est mentionnée dans [4], mais sa définition fait l'objet d'une coquille.) Erdős a conjecturé que $T^*(n,0) > 0$ pp et, en 1964 [2], il a annoncé pouvoir montrer que

$$(1{\cdot}1) \qquad T^*(n,\alpha_1) = 0 < T^*(n,\alpha_2) \quad \text{pp} \qquad (\alpha_1 < 1-\log 3 < \alpha_2).$$

Cependant, sa preuve, non publiée, était incomplète. Il fallut attendre 1979 pour que Erdős & Hall [3] établissent l'assertion relative à $\alpha_1$, et 1983 pour que Maier & Tenenbaum [8] prouvent celle qui concerne $\alpha_2$.

Il est établi au chapitre 4 de [7] que la fonction $T(n,0)/\tau(n)$ possède une fonction de répartition $H(z)$ satisfaisant à

$$\frac{1}{z\sqrt{\log 2z}} \ll 1 - H(z) \ll \frac{\log 2z}{z} \qquad (z\geqslant 1).$$

Il découle de plus des théorèmes 40 et 46 de [7] que l'inégalité $T^*(n,0) > z\tau(n)$ a lieu, pour tout $z>0$, sur un ensemble d'entiers $n$ de densité positive.

* Nous incluons ici certaines corrections par rapport à la version publiée.

Cependant, un récent résultat de Hall [5] implique que

$$T^*(n,-\alpha)=o\big(\tau(n)\big)\qquad \text{pp}\qquad (\alpha>0). \tag{1·2}$$

L'approche de Hall, qui ne mentionne d'ailleurs pas cette application, est fondée sur l'étude de la fonction multiplicative

$$\tau(n,\vartheta):=\sum_{d|n}d^{i\vartheta}\qquad (\vartheta\in\mathbb{R}),$$

qui n'est autre que la transformée de Fourier–Stieltjes de la fonction croissante

$$F_n(z):=\sum_{d|n,\, d\leqslant \mathrm{e}^z}1.$$

Hall montre que, pour tout $\alpha>0$ et tout intervalle $I(n)$ de longueur $|I(n)|:=(\log n)^\alpha$, on a

$$\int_{I(n)}|\tau(n,\vartheta)|^2\,\mathrm{d}\vartheta\sim|I(n)|\tau(n)\quad \text{pp}, \tag{1·3}$$

mais sa preuve s'adapte sans changement au cas d'un intervalle de longueur $c(\log n)^\alpha$ pour toute constante $c>0$ fixée.

Pour établir (1·2) à partir de (1·3), nous introduisons les quantités

$$\Delta_L(n,z):=\sum_{\substack{d|n\\ |\log d-z|\leqslant L/2}}1,\quad M_2(n;L):=\int_{-\infty}^{\infty}\Delta_L(n,z)\{\Delta_L(n,z)-1\}\,\mathrm{d}z.$$

Un calcul facile fournit

$$M_2(n;L)=\sum_{\substack{d|n,\,d'|n\\ 0<|\log(d'/d)|\leqslant L}}\big(L-|\log(d'/d)|\big)$$

de sorte que, pour $L=L(n)=(\log n)^{-\alpha}$ et tout $\alpha\in\mathbb{R}$,

$$M_2(n;L)/L\leqslant T^*(n,-\alpha)\leqslant M_2(n;2L)/L. \tag{1·4}$$

On a par ailleurs

$$M_2(n;L)/L=\int_{-\infty}^{\infty}w(\vartheta)\{|\tau(n,\vartheta/L)|^2-\tau(n)\}\,\mathrm{d}\vartheta, \tag{1·5}$$

avec $w(\vartheta):=(1/2\pi)\big((\sin\frac12\vartheta)/\frac12\vartheta\big)^2$, et l'on observe que (1·3), sous la forme légèrement plus générale mentionnée plus haut, équivaut à

$$\int_a^b\{|\tau(n,\vartheta/L)|^2-\tau(n)\}\,\mathrm{d}\vartheta=o(\tau(n))\qquad \text{pp} \tag{1·6}$$

pour tous $a$, $b$ fixés. Une simple intégration par parties fournit donc, grâce au théorème de Lebesgue,

$$\int_{-Y}^{Y}w(\vartheta)\{|\tau(n,\vartheta/L)|^2-\tau(n)\}\,\mathrm{d}\vartheta=o(\tau(n))\qquad \text{pp}$$

pour chaque $Y$ fixé. D'après un lemme de Montgomery,[†] on a de plus pour tout $a \in \mathbb{R}$

$$\int_a^{a+1} |\tau(n,\vartheta/L)|^2 \,\mathrm{d}\vartheta \leqslant 3 \int_{-1/2}^{1/2} |\tau(n,\vartheta/L)|^2 \,\mathrm{d}\vartheta \ll \tau(n) \qquad \text{pp},$$

par (1·6), ce qui implique

$$\int_{|\vartheta|>Y} w(\vartheta)\{|\tau(n,\vartheta/L)|^2 - \tau(n)\} \,\mathrm{d}\vartheta \ll \tau(n)/Y \qquad \text{pp}.$$

Il suit finalement

$$M_2(n;L)/L = o\big(\tau(n)\big) \qquad \text{pp},$$

d'où résulte (1·2), grâce à (1·4).

Dans ce travail, nous nous proposons de préciser (1·2). Nos résultats font intervenir une fonction continue croissante $\Xi : [0,1] \to [0, \log 3 - 1]$ définie par

$$\Xi(\kappa) := \begin{cases} \log 3 - 1, & \text{si } \frac{2}{3} < \kappa \leqslant 1, \\ \kappa \log 2 - \kappa \log \kappa - (1-\kappa)\log(1-\kappa) - 1, & \text{si } 1 - 1/\mathrm{e} < \kappa \leqslant \frac{2}{3}, \\ \kappa \log\Big(\dfrac{2}{\mathrm{e}-1}\Big), & \text{si } 0 \leqslant \kappa \leqslant 1 - 1/\mathrm{e}. \end{cases}$$

On remarque que $\Xi$ est strictement croissante sur $[0, \frac{2}{3}]$. Nous pouvons donc définir une fonction $G : [0, \log 3 - 1] \to [0, \frac{2}{3}]$ par

$$G(\alpha) := \Xi^{-1}(\alpha) \qquad (0 \leqslant \alpha \leqslant \log 3 - 1).$$

Nous établissons l'évaluation suivante.

**Théorème 1.** *On a pour* $0 \leqslant \alpha < \log 3 - 1$

$$T^*(n,-\alpha) = \tau(n)^{1-G(\alpha)} \mathrm{e}^{O\left(\sqrt{\log_2 n \log_3 n}\right)} \qquad \text{pp}. \tag{1·7}$$

*Plus précisément, pour tout* $\xi$, $1 \leqslant \xi \leqslant \sqrt{\log_2 x}$, *on a*

$$T^*(n,-\alpha) \geqslant \tau(n)^{1-G(\alpha)} \mathrm{e}^{-\xi\sqrt{\log_2 x}} \tag{1·8}$$

*sauf pour au plus* $\ll x/\xi^{1/50}$ *entiers* $n \leqslant x$, *et*

$$T^*(n,-\alpha) \leqslant \tau(n)^{1-G(\alpha)} \mathrm{e}^{\xi\sqrt{\log_2 x}} \tag{1·9}$$

*sauf pour au plus* $\ll x(\log_2 x)^2 \mathrm{e}^{-G(\alpha)^2\xi^2/12G'(\alpha)^2}$ *entiers* $n \leqslant x$.

Il est à noter que l'ordre normal de $T^*(n,-\alpha)$ présente une discontinuité en $\alpha = \log 3 - 1$ puisque par (1·1) on a $T^*(n, 1 - \log 3 - \varepsilon) = 0$ pp pour tout $\varepsilon > 0$ alors que (1·7) implique

$$T^*(n, 1 - \log 3 + \varepsilon) \geqslant \tau(n)^{1/3+o(1)} \qquad \text{pp}. \tag{1·10}$$

Nous reviendrons plus loin sur l'explication de ce phénomène.

