

Remarques sur une somme liée à la fonction de Möbius

Régis de la Bretèche, François Dress & Gérald Tenenbaum

Abstract. For integer $n \geq 1$ and real $z \geq 1$, define $M(n, z) := \sum_{d|n, d \leq z} \mu(d)$ where μ denotes the Möbius function. Put $\mathcal{L}(y) := \exp\{(\log y)^{3/5}/(\log_2 y)^{1/5}\}$ ($y \geq 3$). We show that, for a suitable, explicit constant $L > 0$ and some constant $c > 0$, we have $S(x, z) = Lx + O(x/\mathcal{L}(3\xi)^c)$ uniformly for $x \geq 1$, $\xi \leq z \leq x/\xi$.

Keywords : Möbius function, average order, Selberg’s sieve, Bombieri–Vinogradov theorem.

2010 Mathematics Subject Classification : 11A25, 11N37, 11N56.

1. Introduction

Pour $\in \mathbb{N}^*$, $x, z \in \mathbb{R}^+$, posons

$$M(n, z) := \sum_{d|n, d \leq z} \mu(d), \quad S(x, z) := \sum_{n \leq x} M(n, z)^2, \quad S(z) := \sum_{m, n \leq z} \frac{\mu(m)\mu(n)}{[m, n]}.$$

La somme $S(x, z)$ intervient dans divers problèmes arithmétiques, notamment le crible de Selberg [3], la méthode de Vaughan pour prouver le théorème de Bombieri–Vinogradov [10], et le problème de Goldbach ternaire — cf. [4], formule (5.6). La question des tailles normale ou maximale de $|M(n, z)|$ est également intéressante — voir en particulier [6], [7].

Nous avons trivialement

$$(1.1) \quad S(x, z) = xS(z) + O(z^2) \quad (x \geq 1, z \geq 1).$$

Pour $s = \sigma + i\tau \in \mathbb{C}$, définissons une fonction fortement multiplicative par la formule $f(n; s) := \prod_{p|n} |1 - p^{-s}|^2$. Il a été montré dans [2] que

$$(1.2) \quad S(z) = L + o(1) \quad (z \rightarrow \infty),$$

avec

$$L = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right) \left(1 + \frac{f(p; i\tau) - 1}{p}\right) \frac{d\tau}{\tau^2}.$$

D’après [1], nous avons également, pour une constante $c > 0$ convenable,

$$(1.3) \quad S(z) = L + O(\mathcal{L}(z)^{-c}) \quad (z \geq 16)$$

avec $\mathcal{L}(z) := \exp\{(\log z)^{3/5}/(\log_2 z)^{1/5}\}$. Cette estimation ne sera pas utilisée dans la suite.

Il résulte en particulier de (1.1) et de (1.2) sous la forme faible $S(z) \ll 1$ que

$$(1.4) \quad S(x, z) \ll x + z^2 \quad (x \geq 1, z \geq 1).$$

La première motivation du présent travail consiste à préciser la majoration (1.4) lorsque $z^2 \gg x$. Nous montrons notamment que

$$(1.5) \quad S(x, z) \ll x \quad (x \geq 1, z \geq 1).$$

Nous pouvons établir le résultat suivant.

Théorème 1.1. *Il existe une constante absolue $c > 0$ telle que, pour tous $\xi \geq 1$, $\xi \leq z \leq x/\xi$, nous ayons*

$$(1.6) \quad S(x, z) = Lx + O\left(\frac{x}{\mathcal{L}(3\xi)^c}\right).$$

Remarques. (i) On déduit (1.3) de (1.2) et (1.6) en choisissant par exemple $x = z^3$.

(ii) Dans son livre à paraître (cf. [5]), Helfgott indique la valeur numérique $L \approx 0,4407$.

