

# Sur une somme liée à la fonction de Möbius

Par *F. Dress* de Talence, *H. Iwaniec* de Warszawa et *G. Tenenbaum* de Talence

## 1. Introduction

On considère les fonctions arithmétiques

$$M(n, z) := \sum_{d|n, d \leq z} \mu(d) \quad \text{et} \quad M(n) := \max_z |M(n, z)|.$$

L'objet principal de cet article est l'étude de la somme

$$\sum_{n \leq x} M(n, z)^2 = xS(z) + O(z^2)$$

avec

$$S(z) := \sum_{m, n \leq z} \frac{\mu(m) \mu(n)}{[m, n]}.$$

Notre résultat essentiel est la convergence de  $S(z)$  vers une limite strictement positive.

Les premiers résultats connus portent sur la fonction  $M(n)$ . La majoration fournie par le théorème de Sperner (cf. [1] et [3]):

$$\forall n, \quad M(n) \leq \binom{\omega(n)}{[\frac{1}{2}\omega(n)]} \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2^{\omega(n)}}{\sqrt{\omega(n)}},$$

est optimale. Mais des majorations de la forme

$$\forall \varepsilon > 0, \quad M(n) \leq (\alpha + \varepsilon)^{\omega(n)},$$

valides pour presque tout  $n$ , ont été établies avec les valeurs successives suivantes de

$\alpha: \sqrt{2}$  [4],  $\frac{3}{e} = 1,1036\dots$  [6],  $\left(\frac{3}{e}\right)^{\frac{\log 2}{\log 3}} = 1,0641\dots$  (conséquence du résultat de Hall et

Tenenbaum [7] sur la majoration de l'ordre normal de  $\Delta(n)$ , le nombre maximal de diviseurs de  $n$  dans un intervalle  $[t, 2t[$ ). Erdős conjecture qu'il est possible de prendre  $\alpha = 1$ .

La fonction  $M(n, z)$  est „presque toujours nulle“, comme le précisent les deux théorèmes suivants:

(i) pour presque tout  $n$  et tout  $\varepsilon > 0$ ,

$$\sum_{m \leq n} \frac{1}{m} M(n, m)^2 \leq (2 + \varepsilon)^{\omega(n)} \quad [5]$$

(ii) dens  $\{n : M(n, z) \neq 0\} \ll (\log z)^{-\gamma_0}$  avec  $\gamma_0 = 1 - \frac{e}{2} \log 2 = 0,0579\dots$  [5], puis

$$\gamma_0 = 1 - \frac{\log(e \log 2)}{\log 2} = 0,0860\dots, \quad [9].$$

La majoration de la somme  $\sum_{n \leq x} M(n, z)^2$  intervient dans la méthode de Vaughan pour l'estimation de formes bilinéaires arithmétiques, utilisée notamment dans [10] pour donner une nouvelle démonstration du théorème de Bombieri-Vinogradov:

$$\sum_{q \leq Q} \max_{\substack{a, X \leq Y \\ (a, q) = 1}} \left| \psi(X; q, a) - \frac{X}{\varphi(q)} \right| \ll_A Y (\log Y)^{-A} + Y^{\frac{1}{2}} Q (\log Y Q)^4.$$

Notre théorème permet de remplacer l'exposant 4 du logarithme par toute constante  $> \frac{5}{2}$ .

Les auteurs tiennent à remercier E. Fouvry pour son aide lors de l'élaboration de ce travail.

