Proc. London Math. Soc. (3)
72 (1996), 481-514

Répartition statistique des entiers sans grand facteur premier dans les progressions arithmétiques*

E. Fouvry (Orsay) et G. Tenenbaum (Nancy)

§ 1. Introduction.

L'ensemble $S(x,y)$ des entiers n'excédant pas x et dont tous les facteurs premiers sont inférieurs ou égaux à y a fait ces dernières années l'objet de nombreuses investigations, concernant toutes les propriétés classiquement étudiées en théorie analytique des nombres : cardinal, répartition dans les progressions arithmétiques, dans les petits intervalles, sommes d'exponentielles, etc. Le lecteur trouvera un panorama relativement exhaustif et une abondante bibliographie dans l'article de synthèse de Hildebrand & Tenenbaum [20] et dans le récent numéro thématique des *Philosophical Transactions of the Royal Society*, rassemblé par Vaughan [30].

Dans ce travail, nous revenons sur la question de la répartition des entiers de $S(x,y)$ dans les progressions arithmétiques. Notons

$$\Psi(x,y) = |S(x,y)|, \qquad \Psi(x,y;a,q) = |\{n \in S(x,y) : n \equiv a \,(\mathrm{mod}\, q)\}|. \tag{1.1}$$

Alors que la fonction $\Psi(x,y)$ est aujourd'hui relativement bien connue, les résultats disponibles sur $\Psi(x,y;a,q)$ souffrent d'un endémique défaut d'uniformité en q. Un résultat s'apparentant au théorème de Siegel-Walfisz pour les nombres premiers en progressions arithmétiques est énoncé au Lemme 2.1 ci-dessous. Les derniers travaux concernant cette question sont ceux de Fouvry & Tenenbaum [12], et Granville [14], [15] : au prix d'un terme d'erreur tendant arbitrairement lentement vers 0, le meilleur domaine de validité d'une formule asymptotique pour $\Psi(x,y;a,q)$ uniforme en x,y nécessite $q \leqslant y^{o(1)}$.

Il est donc naturel de s'intéresser au comportement en moyenne du terme d'erreur

$$E(x,y;a,q) := \Psi(x,y;a,q) - \Psi_q(x,y)/\varphi(q), \tag{1.2}$$

avec la notation

$$\Psi_q(x,y) := \big|\{n \in S(x,y) : (n,q) = 1\}\big|. \tag{1.3}$$

---

* Nous incluons ici certaines corrections et modifications relativement à la version publiée.

La taille attendue pour $\Psi(x,y;a,q)$ est bien $\Psi_q(x,y)/\varphi(q)$ lorsque $(a,q)=1$ et, ainsi que nous l'avons signalé dans [12], des considérations élémentaires permettent de se ramener systématiquement à ce cas. Une telle approche en moyenne, visant essentiellement à des énoncés de type Bombieri-Vinogradov, est, en l'état actuel des connaissances, seule susceptible de fournir des applications de crible de qualité comparable à celles qui ont été obtenues pour d'autres ensembles arithmétiques.

Rappelons dans un premier temps le résultat de Wolke [31], redémontré, par une technique plus rapide mais sous une forme légèrement plus faible, par les auteurs — cf. [12], Théorème 6′.

Théorème A (Wolke).
Pour tout $A>0$, il existe une constante $B=B(A)>0$ telle que l'on ait

$$\sum_{q\leqslant Q}\max_{z\leqslant x}\max_{(a,q)=1}|E(z,y;a,q)|\ll_A x/(\log x)^A \qquad (x>2), \tag{1.4}$$

avec $Q=\sqrt{x}/(\log x)^B$.

Compte tenu de la décroissance rapide de $\Psi(x,y)$ avec y, cette majoration est une conséquence banale du grand crible lorsque $y\leqslant x^{\eta(A)\log_3 x/\log_2 x}$ — cf.par exemple le lemme 7.1 de [12]. (Ici et dans la suite nous désignons par $\log_k$ la k-ième itérée de la fonction logarithme.) Il est donc souhaitable de rechercher des majorations de la forme $\Psi(x,y)/(\log x)^A$, ou même $\Psi(x,y)/(\log y)^A$, pour le membre droite de (1.4), ce qui permettra, par exemple, de cribler l'ensemble

$$\mathcal{A}(x,y):=\{n+1: n\in S(x,y)\} \tag{1.5}$$

pour des valeurs de y plus petites que la borne critique indiquée ci-dessus. Dans cette optique, Granville [14], *Theorem* 3, a établi le résultat suivant.

Théorème B (Granville). *Pour tout $A>0$ il existe des constantes positives $B=B(A)$ et $C=C(A)$ telles que l'on ait*

$$\sum_{q\leqslant Q}\max_{z\leqslant x}\max_{(a,q)=1}|E(z,y;a,q)|\ll_A \Psi(x,y)/(\log y)^A \qquad (x>2) \tag{1.6}$$

avec $Q=\min\big\{\sqrt{x}/(\log x)^B, y^{C\log_2 y/\log_3 y}\big\}$.

Toutefois, la valeur de Q dans cet énoncé est trop faible pour permettre les applications envisagées plus haut. On a en effet $Q=x^{o(1)}$ dès que $y\leqslant \exp(\log x)^{1-\delta}$ avec $\delta>0$ fixé : cela interdit de cribler substantiellement la suite $\mathcal{A}(x,y)$. Notre premier théorème établit qu'hormis le maximum sur z l'estimation (1.6) persiste, avec $Q=x^{1/2-\varepsilon}$, sous la condition

$$x\geqslant y\geqslant 2, \qquad y>\exp\mathcal{L}^{2/3+\varepsilon}. \tag{$\mathcal{C}_\varepsilon$}$$

Ici, et, par la suite, lorsque cela permettra d'améliorer notablement la présentation, nous utilisons la notation

$$\mathcal{L}:=\log x.$$

Par ailleurs, nous posons systématiquement

$$u := (\log x)/\log y \qquad (x \geqslant y \geqslant 2) \tag{1.7}$$

et introduisons la fonction

$$H(t) := e^{t/\log^2(t+1)} \qquad (t \geqslant 1). \tag{1.8}$$

Théorème 1. *Soient $\varepsilon > 0$, $A > 0$. Il existe une constante $c = c(\varepsilon, A) > 0$ telle que l'on ait, uniformément pour x, y satisfaisant $(\mathcal{C}_\varepsilon)$ et $Q \geqslant 1$,*

$$\sum_{q \leqslant Q} \max_{(a,q)=1} |E(x, y; a, q)| \ll_{A,\varepsilon} \frac{\Psi(x,y)}{H(u)^c \mathcal{L}^{A-3}} + \frac{Qx^{3/2} H(u)^c \mathcal{L}^{A+2}}{\Psi(x,y)}. \tag{1.9}$$

Insérons dans (1.9) l'estimation simple

$$\Psi(x, y) = xu^{-u(1+o(1))}, \tag{1.10}$$

valable pour $y > (\log x)^{1+\varepsilon}$ (cf.[20], *Corollary* 1.3) et où la quantité $o(1)$ tend vers 0 lorsque y et u tendent vers l'infini. Nous obtenons le corollaire prêt à l'emploi suivant.

Corollaire 1. *Soient $\varepsilon > 0$, $A > 0$. Il existe une constante $c = c(\varepsilon, A) > 0$ telle que l'on ait, uniformément pour x, y satisfaisant $(\mathcal{C}_\varepsilon)$ et $Q = \sqrt{x}\exp(-\mathcal{L}^{1/3})$,*

$$\sum_{q \leqslant Q} \max_{(a,q)=1} |E(x, y; a, q)| \ll_{A,\varepsilon} \frac{\Psi(x,y)}{H(u)^c \mathcal{L}^{A}}. \tag{1.11}$$

La présence du facteur $H(u)^c$ au dénominateur rend, lorsque $u \to \infty$, la majoration de (1.11) de bien meilleure qualité que celle de (1.6). Ce progrès repose sur l'exploitation dans toute sa force du théorème d'évaluation individuelle de $\Psi(x, y; a, q)$ (cf.le Lemme 2.1), ce qui permet de réduire notablement l'effet de l'éventuel zéro exceptionnel des fonctions L.

Depuis les travaux de Bombieri, Fouvry, Friedlander et Iwaniec ([1], [2], [6], [7], [10], [11]), on sait que la méthode de dispersion de Linnik, couplée à des majorations de sommes de Kloostermann (individuelles ou en moyenne), est un outil efficace pour étudier la répartition en moyenne des produits de convolution arithmétiques. Grâce à l'un de ces résultats (le *Theorem* 4 de [1]), et en utilisant la souplesse de factorisation de la fonction caractéristique de $S(x, y)$ pour y assez petit, nous montrons que, pour tout $\delta > 0$, le niveau de répartition de $S(x, y)$ est $Q = x^{3/5-\delta}$ dans le domaine

$$x^{c_0(\delta)\log_3 x/\log_2 x} \leqslant y \leqslant x^{c_1(\delta)}. \tag{1.12}$$

Plus précisément, nous obtenons le résultat suivant.

Théorème 2. *Soit $\delta > 0$. Il existe $c_1(\delta) > 0$ tel que, pour tous $A > 0$, $a \in \mathbb{Z}$, on ait, uniformément lorsque $1 \leqslant y \leqslant x^{c_1(\delta)}$,*

$$\sum_{q \leqslant Q,\, (a,q)=1} \max_{z \leqslant x} |E(z, y; a, q)| \ll_{A,a,\delta} x/(\log x)^A \qquad (x > 2) \tag{1.13}$$

avec $Q = x^{3/5-\delta}$.

Comme précédemment, on observe que la majoration (1.13) est banale lorsque y est plus petit que la borne inférieure de (1.12). Il serait possible, mais laborieux, de fournir une minoration explicite de $c_1(\delta)$ en fonction de δ.

L'exposant de répartition 3/5 est relativement élevé pour cet ensemble $S(x, y)$ dont la définition n'est certes pas façonnée artificiellement pour s'adapter aux résultats disponibles. Quitte à se contenter d'un niveau de répartition légèrement inférieur, on peut pallier quelque peu l'absence d'uniformité en a en faisant appel au Théorème 2 de [6] ou au Corollaire 2 de [8] au lieu du *Theorem 4* de [1]. Nous obtenons le résultat suivant, où $\lambda(d)$ désigne un coefficient bien factorisable, au sens défini dans [1]. En particulier, l'énoncé est donc valable pour les coefficients $\lambda^{\pm}(d)$ du crible de Rosser–Iwaniec.