Désignons par $\{d_j(n)\}_{j=1}^{\tau(n)}$ la suite croissante des diviseurs d'un entier $n$ et posons

$$D(n,\alpha) := \big|\big\{j : 1 \leqslant j < \tau(n),\, \log\{d_{j+1}(n)/d_j(n)\} \leqslant (\log n)^{-\alpha}\big\}\big|,$$

de sorte que, pour $\alpha \geqslant 0$,

$$T^*(n,-\alpha)/2\Delta(n) \leqslant D(n,\alpha) \leqslant T^*(n,-\alpha)$$

où $\Delta$ est la fonction d'Erdős–Hooley définie par

$$\Delta(n) := \max_{u \in \mathbb{R}} \sum_{d|n,\, \mathrm{e}^u < d \leqslant \mathrm{e}^{u+1}} 1.$$

D'après [9], on sait que, pour toute fonction $\xi(n) \to \infty$, on a $\Delta(n) \leqslant \xi(n) \log_2 n$ pp. Cela permet donc de déduire du Théorème 1 le corollaire suivant.

[†] Voir [10], ou [11] p. 131. Voir aussi les notes pp. 143–144 de [11] pour des précisions historiques concernant les résultats de ce type et notamment l'apport de Wirsing.

**Corollaire 1.** *Soit $0 \leqslant \alpha < \log 3 - 1$. On a*

$$D(n,\alpha) = \tau(n)^{1-G(\alpha)} \mathrm{e}^{O(\sqrt{\log_2 n \log_3 n})} \qquad \text{pp.}$$

*De plus, les inégalités* (1·8) *et* (1·9) *sont valables en remplaçant $T^*(n,-\alpha)$ par $D(n,\alpha)$, avec les mêmes estimations pour les tailles respectives des ensembles exceptionnels.*

À ce stade il est utile de remarquer que, si la comparaison des quantités $\log(d'/d)$ à des puissances *fixes* de $\log n$ permet une bonne visualisation des résultats et suffit pour la plupart des applications, les méthodes du présent travail n'impliquent nullement une telle restriction — ainsi que l'attestent les énoncés des Théorèmes 4 et 5 aux paragraphes suivants. Sans chercher la formulation la plus générale, nous indiquons cependant que *tous les énoncés de ce premier paragraphe sont valables sans changement lorsqu'on y remplace le paramètre $\alpha$ par une fonction $\alpha_n$ assujettie aux mêmes intervalles de variation et satisfaisant une faible contrainte de régularité, par exemple*

$$\alpha_n - \alpha_m \ll 1/\sqrt{\log_2 n} \qquad (n < m \leqslant n^2).$$

Ainsi, par exemple, le Corollaire 1 est également valable pour la fonction

$$D_1(n,\alpha) := \big|\big\{j : 1 \leqslant j < \tau(n),\, d_{j+1}(n)/d_j(n) \leqslant 1 + (\log n)^{-\alpha}\big\}\big|.$$

Une spécificité de la fonction $T(n,\alpha)$ est de compter les rapports $d'/d$ avec multiplicité. La fonction suivante, également étudiée dans [7],

$$U(n,\alpha) := \sum_{\substack{dd'|n,\,(d,d')=1\\ |\log(d'/d)|\leqslant(\log n)^\alpha}} 1$$

est le pendant non pondéré de $T(n,\alpha)$. On a en particulier pour $\alpha \geqslant 0$

$$T(n,\alpha) = \sum_{t|n} \sum_{\substack{dd'|n/t,\,(d,d')=1\\ |\log(d'/d)|\leqslant(\log n)^\alpha}} 1 \geqslant \sum_{t|n} U(n/t,\alpha)$$

alors que l'inégalité est inversée lorsque $\alpha \leqslant 0$.

Désignons par $\Omega(n)$ le nombre des facteurs premiers, comptés avec multiplicité, d'un entier $n$. Nous posons pour $k \geqslant 1$

$$U_k^*(n,\alpha) := \sum_{\substack{dd'|n,\,(d,d')=1\\ 0<|\log(d'/d)|\leqslant(\log n)^\alpha\\ \Omega(dd')\leqslant k}} 1.$$

Notre évaluation de $T^*(n,-\alpha)$ passe par une estimation de l'ordre normal de $U_k^*(n,-\alpha)$. On a en fait,

$$T^*(n,\alpha) = \sum_{\substack{dd'|n,\,(d,d')=1\\ 0<|\log(d'/d)|\leqslant(\log n)^\alpha}} \tau(n/dd')$$

d'où l'on déduit que, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et tout entier $n \geqslant 1$,

$$\tau(n) \max_{1\leqslant k\leqslant\Omega(n)} U_k^*(n,\alpha)/2^k \leqslant T^*(n,\alpha) \leqslant 2^{\Omega(n)} \sum_{1\leqslant k\leqslant\Omega(n)} U_k^*(n,\alpha)/2^k. \tag{1·11}$$

Nous montrons le résultat suivant dans lequel nous notons

$$\mathcal{R}(x,\xi) := (\log_2 x)\mathrm{e}^{-\xi^2/11}.$$

**Théorème 2.** *Soient* $x \geqslant 16$, $\xi = \xi(x) \in [1, \sqrt{\log_2 x}]$, $k = k(x) \in \mathbb{N} \cap [1, \log_2 x]$, *et* $\kappa := k/\log_2 x$.

(i) *Pour chaque* $\alpha \leqslant 1$ *on a*

$$U_k^*(n,\alpha) \leqslant (\log x)^{\Xi(\kappa)+\alpha}\mathrm{e}^{\xi\sqrt{\log_2 x}}, \tag{1·12}$$

*pour tous les entiers* $n \leqslant x$ *sauf au plus* $\ll x\mathcal{R}(x,\xi)$.

(ii) *Pour chaque* $\alpha \leqslant \min\{1, \kappa/(1-1/\mathrm{e})\}$, *on a*

$$U_k^*(n,\alpha) \geqslant (\log x)^{\Xi(\kappa)+\alpha}\mathrm{e}^{-\xi\sqrt{\log_2 x}} - 1, \tag{1·13}$$

*pour tous les entiers* $n \leqslant x$ *sauf au plus* $\ll x/\xi^{1/50}$.

Le résultat suivant, concernant la fonction

$$E_\kappa(n) := \min_{\substack{dd'\mid n \\ (d,d')=1,\, d<d' \\ \Omega(dd')\leqslant\kappa\Omega(n)}} d'/d$$

et généralisant le théorème 54 de [7], est une conséquence immédiate du Théorème 2.

**Corollaire 2.** *On a pour* $\kappa \in [0,1]$

$$E_\kappa(n) = 1 + (\log n)^{-\Xi(\kappa)}\mathrm{e}^{O\left(\sqrt{\log_2 n \log_3 n}\right)} \qquad \text{pp.}$$

*Plus précisément, si* $\xi = \xi(x) \to \infty$ *avec* $\xi(x) \leqslant \sqrt{\log_2 x}$, *on a*

$$E_\kappa(n) \leqslant 1 + (\log x)^{-\Xi(\kappa)}\mathrm{e}^{\xi(x)\sqrt{\log_2 x}}$$

*pour tous les entiers* $n \leqslant x$ *sauf au plus* $\ll x\mathcal{R}(x,\xi)$, *et*

$$E_\kappa(n) \geqslant 1 + (\log x)^{-\Xi(\kappa)}\mathrm{e}^{-\xi(x)\sqrt{\log_2 x}}$$

*pour tous les entiers* $n \leqslant x$ *sauf au plus* $\ll x/\xi^{1/50}$.