2. Démonstration

Désignons par $k(n)$ le noyau sans facteur carré d'un entier n , par $\varphi(n)$ la valeur en n de l'indicatrice d'Euler, et posons

$$L(m) := \frac{\varphi(m)^2}{2\pi m^2 k(m)} \int_{\mathbb{R}} f(m; i\tau) \prod_{p \nmid m} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^2 \left(1 + \frac{f(p; i\tau)}{p}\right) \frac{d\tau}{\tau^2} \quad (m \geq 1).$$

Cette quantité est bien définie puisque l'intégrande est, pour chaque valeur de m , classiquement comparable à $1/|\zeta(1+i\tau)|^2$. Un calcul de routine permet de vérifier que

$$\sum_{m \geq 1} \frac{L(m)}{m} = L.$$

Posons

$$\psi(n) := \prod_{p|n} (p+1), \quad r(n) := \prod_{p|n} \left(1 + \frac{2}{\sqrt{p}}\right) \quad (n \geq 1).$$

Le lemme suivant, adapté de l'une des approches développées dans [2], constitue l'ingrédient essentiel de la preuve. Nous utiliserons à plusieurs reprises la formule

$$(2.1) \quad \sum_{k \leq y} \mu(hk)^2 = \frac{6yh}{\pi^2 \psi(h)} + O\left(r(h)\sqrt{y}\right) \quad (h \geq 1, \mu(h)^2 = 1, y \geq 1)$$

établie dans [8] — formule (10.1).

Lemme 2.1. *Nous avons, uniformément pour $m \geq 1, y \geq 1$,*

$$(2.2) \quad T(y; m) := \frac{6}{\pi^2} \sum_{d, t \leq y} \frac{\mu(d)\mu(t)}{\psi([d, t, m])} = L(m) + O\left(\frac{1}{\mathcal{L}(y)^c \sqrt{\psi(m)}}\right),$$

où c est une constante positive convenable.

Démonstration. Il est aisé de constater que, pour chaque valeur de m , l'expression $T(y; m)$ tend vers une limite lorsque $y \rightarrow \infty$. En effet, notant $\psi_m(n) := \prod_{p|n, p \nmid m} (p+1)$, nous avons

$$(2.3) \quad \begin{aligned} T(y; m) &= \frac{6}{\pi^2 \psi(m)} \sum_{d, t \leq y} \frac{\mu(d)\mu(t)}{\psi_m(d)\psi_m(t)} \sum_{\substack{\delta | (d, t) \\ (\delta, m) = 1}} \delta \\ &= \frac{6}{\pi^2 \psi(m)} \sum_{\substack{\delta \leq y \\ (\delta, m) = 1}} \frac{\delta}{\psi(\delta)^2} \left(\sum_{d \leq y/\delta} \frac{\mu(d\delta)}{\psi_m(d)} \right)^2. \end{aligned}$$

Un argument standard d'intégration complexe implique que la somme intérieure en d est, par exemple, $\ll \psi(m)^{1/4} r(\delta) \mathcal{L}(2y/\delta)^{-c}$. En scindant la sommation extérieure selon les valeurs de $\lfloor y/\delta \rfloor$, on obtient alors, parallèlement au raisonnement tenu dans [2], la convergence souhaitée et la majoration

$$(2.4) \quad T(y; m) - \lim_{y \rightarrow \infty} T(y; m) \ll \frac{1}{\mathcal{L}(y)^c \sqrt{\psi(m)}}.$$

Pour la commodité du lecteur, indiquons quelques étapes de la preuve de cette estimation. Nous pouvons écrire

$$(2.5) \quad T(y; m) = \frac{6}{\pi^2 \psi(m)} \sum_{j \leq y^{1/4}} a_m(j, y) + O(R(y; m))$$

avec

$$a_m(j, y) := \sum_{\substack{y/(j+1) < \delta \leq y/j \\ (\delta, m)=1}} \frac{\delta \mu(\delta)^2}{\psi(\delta)^2} \left(\sum_{d \leq j} \frac{\mu(d\delta)}{\psi_m(d)} \right)^2 \ll \frac{\sqrt{\psi(m)}}{j \mathcal{L}(2j)^{2c}} \quad (j \leq y^{1/4}),$$

$$R(y; m) := \frac{1}{\psi(m)} \sum_{\substack{\delta \leq y^{3/4} \\ (\delta, m)=1}} \frac{\delta}{\psi(\delta)^2} \left(\sum_{d \leq y/\delta} \frac{\mu(d\delta)}{\psi_m(d)} \right)^2 \ll \frac{1}{\sqrt{\psi(m)} \mathcal{L}(y)^c}.$$