Théorème 3. *Soit $\delta > 0$. Il existe $c_1(\delta) > 0$ tel que l'on ait, pour chaque $A > 0$ et uniformément pour $1 \leqslant y \leqslant x^{c_1(\delta)}$, $|a| \leqslant x$,*

$$\sum_{q \leqslant Q_1,\, (a,q)=1} \max_{z \leqslant x} |E(z, y; a, q)| \ll_{A,\delta} x/(\log x)^A \qquad (x > 2) \tag{1.14}$$

avec $Q_1 = x^{6/11-\delta}$ et

$$\sum_{q \leqslant Q_2,\, (a,q)=1} \lambda(q) E(x, y; a, q) \ll_{A,\delta} x/(\log x)^A \qquad (x > 2) \tag{1.15}$$

avec $Q_2 = x^{5/9-\delta}$.

Il serait bien sûr très intéressant de remplacer les majorations de (1.13), (1.14) ou (1.15) par $\Psi(x, y)/\mathcal{L}^A$. Une telle amélioration semble cependant difficilement accessible par la méthode de dispersion employée ici, dont on sait qu'elle n'est efficace, dans son état actuel, que pour étudier la répartition de suites $\mathcal{B}$ suffisamment denses, au sens où

$$\big|\{b \in \mathcal{B} : \tfrac{1}{2}x < b \leqslant x\}\big| \gg x/\mathcal{L}^B$$

pour une constante convenable B. Il découle trivialement de (1.10) que $S(x, y)$ ne satisfait pas cette condition pour $y \leqslant x^{c(B)\log_3 x/\log_2 x}$.

Les niveaux de répartition établis au Corollaire 1 et aux Théorèmes 2 & 3 sont une invitation à cribler des suites liées à $S(x, y)$. Nous nous restreignons ici à la suite $\mathcal{A}(x, y)$ définie en (1.5). Le cas plus général de $\{n+\ell : n \in S(x, y)\}$, $\ell \in \mathbb{Z}$, ou celui de la suite $\{N - n : n \in S(N - 1, y)\}$ (avec N entier tendant vers l'infini) se traitent en principe de la même façon, au prix de complications techniques issues des conditions de coprimalité $(\ell, q) = 1$ ou $(N, q) = 1$.

Pour appliquer directement les résultats de la théorie du crible pondéré telle qu'elle est exposée par exemple au chapitre 9 du livre Halberstam & Richert, il faudrait disposer d'approximations convenables de la forme

$$\mathcal{A}_q = X\frac{w(q)}{q} + R_q, \tag{1.16}$$

où l'on a posé $\mathcal{A} = \mathcal{A}(x, y)$, $\mathcal{A}_q = \{a \in \mathcal{A} : q|a\}$, et où X est indépendant de q, w est une fonction multiplicative et R_q se comporte en moyenne comme un terme d'erreur. On a

$$|\mathcal{A}_q| = \Psi(x, y; -1, q) = \Psi_q(x, y)/\varphi(q) + E(x, y; -1, q) \tag{1.17}$$

et les Théorèmes 1, 2 & 3 établissent que $E(x, y; -1, q)$ est effectivement petit en moyenne. Nous verrons plus loin (Théorème 5) que le terme principal $\Psi_q(x, y)/\varphi(q)$ de (1.17) peut effectivement être approché par un multiple constant (à x, y fixés) d'une fonction multiplicative de q mais que l'approximation obtenue, bien qu'essentiellement optimale, n'est pas suffisante pour permettre un niveau de crible de l'ordre d'une puissance de x. En revanche, nous pouvons utiliser directement le crible de Rosser–Iwaniec sur le terme principal de (1.17). Une simple interversion de sommation fournit alors, grâce aux résultats sur le comportement local de la fonction $\Psi_q(x, y)$, des évaluations qui peuvent à leur tour être insérées dans la technique du crible pondéré. Nous énonçons ci-dessous le résultat obtenu, dans lequel nous employons les notations désormais classiques de la théorie du crible $S(\mathcal{A}, \mathcal{P}, z)$, $F(t)$, $f(t)$, définies dans [16][1], et dont, néanmoins, nous rappelons brièvement les définitions.

Pour tout ensemble d'entiers $\mathcal{A}$, tout ensemble de nombres premiers $\mathcal{P}$, et tout nombre réel positif z, on pose

$$S(\mathcal{A}, \mathcal{P}, z) = \big|\{a \in \mathcal{A} : p \in \mathcal{P} \text{ et } p \leqslant z \Rightarrow p \nmid a\}\big|.$$

La fonction de Buchstab $\omega(t)$, nulle pour $0 \leqslant t < 1$, est définie sur $[1, \infty[$ comme l'unique solution continue de l'équation différentielle aux différences

$$\big(t\omega(t)\big)' = \omega(t-1) \qquad (t > 2)$$

avec la condition initiale $t\omega(t) = 1$ pour $1 \leqslant t \leqslant 2$. On définit alors les fonctions de crible F, f par

$$F(t) = e^{\gamma}\{\omega(t) + \varrho(t-1)/t\}, \qquad f(t) = e^{\gamma}\{\omega(t) - \varrho(t-1)/t\}$$

où γ est la constante d'Euler et ϱ la fonction de Dickman (cf. *infra* pour la définition). On a $f(t) > 0$ si, et seulement si, $t > 2$. De plus (cf.par exemple [27], Corollaire III.6.1), on a les formules asymptotiques

$$\begin{matrix} F(t) \\ f(t) \end{matrix} = 1 + O(\varrho(t-1)/t) = 1 + O(t^{-t}) \qquad (t \to \infty).$$

1. À la modification triviale près de l'usage de l'inégalité stricte $P^-(n) > z$, qui est l'exacte duale de la condition $P^+(n) \leqslant y$ et, partant, permet une cohérence "automatique" lorsque l'on impose la répartition des facteurs premiers dans des intervalles.

Théorème 4. *Soient*

$$\begin{aligned}&\mathcal{A}=\mathcal{A}(x,y)=\{n+1:n\in S(x,y)\},\\&\mathcal{A}_q:=\{a\in\mathcal{A}:q|a\}\ (q\geqslant 1),\\&\mathcal{P}_q:=\{p:p\nmid q\}.\end{aligned}$$

Pour chaque $\varepsilon\in]0,1[$ *et uniformément sous les conditions*

$$(H)\qquad x\geqslant x_0,\qquad \exp\big\{(\log_2 x)^2\big\}\leqslant y\leqslant x,$$

et $q\leqslant x$, $z\geqslant 1$, $s\geqslant 1$, $D=z^s\leqslant x$, *on a*

$$\begin{aligned}S(\mathcal{A}_q,\mathcal{P}_q,z)&\leqslant\frac{x\varrho(u)}{q}\prod_{p\leqslant z,\,p\nmid q}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\big\{F(s)+O(V)\big\}+R,\\S(\mathcal{A}_q,\mathcal{P}_q,z)&\geqslant\frac{x\varrho(u)}{q}\prod_{p\leqslant z,\,p\nmid q}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\big\{f(s)+O(V)\big\}-R,\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}&V:=\frac{1}{(\log D)^{1/3}}+\frac{\log_2 y}{\log y},\\&R:=\sum_{d\leqslant D}|E(x,y;-1,qd)|+|E(x,y;-1,2qd)|.\end{aligned}\tag{1.18}$$

En insérant ces estimations dans la démonstration du *Theorem 9.3* de [16] à la place des évaluations issues du crible de Selberg, on obtient avec les mêmes calculs, grâce au Théorème 2 & au Corollaire 1, les deux corollaires suivants, correspondant respectivement aux inégalités $\frac{3}{5}\Lambda_2>\frac{3}{5}\frac{11}{6}>1$ et $\frac{1}{2}\Lambda_3>\frac{1}{2}\frac{11}{4}>1$. Conformément à l'usage, nous désignons par $\omega(n)$ (resp. $\Omega(n)$) le nombre des facteurs premiers distincts d'un entier positif n, comptés sans (resp. avec) leur ordre de multiplicité. Nous notons $P^+(n)$ (resp. $P^-(n)$) le plus grand (resp. le plus petit) facteur premier de $n\geqslant 1$, avec la convention $P^+(1)=1$ (resp. $P^-(1)=\infty$).

Corollaire 2. *Soit* $\delta>0$. *La double condition*

$$P^+(n)\leqslant n^{\delta\log_3 n/\log_2 n},\qquad \Omega(n+1)\leqslant 2$$

est réalisée pour une infinité d'entiers n. *Plus précisément, si* $y=y(x)=x^{\delta\log_3 x/\log_2 x}$, *on a*

$$\big|\{n\in S(x,y):\Omega(n+1)\leqslant 2\}\big|\gg\Psi(x,y)/\log x.$$

Corollaire 3. *Pour tout* $\varepsilon>0$ *il existe une infinité d'entiers* n *satisfaisant à*

$$P^+(n)\leqslant\exp\big\{(\log n)^{2/3+\varepsilon}\big\},\qquad \Omega(n+1)\leqslant 3.$$

Plus précisément, si $y=y(x)=\exp\big\{(\log x)^{2/3+\varepsilon}\big\}$, *on a*

$$\big|\{n\in S(x,y):\Omega(n+1)\leqslant 3\}\big|\gg\Psi(x,y)/\log x.$$

On peut mettre en perspective les deux résultats précédents en rappelant ce qui est connu lorsqu'on impose $\Omega(n+1)=1$, autrement dit lorsqu'on cherche des nombres premiers p tels que $P^+(p-1)\leqslant y$. En employant une technique entièrement différente, reposant sur une idée de Balog, Friedlander [13] a montré que l'on a

$$|\{n\in S(x,y):\Omega(n+1)=1\}|\gg_\alpha x/\log x$$

pour $y=x^\alpha$, et $\alpha>1/(2\sqrt{\mathrm{e}})\approx 0,303$.

Par une manipulation supplémentaire reposant sur une inversion du rôle des variables, nous pouvons encore déduire du Théorème 2 et d'une légère variante du Théorème 4 le corollaire suivant.

Corollaire 4. *Soient $\vartheta:=0,674$, $\delta>0$. La double condition*

$$P^+(n)\leqslant n^{\delta\log_3 n/\log_2 n},\qquad P^+(n+1)>n^\vartheta$$

est satisfaite pour une infinité d'entiers n. Plus précisément, notant $y=y(x)=x^{\delta\log_3 x/\log_2 x}$, on a

$$\big|\{n\in S(x,y):P^+(n+1)>x^\vartheta\}\big|\gg\Psi(x,y).$$

Notre dernier résultat permet, ainsi qu'il a été mentionné plus haut, d'écrire les énoncés des théorèmes de type Bombieri–Vinogradov pour $S(x,y)$, avec un terme principal maniable, produit de $\Psi(x,y)$ par une fonction multiplicative de q, au lieu du terme principal "abstrait" $\Psi_q(x,y)/\varphi(q)$. Cependant, le terme d'erreur global, tout en restant non-trivial, doit être augmenté d'une quantité $\Psi(x,y)(\log_2 x)^2/\log y$.