## 2. Énoncé et démonstration

**Théorème.** Pour tout réel  $x \geq 1$ , on définit la quantité

$$S(x) := \sum_{m, n \leq x} \frac{\mu(m) \mu(n)}{[m, n]}.$$

Alors, lorsque  $x$  tend vers l'infini,  $S(x)$  tend vers une limite  $L$  et l'on a les expressions suivantes:

$$(a) \quad L = \prod_p \left( 1 - \frac{2}{p^2} + \frac{1}{p^3} \right) \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \log \frac{j+1}{j} \sum_{m, n \leq j} \frac{\mu(m) \mu(n)}{mn} \prod_{p|mn} \left( 1 + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} \right)^{-1};$$

$$(b) \quad L = \frac{6}{\pi^2} \sum_{j=1}^{\infty} \log \frac{j+1}{j} \sum_{m, n \leq j} \frac{\mu(mn)}{mn} \prod_{p|mn} \left( 1 + \frac{1}{p} \right)^{-1};$$

$$(c) \quad L = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \prod_p \left( 1 - \frac{1}{p} \right) \left( 1 + \frac{|1 - p^{it}|^2 - 1}{p} \right) \cdot \frac{dt}{t^2}.$$

Le point de départ de la démonstration consiste à transformer l'expression de  $S(x)$ : on a

$$(1) \quad S(x) = \sum_{m, n \leq x} \frac{\mu(m) \mu(n)}{mn} \sum_{d|(m, n)} \varphi(d) = \sum_{d \leq x} \frac{\varphi(d)}{d^2} m \left( d, \frac{x}{d} \right)^2,$$

où l'on a posé

$$m(d, u) := \sum_{n \leq u} \frac{\mu(dn)}{n} = \mu(d) \sum_{\substack{n \leq u \\ (n, d)=1}} \frac{\mu(n)}{n}.$$

De l'identité

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(dn) n^{-s} = \mu(d) \prod_{p|d} (1 - p^{-s})^{-1} \zeta(s)^{-1},$$

on déduit, par la méthode classique d'intégration complexe, l'existence d'une constante positive  $c$  telle que l'on ait pour  $d \geq 1$ ,  $u \geq 1$ , et,  $0 < \varepsilon < 1$ ,

$$|m(d, u)| \ll_{\varepsilon} \lambda_{\varepsilon}(d) \exp \{-c \sqrt{\log u}\}$$

avec

$$\lambda_{\varepsilon}(d) := \prod_{p|d} (1 + p^{-1+\varepsilon}).$$

En reportant dans (1), il vient

$$S(x) = \sum_{\sqrt{x} < d \leq x} \frac{\varphi(d)}{d^2} m \left( d, \frac{x}{d} \right)^2 + O_{\varepsilon} \left( e^{-c\sqrt{\log x}} \sum_{d \leq \sqrt{x}} \frac{\lambda_{\varepsilon}(d)^2}{d} \right) = \sum_{j=1}^{\infty} a(j, x) + o(1)$$

avec

$$(2) \quad a(j, x) := \sum_{\max(\sqrt{x}, x/j+1) < d \leq x/j} \varphi(d) d^{-2} m(d, j)^2 \ll_{\varepsilon} j^{-1} e^{-2c\sqrt{\log j}}.$$

Avec la notation  $\chi(a, b) = \begin{cases} 1 & \text{si } (a, b) = 1 \\ 0 & \text{si } (a, b) > 1 \end{cases}$ , on a

$$a(j, x) = \sum_{m, n \leq j} \frac{\mu(m) \mu(n)}{mn} \sum_{\max(\sqrt{x}, x/j+1) < d \leq \sqrt{x}} \mu(d)^2 \varphi(d) d^{-2} \chi(d, mn).$$

La somme intérieure peut être évaluée à l'aide d'un théorème taubérien (comme celui de Ikehara) ou par une méthode élémentaire (comme celle du lemme 4 de [2]). On en déduit que la quantité  $a(j, x)$  tend vers une limite  $a(j)$  dont la valeur est donnée par

$$a(j) = \prod_p \left( 1 - \frac{2}{p^2} + \frac{1}{p^3} \right) \cdot \log \frac{j+1}{j} \cdot \sum_{m, n \leq j} \frac{\mu(m) \mu(n)}{mn} \prod_{p|mn} \left( 1 + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} \right)^{-1}.$$

La majoration (2) permet d'appliquer le théorème de Lebesgue sur la convergence dominée. Cela montre l'existence de la limite de  $S(x)$  et la première formule du théorème.