Pour évaluer le terme principal de (2.5), nous développons le carré et intervertissons les sommations dans l'expression de $a_m(j, y)$. Il vient

$$a_m(j, y) = \sum_{d, t \leq j} \frac{\mu(d)\mu(t)}{\psi_m(d)\psi_m(t)} \sum_{\substack{y/(j+1) < \delta \leq y/j \\ (\delta, dtm)=1}} \frac{\delta \mu(\delta)^2}{\psi(\delta)^2}.$$

La somme intérieure en δ peut être évaluée par la méthode usuelle d'intégration complexe en utilisant la majoration classique $\zeta(\frac{1}{2} + i\tau) \ll_\varepsilon 1 + |\tau|^{1/6+\varepsilon}$. Nous obtenons

$$\sum_{\substack{y/(j+1) < \delta \leq y/j \\ (\delta, dtm)=1}} \frac{\delta \mu(\delta)^2}{\psi(\delta)^2} = B \log \left(1 + \frac{1}{j} \right) \alpha(dtm) + O \left(\frac{r(dtm)j^{3/8}}{y^{3/8}} \right) \quad (j \leq y^{1/4}),$$

où l'on a posé

$$B := \prod_p \left(1 - \frac{3p+1}{p(p+1)^2} \right), \quad \alpha(n) := \prod_{p|n} \left(1 - \frac{p}{p^2 + 3p + 1} \right) \quad (n \geq 1).$$

L'estimation (2.4) en découle ainsi que la majoration

$$\lim_{y \rightarrow \infty} T(y; m) = \frac{6B}{\pi^2 \psi(m)} \sum_{j \geq 1} \log \left(1 + \frac{1}{j} \right) \sum_{d, t \leq j} \frac{\alpha(dtm) \mu(d)\mu(t)}{\psi_m(d)\psi_m(t)} \ll \frac{1}{\sqrt{\psi(m)}}.$$

Il reste à identifier la limite apparaissant dans (2.4). À cette fin, nous observons que l'évaluation

$$(2.6) \quad \sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv 0 \pmod{h}}} \mu(n)^2 M(n, z)^2 = x \mu(h)^2 T(z; h) + O(z\sqrt{x}),$$

qui découle de (2.1), implique, via la formule de Plancherel

$$\int_0^\infty M(n, e^u)^2 e^{-2\sigma u} du = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(n; s) \frac{d\tau}{|s|^2} \quad (\sigma > 0),$$

que, pour $\sigma > 1/2$, $\mu(h)^2 = 1$,

$$x \int_0^\infty T(e^u; h) e^{-2\sigma u} du + O\left(\frac{\sqrt{x}}{\sigma - 1/2}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv 0 \pmod{h}}} \mu(n)^2 f(n; s) \frac{d\tau}{|s|^2} \sim x \lambda(h),$$

avec

$$\lambda(h) := \frac{\varphi(h)}{2\pi h^2} \int_{\mathbb{R}} f(h; s) \prod_{p \nmid h} \left(1 - \frac{1}{p} \right) \left(1 + \frac{f(p; s)}{p} \right) \frac{d\tau}{|s|^2}.$$

En faisant tendre x vers l'infini, nous obtenons, toujours pour $\sigma > 1/2$, $\mu(h)^2 = 1$,

$$\int_0^\infty T(e^u; h) e^{-2\sigma u} du = \frac{\varphi(h)}{2\pi h^2} \int_{\mathbb{R}} f(h; s) \prod_{p \nmid h} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \left(1 + \frac{f(p; s)}{p}\right) \frac{d\tau}{|s|^2}.$$

En notant que les deux membres sont prolongeables en fonctions analytiques de σ dans le demi-plan $\Re \sigma > 0$ et en multipliant, comme dans [2], cette égalité par $1/\zeta(1+2\sigma)$, nous obtenons

$$\sigma \int_0^\infty T(e^u; m) e^{-\sigma u} du = L(m) + o(1) \quad (\sigma \rightarrow 0+),$$

après spécialisation $h = k(m)$. Compte tenu de (2.4), cela établit bien (2.2). \square

Nous sommes à présent en mesure de prouver le Théorème 1.1.