Nous notons traditionnellement $\varrho(v)$ la fonction de Dickman, définie comme l'unique solution continue pour $v\geqslant 0$ de l'équation différentielle aux différences

$$v\varrho'(v)+\varrho(v-1)=0,$$

avec la condition initiale $\varrho(v)=1$ $(0\leqslant v\leqslant 1)$. Nous posons, avec u défini par (1.7),

$$\beta=\beta(x,y):=\frac{-\varrho'(u)}{\varrho(u)\log y}\qquad(x\geqslant y\geqslant 2).\tag{1.19}$$

Nous introduisons la fonction

$$Z(s):=\frac{s\zeta(s+1)}{s+1},\tag{1.20}$$

où ζ désigne la fonction zêta de Riemann. Enfin, pour chaque $\alpha\in[0,1[$, nous définissons la fonction fortement multiplicative

$$g(q;\alpha):=\prod_{p\mid q}\big(1-p^{\alpha-1}\big).\tag{1.21}$$

Théorème 5. *Posant* $W_q := \log\{2+\omega(q)\}$ *et*

$$R := \frac{\log_2^2 x + W_q^2}{\log x \log y} + \frac{W_q \log(u+1)}{\log y}\Big(\frac{y}{x}\Big)^{1/(W_q+6)},$$

la formule asymptotique

$$\Psi_q(x,y) = x\varrho(u)Z(-\beta)\big\{g(q;\beta)+O(R)\big\}, \tag{1.22}$$

est valable uniformément sous les conditions (H) *et*

$$P^+(q) \leqslant y, \qquad \omega(q) \leqslant y^{1/\log(u+2)}. \tag{Ω}$$

Ce résultat est de même type que celui de [28], qui fournit un terme d'erreur et un domaine de validité optimaux pour l'approximation de $\Psi_q(x,y)$ par $\big(\varphi(q)/q\big)\Psi(x,y)$. Ici, une telle approximation serait inadéquate car le terme d'erreur engendré dans les inégalités des Théorèmes 1, 2 & 3 rendrait ces résultats triviaux.

Le Théorème 5 peut être utilisé pour sommer certaines fonctions arithmétiques de $(n-1)$ sur $S(x,y)$. À titre d'application conjointe de ce résultat et du Théorème 1, nous pouvons obtenir l'énoncé suivant, qui s'interprète comme une évaluation quantitative de l'indépendance des répartitions de $P^+(n)$ et $\omega(n-1)$, et que l'on pourrait qualifier de théorème d'Erdős-Kac pour les translatés des entiers sans grand facteur premier.

Corollaire 5. *Soit* $A>0$. *On a uniformément pour*

$$x \geqslant 3, \quad \exp\Big\{\frac{\log x}{(\log_2 x)^A}\Big\} \leqslant y \leqslant x, \quad t\in\mathbb{R},$$

$$\sum_{\substack{n\in S(x,y)\\ \omega(n-1)\leqslant \log_2 x + t\sqrt{\log_2 x}}} 1 = \Psi(x,y)\Big\{\Phi(t)+O\Big(\frac{\log_3 x}{\sqrt{\log_2 x}}\Big)\Big\}, \tag{1.23}$$

où l'on a posé $\Phi(t) := \displaystyle\int_{-\infty}^{t} e^{-u^2/2}\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{2\pi}}$.

Le terme d'erreur est optimal au facteur $\log_3 x$ près, ainsi que l'on peut facilement s'en rendre compte dans le cas $y=x$, qui correspond au théorème classique d'Erdős et Kac et pour lequel Rényi et Turàn ont fourni une estimation optimale du terme résiduel — cf.par exemple [27], § III.4.4. Notre objectif essentiel étant ici d'illustrer le cadre d'application des résultats précédents, nous n'avons pas cherché à optimiser le domaine de validité de (1.23) où d'une formule analogue avec un terme d'erreur dépendant explicitement de x et y. Nous tenons cependant à souligner que, puisque le domaine de variation de y autorise des valeurs de $\Psi(x,y)$ beaucoup plus petites que $x/(\log x)^A$, cette application nécessite toute la force du Théorème 1 : en particulier, aucun énoncé du type des Théorèmes A ou B ne serait suffisant.

§2. Démonstration du Théorème 1

2.1. Le théorème de Siegel-Walfisz pour $S(x,y)$. Le point de départ de la démonstration du Théorème 1 est le résultat suivant, établi dans [12] (Théorème 4). Nous posons

$$Y := e^{\sqrt{\log y}}$$

et désignons, dans cette section, par c_0, $c_1, \dots$ des constantes positives dépendant au plus du paramètre A.

Lemme 2.1. *Soit $A > 0$. Sous la condition*

$$x \geqslant 3, \qquad \exp\left\{c_0(\log_2 x)^2\right\} \leqslant y \leqslant x, \tag{2.1}$$

et pour tout caractère de Dirichlet χ non principal de module q, on a

(i) *si $1 < q \leqslant (\log x)^A$, alors*

$$\sum_{n\in S(x,y)} \chi(n) \ll \Psi(x,y)Y^{-c_1}; \tag{2.2}$$

(ii) *si $(\log x)^A < q \leqslant y^{c_2/\log_2 x}$, alors*

$$\sum_{n\in S(x,y)} \chi(n) \ll \Psi(x,y)\Big\{Y^{-c_3} + y^{-c_3/\log q} + \vartheta(\chi)\frac{\log q}{\log y}H(u)^{-c_3}\Big\} \tag{2.3}$$

où $\vartheta(\chi)$ vaut 0 ou 1 et est non-nul pour au plus un caractère non principal de module q.

Dans la démonstration du Théorème 1, n'interviendront que des caractères primitifs, que nous noterons χ^*. On peut alors affiner (2.3) en incorporant dans la démonstration du Lemme 2.1 le fait que, pour tout $Q \geqslant 1$, le produit

$$\prod_{Q<q\leqslant 2Q} \prod_{\chi^* (\mathrm{mod}\, q)} L(s,\chi^*)$$

possède au plus un zéro dans la région $\sigma \geqslant 1 - 4b/\log(Q(1+|\tau|))$ $(s = \sigma + i\tau)$, où b est une constante absolue positive — cf.[5], Théorème 8.3.

Par ailleurs, il nous sera utile d'insérer une hypothèse de coprimalité, disons $(n,e) = 1$, dans les conditions de sommation de (2.2) et (2.3). Cela peut être effectué au moyen de la majoration

$$\Bigg|\sum_{\substack{n\in S(x,y)\\(n,e)=1}} \chi(n)\Bigg| \leqslant \sum_{\substack{d\leqslant x/y\\ d|e}} \Bigg|\sum_{n\in S(x/d,y)} \chi(n)\Bigg| + q\tau(e),$$

valable pour tout caractère χ non principal de module q, et où $\tau(e)$ désigne le nombre de diviseurs de e. En notant de plus que, dans le domaine concerné en (x,y), on a $\Psi(x/d,y) \ll \Psi(x,y)x^{-1/3}$ pour $d > \sqrt{x}$ d'après (1.10), on parvient ainsi à la variante suivante du Lemme 2.1.

Lemme 2.2. *Soient $A > 0$ et $e \in \mathbb{Z}^+$. Sous la condition* (2.1) *et pour tout caractère de Dirichlet χ^* primitif non principal de module q, on a :*

(i) *si $1 < q \leqslant (\log x)^A$, alors*

$$\sum_{\substack{n\in S(x,y)\\(n,e)=1}} \chi^*(n) \ll \tau(e)\Psi(x,y)Y^{-c_1}; \tag{2.4}$$

(ii) *si $(\log x)^A < q \leqslant y^{c_2/\log_2 x}$, alors*

$$\sum_{\substack{n\in S(x,y)\\(n,e)=1}} \chi^*(n) \ll \tau(e)\Psi(x,y)\Big\{Y^{-c_3} + y^{-c_3/\log q} + \vartheta(\chi^*)\frac{\log q}{\log y}H(u)^{-c_3}\Big\} \tag{2.5}$$

où $\vartheta(\chi^*)$ vaut 0 ou 1 et satisfait à $\sum_{Q<q\leqslant 2Q}\sum_{\chi^*(\mathrm{mod}\, q)} \vartheta(\chi^*) \leqslant 1$ $(Q \geqslant 1)$.

2.2. Contribution des caractères de petit module. Désignons par $BV(x,y;Q)$ le membre de gauche de (1.9). On a classiquement (cf.par exemple [1], formule (2.4))

$$BV(x,y;Q) \ll W := \sum_{e\leqslant Q}\frac{1}{\varphi(e)}\sum_{2\leqslant f\leqslant Q/e}\frac{1}{\varphi(f)}\sum_{\chi^*(\mathrm{mod}\, f)}\Bigg|\sum_{\substack{n\in S(x,y)\\(n,e)=1}}\chi^*(n)\Bigg|, \tag{2.6}$$

où n'apparaissent donc que des caractères primitifs. Pour évaluer W, on scinde la sommation sur f en introduisant le paramètre $F := Y^{c_3/2}$, où c_3 est la constante de la formule (2.5). Comme $F > (\log x)^A$ pour $x > x_0(A)$, on peut écrire

$$BV(x,y;Q) \ll W(f \leqslant \mathcal{L}^A) + W(\mathcal{L}^A < f \leqslant F) + W(f > F), \tag{2.7}$$

où $W(\cdots)$ désigne la sous-somme de W correspondant au domaine indiqué.

Par (2.4), on a, sous la condition $(\mathcal{C}_\varepsilon)$,

$$W(f \leqslant \mathcal{L}^A) \ll \frac{\Psi(x,y)}{Y^{c_1}}\sum_{e\leqslant Q}\frac{\tau(e)}{\varphi(e)}\sum_{f\leqslant \mathcal{L}^A}\frac{1}{\varphi(f)} \ll \frac{\Psi(x,y)\mathcal{L}^3}{Y^{c_1}} \ll \frac{\Psi(x,y)}{H(u)^{c_3}\mathcal{L}^A}. \tag{2.8}$$