En utilisant, au lieu de (1), l'expression

$$S(x) = \sum_{d \leq x} \frac{\mu(d)^2}{d} \sum_{\substack{m, n \leq x/d \\ (d, mn)=1}} \frac{\mu(mn)}{mn},$$

on montre, avec des calculs similaires, la seconde formule du théorème, i.e.  $L = \sum_{j=1}^{\infty} b(j)$ , où  $b(j) = \lim_{x \rightarrow \infty} b(j, x)$  et

$$b(j, x) := \sum_{x/j+1 < d \leq x/j} \frac{\mu(d)}{d^2} \sum_{\substack{m, n \leq x/d \\ (d, mn)=1}} \frac{\mu(mn)}{mn}.$$

Maintenant, introduisons pour chaque couple  $(\sigma, t)$  de nombres réels la fonction fortement multiplicative  $n \mapsto f(n; \sigma, t)$  définie par

$$f(p; \sigma, t) = |1 - p^{-\sigma - it}|^2$$

pour chaque  $p$  premier. On a l'égalité

$$\int_0^{\infty} M(n, e^u) e^{-\sigma u} e^{-iut} du = \frac{1}{\sigma + it} \sum_{d|n} \mu(d) d^{-\sigma - it};$$

en l'interprétant comme une relation de Fourier pour chaque valeur des paramètres  $n \geq 1$  et  $\sigma > 0$ , on peut écrire la formule de Plancherel

$$(3) \quad \int_0^{\infty} M(n, e^u)^2 e^{-2\sigma u} du = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(n; \sigma, t) \frac{dt}{\sigma^2 + t^2}.$$

D'autre part, en utilisant la convergence absolue de la série  $\sum_{n=1}^{\infty} g(n) n^{-1}$ , où  $g$  est définie par l'identité  $f(n; \sigma, t) = \sum_{d|n} g(d)$ , on établit que, lorsque  $x$  tend vers l'infini, la relation asymptotique

$$\sum_{n \leq x} f(n; \sigma, t) \sim x \prod_p \left( 1 + \frac{|1 - p^{-\sigma - it}|^2 - 1}{p} \right)$$

a lieu uniformément pour  $\sigma \geq \sigma_0 > 0$  et  $t \in \mathbb{R}$ .

En sommant (3) pour  $n \leq x$  et en utilisant l'évaluation

$$\sum_{n \leq x} M(n, e^u)^2 = \sum_{m, n \leq e^u} \mu(m) \mu(n) \left[ \frac{x}{[m, n]} \right] = x S(e^u) + O(e^{2u}),$$

on déduit de ce qui précède que l'on a pour  $\sigma > 1$

$$x \int_0^{\infty} S(e^u) e^{-2\sigma u} du + O\left(\int_0^{\infty} e^{-2(\sigma-1)u} du\right) \sim \frac{x}{\pi} \int_0^{\infty} \prod_p \left( 1 + \frac{|1 - p^{-\sigma - it}|^2 - 1}{p} \right) \frac{dt}{\sigma^2 + t^2}.$$

En faisant tendre  $x$  vers l'infini, il vient

$$\int_0^{\infty} S(e^u) e^{-2\sigma u} du = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \prod_p \left( 1 + \frac{|1 - p^{-\sigma - it}|^2 - 1}{p} \right) \frac{dt}{\sigma^2 + t^2}.$$

Les deux membres de cette égalité sont des fonctions analytiques de  $\sigma$ , celle-ci est donc encore valable pour  $\sigma > 0$ . De plus, on a alors

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} S(x) &= \lim_{\sigma \rightarrow 0^+} 2\sigma \int_0^{\infty} S(e^u) e^{-2\sigma u} du \\ &= \lim_{\sigma \rightarrow 0^+} \zeta(1+2\sigma)^{-1} \int_0^{\infty} S(e^u) e^{-2\sigma u} du \\ &= \lim_{\sigma \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \prod_p (1-p^{-1-2\sigma}) \left(1 + \frac{|1-p^{-\sigma-it}|^2 - 1}{p}\right) \frac{dt}{\sigma^2 + t^2}. \end{aligned}$$