Lorsque $\xi \leq z \leq \sqrt{x}/\mathcal{L}(x)^{2c}$, en notant que l'on a identiquement $M(m, z) = M(k(m), z)$, nous pouvons écrire, grâce à (2.1),

$$S(x, z) = 1 + \sum_{m \leq x} \sum_{\substack{1 < k \leq x/m \\ k(m) | k}} \mu(k)^2 M(k, z)^2 = x \sum_{m \leq x} \frac{T(z; m)}{m} + O\left(\frac{x}{\mathcal{L}(x)^c}\right),$$

où le terme d'erreur peut être par exemple obtenu à l'aide d'une majoration de type Rankin. Il suffit alors d'appliquer (2.2) pour conclure dans ce cas compte tenu de la majoration triviale $L(m) \ll 1/\sqrt{k(m)}$.

Considérons ensuite le cas $\sqrt{x}\mathcal{L}(x)^{2c} < z \leq x/\xi$. Nous exploitons alors la symétrie des diviseurs d'un entier n autour de \sqrt{n} .

Notant $M^*(n, z) := \sum_{d|n, d < z} \mu(d)$, nous avons

$$\begin{aligned} (2.7) \quad S(x, z) - 1 &= \sum_{m \leq x} \sum_{\substack{z < k \leq x/m \\ k(m) | k}} \mu(k)^2 M^*(k, k/z)^2 \\ &= \sum_{m \leq x/z} \sum_{d, t \leq x/mz} \mu(d)\mu(t) \sum_{z \max(d, t)/H < k \leq x/mH} \mu(Hk)^2, \end{aligned}$$

où l'on a posé $H := [k(m), d, t]$, de sorte que $\mu(H)^2 = 1$.

Appliquons (2.1) avec $h = H$ pour évaluer la somme intérieure. La contribution du terme d'erreur de (2.1) au membre de droite de (2.7) est

$$(2.8) \quad \ll \sum_{m \leq x/z} \sum_{d, t \leq x/mz} r(H) \mu(d)^2 \mu(t)^2 \sqrt{\frac{x}{mH}} \ll \frac{x^{3/2}}{z}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} (2.9) \quad S(x, z) &= \frac{6z}{\pi^2} \sum_{m \leq x/z} \sum_{d, t \leq x/mz} \frac{\mu(d)\mu(t)}{\psi(H)} \int_{\max(d, t)}^{x/mz} dy + O\left(\frac{x^{3/2}}{z}\right) \\ &= z \sum_{m \leq x/z} \int_1^{x/mz} T(y; m) dy + O\left(\frac{x^{3/2}}{z}\right). \end{aligned}$$

La relation (2.2) permet à nouveau de conclure.

Il reste à examiner le cas $\sqrt{x}/\mathcal{L}(x)^{2c} < z \leq \sqrt{x}\mathcal{L}(x)^{2c}$. Nous pouvons supposer la constante c arbitrairement petite, et en particulier que, pour tout $T \geq 16$, la fonction zêta de Riemann n'a pas de zéro dans le rectangle $\{s = \sigma + i\tau : 1 - 2\beta(T) \leq \sigma \leq 1, |\tau| \leq T\}$, où l'on a posé $\beta(T) := c/\{(\log T)^{2/3}(\log_2 T)^{1/3}\}$. Il résulte alors de cette hypothèse que

$$(2.10) \quad \sum_{d \leq y} \frac{\mu(d\delta)}{d^s} \ll \frac{r(\delta)}{\mathcal{L}(y)^c} \quad \left(\delta \geq 1, \sigma > 1 - \beta(T), |\tau| \leq T := \mathcal{L}(y)^{5c}\right).$$

Cette majoration est établie par la méthode standard d'intégration complexe. Nous omettons les détails.