Pour estimer $W(\mathcal{L}^A < f \leqslant F)$, on scinde la sommation sur f en intervalles dyadiques $F_1 < f \leqslant 2F_1$ et on applique (2.5). On obtient, en notant que $Y^{-c_3} + y^{-c_3/\log F} \ll Y^{-c_3}$ si $c_3 \leqslant 2$,

$$\begin{aligned} &W(\mathcal{L}^A < f \leqslant F)\\ &\quad\ll \Psi(x,y)\sum_{e\leqslant Q}\frac{\tau(e)}{\varphi(e)}\sum_{F_1}\sum_{F_1<f\leqslant 2F_1}\Big\{Y^{-c_3} + \frac{H(u)^{-c_3}\log f}{\varphi(f)\log y}\sum_{\chi^*(\mathrm{mod}\, f)}\vartheta(\chi^*)\Big\}\\ &\quad\ll \Psi(x,y)\mathcal{L}^2\Big\{FY^{-c_3} + \mathcal{L}H(u)^{-c_3}\sum_{F_1}\frac{1}{F_1}\Big\} \ll \Psi(x,y)H(u)^{-c_3}\mathcal{L}^{-A+3}, \end{aligned}$$

où nous avons utilisé la condition $(\mathcal{C}_\varepsilon)$. À fins de référence ultérieure, nous pouvons récapituler les estimations obtenues jusqu'à ce point sous la forme

$$W(f \leqslant F) \ll \Psi(x,y)H(u)^{-c_3}\mathcal{L}^{-A+3}. \tag{2.9}$$

2.3. Utilisation du grand crible. Pour estimer $W(f > F)$, nous procédons de manière similaire à la démonstration du Théorème 6′ de [12], en faisant appel à l'inégalité du grand crible

$$\sum_{F_1<f\leqslant 2F_1} \frac{f}{\varphi(f)} \sum_{\chi^*(\mathrm{mod}\, f)} \Big|\sum_{n\in\mathcal{N}} \chi^*(n)\Big|^2 \leqslant \{N+4F_1^2\}|\mathcal{N}| \tag{2.10}$$

valable pour tout ensemble d'entiers $\mathcal{N}$ inclus dans un intervalle de longueur N. L'étape liminaire de la démonstration consiste à factoriser chaque entier $n > 1$ de $S(x,y)$ sous la forme

$$n = mp, \qquad \text{avec} \qquad p = P^+(n) \leqslant y, \quad m \in S(x/p, p). \tag{2.11}$$

Les variables m et p deviennent les nouvelles variables de sommation, mais elles ne sont pas indépendantes. On circonvient cette difficulté en introduisant un découpage des domaines de variation de m et p en petits intervalles. Lorsqu'on modifie la sommation de manière à sommer indépendamment m et p sur chaque pavé élémentaire, on introduit une erreur que l'on peut traiter globalement par le résultat suivant établi dans [12] (Lemme 7.1) et qui est une conséquence immédiate de (2.10).

Lemme 2.3. *Pour tout ensemble d'entiers $\mathcal{B} \subset [1,x]$, on a*

$$\sum_{e\leqslant\sqrt{x}} \frac{1}{\varphi(e)} \sum_{2\leqslant f\leqslant\sqrt{x}/e} \frac{1}{\varphi(f)} \sum_{\chi^*(\mathrm{mod}\, f)} \Bigg|\sum_{\substack{n\in\mathcal{B}\\(n,e)=1}} \chi^*(n)\Bigg| \ll \mathcal{L}^2\sqrt{x|\mathcal{B}|}. \tag{2.12}$$

Soit $G := \exp(\mathcal{L}^{2/3})$. Par (1.10), on a

$$\Psi(x,G) = x\exp\big\{-(\tfrac{1}{3}+o(1))\mathcal{L}^{1/3}\log_2 x\big\}.$$

Le Lemme 2.3 nous permet donc d'inférer que, sous la condition $(\mathcal{C}_\varepsilon)$, la contribution $\mathcal{R}_0$ des entiers de $S(x,G)$ à $W(f > F)$ satisfait

$$\mathcal{R}_0 \ll \Psi(x,y)H(u)^{-c_3}\mathcal{L}^{-A}. \tag{2.14}$$

Comme annoncé, nous traitons la contribution complémentaire par une technique de découpage. Nous choisissons le pas multiplicatif

$$\Delta := 1 + \frac{\Psi(x,y)^2}{x^2H(u)^{2c_3}\mathcal{L}^{2A}}\,.$$

Notant $P_j := G\Delta^j$ et désignant par W_j la contribution à $W(f > F)$ des entiers de la forme $n = mp$ avec $P_j < p \leqslant P_{j+1}$, $m \in S(x/P_{j+1}, P_j)$, on peut écrire

$$W(f > F) \leqslant \sum_{j\leqslant J} W_j + \mathcal{R}_0 + \mathcal{R}_1 \qquad (P_J < y \leqslant P_{J+1}) \tag{2.15}$$

où $\mathcal{R}_1$ est la contribution du sous-ensemble $\mathcal{B}$ de $S(x,y)$ constitué des entiers n qui, bien que vérifiant (2.11) avec $p > G$, ne participent à aucun des W_j. Chaque entier n de $\mathcal{B}$ doit nécessairement satisfaire, pour au moins un $j \leqslant J$, à l'une des conditions suivantes

$$\begin{aligned} &n = mp, \quad P_j < p \leqslant P_{j+1}, \quad x/P_{j+1} < m \leqslant x/P_j, \\ &n = mp, \quad P_j < p \leqslant P_{j+1}, \quad m \leqslant x/P_{j+1}, \quad \text{et} \quad P_j < P^+(m) \leqslant P_{j+1}. \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} |\mathcal{B}| &\leqslant \sum_{j \leqslant J} \sum_{P_j < p \leqslant P_{j+1}} \Big(\frac{x(\Delta-1)}{P_{j+1}} + \sum_{P_j < p' \leqslant P_{j+1}} \frac{x}{p' P_{j+1}} \Big) \\ &\ll x\mathcal{L}(\Delta-1) \ll \frac{\Psi(x,y)^2}{xH(u)^{2c_3}\mathcal{L}^{2A-1}}, \end{aligned}$$

compte tenu de l'hypothèse $(\mathcal{C}_\varepsilon)$, et grâce à une forme forte du théorème des nombres premiers. Le Lemme 2.3 nous permet donc d'estimer $\mathcal{R}_1$. Il suit

$$W(f > F) \ll J \max W_j + \mathcal{R}_0 + \mathcal{R}_1 \ll \frac{\mathcal{L}}{\Delta - 1} \max W_j + \frac{\Psi(x,y)}{H(u)^{c_3}\mathcal{L}^{A-3}}. \tag{2.16}$$

On majore W_j en scindant la sommation sur f en intervalles dyadiques, en utilisant l'indépendance des variables m et p sous la forme d'une double application de l'inégalité de Cauchy–Schwarz, et en appliquant finalement l'inégalité du grand crible (2.10). Ainsi, on a d'abord

$$W_j \ll \mathcal{L} \max_{G \leqslant F_1 \leqslant Q} \sum_{F_1 < f \leqslant 2F_1} \frac{1}{\varphi(f)} \sum_{\chi^* (\mathrm{mod}\, f)} \Bigg| \sum_{\substack{P_j < p \leqslant P_{j+1} \\ m \in S(x/P_{j+1}, P_j)}} \chi^*(pm) \Bigg|. \tag{2.17}$$

Ensuite, on majore la somme en f par

$$\begin{aligned} &\sum_{F_1 < f \leqslant 2F_1} \frac{1}{\varphi(f)} \sqrt{\sum_{\chi^* (\mathrm{mod}\, f)} \Big| \sum_{P_j < p \leqslant P_{j+1}} \chi^*(p) \Big|^2 \sum_{\chi^* (\mathrm{mod}\, f)} \Big| \sum_{m \in S(x/P_{j+1}, P_j)} \chi^*(m) \Big|^2} \\ &\leqslant \Bigg\{ \sum_{F_1 < f \leqslant 2F_1} \frac{1}{\varphi(f)} \sum_{\chi^* (\mathrm{mod}\, f)} \Big| \sum_{P_j < p \leqslant P_{j+1}} \chi^*(p) \Big|^2 \\ &\qquad\qquad \times \sum_{F_1 < f \leqslant 2F_1} \frac{1}{\varphi(f)} \sum_{\chi^* (\mathrm{mod}\, f)} \Big| \sum_{m \in S(x/P_{j+1}, P_j)} \chi^*(m) \Big|^2 \Bigg\}^{1/2} \\ &\leqslant \Big\{ \frac{1}{F_1} \Big((\Delta-1)P_j + 4F_1^2 \Big) (\Delta-1)P_j \cdot \frac{1}{F_1} \Big(\frac{x}{P_{j+1}} + 4F_1^2 \Big) S\Big(\frac{x}{P_{j+1}}, P_j \Big) \Big\}^{1/2}, \end{aligned}$$

où la dernière inégalité découle de (2.10). En majorant trivialement la quantité $S(x/P_{j+1}, P_j)$ par x/P_{j+1}, on obtient

$$\begin{aligned} W_j &\ll \mathcal{L}\sqrt{(\Delta-1)x}\Big\{\frac{(\Delta-1)x}{F_1^2} + (\Delta-1)P_j + \frac{x}{P_j} + F_1^2\Big\}^{1/2} \\ &\ll \mathcal{L}\sqrt{(\Delta-1)x}\Big\{\frac{\sqrt{(\Delta-1)x}}{F_1} + \sqrt{(\Delta-1)y} + \sqrt{\frac{x}{P_j}} + F_1\Big\} \\ &\ll \mathcal{L}\sqrt{(\Delta-1)x}\Big\{\frac{\sqrt{(\Delta-1)x}}{F} + \sqrt{(\Delta-1)y} + \sqrt{\frac{x}{G}} + Q\Big\}. \end{aligned}$$

On peut supposer $y \leqslant \sqrt{x}$, car la conclusion du théorème découle du Théorème A dans le cas contraire. Cela implique

$$W_j \ll \mathcal{L}\sqrt{(\Delta-1)x}\big\{\frac{\sqrt{(\Delta-1)x}}{F} + \sqrt{x/G} + Q\big\}.$$

En reportant dans (2.16) et en tenant compte de (2.9) et de $(\mathcal{C}_\varepsilon)$, on obtient bien l'estimation annoncée.

§3. Démonstration du Théorème 2

3.1. Réduction préliminaire. Dans un premier temps, nous montrons comment déduire (1.13) de la validité de l'estimation

$$\sum_{q\leqslant Q,\,(a,q)=1} |E(x,y;a,q)| \ll_{A,a,\delta} x/(\log x)^A \tag{3.1}$$

sous les hypothèses du Théorème 2.

À cet effet, introduisons le paramètre de découpage $\Delta := 1 + (\log x)^{-A/2}$ et posons $z_j := x/\Delta^j$ pour $0 \leqslant j \leqslant J := 1 + [(\log x)/\log\Delta] \ll (\log x)^2$. Pour chaque $z \leqslant x$, il existe un $j \in [1, J]$ tel que $z_j < z \leqslant \Delta z_{j-1}$. Cela implique

$$|E(z,y;a,q)| \leqslant |E(z_j,y;a,q)| + 2(z-z_j)/\varphi(q) + 2$$

et donc

$$\max_{1\leqslant z\leqslant x} |E(z,y;a,q)| \leqslant \sum_{1\leqslant j\leqslant J} |E(z_j,y;a,q)| + 2(\Delta-1)x/\varphi(q) + 2.$$

En sommant cette inégalité pour $q \leqslant Q$, $(a,q) = 1$, et en appliquant (3.1), on obtient que le membre de gauche de (1.13) est

$$\ll x/(\log x)^{A-2} + (\Delta-1)x\log x + Q \ll x/(\log x)^{(A/2)-1}.$$

Cela implique bien le résultat souhaité.

On peut réduire semblablement la preuve de (1.14), mais les estimations disponibles pour $\Psi(\Delta x, y; a, q) - \Psi(x, y; a, q)$ ne sont, à notre connaisance pas suffisantes pour permettre d'insérer un second maximum dans (1.11).