La majoration (1·12) précise celle de Hall au lemme 1 de [5]. La minoration (1·13) répond à la question soulevée dans [5] de l'optimalité de l'exposant $\Xi(\kappa)$. Hall mentionne à ce propos, sans l'expliciter, l'existence d'un argument heuristique en faveur de cette optimalité. Soit $s \in [k, \Omega(n)]$ et $m$ le produit des $s$ plus petits facteurs premiers de $n$. On pose $k = su$ avec $\kappa \leqslant u \leqslant 1$. On sait que la taille normale de $\log m$ est $\mathrm{e}^s$ (voir, par exemple, le théorème 07 de [7] ou l'exercice III.5.6 de [13]) et, d'après le théorème de Hardy–Ramanujan, que $\Omega(n)$ est normalement proche de $\log_2 n$. Or le nombre des couples $(d,d')$ de diviseurs de $m$ tels que $\Omega(dd') \leqslant k$ est au moins égal à $\binom{s}{k}2^k \gg \mathrm{e}^{\varrho(u)s}/\sqrt{s}$, avec $\varrho(u) := u\log(2/u) - (1-u)\log(1-u)$. En supposant l'équirépartition des quantités $\log(d'/d)$ pour ces couples de diviseurs, on obtient la minoration heuristique

$$U_k^*(n,\alpha) \geqslant (\log n)^\alpha \mathrm{e}^{\varrho(u)s-s}/\sqrt{s} = (\log n)^{\alpha+\kappa\{\varrho(u)-1\}/u+o(1)}.$$

Il reste à observer que le maximum de $\{\varrho(u)-1\}/u$ sous la contrainte $\kappa \leqslant u \leqslant 1$ est obtenu en $u=\max(\kappa, 1-1/\mathrm{e})$. Cela fournit bien

$$U_k^*(n,\alpha) \geqslant (\log n)^{\Xi(\kappa)+\alpha+o(1)}. \tag{1·14}$$

Nous notons également que, pour $\kappa \leqslant \frac{2}{3}$ et $\Xi(\kappa)+\alpha>0$, le raisonnement précédent peut aisément être modifié pour montrer que (1·14) est heuristiquement une égalité.

La minoration (1·13) du Théorème 2 pour $\alpha = 1-\log 3+\varepsilon$ et $\kappa = \frac{2}{3}$ fournit immédiatement l'explication de la discontinuité de $G(\alpha)$ en $1-\log 3$ et l'inégalité (1·10). En effet, pour un entier normal, i.e. tel que $\omega(n) \sim \log_2 n$, la fonction d'Erdős $E(n) := E_1(n)$ est un minimum réalisé pp pour des diviseurs $d$, $d'$ tels que $\omega(dd') \sim \frac{2}{3}\log_2 n$ — ce qui est heuristiquement justifié par le fait que cette condition correspond au maximum de la répartition du nombre des couples $(d,d')$ de diviseurs de $n$ premiers entre eux. Comme tous les couples $(md, md')$ avec $m|n/dd'$ sont comptés dans $T^*(n, 1-\log 3+\varepsilon)$, on obtient

$$T^*(n, 1-\log 3+\varepsilon) \geqslant 2^{\{1/3+o(1)\}\log_2 n} = \tau(n)^{1/3+o(1)} \qquad \text{pp.}$$

Le lien mentionné plus haut entre la fonction $T^*(n,-\alpha)$ et la valeur moyenne de $|\tau(n,\vartheta)|^2$ sur des intervalles de longueur $(\log n)^\alpha$ laisse augurer que les Théorèmes 1 et 2 permettent d'apporter des précisions supplémentaires sur le terme d'erreur implicite dans (1·3). Nous obtenons le résultat suivant relatif à la fonction

$$H(n,\alpha) := \frac{1}{(\log n)^\alpha} \sup_{\substack{a\in\mathbb{R}\\ 0<b\leqslant(\log n)^\alpha}} \Big|\int_a^{a+b} \{|\tau(n,\vartheta)|^2-\tau(n)\}\,\mathrm{d}\vartheta\Big|.$$

**Théorème 3.** *Soient $\xi=\xi(n)\to\infty$ et $0\leqslant\alpha<\log 3-1$. On a*

$$\tau(n)^{1-G(\alpha)}\mathrm{e}^{-\xi\sqrt{\log_2 n}} \leqslant H(n,\alpha) \leqslant \tau(n)^{1-\alpha/\log 2+o(1)} \qquad \text{pp.}$$

Il est raisonnable de conjecturer que, quitte à y remplacer $-\xi$ par $+\xi$, la borne inférieure fournit aussi un majorant de l'ordre normal de $H(n,\alpha)$, mais une telle estimation semble hors de portée des méthodes développées dans le présent travail.

## 2. *Preuve du Théorème 2 — majorations*

En vue d'applications ultérieures, nous établissons un résultat plus général qu'il n'est nécessaire pour prouver le Théorème 2(i). Nous posons

$$\nabla(n;t,y) := \sum_{\substack{dd'|n,\,(d,d')=1\\ 0<|\log(d'/d)|\leqslant t}} y^{\Omega(dd')},$$

notons $r_v := \exp\exp v$, et introduisons la fonction multiplicative de $n$

$$n_v := \prod_{p^\nu\|n,\,p\leqslant r_v} p^\nu.$$

D'après [14], exercice III.5.6, on sait que

$$\log n_v \leqslant R\mathrm{e}^v \tag{2·1}$$

sauf pour au plus $O\big(x\mathrm{e}^{-R/2}\big)$ entiers $n\leqslant x$.

Nous aurons à plusieurs reprises l'occasion d'utiliser le lemme 50.1 de [7], relatif à la fonction

$$\Omega(n, w) := \sum_{p^\nu \| n,\, p \leqslant w} \nu,$$

et qui stipule que, pour chaque $\varepsilon > 0$, on a $\sup_{w \geqslant 3}\{\Omega(n, w) - (1+\varepsilon)\log_2 w\} \leqslant T$ sauf pour au plus $\ll x\,(1+\varepsilon)^{-T}\varepsilon^{-2}$ entiers $n \leqslant x$. Associée à (2·1), cette estimation implique facilement que, pour tout $\xi \in [0, \sqrt{v}]$, l'inégalité

$$\sup_{d \mid n_v}\{\Omega(n, d) - \log_2 d\} \leqslant \tfrac{2}{3}\xi\sqrt{v} \tag{2·2}$$

est valable pour tous les entiers $n \leqslant x$ sauf au plus $O\big(xv\mathrm{e}^{-\xi^2/11}\big)$. Nous omettons les détails de la vérification.

**Théorème 4.** *On a uniformément pour $x \geqslant 3$, $1 \leqslant v \leqslant \log_2 x$, $t \geqslant 0$, $0 \leqslant \xi \leqslant \sqrt{v}$, $\frac{1}{2}(\mathrm{e}-1) \leqslant y \leqslant 1$,*

$$\nabla(n_v; t, y) \leqslant t\Big(\frac{1+2y}{\mathrm{e}}\Big)^v \mathrm{e}^{\xi\sqrt{v}} \tag{2·3}$$

*sauf peut-être pour au plus $O\big(xv\mathrm{e}^{-\xi^2/11}\big)$ entiers $n \leqslant x$.*

*Démonstration.* Nous employons la méthode utilisée pour établir le théorème 50 de [7]. Comme les détails techniques sont très voisins, nous nous contentons ici d'indications relativement succinctes.

Nous observons d'abord que l'on peut supposer $v \geqslant v_0$ et $\xi \geqslant \xi_0$, où $v_0$ et $\xi_0$ sont des constantes arbitrairement grandes, puisque le résultat est trivialement vérifié dans le cas contraire.

Ensuite, nous posons $t_0 := \frac{1}{2}(\mathrm{e}/3)^v\mathrm{e}^{-\xi\sqrt{v}}$, $t_1 := \frac{1}{10}\mathrm{e}^v$ et nous remarquons qu'il suffit d'établir le résultat lorsque $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$. En effet, lorsque $t \leqslant t_0$, l'inégalité (2·3) appliquée avec $y = 1$ montre que la somme du membre de gauche est vide. D'autre part, lorsque $t > t_1$, la relation (2·2) implique que $\Omega(n_v) \leqslant v + \frac{2}{3}\xi\sqrt{v}$ avec un nombre acceptable d'exceptions, d'où

$$\nabla(n_v; t, y) \leqslant (1+2y)^{\Omega(n_v)} \leqslant 10t\Big(\frac{1+2y}{\mathrm{e}}\Big)^v 3^{(2/3)\xi\sqrt{v}},$$

ce qui fournit la majoration requise pour un choix convenable de $\xi_0$.