Grâce à la formule de Perron effective (cf., par exemple, [9], th. II.2.3), nous pouvons alors écrire, avec $\kappa := 1 + 1/\log x$, $T = \mathcal{L}(x)^{2c}$, $\lambda(\delta; s) = \mu(\delta)^2 \prod_{p|\delta} (1 - p^{-s})$,

$$\begin{aligned} S(x, z) &= \sum_{d, t \leq z} \mu(d)\mu(t) \left\lfloor \frac{x}{[d, t]} \right\rfloor \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT} \sum_{\delta \leq z} \frac{\lambda(\delta; s)}{\delta^s} \left(\sum_{d \leq z/\delta} \frac{\mu(\delta d)}{d^s} \right)^2 \zeta(s) \frac{x^s}{s} ds + O\left(\frac{x(\log x)^4}{T}\right). \end{aligned}$$

Déplaçons alors le segment d'intégration jusque $\sigma = 1 - \beta(T)$, utilisons la majoration (2.10) pour estimer la contribution des $\delta \leq x^{1/4}$ (ce qui garantit que $\mathcal{L}(x)^{2c} \leq \mathcal{L}(z/\delta)^{5c}$), et employons la majoration

$$\begin{aligned} \sum_{x^{1/4} < \delta \leq z} \frac{\lambda(\delta; s)}{\delta^s} \left(\sum_{d \leq z/\delta} \frac{\mu(\delta d)}{d^s} \right)^2 \zeta(s) \frac{x^s}{s} &\ll \sum_{\delta > x^{1/4}} \frac{\lambda(\delta; 1/2) z^{2\beta(T)} x^{1-\beta(T)} \log T}{\beta(T)^2 \delta^{1+\beta(T)} (1 + |\tau|)} \\ &\ll \frac{z^{2\beta(T)} x^{1-5\beta(T)/4} \log T}{\beta(T)^3 (1 + |\tau|)} \ll \frac{x^{1-\beta(T)/5}}{1 + |\tau|} \end{aligned}$$

pour estimer la contribution des $\delta > x^{1/4}$. Le calcul du résidu en $s = 1$ découlant d'une simple interversion de sommations, nous obtenons, si la constante c est assez petite,

$$S(x, z) = xS(z) + O(x/\mathcal{L}(x)^c),$$

Cela achève la démonstration.

Remerciements. Les auteurs tiennent ici à remercier Harald Helfgott pour leur avoir indiqué son estimation numérique de la constante L .

Bibliographie

- [1] M. Balazard, M. Naïmi & Y.-F. Pétermann, Étude d'une somme arithmétique multiple liée à la fonction de Möbius, *Acta Arith.* **132.3** (2008), 245–298.
- [2] F. Dress, H. Iwaniec & G. Tenenbaum, Sur une somme liée à la fonction de Möbius, *J. reine angew. Math.* **340** (1983), 53–58.
- [3] S. Graham, An asymptotic estimate related to Selberg's sieve, *J. Number Theory* **10**, n° 1 (1978), 83–94.
- [4] H.A. Helfgott, The ternary Goldbach problem, <https://arxiv.org/pdf/1501.05438.pdf>.
- [5] H.A. Helfgott, The ternary Goldbach problem, Part II, Sieves large and small, <https://webusers.imj-prg.fr/~harald.helfgott/anglais/PartII.pdf>
- [6] H. Maier, On the Möbius function, *Trans. Amer. Math. Soc.* **301**, n° 2 (1987), 649–664.
- [7] H.L. Montgomery & R.C. Vaughan, Mean values of multiplicative functions, *Period. Math. Hungar.* **43**, n°s 1-2 (2001), 199–214.
- [8] O. Robert & G. Tenenbaum, Sur la répartition du noyau d'un entier, *Indag. Math.* **24** (2013), 802–914.
- [9] G. Tenenbaum, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, quatrième édition, coll. Échelles, Belin, 2015, 592 pp
- [10] R.C. Vaughan, An elementary method in prime number theory, *Acta Arith.* **37** (1980), 111-115.

Régis de la Bretèche
 Institut de Mathématiques
 de Jussieu-PRG
 UMR 7586
 Université Paris Diderot-Paris 7
 Sorbonne Paris Cité,
 Case 7012, F-75013 Paris
 France
regis.de-la-breteche@imj-prg.fr

François Dress
 26, rue de Vouillé
 75015 Paris
 France
francois.dress@math.cnrs.fr

Gérald Tenenbaum
 Institut Élie Cartan
 Université de Lorraine
 BP 70239
 54506 Vandœuvre-lès-Nancy Cedex
 France
gerald.tenenbaum@univ-lorraine.fr