3.2. Factorisation des éléments de $S(x,y)$. Le principe de la démonstration du Théorème 2 consiste à tirer parti de la souplesse de factorisation des éléments de $S(x,y)$. Il est en effet possible, *grosso modo*, de transformer la fonction caractéristique de $S(x,y)$ en une combinaison linéaire de produits de convolution de trois facteurs où chacun des diviseurs impliqués est astreint à varier dans un intervalle fixé à l'avance. Cette propriété est de même nature que celle des coefficients bien factorisables apparaissant dans le terme d'erreur du crible de Rosser-Iwaniec.

Rappelons d'abord un lemme très simple de Vaughan ([29], *Lemma 10*).

Lemme 3.1. *Soient $x \geqslant M \geqslant y \geqslant 2$, et $n \in S(x,y)$, $n > M$. Il existe une unique décomposition de n sous la forme $n = \ell pm$ avec les conditions*

$$P^+(\ell) \leqslant p \leqslant P^-(m), \qquad M/p < m \leqslant M. \tag{3.1}$$

L'intérêt principal de ce lemme, d'autant plus facile à appliquer que y est petit, est la grande latitude de choix pour le paramètre M. En l'appliquant deux fois consécutives, on obtient le résultat suivant.

Lemme 3.2. *Soient $x \geqslant y \geqslant 2$, $M_1 \geqslant y$, $M_2 \geqslant y$, $n \in S(x,y)$, $n > M_1M_2y$. Il existe une unique factorisation de n sous la forme $n = m_0p_1m_1p_2m_2$ avec les conditions*

$$\begin{aligned} &\text{(i)} \qquad P^+(m_0) \leqslant p_1 \leqslant P^-(m_1), \quad P^+(m_1) \leqslant p_2 \leqslant P^-(m_2),\\ &\text{(ii)} \qquad M_1/p_1 < m_1 \leqslant M_1, \quad M_2/p_2 < m_2 \leqslant M_2. \end{aligned}$$

Démonstration. Par le Lemme 3.1, on peut écrire $n = \ell_1p_2m_2$ avec

$$P^+(\ell_1) \leqslant p_2 \leqslant P^-(m_2), \qquad M_2/p_2 < m_2 \leqslant M_2.$$

Comme $\ell_1 \in S(x,p_2)$, $\ell_1 \geqslant n/p_2M_2 > n/yM_2 > M_1$, une seconde application du Lemme 3.1 fournit $\ell_1 = m_0p_1m_1$, avec

$$P^+(m_0) \leqslant p_1 \leqslant P^-(m_1), \qquad M_1/p_1 < m_1 \leqslant M_1.$$

Les encadrements annoncés sont donc bien réalisés. L'unicité découle de celle du Lemme 3.1.

3.3. Un théorème de Siegel-Walfisz pour les entiers sans grand ni petit facteur premier.
Ainsi que nous l'avons signalé dans l'introduction, nous faisons appel, pour la démonstration du Théorème 2, à un résultat concernant la répartition en moyenne de certains produits de convolution arithmétiques. Cet énoncé, rappelé au Lemme 8 ci-dessous, est soumis à l'hypothèse technique simplificatrice (la condition (A_4) de [1]) de travailler avec des entiers sans petit facteur premier. Cela nous conduit à examiner la répartition dans les progressions arithmétiques des entiers sans grand ni petit facteur premier.

Posons

$$S(x,y,z) := \{n \leqslant x : P^-(n) > z,\ P^+(n) \leqslant y\}, \qquad \vartheta(x,y,z) := |S(x,y,z)|.$$

Nous obtenons le résultat suivant comme conséquence directe du point (i) du Lemme 2.1. Nous nous sommes contentés ici d'estimations suffisantes pour la suite de la démonstration du Théorème 2, et nous n'avons pas cherché à optimiser les domaines de variation des divers paramètres. Nous conservons la notation

$$Y := e^{\sqrt{\log y}}$$

introduite à la section précédente.

Lemme 3.3. *Soient $A > 0$, $\varepsilon > 0$. Il existe une constante $c_4 = c_4(A, \varepsilon) > 0$ telle que, sous la condition*

(3.2)
$$x \geqslant 3, \quad \exp\{(\log x)^{\varepsilon}\} \leqslant y \leqslant x, \quad 1 \leqslant z \leqslant Y, \quad 2 \leqslant q \leqslant (\log x)^A, \quad e \geqslant 1,$$

la majoration

$$\sum_{\substack{n \in S(x,y,z) \\ (n,e)=1}} \chi(n) \ll_{\varepsilon, A} \tau(e) \vartheta(x, y, z) Y^{-c_4} \tag{3.3}$$

soit uniformément valable pour tout caractère de Dirichlet non-principal de module q.

Démonstration. On peut se restreindre au cas $e = 1$, le passage au cas général étant traité comme indiqué au paragraphe 2.1. Par la formule d'inversion de Möbius, le membre de gauche de (3.3) vaut encore

$$\begin{aligned}
&\sum_{P^+(d) \leqslant z} \mu(d)\chi(d) \sum_{m \in S(x/d, y)} \chi(m) \\
&\quad \ll_{A,\varepsilon} \sum_{d \in S(x/y, z)} \mu(d)^2 Y^{-c_5} \Psi(x/d, y) + \sum_{\substack{P^+(d) \leqslant z \\ x/y < d \leqslant x}} \Big| \mu(d)\chi(d) \sum_{m \leqslant x/d} \chi(m) \Big| \\
&\quad \ll_{A,\varepsilon} Y^{-c_5} \Psi(x, y) \prod_{p \leqslant z} \big(1 + p^{\beta_2 - 1}\big) + q\Psi(x, z),
\end{aligned}$$

avec $c_5 = c_5(A, \varepsilon) > 0$, et où nous avons utilisé successivement le Lemme 2.1 et l'estimation (4.2) (avec $q = 1$) du Lemme 4.2 de la section suivante, dans lequel $\beta_2 \ll \log(u + 1)/\log y$. Sous l'hypothèse (3.2), le produit en p est $\ll \log z$. De plus, on déduit facilement de (1.10) que l'on a dans les mêmes conditions

$$q\Psi(x, z) \leqslant (\log x)^A \Psi(x, z) \ll_{A,\varepsilon} \Psi(x, y) Y^{-1}.$$

Compte tenu de la minoration

$$\vartheta(x, y, z) \gg \Psi(x, y)/\log z,$$

qui découle, sous l'hypothèse (3.1), du Corollaire 1 de [12], on obtient bien le résultat souhaité.

En utilisant l'orthogonalité des caractères, on déduit du Lemme 3.3 le résultat suivant, auquel il est naturel de donner le nom de Théorème de Siegel-Walfisz pour les entiers sans grand ni petit facteur premier.

Lemme 3.4. *Soit $A > 0$. On a uniformément pour $x \geqslant y \geqslant 2$, $1 \leqslant z \leqslant Y$, $(a,q) = 1$, $e \geqslant 1$,*

$$\sum_{\substack{n\in S(x,y,z)\\ n\equiv a\,(\mathrm{mod}\,q)\\ (n,e)=1}} 1 = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\substack{n\in S(x,y,z)\\ (n,eq)=1}} 1 + O_A\big(x\tau(e)\mathcal{L}^{-A}\big).$$

Le résultat est banal dès que $y \leqslant x^{c(A)\log_3 x/\log_2 x}$ ou $q > (\log x)^A$, mais il sera suffisant pour la démonstration du Théorème 2.

3.4. Formes trilinéaires et progressions arithmétiques. Nous rappelons ici le *Theorem 4* de [1] qui traite de la répartition en moyenne du produit de convolution de trois suites. Nous nous plaçons dans le cadre un peu moins général de suites à valeurs dans le disque unité, ce qui évite de faire intervenir les normes ℓ^2 dans les énoncés.

Dans ce qui suit, nous considérons des nombres réels positifs x, L, M, N tels que

$$LMN = x, \tag{3.4}$$

et nous nous donnons trois suites $\{\lambda_\ell\}_{\ell=1}^\infty$, $\{\alpha_m\}_{m=1}^\infty$, $\{\beta_n\}_{n=1}^\infty$, de supports respectifs inclus dans $[L, 2L]$, $[M, 2M]$, $[N, 2N]$. Nous supposons que $\{\beta_n\}_{n=1}^\infty$ est bien répartie dans les progressions arithmétiques au sens de la condition (A_2) de [1], c'est-à-dire que la formule asymptotique

$$\sum_{\substack{n\equiv a\,(\mathrm{mod}\,q)\\ (n,e)=1}} \beta_n = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{(n,eq)=1} \beta_n + O_A\big(\tau(e)N(\log 2N)^{-A}\big) \tag{3.5}$$

est valable, pour chaque $A > 0$ fixé, uniformément en a, q tels que $(a,q) = 1$. Nous supposons également que λ_ℓ et β_n s'annulent sur les entiers ayant de petits facteurs premiers, soit

$$P^-(\ell n) \leqslant \exp\{(\log_2 x)^2\} \Rightarrow \lambda_\ell \beta_n = 0, \tag{3.6}$$

ce qui correspond à la condition (A_4) de [1]. Pour mesurer la répartition de $\lambda_\ell * \alpha_m * \beta_n$ dans les progressions arithmétiques, nous introduisons le terme d'erreur abstrait

$$\Delta_a(L,M,N;R) := \sum_{\substack{R<r\leqslant 2R\\ (r,a)=1}} \Bigg| \sum_{\substack{\ell,m,n\\ \ell mn\equiv a\,(\mathrm{mod}\,r)}} \lambda_\ell\alpha_m\beta_n - \frac{1}{\varphi(r)} \sum_{\substack{\ell,m,n\\ (\ell mn,r)=1}} \lambda_\ell\alpha_m\beta_n \Bigg|.$$

Avec ces hypothèses et notations, nous avons le résultat suivant.