Nous supposons donc dorénavant $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$. Nous posons

$$\nabla_1(n) := \sum_{\substack{d \mid n\\ 1<d\leqslant \mathrm{e}^t}} 1, \qquad \nabla_2(n) := \sum_{\substack{dd' \mid n\\ 1<d<d'\leqslant d\mathrm{e}^t}} y^{\Omega(dd')},$$

de sorte que l'on a, pour tout $n$,

$$\nabla(n_v; t, y) \leqslant 2\nabla_1(n_v) + 2\nabla_2(n_v).$$

Il est clair que $\nabla_1(n_v) = 0$ si $t < \log 2$. Dans le cas contraire, on observe que, par (2·2),

$$\nabla_1(n_v) \leqslant 2^{\Omega(n, \exp t)} \leqslant t^{\log 2} 2^{(2/3)\xi\sqrt{v}} \leqslant \tfrac{1}{4}t\Big(\frac{1+2y}{\mathrm{e}}\Big)^v \mathrm{e}^{\xi\sqrt{v}} \tag{2·4}$$

dès que $\xi_0$ est assez grand.

Tout couple $(d,d')$ compté dans $\nabla_2(n_v)$ est tel que

$$\mathrm{e}^{-t}/d<1/d'<\log(d'/(d'-1))\leqslant\log(d'/d)\leqslant t,$$

donc $d>d_0(t):=\max(1,\mathrm{e}^{-t}/t)$. On pose

$$I_1:=]d_0(t),\max(1,1/t^2)],\qquad I_2:=]\max(1,1/t^2),x^{1/4}],\qquad I_3:=]x^{1/4},\sqrt{x}\,],$$

et l'on désigne par $\nabla_{2j}(n_v)$ la contribution à $\nabla_2(n_v)$ des couples $(d,d')$ tels que $d\in I_j$. On a d'abord, en majorant $y$ par 1 dans $\nabla_{21}(n_v)$

$$\begin{aligned}\sum_{n\leqslant x}\nabla_{21}(n_v)&\leqslant\sum_{d\leqslant 1/t^2}\sum_{d<d'\leqslant d\mathrm{e}^t}\frac{x}{dd'}\\ &\ll tx\log(1+1/t)\leqslant txv\Big(\frac{1+2y}{\mathrm{e}}\Big)^v,\end{aligned}$$

où l'on a utilisé le fait que la somme extérieure est vide si $t\geqslant 1$. Cela implique clairement que l'inégalité

$$\nabla_{21}(n_v)\leqslant\tfrac{1}{12}t\Big(\frac{1+2y}{\mathrm{e}}\Big)^v\mathrm{e}^{\xi\sqrt{v}}\tag{2·5}$$

a lieu avec l'estimation requise pour le nombre d'éventuelles exceptions.

Grâce à (2·2), on peut écrire pour $j=2$ ou 3 et tout $z\in]0,1]$

$$\nabla_{2j}(n_v)\leqslant z^{-(2/3)\xi\sqrt{v}}\,\nabla^*_{2j}(n_v)\tag{2·6}$$

avec

$$\nabla^*_{2j}(n_v):=\sum_{\substack{d\mid n_v\\ d\in I_j}}\sum_{\substack{d'\mid n_v/d\\ d<d'\leqslant d\mathrm{e}^t}}z^{\Omega(n,d')}(\log d')^{-\log z}y^{\Omega(dd')}.$$

Nous choisirons plus loin la valeur du paramètre $z$.

Considérons d'abord le cas $j=2$. On peut écrire

$$\begin{aligned}S^*_{22}:&=\sum_{n\leqslant x}\nabla^*_{22}(n_v)\\ &\leqslant\sum_{\substack{d\in I_2\\ P^+(d)\leqslant r_v}}\sum_{d<d'\leqslant d\mathrm{e}^t}(yz)^{\Omega(dd')}(\log d')^{-\log z}\sum_{n\leqslant x/dd'}z^{\Omega(n,d')}.\end{aligned}$$

Pour tout couple $(d,d')$ de la sommation, on a $dd'\leqslant\mathrm{e}^t d^2\leqslant x^{1/10}x^{1/2}=x^{3/5}$. La somme intérieure est donc

$$\ll\frac{x}{dd'}(\log d')^{z-1}.$$

Il suit

$$S^*_{22}\ll x\sum_{\substack{d\in I_2\\ P^+(d)\leqslant r_v}}\frac{(yz)^{\Omega(d)}}{d}\sum_{d<d'\leqslant d\mathrm{e}^t}(yz)^{\Omega(d')}\frac{(\log d')^{z-1-\log z}}{d'}.\tag{2·7}$$

Lorsque $t \geqslant 1$, on peut majorer la somme intérieure par sommation d'Abel en utilisant le lemme 50.2 de [7]. On obtient, sous réserve que

$$A = A(y,z) := z(y+1) - 2 - \log z < 0,$$

l'estimation $\ll t(\log d)^A$. Lorsque $t < 1$, on vérifie grâce au théorème de Shiu [12] que la même estimation est valable puisque $d > 1/t^2$ pour tout $d \in I_2$. En reportant dans (2·7), il suit

$$S_{22}^* \ll xt \sum_{P^+(d) \leqslant r_v} \frac{(yz)^{\Omega(d)}(\log d)^A}{d}.$$

Nous choisissons $z = 1/(2y+1)$, de sorte que $A = (y+1)/(2y+1) + \log(2y+1) - 2$. Cette expression est une fonction croissante de $y$, donc $A \leqslant \log 3 - \frac{4}{3} < 0$. Une simple sommation d'Abel fournit alors

$$S_{22}^* \ll xtv\mathrm{e}^{(A+yz)v} = xtv\Big(\frac{2y+1}{\mathrm{e}}\Big)^v.$$

Compte tenu de (2·6), cela implique

$$\nabla_{22}(n_v) \leqslant \tfrac{1}{12} t \Big(\frac{2y+1}{\mathrm{e}}\Big)^v \mathrm{e}^{\xi\sqrt{v}}$$

sauf pour au plus $O(xv\mathrm{e}^{-c\xi\sqrt{v}})$ avec $c = 1 - \frac{2}{3}\log 3 > \frac{1}{11}$.

On procède de manière semblable pour majorer $S_{23}^* := \sum_{n \leqslant x} \nabla_{23}^*(n_v)$. Nous obtenons d'abord

$$S_{23}^* \ll \frac{x}{(\log x)^{\log z}} \sum_{\substack{d \in I_3 \\ P^+(d) \leqslant r_v}} \frac{(yz)^{\Omega(d)}}{d} \sum_{d < d' \leqslant \min(\mathrm{e}^t d, x/d)} \frac{(yz)^{\Omega(d')}}{d'} \Big(\log \frac{2x}{dd'}\Big)^{z-1}. \tag{2·8}$$

En raisonnant comme dans [7], pp 103–104, on montre que la somme intérieure est

$$\ll \frac{t}{z} (\log d)^{yz-1} \Big(\log \frac{2x}{d^2}\Big)^{z-1}.$$

En reportant dans (2·8) et en utilisant le lemme 50.2 de [7] pour effectuer l'intégration par parties en tenant compte de la condition $P^+(d) \leqslant r_v$, on parvient finalement à

$$S_{23}^* \ll txv\Big(\frac{2y+1}{\mathrm{e}}\Big)^v,$$

pour le choix $z = 1/(2y+1)$. On conclut comme précédemment que

$$\nabla_{23}(n_v) \leqslant \tfrac{1}{12} t \Big(\frac{2y+1}{\mathrm{e}}\Big)^v \mathrm{e}^{\xi\sqrt{v}}$$

avec au plus $O(x\mathrm{e}^{-\xi^2/11})$ exceptions.

En regroupant nos estimations, nous obtenons bien que (2·3) est valable avec la majoration annoncée pour le nombre d'exceptions.

Nous sommes maintenant en mesure d'établir l'estimation (1·12) du Théorème 2. Nous pouvons supposer $\kappa \leqslant \frac{2}{3}$ puisque le résultat découle du théorème 53 de [7] dans le cas contraire. On a pour tous $y \in ]0,1]$, $x \geqslant 3$, $1 < n \leqslant x$ et $k \in [1, \frac{2}{3}\log_2 x]$

$$U_k^*(n,\alpha) \leqslant y^{-k} \nabla(n;t,y)$$

avec $t := (\log n)^\alpha$. En comparant $t$ à $(\log x)^\alpha$ et en faisant appel au Théorème 4 pour $v = \log_2 x$, on obtient immédiatement que, lorsque $\frac{1}{2}(\mathrm{e}-1) \leqslant y \leqslant 1$,

$$U_k^*(n,\alpha) \leqslant (\log x)^{\alpha - \kappa \log y + \log(2y+1) - 1} \mathrm{e}^{\xi(x)\sqrt{\log_2 x}}$$

sauf peut-être pour $\ll x\mathcal{R}(x,\xi)$ entiers $n \leqslant x$. Cela implique le résultat annoncé en choisissant $y = \frac{1}{2}\max\{\kappa/(1-\kappa), \mathrm{e}-1\}$.