En remarquant que l'expression sous l'intégrale est, pour  $\sigma > 0$ ,

$$\ll |\zeta(\sigma + 1 + it)|^{-2} \frac{1}{\sigma^2 + t^2} \ll \min\left(1, \frac{(\log t)^2}{t^2}\right),$$

on déduit finalement du théorème de Lebesgue la troisième formule de notre théorème.

### 3. Etude numérique

Considérons la première formule du théorème:  $L = \sum_{j=1}^{\infty} a(j)$ . Comme les  $a(j)$  sont des limites de termes positifs, on peut utiliser cette formule pour minorer numériquement  $L$ . Les calculs effectués sur ordinateur ont fourni notamment les valeurs suivantes:

$$\sum_{j=1}^{1030} a(j) = 0,440693525 \dots$$

$$\sum_{j=1}^{2060} a(j) = 0,440714260 \dots$$

$$\sum_{j=1}^{4120} a(j) = 0,440723596 \dots$$

L'ensemble des résultats numériques suggère  $L \neq 0,440729$ . Il n'existe actuellement aucune majoration explicite de  $m(x) = \sum_{n \leq x} \frac{\mu(n)}{n}$ , ni a fortiori de  $m(d, j)$ , qui laisse le moindre espoir d'obtenir une majoration de  $L$  en utilisant les expressions (a) ou (b) du théorème. Une majoration directe de l'intégrale (c) nécessiterait une minoration explicite de  $|\zeta(1+it)|$ . Il n'en existe actuellement aucune qui permette d'obtenir une majoration acceptable. Nous signalons cependant que R. R. Hall [8] a obtenu un majorant inférieur à 1 en utilisant notamment la formule de Plancherel:

$$L < \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\zeta(1+it)|^{-2} \frac{dt}{1+t^2} = \int_1^{\infty} \frac{M^2(x)}{x^3} dx < 0,947.$$

**Bibliographie**

- [1] *N. G. de Bruijn, C. A. van E. Tengebergen and D. Kruijmijk*, On the set of divisors of a number, *Nieuw Arch. Wiskunde* (2) **23** (1949—51), 191—193.
- [2] *H. Delange*, Sur les fonctions arithmétiques multiplicatives, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* (3) **78** (1961), 273—304.
- [3] *P. Erdős*, On a problem in elementary number theory, *Math. Student* **17** (1950), 31—32.
- [4] *P. Erdős and I. Kátai*, Non complete sums of multiplicative functions, *Periodica Mathematica Hungaria* **1** (1971), 209—212.
- [5] *P. Erdős and R. R. Hall*, On the Möbius function, *J. reine angew. Math.* **315** (1980), 121—126.
- [6] *R. R. Hall*, A problem of Erdős and Kátai, *Mathematika* **21** (1974), 110—113.
- [7] *R. R. Hall and G. Tenenbaum*, On the average and normal orders of Hooley's  $\Delta$ -function, *J. London Math. Soc.* (à paraître).
- [8] *R. R. Hall*, A majoration of an integral related to Riemann's zeta function, (unpublished personal communication).
- [9] *G. Tenenbaum*, Sur la probabilité qu'un entier possède un diviseur dans un intervalle donné, *Compositio Math.* (à paraître).
- [10] *R. C. Vaughan*, An elementary method in prime number theory, *Acta Arithm.* **37** (1980), 111—115.

---

U.E.R. de Mathématiques et d'Informatique, Laboratoire associé au CNRS n° 226,  
Université Bordeaux I, F-33405 Talence Cedex

Mathematical Institute, Polish Academy of Sciences, Ul. Sniadeckich, Warszawa, P-00-950

Eingegangen 7. Juni 1982