Lemme 3.5 (Bombieri, Friedlander et Iwaniec). *Soient* $\varepsilon > 0$, $A > 0$. *Pour tous* x, L, M, N *satisfaisant* (3.4) *et toutes suites*

$$\{\lambda_\ell\}_{\ell=1}^\infty, \quad \{\alpha_m\}_{m=1}^\infty, \quad \{\beta_n\}_{n=1}^\infty,$$

à valeurs dans le disque unité, vérifiant les hypothèses précédentes, on a

$$\Delta_a(L, M, N; R) \ll_{\varepsilon,a,A} x/(\log x)^A \tag{3.7}$$

uniformément sous la condition

(3.8)

$$\min\{L, M, N\} \geqslant x^\varepsilon, \quad L^3N^2 \leqslant x^{1-\varepsilon}R, \quad x^\varepsilon R \leqslant LN, \quad L^3N^4 + L^2N^5 \leqslant x^{2-\varepsilon}.$$

Le premier auteur saisit l'occasion fournie par le présent article pour signaler que ce lemme apparaît dans [9] (comme le Lemme 5), mais sous une forme incomplète ; en effet, la condition $L^3N^4 \leqslant x^{2-\varepsilon}$ est absente, comme elle le fut dans la version préliminaire non publiée de [1]. Cette lacune n'affecte nullement le résultat du Lemme 9 de [9]. En revanche, sans remettre en cause l'argument combinatoire du §IV.2 de [9], il faut alors poser, avec les notations de [9], $\gamma(\vartheta) = \frac{1}{7}(12 - 13\vartheta)$, et $\delta(\vartheta) = \frac{1}{7}(9 - 8\vartheta)$ lorsque $\frac{17}{32} - \varepsilon < \vartheta \leqslant \frac{3}{5}$, ce qui amène à modifier la définition de $C(\vartheta)$ dans le Théorème 3 de [9] (Théorème de Brun-Titchmarsh en moyenne), soit $C(\vartheta) = 14/(12 - 13\vartheta) - \max(0, \log(4(1-\vartheta)/3\vartheta)$ pour $\frac{17}{32} - \varepsilon < \vartheta \leqslant \frac{3}{5}$. Finalement, le Théorème 1 de [9] (concernant l'ordre de grandeur du plus grand facteur premier de $p - 1$) est valide pour une valeur de δ_0 légèrement moins bonne, mais toujours suprérieure à $\frac{2}{3}$, à savoir $\delta_0 = 0,6683$ au lieu de $\delta_0 = 0,6687$. Cette correction n'affecte nullement l'application au premier cas du Théorème de Fermat. Toutes ces techniques, le Lemme 5 en particulier, réapparaissent de façon cruciale, parmi d'autres innovations importantes, dans le récent travail de Baker & Harman [3], qui conduit à une substantielle amélioration de la valeur de δ_0 évoquée plus haut, à savoir $\delta_0 = 0,675$. Par une curieuse coïncidence, notre Corollaire 4, qui traite du problème dual de celui de [3], fournit un exposant numériquement très proche de δ_0...

Le Lemme 3.5 est une conséquence classique du grand crible lorsque $R \leqslant x^{1/2-\varepsilon}$. Un calcul de routine permet d'en déduire la description explicite d'une classe de suites de longueur x ayant un niveau de répartition $x^{3/5-\varepsilon}$. Plus précisément, on a le résultat suivant.

Lemme 3.6. *Soit* $\varepsilon > 0$. *Le système d'inégalités* (3.8) *est vérifié, lorsque* $x > x_0(\varepsilon)$, *pour tous nombres réels positifs* L, M, N, R *satisfaisant à*

$$\begin{cases} LMN = x, & x^{1/2-\varepsilon} \leqslant R \leqslant x^{3/5-100\varepsilon}, \\ x^{1-11\varepsilon} \leqslant LR \leqslant x^{1-10\varepsilon}, & R^2x^{-1+12\varepsilon} \leqslant N \leqslant R^2x^{-1+13\varepsilon}. \end{cases} \tag{3.9}$$

Le résultat suivant sera utilisé pour estimer l'erreur impliquée par certains découpages.

Lemme 3.7. *Soit $\mathcal{B}$ un ensemble d'entiers inclus dans $[1,x]$, et $\{\xi_b\}_{b\in\mathcal{B}}$ une suite à valeurs dans le disque unité. On a, uniformément pour $Q\leqslant x$, $|a|\leqslant x$,*

$$\sum_{\substack{q\leqslant Q\\(q,a)=1}}\Bigg|\sum_{\substack{b\in\mathcal{B}\\b\equiv a\,(\mathrm{mod}\,q)}}\xi_b-\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\substack{b\in\mathcal{B}\\(b,q)=1}}\xi_b\Bigg|\ll\sqrt{x|\mathcal{B}|}\mathcal{L}^{3/2}+Q. \tag{3.10}$$

Démonstration. Le membre de gauche de (3.10) n'excède pas

$$\sum_{q\leqslant Q}\Big(\sum_{\substack{b\in\mathcal{B}\\b\equiv a\,(\mathrm{mod}\,q)}}1+\frac{|\mathcal{B}|}{\varphi(q)}\Big)\leqslant\sum_{\substack{b\in\mathcal{B}\\b\neq a}}\tau(|b-a|)+Q+|\mathcal{B}|O(\mathcal{L}).$$

On en déduit l'estimation annoncée en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la majoration classique $\sum_{n\leqslant x}\tau(n)^2\ll x\mathcal{L}^3$.

3.5. Préparation des variables. Pour démontrer le Théorème 2, nous pouvons supposer sans perte de généralité que l'on a

$$x^{1/\log_2 x}\leqslant y\leqslant x^{\eta/4},\qquad Q=x^{3/5-100\eta}, \tag{3.11}$$

où η est un nombre réel positif assez petit. En effet, on déduit immédiatement de (1.10) et du Lemme 3.7 que l'estimation (1.13) est satisfaite lorsque y est plus petit que la borne inférieure de (3.11). On peut alors choisir, dans l'énoncé du théorème, $c_0(\delta)=\delta/400$ pour δ assez petit.

Avec ces réductions préliminaires, et compte tenu du Théorème A, on voit qu'il suffit de montrer que, pour tout R satisfaisant à $x^{1/2-\eta}\leqslant R\leqslant x^{3/5-100\eta}$, l'on a

$$T(R):=\sum_{\substack{R<r\leqslant 2R\\(r,a)=1}}\big|E(x,y;a,r)-E(x/2,y;a,r)\big|\ll_{\eta,a,A}x/\mathcal{L}^A. \tag{3.12}$$

Maintenant, observons que

$$E(x,y;a,r)-E(x/2,y;a,r)=\sum_{\substack{x/2<d\leqslant x\\P^+(d)\leqslant y}}\big\{h(d;a,r)-h(d;r)/\varphi(r)\big\} \tag{3.13}$$

où $h(d;a,r)$ (resp. $h(d;r)$) est la fonction indicatrice de l'ensemble des entiers d tels que $d\equiv a\,(\mathrm{mod}\,r)$ (resp. tels que $(d,r)=1$). Nous appliquons le Lemme 3.1 pour factoriser les entiers d appparaissant dans cette sommation. Nous choisissons

$$M_1:=x^{1-2\eta}/R,\qquad M_2:=x^{1-11\eta}/R,$$

de sorte que l'on peut décomposer d de manière unique sous la forme $d=m_0p_1m_1p_2m_2$ avec

$$\begin{aligned}&P^+(m_0)\leqslant p_1,\\&p_1\leqslant P^-(m_1),\qquad P^+(m_1)\leqslant p_2,\qquad M_1/p_1<m_1\leqslant M_1,\\&p_2\leqslant P^-(m_2),\qquad P^+(m_2)\leqslant y,\qquad M_2/p_2<m_2\leqslant M_2.\end{aligned}$$

On a

$$m_0 \leqslant x/M_1M_2 = R^2/x^{1-13\eta}, \tag{3.14}$$

et

$$m_0 \geqslant x/2p_1M_1p_2M_2 \geqslant R^2/2x^{1-25\eta/2} =: M_0 > x^{10\eta}. \tag{3.15}$$

On peut dès à présent noter que, posant

$$Z := \exp\big(\mathcal{L}^{1/2}\big),$$

le nombre des entiers d tels que $p_1 \leqslant Z$ n'excède pas

$$\sum_{\substack{M_0 \leqslant m_0 \leqslant M_0x^\eta \\ P^+(m_0) \leqslant Z}} x/m_0 \ll_\eta x/Z,$$

où la dernière estimation découle de (1.10) par sommmation d'Abel. Grâce au Lemme 3.7, on en déduit que la contribution à $T(R)$ des entiers d tels que $p_1 \leqslant Z$ satisfait bien à la majoration (3.12). Nous nous bornerons donc dans la suite à estimer la somme $T^*(R)$ définie en restreignant la somme en d de (3.13) aux entiers d tels que $p_1 > Z$.

Nous employons une technique voisine de celle de la démonstration du Théorème 1, et opérons dans $T^*(R)$ un découpage de pas multiplicatif

$$\Delta := 1 + \mathcal{L}^{-B},$$

où $B = B(A)$ est suffisamment grand. Pour $j \geqslant 1$, nous posons

$$P_j := Z\Delta^j, \qquad M_{0j} := M_0\Delta^j, \qquad \text{et} \qquad M_{ij} := M_i/\Delta^j \quad (i = 1, 2).$$

Nous désignons par $\mathcal{W}^*$ l'ensemble des quintuplets $\mathbf{w} := (j_1, j_2, h_0, h_1, h_2)$ tels que

$$Z \leqslant P_{j_1} < P_{j_2} < y, \quad M_1/P_{j_1} < M_{1h_1} \leqslant M_1/\Delta, \quad M_2/P_{j_2} < M_{2h_2} \leqslant M_2/\Delta,$$
$$x/2 < P_{j_1}P_{j_2}M_{0h_0}M_{1h_1}M_{2h_2} \leqslant x.$$

On a $|\mathcal{W}^*| \ll \mathcal{L}^{5B+5}$, et l'on peut écrire

$$T^*(R) = \sum_{\mathbf{w}\in\mathcal{W}^*} T^*(R, \mathbf{w}) + \mathcal{E}^*(R) \tag{3.16}$$

avec

$$T^*(R, \mathbf{w}) := \sum_{\substack{R<r\leqslant 2R \\ (r,a)=1}} \Big| \sum_d \varrho(d; \mathbf{w})\big\{h(d; a, r) - h(d; r)/\varphi(r)\big\}\Big|,$$

où, pour chaque $\mathbf{w} = (j_1, j_2, h_0, h_1, h_2)$, $\varrho(d; \mathbf{w})$ vaut 1 ou 0 selon que d admet ou non une représentation (nécessairement unique) sous la forme $d = p_1 p_2 m_0 m_1 m_2$ avec

$$M_{ih_i} < m_i \leqslant \Delta M_{ih_i} \quad (i = 0, 1, 2), \qquad P_{j_k} < p_k \leqslant \Delta P_{j_k} \quad (k = 1, 2),$$
$$P^+(m_0) \leqslant P_{j_1},\ P^-(m_k) \geqslant \Delta P_{j_k}\ (k = 1, 2),\ P^+(m_1) \leqslant P_{j_2},\ P^+(m_2) \leqslant y.$$

On peut estimer $\mathcal{E}^*(R)$ en appliquant le Lemme 3.7 après avoir majoré le nombre des entiers d tels que $\varrho(d; \mathbf{w}) = 0$ pour tout $\mathbf{w} \in \mathcal{W}^*$ et dont la contribution à $T^*(R)$ est cependant non nulle. Cette dernière opération est semblable à la majoration des quantités $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ apparaissant dans (2.15), et nous omettons les détails. On obtient finalement pour $B = B(A)$ assez grand

$$\mathcal{E}^*(R) \ll x/\mathcal{L}^A, \tag{3.17}$$

ce qui est bien compatible avec (3.12).