## 3. *Preuve du Théorème 2 — minorations*

Nous conservons les notations introduites au paragraphe précédent. Nous posons également

$$\nabla_k(m;t) := \sum_{\substack{dd'|m\\ \omega(dd')=k\\ |\log(d'/d)|\leqslant t}} \mu(dd')^2.$$

Nous établissons le résultat suivant, dont (1·13) est une conséquence immédiate.

**Théorème 5.** *On a uniformément pour* $x \geqslant 3$, $1 \leqslant v \leqslant \log_2 x$, $0 \leqslant t \leqslant \mathrm{e}^v$, $1 \leqslant \xi \leqslant \frac{1}{100}\sqrt{v}$, $1-1/\mathrm{e} \leqslant \lambda \leqslant \frac{2}{3}$, $k=\lambda v$,

$$\nabla_k(n_v;t) > t\mathrm{e}^{\Xi(\lambda)v-\xi\sqrt{v}} - 1 \tag{3·1}$$

*sauf peut-être pour au plus* $\ll x/\xi^{1/450}$ *entiers* $n \leqslant x$.[(1)]

*Remarque.* Nous n'avons pas cherché à optimiser la dépendance en $\xi$ de la majoration de l'ensemble exceptionnel.

Avant de passer à la démonstration, nous notons que la minoration du Théorème 2 pour $U_k^*(n,\alpha)$ résulte de l'énoncé précédent en choisissant, lorsque $k \leqslant \frac{2}{3}\log_2 x$, $v := \min\{1, \kappa/(1-1/\mathrm{e})\}\log_2 x$, ce qui correspond à $\lambda = \max(\kappa, 1-1/\mathrm{e})$.

*Démonstration du Théorème 5.* Bien que sensiblement plus technique, la démonstration est d'une structure essentiellement identique à celle du théorème 51 de [7]. Aussi nous renvoyons librement à [7] pour certains détails calculatoires.

Nous pouvons manifestement supposer $\xi$, et donc $v$, assez grand.

Posons

$$\varrho_k(m;\vartheta) := \sum_{\substack{dd'|m\\ \omega(dd')=k}} \mu(dd')^2(d'/d)^{i\vartheta},$$

et, pour $y \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}\varrho(m;\vartheta,y) :&= \sum_{j=0}^{\omega(m)} y^j \varrho_j(m;\vartheta)\\ &= \sum_{dd'|m} \mu(dd')^2(d'/d)^{i\vartheta}y^{\omega(dd')} = \prod_{p|m}\{1+2y\cos(\vartheta\log p)\}.\end{aligned} \tag{3·2}$$

On note que $\varrho_k(m;\vartheta) \in \mathbb{R}$ pour tous $m \geqslant 1$, $\vartheta \in \mathbb{R}$. Nous introduisons, pour chaque valeur du paramètre $a > 0$, les quantités

$$b_1 := 1+2a^2, \qquad b_2 := (1+2a)^2/b_1.$$

En fait, nous n'emploierons que des valeurs de $a$ satisfaisant à $\frac{1}{2}(\mathrm{e}-1) \leqslant a \leqslant 1$, de sorte que, notant $\sigma_0 := 2\mathrm{e}^2/(\mathrm{e}^2-2\mathrm{e}+3)$, on aura toujours

$$\sigma_0 \leqslant b_2 \leqslant 3. \tag{3·3}$$

1. Suite à une imprécision, l'exposant 1/50 apparaît à la place de 1/450 dans la version publiée de ce travail.

Posons $T = T_k(v) := \mathrm{e}^{\Xi(\lambda)v-\xi\sqrt{v}/2}$ et notons immédiatement, à fins de référence ultérieure, que

$$\mathrm{e}^{\Xi(\lambda)v+v} = (1+2a_\lambda)^v a_\lambda^{-k} \tag{3·4}$$

pour $k = \lambda v$ et $a_\lambda := \lambda/(2-2\lambda)$. Posons encore $Q(w) := w\log w - w + 1$ $(w > 0)$ et

$$\beta := Q(1/\log\sigma_0) \approx 0,003746.$$

La première étape de la démonstration consiste à établir que pour chaque $v$, tel que $1 \leqslant v \leqslant \log_2 x$, $k = \lambda v$, $1 - 1/\mathrm{e} \leqslant \lambda \leqslant \frac{3}{4}$ et chaque $\varepsilon > 0$ on a

$$\int_{-T}^{T} \varrho_k(n_v;\vartheta)^2 \,\mathrm{d}\vartheta \leqslant \frac{\sqrt{v}\,\xi^{1/3}}{\varepsilon \mathrm{e}^v}\,\varrho_k(n_v;0)^2 \tag{3·5}$$

pour tous les entiers $n \leqslant x$ sauf au plus $\ll x\{\varepsilon^\beta + \xi^{-1/50}\}$.

À cette fin, nous utiliserons systématiquement l'inégalité

$$\varrho_k(m;\vartheta)^2 \leqslant a^{-2k}\int_{-\frac12}^{\frac12} |\varrho(m;\vartheta, a\mathrm{e}^{2\pi i\varphi})|^2 \,\mathrm{d}\varphi \qquad (a > 0), \tag{3·6}$$

qui découle trivialement de (3·2) et de la formule de Parseval.

On établit d'abord que, posant $\omega_\vartheta(n) := \sum_{p|n,\, p\leqslant\exp(1/|\vartheta|)} 1$, on a pour chaque $a \in ]0,1[$

$$\sum_{n\leqslant x} \frac{|\varrho(n_v;\vartheta, a\mathrm{e}^{2\pi i\varphi})|^2}{b_1^{\omega(n_v)} b_2^{\omega_\vartheta(n_v)}} \ll x\Big(\frac{|\vartheta| + \mathrm{e}^{-v}}{1+|\vartheta|}\Big)^{b\varphi^2}\{(\log(3+|\vartheta|)\}^4 \tag{3·7}$$

uniformément pour $\vartheta \in \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$, $|\varphi| \leqslant \frac12$, $v \leqslant \log_2 x$, avec $b = b(a) := 32a/(1+2a)^2$. La preuve de (3·7) est identique, *mutatis mutandis*, à celle du lemme 51.3 de [7] et nous omettons les détails.

Ensuite, on scinde le domaine d'intégration de (3·5) sous la forme $\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2 \cup \mathcal{D}_3$, où les domaines $\mathcal{D}_j$ correspondent respectivement aux conditions $|\vartheta| \leqslant \mathrm{e}^{-v}/6\varepsilon$, $\mathrm{e}^{-v}/6\varepsilon < |\vartheta| \leqslant 1$ et $1 < |\vartheta| \leqslant T$. Désignons par $A_j(n_v)$ la contribution de $\mathcal{D}_j$ au membre de gauche de (3·5). Nous allons montrer que l'on a, pour tous les entiers non exceptionnels,

$$A_j(n_v) \leqslant \frac{\sqrt{v}\,\xi^{1/3}}{3\varepsilon\mathrm{e}^v}\,\varrho_k(n_v;0)^2, \tag{3·8}$$

et nous observons que le cas $j = 1$ est trivialement vérifié puisque l'intégrande de (3·5) n'excède pas $\varrho_k(n_v;0)^2$.

Pour traiter le cas $j = 2$, nous appliquons (3·6) avec $a = a_\lambda = \lambda/(2-2\lambda)$, de sorte que $k = 2av/(1+2a)$, et nous notons d'abord que l'inégalité

$$v - \tfrac15\sqrt{v\log\xi} \leqslant \omega(n_v) \leqslant v + \tfrac14\sqrt{v\log\xi} \tag{3·9}$$

a lieu pour tous les entiers $n \leqslant x$ sauf peut-être pour au plus $O(x\xi^{-1/50})$.[†] On a

$$\frac{\varrho_k(n_v;0)a_\lambda^k\sqrt{v}}{(1+2a_\lambda)^{\omega(n_v)}} = \binom{\omega(n_v)}{k}\frac{(2a_\lambda)^k\sqrt{v}}{(1+2a_\lambda)^{\omega(n_v)}}.$$

La formule de Stirling et un simple calcul d'accroissements finis fournissent alors pour $1 \leqslant \xi \leqslant \sqrt{v}$ et tout entier $n$ satisfaisant (3·9)

$$\frac{\varrho_k(n_v;0)a_\lambda^k\sqrt{v}}{(1+2a_\lambda)^{\omega(n_v)}} \gg \xi^{-\frac{1}{16}}. \tag{3·10}$$

---

[†] L'énoncé du théorème III.3.7 de [13] fournit immédiatement $O(x/\xi^{1/75})$, mais on obtient la majoration indiquée en insérant dans la démonstration que l'on a $Q(1-w) > w^2/2$ et $Q(1+w/4) > w^2/50$ pour $0 < w \leqslant 1$.

Ensuite, nous appliquons le lemme 51.2 de [7] qui permet, posant $\delta := 1 + \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon}$, $\alpha := \delta/\log\sigma_0$, de majorer par $O(x\varepsilon^{\beta})$ le nombre des entiers $n$ pour lesquels l'inégalité

$$\omega(n_v) - \omega_\vartheta(n_v) > \alpha\log(|\vartheta|\mathrm{e}^v) - 1$$

est en défaut pour au moins une valeur de $\vartheta \in \mathcal{D}_2$. Pour les entiers non exceptionnels, on a

$$(2a_\lambda + 1)^{-2\omega(n_v)} \leqslant b_1^{-\omega(n_v)} b_2^{1-\omega_\vartheta(n_v)} (|\vartheta|\mathrm{e}^v)^{-\delta},$$

où l'on a utilisé le fait que $b_2 \geqslant \sigma_0$. Puisque l'on a aussi $b_2 \leqslant 3$, on déduit de cette inégalité que

$$A_2(n_v) \leqslant 3(1+2a_\lambda)^{2\omega(n_v)} \int_{\mathcal{D}_2} \frac{\varrho_k(n_v;\vartheta)^2}{b_1^{\omega(n_v)} b_2^{\omega_\vartheta(n_v)}} \frac{\mathrm{d}\vartheta}{(|\vartheta|\mathrm{e}^v)^\delta}.$$

En insérant (3·6) et (3·10), il suit

$$A_2(n_v) \leqslant 3(1+2a_\lambda)^{2\omega(n_v)} a_\lambda^{-2k} A_2^*(n_v) \leqslant K v \varrho_k(n_v;0)^2 \xi^{\frac{1}{8}} A_2^*(n_v),$$

où $K$ est une constante absolue et où l'on a posé

$$A_2^*(n_v) := \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{\mathcal{D}_2} \frac{|\varrho_k(n_v;\vartheta,a\mathrm{e}^{2\pi i\varphi})|^2}{b_1^{\omega(n_v)} b_2^{\omega_\vartheta(n_v)}} \frac{\mathrm{d}\vartheta}{(|\vartheta|\mathrm{e}^v)^\delta} \,\mathrm{d}\varphi.$$

Par (3·7), on a

$$\begin{aligned}\sum_{n\leqslant x} A_2^*(n_v) &\ll x \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{\mathrm{e}^{-v}/6\varepsilon}^{1} \vartheta^{b\varphi^2} \frac{\mathrm{d}\vartheta}{(|\vartheta|\mathrm{e}^v)^\delta} \,\mathrm{d}\varphi \\ &\ll x\mathrm{e}^{-v} \int_{1/6\varepsilon}^{\mathrm{e}^v} \frac{\mathrm{d}u}{u^\delta\sqrt{v-\log u+1}} \ll x\frac{\mathrm{e}^{-v}}{\sqrt{v}\varepsilon^{3/4}}.\end{aligned}$$

Il en résulte que $A_2^*(n_v) \leqslant \mathrm{e}^{-v}/(3K\varepsilon\sqrt{v})$ sauf pour au plus $O\big(x\varepsilon^{1/4}\big)$ exceptions et donc que (3·8) est valable pour $j=2$ avec la majoration requise pour le nombre d'entiers exceptionnels.

On a $\omega_\vartheta(n_v) = 0$ pour $\vartheta \in \mathcal{D}_3$. Appliquons alors (3·6) avec maintenant $a := \sqrt{a_\lambda}$. La relation (3·10) fournit dans ce cas

$$a^{-2k} b_1^{\omega(n_v)} \ll \varrho_k(n_v;0)\sqrt{v}\,\xi^{\frac{1}{16}}. \tag{3·11}$$

Nous obtenons donc, en tenant compte de (3·6) et (3·9),

$$\begin{aligned}A_3(n_v) &\leqslant \frac{b_1^{\omega(n_v)}}{a^{2k}} A_3^*(n_v) \\ &\leqslant K v \xi^{\frac{1}{8}} \varrho(n_v;0)^2 \frac{a^{2k}}{b_1^{v-\frac{1}{5}\sqrt{v\log\xi}}} A_3^*(n_v)\end{aligned} \tag{3·12}$$

pour une constante absolue convenable $K$, avec

$$A_3^*(n_v) := \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{\mathcal{D}_3} \frac{|\varrho(n_v;\vartheta,a\mathrm{e}^{2\pi i\varphi})|^2}{b_1^{\omega(n_v)}} \,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi.$$

On remarque d'abord que, d'après (3·4), $a^{2k}b_1^{-v} = \mathrm{e}^{-\Xi(\lambda)v-v}$. La relation (3·7) fournit de plus

$$\sum_{n\leqslant x} A_3^*(n_v) \ll xTv^4.$$

On en déduit donc que $A_3^*(n_v) \leqslant Tv^4/3K\varepsilon$ sauf au plus pour $O(\varepsilon x)$ entiers $n \leqslant x$. En reportant dans (3·12), on obtient bien que (3·8) est encore valable pour $j = 3$ avec la majoration requise pour le nombre d'éventuelles exceptions.

Cela achève la preuve de (3·5).

Nous sommes maintenant en mesure d'aborder la phase finale de la démonstration. À ce stade, le raisonnement est très voisin de celui de la preuve du théorème 51 de [7], et nous nous contentons d'en indiquer les grandes lignes. Soient $v_1 := v - \frac{1}{4}\xi\sqrt{v}$, $v_2 := v - \frac{1}{8}\xi\sqrt{v}$. Le principe de base consiste à majorer par récurrence sur $w \in [v_1, v_2]$ la quantité

$$N_w := |\{n \leqslant x : \nabla_k(n_w) \leqslant tT\}|,$$

avec $T = T_k(v) = \mathrm{e}^{\Xi(\lambda)v-\xi\sqrt{v}/2}$, pour établir que

$$N_{v_2} \ll x/\xi^{1/450}$$

pour tout $t \in [1/T, H]$ avec $H := \mathrm{e}^{v-\xi\sqrt{v}/2}$. Cela fournit bien le résultat requis : lorsque $t < 1/T$, la minoration (3·1) est triviale, et, lorsque $H < t \leqslant \mathrm{e}^v$, on a pour tous les entiers non exceptionnels $\nabla_k(n_v; t) \geqslant \nabla_k(n_v; H) > HT \geqslant t\mathrm{e}^{\Xi(\lambda)v-\xi\sqrt{v}}$, ce qui implique bien (3·1).

Posons maintenant

$$V_k(m, z) := \sum_{\substack{dd'|m\\ \omega(dd')=k\\ |\log(d'/d)-z|\leqslant t}} \mu(dd')^2,$$

de sorte que $\nabla_k(m; t) = V_k(m, 0)$. On désigne par $\mathcal{L}_k(m)$ l'ensemble des nombres réels $z$ tels que $V_k(m, z) > tT$ et par $\lambda_k(m)$ la mesure de Lebesgue de $\mathcal{L}_k(m)$. Le point crucial de la démonstration consiste à montrer que, pour $1 \leqslant \xi \leqslant \frac{1}{100}\sqrt{v}$, $\varepsilon > 0$, et chaque $w$, $v_1 \leqslant w \leqslant v_2$, on a

$$\lambda_{k-2}(n_w) \geqslant \frac{\varepsilon\mathrm{e}^w}{\xi^{1/3}\sqrt{w}} \tag{3·13}$$

sauf peut-être pour au plus $\ll \eta x$ exceptions, avec $\eta := \varepsilon^\beta + \xi^{-1/50}$.