3.6. Factorisation de m_0 et fin de la démonstration. Le travail de préparation de la sous-section précédente nous a permis d'exprimer dans (3.16) la somme $T^*(R)$ en fonction des $T^*(R, \mathbf{w})$, où apparaissent cinq variables indépendantes dès que l'on explicite la fonction $\varrho(d; \mathbf{w})$. Toutefois, il est encore nécessaire de contrôler la taille du produit des petits facteurs premiers de m_0. À cette fin, nous posons

$$m_0 = m_0' m_0'', \qquad \text{avec} \qquad m_0' := \prod_{\substack{p^\nu \| m_0 \\ p \leqslant U}} p^\nu \qquad \big(U := \exp(\mathcal{L}^{1/5})\big).$$

D'après le *Theorem 07* de [17], on a, posant $V := \exp(\mathcal{L}^{1/4})$,

$$\big|\{d \leqslant x : m_0' > V\}\big| \ll x \exp(-c_6 \mathcal{L}^{1/20})$$

où c_6 est une constante absolue positive. Le Lemme 3.7 nous permet donc d'inférer que la somme des contributions à $T^*(R, \mathbf{w})$ des entiers d tels que $m_0' > V$ est négligeable.

Il reste à rendre les variables m_0' et m_0'' indépendantes par un nouveau découpage et à appliquer le Lemme 3.5 pour chaque somme $T^*(R, \mathbf{w})$ en choisissant les variables

$$\ell := p_2 m_2, \qquad m := m_0' p_1 m_1, \qquad n := m_0'',$$

les quantités λ_ℓ, α_m, β_n valant 0 ou 1, selon que leurs indices admettent ou non une décomposition (alors nécessairement unique) sous la forme indiquée ci-dessus. La condition (3.6) est vérifiée par construction puisque $p_2 \geqslant p_1 > Z$ pour tous les entiers d comptés dans $T^*(R)$. Le Lemme 3.4, appliqué avec $y = P_{j_1} > Z$, $z = V$, montre que β_n satisfait bien à la condition (3.5). Par

(3.14) et (3.15), on voit que, pour chaque $\mathbf{w} = (j_1, j_2, h_0, h_1, h_2)$, le support de $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ est inclus dans un intervalle $[N, 2N]$, avec

$$R^2/x^{1-12\eta} \leqslant M_{0h_0}/V \leqslant N \leqslant M_{0h_0} \leqslant R^2/x^{1-13\eta}.$$

De même, le support de λ_ℓ est inclus dans $[L, 2L]$, avec

$$x^{1-11\eta}/R = M_2 \leqslant L \leqslant yM_2 \leqslant x^{1-10\eta}/R.$$

Les conditions (3.9) du Lemme 3.6 sont donc vérifiées, et l'on en déduit que l'on a pour tout D l'estimation

$$T^*(R, \mathbf{w}) \ll_D x/\mathcal{L}^D.$$

En sommant cette estimation sur $\mathbf{w} \in \mathcal{W}^*$ et en appliquant (3.16) et (3.17), on obtient bien le résultat requis (3.12). Cela achève la démonstration du Théorème 2.

§4. Démonstration du Théorème 4

Commençons par rappeler les propriétés essentielles des coefficients du crible de Rosser-Iwaniec — cf.[22], [23]. Outre les notations indiquées dans l'introduction, nous posons, étant donné un ensemble de nombres premiers $\mathcal{P}$, $P(z) := \prod_{p\in\mathcal{P},\, p\leqslant z} p$.

Lemme 4.1. *Soit $D \geqslant 1$. Il existe deux suites $\{\lambda_d^+\}_{d=1}^{\infty}$ et $\{\lambda_d^-\}_{d=1}^{\infty}$, nulles pour $d > D$ ou $\mu(d) = 0$, vérifiant $\lambda_1^\pm = 1$, $|\lambda_d^\pm| \leqslant 1$, et telles que l'on ait*

$$\lambda^- * \mathbf{1} \leqslant \mu * \mathbf{1} \leqslant \lambda^+ * \mathbf{1},$$

et

$$\sum_{d|P(z)} \lambda_d^+ \frac{w(d)}{d} \leqslant \prod_{\substack{p\leqslant z\\ p\in\mathcal{P}}} \Big(1 - \frac{w(p)}{p}\Big)\Big\{F(s) + O\Big(\frac{e^{\sqrt{L}-s}}{(\log D)^{1/3}}\Big)\Big\}$$

$$\sum_{d|P(z)} \lambda_d^- \frac{w(d)}{d} \geqslant \prod_{\substack{p\leqslant z\\ p\in\mathcal{P}}} \Big(1 - \frac{w(p)}{p}\Big)\Big\{f(s) + O\Big(\frac{e^{\sqrt{L}-s}}{(\log D)^{1/3}}\Big)\Big\}$$

pour tout $z \in [2, D]$, $D = z^s$, tout ensemble de nombres premiers $\mathcal{P}$, et toute fonction multiplicative w vérifiant

(i) $$0 < w(p) < p \qquad (p \in \mathcal{P}),$$

(ii) $$\prod_{u<p\leqslant v,\, p\in\mathcal{P}} \Big(1 - \frac{w(p)}{p}\Big)^{-1} \leqslant \frac{\log v}{\log u}\Big(1 + \frac{L}{\log u}\Big) \qquad (2 \leqslant u \leqslant v \leqslant z).$$

Les estimations suivantes concernant le comportement local de la fonction $\Psi_q(x, y)$ sont des conséquences immédiates des Lemmes 2 & 3 de [21] et du Théorème de [28] — ou du Théorème 5 du présent travail. Nous désignons par $\xi = \xi(t)$ l'unique solution positive de l'équation

$$e^\xi = 1 + t\xi \tag{4.1}$$

pour $t > 1$ et posons $\xi(1) = 0$.

Lemme 4.2. *Posons* $\beta_1 := \beta_1(x,y) = \xi(u)/\log y$, *et* $\beta_2 = \beta_2(x,y) := \beta_1 + c/\log y$, *où* c *est une constante absolue assez grande. On a, uniformément lorsque* x, y *satisfont à l'hypothèse* (H) *du Théorème 4 et* q *vérifie la condition* (Ω) *du Théorème 5,*

$$\Psi_q(x/d,y) = \frac{\varphi(q)}{q}\frac{\Psi(x,y)}{d^{1-\beta_1}}\big\{1 + O\big(U(x,y;q,d)\big)\big\} \quad (1 \leqslant d \leqslant y), \tag{4.2}$$

$$\Psi_q(x/d,y) \ll \frac{\varphi(q)}{q}\frac{\Psi(x,y)}{d^{1-\beta_2}} \qquad (1 \leqslant d \leqslant x), \tag{4.3}$$

où l'on a posé $U(x,y;q,d) := \dfrac{\log d}{\log x} + \dfrac{\log(1+u)\log\{1+\omega(q)\} + \log_2 y}{\log y}$.

Nous pouvons maintenant établir le Théorème 4. Supposons par exemple que q est impair, le cas complémentaire se traitant similairement et en fait un peu plus simplement. En remarquant que les entiers comptés dans $S(\mathcal{A}_q, \mathcal{P}_q, z)$ sont nécessairement impairs puisque $z \geqslant 2$, on peut écrire

(4.4)

$$\begin{aligned}
S(\mathcal{A}_q, \mathcal{P}_q, z) &= \sum_{\substack{2m\in S(x,y)\\ 2m\equiv -1 \,(\mathrm{mod}\, q)}} \sum_{d|(2m+1, P_q(z))} \mu(d) \\
&\leqslant \sum_{\substack{2m\in S(x,y)\\ 2m\equiv -1 \,(\mathrm{mod}\, q)}} \sum_{d|(2m+1, P_q(z))} \lambda_d^+ = \sum_{d|P_{2q}(z)} \lambda_d^+ \sum_{\substack{2m\in S(x,y)\\ 2m\equiv -1 \,(\mathrm{mod}\, qd)}} 1 \\
&= \sum_{d|P_{2q}(z)} \lambda_d^+ \Big\{\Psi(x,y;-1,qd) - \Psi(x,y;-1,2qd)\Big\} \\
&= \sum_{d|P_{2q}(z)} \lambda_d^+ \Big\{\frac{\Psi_{qd}(x,y) - \Psi_{2qd}(x,y)}{\varphi(qd)} + E(x,y;-1,qd) - E(x,y;-1,2qd)\Big\} \\
&\leqslant \sum_{d|P_{2q}(z)} \frac{\lambda_d^+}{\varphi(qd)} \sum_{\substack{2m\in S(x,y)\\ (qd,2m)=1}} 1 + \sum_{d\leqslant D} \big|E(x,y;-1,qd) - E(x,y;-1,2qd)\big| \\
&\leqslant \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\substack{m\in S(x/2,y)\\ (m,q)=1}} \sum_{d|P_{2qm}(z)} \frac{\lambda_d^+}{\varphi(d)} + R \\
&\leqslant \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\substack{m\in S(x/2,y)\\ (m,q)=1}} \prod_{\substack{p\leqslant z\\ p\nmid 2qm}} \Big(1 - \frac{1}{p-1}\Big)\big\{F(s) + O(V_1)\big\} + R \\
&\leqslant \frac{\big\{F(s) + O(V_1)\big\}}{\varphi(q)} \prod_{p\leqslant z,\, p\nmid 2q} \Big(1 - \frac{1}{p-1}\Big) \sum_{\substack{m\in S(x/2,y)\\ (m,q)=1}} H(m) + R,
\end{aligned}$$

où l'on a posé $V_1 = (\log D)^{-1/3}$ et où H est la fonction fortement multiplicative

définie par

$$H(p) = \begin{cases} 1 & \text{si } p = 2 \text{ ou } p > z, \\ \dfrac{p-1}{p-2} & \text{si } 2 < p \leqslant z. \end{cases}$$

Soit alors $h = H * \mu$. On a $h(p) = 0$ si $p = 2$ ou $p > z$, $h(p) = 1/(p-2)$ si $2 < p \leqslant z$ et $h(p^\nu) = 0$ pour tout p si $\nu \geqslant 2$. En écrivant $H(m)$ sous la forme $\sum_{t|m} h(t)$ et en intervertissant les sommations, on obtient

$$\sum_{\substack{m \in S(x/2,y) \\ (m,q)=1}} H(m) = \sum_{\substack{t \in S(x/2,y) \\ (t,q)=1}} h(t)\Psi_q(x/2t, y). \tag{4.5}$$