Admettons momentanément (3·13). Soit $N_w^*$ le nombre des entiers $n \leqslant x$ qui sont comptés dans $N_w$ et qui satisfont en outre aux trois conditions

(a) $\log n_w \leqslant R\mathrm{e}^w$,
(b) $w - \frac{1}{2}\xi\sqrt{w} \leqslant \omega(n_w) \leqslant w + \frac{1}{2}\xi\sqrt{w}$,
(c) $\lambda_{k-2}(n_w) \geqslant \varepsilon\mathrm{e}^w/(\xi^{1/3}\sqrt{w})$,

où l'on a posé $R := \log\xi$. Le nombre d'exceptions à (a) est $\ll x/\sqrt{\xi}$ — cf., par exemple, [14], exercice III.5.6 — et le nombre d'exceptions à (b) est $\ll x\mathrm{e}^{-\xi^2/50}$. Il résulte donc ce qui précède que

$$N_w \leqslant N_w^* + c_1\eta x, \tag{3·14}$$

où $c_1$ est absolue. Considérons alors le nombre $D_w$ des entiers $n$ comptés dans $N_w^*$ et qui possèdent deux facteurs premiers $p$ et $q$ tels que

(d) $2R\mathrm{e}^w < \log p \leqslant 3R\mathrm{e}^w$,
(e) $\log p < \log q \leqslant \log p + R\mathrm{e}^w$,
(f) $\log(q/p) \in \mathcal{L}_{k-2}(n_w)$.

La condition (f) garantit que $V_{k-2}(n_w;\log(q/p))>tT$, donc que l'inégalité

$$|\log(pd'/qd)|\leqslant t$$

possède plus de $tT$ solutions, et partant que $\nabla_k(n_{w+r})>tT$ avec $r:=1+[\log 4R]$. Cela implique

$$D_w\leqslant N_w-N_{w+r}. \tag{3·15}$$

En raisonnant comme dans [7] (pages 110–111), on montre que l'on a pour $v_1\leqslant w\leqslant v_2$

$$D_w>c_2\frac{\varepsilon}{R^2\xi^{1/3}\sqrt{w}}N_w^*. \tag{3·16}$$

Nous ne détaillons pas les calculs correspondants qui sont identiques à ceux de [7].

Supposons maintenant que l'on ait $N_{v_2}\geqslant 2c_1\eta x$. Il résulte alors de (3·14) que $N_w^*\geqslant\frac12 N_w$ ($v_1\leqslant w\leqslant v_2$). Par (3·15) et (3·16), on obtient donc que l'on a pour chaque $w$, $v_1\leqslant w\leqslant v_2-r$,

$$N_{w+r}\leqslant N_w(1-c\varepsilon/\sqrt{v}\xi^{1/3}R^2)$$

où $c$ est une constante absolue. Par itération, on obtient

$$N_{v_2}\ll x(1-c\varepsilon/\sqrt{v}\xi^{1/3}R^2)^{\xi\sqrt{v}/8r}\ll x\mathrm{e}^{-c\varepsilon\xi^{2/3}/8R^2r}\ll x/\xi,$$

pour le choix $\varepsilon=\xi^{-3/5}$. Cela montre que $N_{v_2}\ll\eta x\ll x/\xi^{1/450}$ en toute circonstance et achève ainsi la démonstration.

Il reste à établir (3·13). Comme $V_{k-2}(m,z)=0$ pour $|z|>t+\log m$, on peut écrire pour tout entier $m$

$$\begin{aligned}2t\varrho_{k-2}(m;0)=\int_{-\infty}^{\infty}V_{k-2}(m;z)\,\mathrm{d}z&\leqslant 2tT(t+\log m)+\int_{\mathcal{L}_{k-2}(m)}V_{k-2}(m,z)\,\mathrm{d}z\\&\leqslant 2tT(t+\log m)+\Big\{\lambda_{k-2}(m)\int_{-\infty}^{\infty}V_{k-2}(m;z)^2\,\mathrm{d}z\Big\}^{1/2}.\end{aligned} \tag{3·17}$$

Maintenant, on introduit la fonction auxiliaire

$$F_t(u):=2\Big(\frac{\sin(u/2t)}{u/2t}\Big)^2=2t\int_{-1/t}^{1/t}\mathrm{e}^{i\vartheta u}(1-|\vartheta t|)\,\mathrm{d}\vartheta,$$

et l'on remarque que $F_t(u)\geqslant 1$ pour $|u|\leqslant t$. Cela implique

$$V(m,z)\leqslant\sum_{\substack{dd'|m\\ \omega(dd')=k}}\mu(dd')^2F_t(\log(d'/d)-z)=2t\int_{-1/t}^{1/t}\mathrm{e}^{-i\vartheta z}(1-|\vartheta t|)\varrho_{k-2}(m;\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta,$$

et donc, en vertu de la formule de Parseval,

$$\int_{-\infty}^{\infty}V_{k-2}(m;z)^2\,\mathrm{d}z\leqslant 8\pi t^2\int_{-1/t}^{1/t}\varrho_{k-2}(m;\vartheta)^2\,\mathrm{d}\vartheta.$$

En reportant dans (3·17), on obtient donc, sous l'hypothèse $T(t+\log m) \leqslant \frac{1}{2}\varrho_{k-2}(m;0)$,

$$\lambda_{k-2}(m)\int_{-1/t}^{1/t}\varrho_{k-2}(m;\vartheta)^2\,\mathrm{d}\vartheta \geqslant \frac{\varrho_{k-2}(m;0)^2}{8\pi}. \tag{3·18}$$

Choisissons $m = n_w$ avec $v_1 \leqslant w \leqslant v$. On a vu que l'on peut supposer $\log n_w \leqslant R\mathrm{e}^w$, quitte à négliger un ensemble exceptionnel de taille acceptable. On a alors, pour $v_1 \leqslant w \leqslant v_2$, $\xi$ assez grand, et avec $a = a_\lambda = \lambda/(2-2\lambda)$,

$$\begin{aligned} T_{k-2}(v)(t+\log n_w) &\leqslant \frac{(1+2a_\lambda)^v\mathrm{e}^{-\xi\sqrt{v}/2}}{a_\lambda^k}\{\mathrm{e}^{v-\xi\sqrt{v}/2}+(\log\xi)e^w\} \\ &\leqslant \mathrm{e}^{\Xi(\lambda_1)w+w-\xi\sqrt{w}/3}, \end{aligned}$$

où $\lambda$ et $\lambda_1$ sont définis par $k-2=\lambda v=\lambda_1 w$. Cependant, la relation (3·10) appliquée avec $v=w$, $\lambda=\lambda_1\in\big[1-1/\mathrm{e},\frac{3}{4}\big]$, fournit

$$\varrho_{k-2}(n_w;0) \geqslant \frac{\mathrm{e}^{\Xi(\lambda_1)w+w-\sqrt{w\log\xi}}}{\xi^{\frac{1}{16}}\sqrt{w}}$$

pour tous les entiers $n \leqslant x$ sauf au plus $O(x/\xi^{1/50})$ d'entre eux. Cela montre que l'on a pour $\xi$ assez grand $T_{k-2}(v)(t+\log n_w) \leqslant \frac{1}{2}\varrho_{k-2}(n_w;0)$, et par conséquent que (3·18) est valable pour $m=n_w$ sauf peut-être pour un nombre acceptable d'entiers exceptionnels.

Pour $t > 1/T_{k-2}(v) \geqslant 1/T_{k-2}(w)$, et $m=n_w$, la relation (3·5) permet de majorer l'intégrale de (3·18). La minoration (3·13) en résulte immédiatement.

## 4. *Preuve du Théorème 1*

Le résultat découle facilement de (1·11) et du Théorème 2.

Posons $r(\alpha) := \log 3 - 1 - \alpha$, $s(\alpha) := \frac{2}{3} - G(\alpha)$. Alors $r(\alpha) < s(\alpha)$ et la concavité de $\Xi$ implique que $\Xi(G(\alpha)+h) \geqslant \alpha + r(\alpha)h/s(\alpha)$ dès que $0 \leqslant h \leqslant s(\alpha)$. En appliquant (1·13) à $\frac{1}{2}r(\alpha)\xi$, on en déduit que

$$U_k^*(n,-\alpha) > \mathrm{e}^{-1+\frac{1}{2}r(\alpha)\xi\sqrt{\log_2 x}} - 1 > 1$$

pour $x$ assez grand, $k := \big[G(\alpha)\log_2 x + s(\alpha)\xi\sqrt{\log_2 x}\,\big]$ et tous les entiers $n \leqslant x$ sauf au plus $\ll x/\xi^{1/50}$. En reportant dans l'inégalité de gauche de (1·11), on obtient, pour ces mêmes entiers,

$$T^*(n,-\alpha) > \frac{\tau(n)}{2^k} > \tau(n)^{1-G(\alpha)}\mathrm{e}^{-\xi\sqrt{\log_2 x}}\Big(\frac{\tau(n)}{(\log x)^{\log 2}}\Big)^{G(\alpha)}\mathrm{e}^{\{1-s(\alpha)\}\xi\sqrt{\log_2 x}},$$

ce qui implique pleinement la validité de (1·8) dans les conditions du théorème.

La majoration (1·9) résulte semblablement de l'inégalité de droite de (1·11) en observant que (1·12), avec $c\xi$ au lieu de $\xi$ $(0 \leqslant c \leqslant 1)$, est valable simultanément pour tous les indices $k \leqslant \Omega(n)$ avec au plus $\ll x(\log_2 x)^2\mathrm{e}^{-c^2\xi^2/11}$ exceptions. Choisissons $c := \sqrt{\frac{11}{12}G(\alpha)/G'(\alpha)}$. Un calcul d'accroissements finis tenant compte de la concavité de $\Xi$ sur $[0,\frac{2}{3}]$ fournit donc que $U_k^*(n,-\alpha)=0$ dès que $k \leqslant G(\alpha)\big\{\log_2 x - \xi\sqrt{\log_2 x}\big\}$ sauf pour au plus $\ll x(\log_2 x)^2\mathrm{e}^{-G(\alpha)^2\xi^2/12G'(\alpha)^2}$ entiers $n \leqslant x$. Comme $\Xi(\kappa)-\kappa\log 2$ est une fonction décroissante de $\kappa$ sur $[0,\frac{2}{3}]$, on obtient le résultat indiqué en utilisant le fait que $\Omega(n)2^{\Omega(n)} \leqslant \tau(n)\mathrm{e}^{\frac{1}{3}\xi\sqrt{\log_2 x}}$ pour tous les entiers $n \leqslant x$ sauf au plus $\ll x\,\mathrm{e}^{-\xi^2/7}$.

## 5. *Preuve du Théorème 3*

Posons $L=L(n):=(\log n)^{-\alpha}$ et $f(n,\vartheta):=|\tau(n,\vartheta/L)|^2-\tau(n)$. On a alors

$$H(n,\alpha)=\sup_{\substack{a\in\mathbb{R}\\ 0<b\leqslant 1}}\Big|\int_a^{a+b} f(n,\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta\Big|.$$

De plus, (1·4), (1·5), (1·8) et (1·9) fournissent

$$\mathrm{e}^{-\xi(n)\sqrt{\log_2 n}}\leqslant\frac{\int_0^\infty w(\vartheta)f(n,\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta}{\tau(n)^{1-G(\alpha)}}\leqslant \mathrm{e}^{O(\sqrt{\log_2 n\log_3 n})}\qquad \mathrm{pp},$$

avec $w(\vartheta)=\dfrac{1}{2\pi}\Big(\dfrac{\sin(\vartheta/2)}{\vartheta/2}\Big)^2$. (La minoration provient en fait de celle de $T^*(n,-\alpha-\varepsilon_n)$ avec $\varepsilon_n:=\log 2/\log_2 n$ : le Théorème 5 suffit pour montrer que cette quantité vérifie (1·8).) Une intégration par parties permet d'écrire, pour chaque entier $a\geqslant 0$,

$$\Big|\int_a^{a+1} w(\vartheta)f(n,\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta\Big|\leqslant 3w^*(a)H(n,\alpha),$$

avec $w^*(a):=\sup_{a\leqslant u\leqslant a+1} w(u)\ll 1/(1+a^2)$. On déduit donc la minoration de l'énoncé de la convergence de la série $\sum_{a\in\mathbb{N}} w^*(a)$.

Pour établir la majoration, on observe que, notant $c=a+b/2$, on a pour tout $n>1$ et tout $a\in\mathbb{R}$

$$\int_a^{a+b} f(n,\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta=\sum_{\substack{d|n,d'|n\\ d\neq d'}}\Big(\frac{d'}{d}\Big)^{ic}\frac{\sin\{b\log(d'/d)/2L\}}{\log(d'/d)/2L},\tag{5·1}$$

et par conséquent

$$H(n,\alpha)\leqslant\sum_{\substack{d|n,d'|n\\ d\neq d'}}\min\Big(1,\frac{2L}{|\log(d'/d)|}\Big)\leqslant\sum_{\substack{d|n,d'|n\\ d\neq d'}}\frac{2L}{|\log(d'/d)|}.\tag{5·2}$$

L'inégalité annoncée résulte donc du lemme 2 de Hall dans [5].

On peut remarquer cependant que la contribution au terme central de (5·2) des couples $(d,d')$ tels que $|\log(d'/d)|\leqslant L=(\log n)^{-\alpha}$ peut, grâce au Théorème 2, être majorée par $\tau(n)^{1-G(\alpha)+o(1)}$. Dans la mesure où l'on peut attendre des compensations génériques pour la sous-somme de (5·1) correspondant à la condition supplémentaire $|\log(d'/d)|>L$, cela sous-tend l'hypothèse que l'ordre normal de $H(n,\alpha)$ est $\tau(n)^{1-G(\alpha)+o(1)}$.

## Bibliographie


[1] P. Erdős, On the density of some sequences of integers, *Bull. Amer. Math. Soc.* **54** (1948), 685–692.
[2] P. Erdős, On some applications of probability to analysis and number theory, *J. London Math. Soc.* **39** (1964), 692–696.
[3] P. Erdős & R.R. Hall, The propinquity of divisors, *Bull. London Math. Soc.* **11**, (1979), 304–307.
[4] R. R. Hall, The propinquity of divisors, *J. London Math. Soc.* (2) **19** (1979), 35-40.
[5] R. R. Hall, Ω theorems for the complex divisor function, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **115** (1994), 145–157.

[6] R. R. Hall & G. Tenenbaum, Sur la proximité des diviseurs, *Recent Progress in Analytic Number Theory* (H. Halberstam and C. Hooley eds.), vol. 1, 103–113, Academic Press, 1981.
[7] R.R. Hall & G. Tenenbaum, *Divisors*, Cambridge tracts in mathematics, no 90, Cambridge University Press, 1988.
[8] H. Maier & G. Tenenbaum, On the set of divisors of an integer, *Invent. Math.* **76** (1984), 121–128.
[9] H. Maier & G. Tenenbaum, On the normal concentration of divisors, *J. London Math. Soc.* (2) **31** (1985), 393–400.
[10] H. L. Montgomery, A note on the mean values of multiplicative functions, *Inst. Mittag-Leffler* (1978), Report no. 17.
[11] H. L. Montgomery, *Ten lectures on the interface between analytic number theory and harmonic analysis*, CBMS regional conferences series in mathematics, no. 84, American mathematical society, Providence, Rhode Island (1994), 220 pp.
[12] P. Shiu, A Brun–Titchmarsh theorem for multiplicative functions, *J. reine angew. Math.* **313** (1980), 161–170.
[13] G. Tenenbaum, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, Cours spécialisés, no 1, Société Mathématique de France (1995), xv + 457 pp.
[14] G. Tenenbaum, en collaboration avec Jie Wu, *Exercices corrigés de théorie analytique et probabiliste des nombres*, Cours spécialisés, no 2, Société Mathématique de France (1996), xiv + 251 pp.