Nous scindons la somme en t en plaçant la variable relativement à $(\log y)^3$ et faisons appel aux estimations du Lemme 4.2. On a $\omega(q) \ll \log x$, et donc $U(x, y; q, t) \ll (\log_2 y)/\log y$ dans les hypothèses du théorème. Nous obtenons donc que (4.5) vaut

$$\frac{\varphi(q)}{q}\Psi(x,y) \sum_{\substack{t \leqslant (\log y)^3 \\ (t,q)=1}} \frac{h(t)}{2t}\Big\{1 + O\Big(\frac{\log_2 y}{\log y}\Big)\Big\} + O\Big(\frac{\varphi(q)}{q}\Psi(x,y) \sum_{\substack{t > (\log y)^3 \\ P^+(t) \leqslant y}} \frac{h(t)}{t^{1-\beta_2}}\Big). \tag{4.6}$$

On a par exemple $h(t) \ll 1/\sqrt{t}$. Cela permet de majorer la dernière somme en t par $\ll 1/\log y$. De plus

$$\sum_{\substack{t=1 \\ (t,q)=1}}^{\infty} \frac{h(t)}{2t} = \tfrac{1}{2} \prod_{\substack{2 < p \leqslant \min(y,z) \\ p \nmid q}} \frac{(p-1)^2}{p(p-2)} = \tfrac{1}{2} \prod_{\substack{2 < p \leqslant z \\ p \nmid q}} \frac{(p-1)^2}{p(p-2)}\Big\{1 + O\Big(\frac{1}{y}\Big)\Big\}.$$

En reportant dans (4.6), puis dans (4.4), on obtient

$$S(\mathcal{A}_q, \mathcal{P}_q, z) \leqslant \frac{\Psi(x,y)}{q} \prod_{p \leqslant z,\, p \nmid q} \Big(1 - \frac{1}{p}\Big)\Big\{F(s) + O(V_1)\Big\}\Big\{1 + O\Big(\frac{\log_2 y}{\log y}\Big)\Big\} + R.$$

Cela implique immédiatement la majoration de l'énoncé. La minoration peut bien entendu être traitée de manière parallèle.

§5. Démonstration du Corollaire 4

Soit $\varepsilon > 0$. On considère la somme de Tchébychev-Hooley

$$TH(x,y) := \sum_{\substack{x^{1-\varepsilon} < n \leqslant x \\ P^+(n) \leqslant y}} \log(n+1),$$

où l'on décompose $\log(n+1)$ sous la forme $\sum_{t|(n+1)} \Lambda(t)$. On scinde alors $TH(x)$ en trois sous-sommes, $TH_1(x,y)$, $TH_2(x,y)$, $TH_3(x,y)$, correspondant aux conditions respectives de sommation

$$t \leqslant T := x^{3/5-\varepsilon}, \qquad T < t \leqslant x^\vartheta \qquad \text{et} \qquad t > x^\vartheta.$$

Nous allons montrer que, pour la valeur indiquée de ϑ, on a $TH_3(x,y) \gg \Psi(x,y)\log x$ pour $x > x_0$ et

$$y = x^{\delta \log_3 x/\log_2 x}. \tag{5.1}$$

Cela implique bien la propriété annoncée puisque les t fournissant une contribution non nulle à $TH_3(x,y)$ sont nécessairement des nombres premiers.

Dans toute la suite, nous supposons que $y = y(x)$ est donné par (5.1). D'après les évaluations classiques de $\Psi(x,y)$ (cf.par exemple (6.11) *infra*), on a par sommation d'Abel

$$TH(x,y) \sim x\varrho(u)\log x \qquad (x \to \infty). \tag{5.2}$$

On traite $TH_1(x,y)$ par interversion de sommations. Il vient

$$\begin{aligned} TH_1(x,y) &\leqslant \sum_{t\leqslant T} \Lambda(t)\Psi(x,y;-1,t) \\ &\leqslant \sum_{t\leqslant T} \Lambda(t)\frac{\Psi_t(x,y)}{\varphi(t)} + \log x \sum_{t\leqslant T} |E(x,y;-1,t)| \\ &\leqslant \Psi(x,y)\sum_{t\leqslant T}\frac{\Lambda(t)}{\varphi(t)} + O_A\big(x/(\log x)^A\big) \\ &\leqslant \big(\tfrac{3}{5}+o(1)\big)x\varrho(u)\log x, \end{aligned} \tag{5.3}$$

où nous avons fait appel au Théorème 2 pour évaluer la somme des restes $|E(x,y;-1,t)|$ et choisi $A = A(\delta)$ de manière à ce que $\varrho(u)(\log x)^A \gg 1$.

Bien que le théorème 2 ne fournisse aucune information pour $q > T$, nous pouvons majorer $TH_2(x,y)$ grâce à une technique de crible assortie d'une inversion du rôle des variables. Pour chaque entier n compté dans $TH_2(x,y)$, nous décomposons $n+1$ sous la forme $n+1 = pm$ avec $p = P^+(n+1)$. On a alors nécessairement

$$t = p, \qquad M_1 := x^{1-\vartheta-\varepsilon} \leqslant m \leqslant M_2 := x^{2/5+2\varepsilon}.$$

De plus, à m fixé, le nombre N_m de p admissibles est égal au nombre des entiers n tels que

$$n \equiv -1 \,(\mathrm{mod}\, m), \qquad n \in S(x,y), \qquad (n+1)/m \text{ est premier.}$$

Posant $\mathcal{B}(m) := \{(n+1)/m : n \in S(x,y),\, n \equiv -1 \,(\mathrm{mod}\, m)\}$, on a donc

$$N_m \leqslant S(\mathcal{B}(m), \mathcal{P}, \sqrt{x/m}),$$

où $\mathcal{P}$ est l'ensemble de tous les nombres premiers. Ce nombre est majoré par $S(\mathcal{A}_m, \mathcal{P}_m, \sqrt{x/m})$, avec les notations du Théorème 4. Cependant, partant de

l'égalité $|\mathcal{B}(m)_d| = |\mathcal{A}_{md}|$, on peut montrer, par la même méthode et des calculs presqu'identiques, que la majoration un peu plus précise

$$S(\mathcal{B}(m), \mathcal{P}, z) \leqslant \frac{x\varrho(u)}{m} \prod_{p \leqslant z} \Big(1 - \frac{1}{p}\Big)\big\{F(s) + O(V)\big\} + R,$$

est valable dans les hypothèses du Théorème 4, les quantités R et V étant définies par (1.18) avec $q = m$. En utilisant cette estimation et le Théorème 2 pour $z = \sqrt{T/m}$ et $D = z^2 = T/m$, il suit

$$\begin{aligned} TH_2(x,y) &\leqslant \sum_{M_1 < m \leqslant M_2} \log((x+1)/m) S(\mathcal{B}(m), \mathcal{P}, \sqrt{T/m}) \\ &\leqslant \big(1 + o(1)\big) \sum_{M_1 < m \leqslant M_2} \log(x/m) \frac{x\varrho(u)}{m} \prod_{p \leqslant z} \Big(1 - \frac{1}{p}\Big) F(2) \\ &\leqslant \big(1 + o(1)\big) x\varrho(u) \sum_{M_1 < m \leqslant M_2} \frac{2\log(x/m)}{m \log(T/m)}, \end{aligned}$$

puisque $F(2) = e^{\gamma}$. Par sommation d'Abel, on obtient

$$TH_2(x,y) \leqslant \big(1 + O(\varepsilon)\big) I(\vartheta) x\varrho(u) \log x, \tag{5.5}$$

avec

$$I(\vartheta) := 2 \int_{1-\vartheta}^{2/5} \frac{1-t}{3/5 - t}\, \mathrm{d}t = 2\big\{\vartheta - \tfrac{3}{5} + \tfrac{2}{5}\log(5\vartheta - 2)\big\}.$$

Compte tenu de (5.2) et (5.3), on voit donc que $TH_3(x,y) \gg \Psi(x,y)\log x$ dès que

$$\tfrac{3}{5} + 2\big\{\vartheta - \tfrac{3}{5} + \tfrac{2}{5}\log(5\vartheta - 2)\big\} < 1, \quad \text{soit} \quad 5\vartheta + 2\log(5\vartheta - 2) < 4.$$

Cette inégalité est bien satisfaite pour $\vartheta = 0,674$. Cela achève la démonstration du Corollaire 4.

§6. Démonstration du Théorème 5

Nous aurons besoin de deux lemmes concernant la fonction de Dickman. Nous introduisons la notation

$$r(t) := \frac{-\varrho'(t)}{\varrho(t)} = \frac{\varrho(t-1)}{t\varrho(t)}. \tag{6.1}$$

Lemme 6.1. *On a pour $t \geqslant 1$, $0 \leqslant v \leqslant t - 1$,*

$$\varrho(t - v) = \varrho(t) e^{vr(t)} \big\{1 + O(v^2/t)\big\}, \tag{6.2}$$

$$\varrho'(t - v) = \varrho'(t) e^{vr(t)} \Big\{1 + O\Big(\frac{v}{t\log(v+t)} + \frac{v^2}{t}\Big)\Big\}. \tag{6.3}$$

Démonstration. Comme $\varrho(t)$ et $-\varrho'(t)$ sont positives et bornées pour $t \geqslant 1$ (cf.par exemple [27], chapitre III.5), le résultat découle du lemme 4.2 de [12] pour t borné, et l'on peut supposer t assez grand. Rappelons que la fonction $\xi = \xi(t)$ est definie par l'équation (4.1) pour $t > 1$. Une simple itération à partir de l'estimation triviale $1 \leqslant \xi(t) \leqslant 2\log t$, valable pour t assez grand, fournit

$$\xi(t) = \log t + \log_2 t + O(1). \tag{6.4}$$

En dérivant j fois l'équation fonctionnelle (4.1), on en déduit par récurrence l'estimation suivante

$$\xi^{(j)}(t) = (-1)^{j-1}\frac{(j-1)!}{t^j}\big(1 + O_j(1/\log t)\big) \qquad (j \geqslant 1). \tag{6.5}$$

Smida [25] a obtenu par la méthode du col un développement asymptotique de $\varrho(t)$ en fonction de $\xi(t)$ et de ses dérivées. À l'ordre 3, on peut écrire ce développement sous la forme

$$\varrho(t) = \sqrt{\frac{\xi'(t)}{2\pi}}\,\mathrm{e}^{\gamma - \int_1^t \xi(w)\,\mathrm{d}w}\big\{1 + h(t) + O(1/t^3)\big\} \tag{6.6}$$

où γ est la constante d'Euler et $h(t)$ est une fonction dérivable qui est définie explicitement à l'aide de $\xi(t)$. Nous n'aurons besoin que des estimations suivantes, que l'on peut vérifier facilement à partir de la définition de h donnée dans [25] et de (6.5) :

$$h(t) \ll 1/t, \qquad h'(t) \ll 1/t^2 \qquad (t \geqslant 1). \tag{6.7}$$

Appliquons (6.6) pour t et $t-1$ et insérons les estimations

$$\begin{aligned}
\frac{\xi'(t-1)}{\xi'(t)} &= 1 - \frac{\xi''(t)}{\xi'(t)} + O\Big(\frac{1}{t^2}\Big),\\
\int_{t-1}^t \xi(w)\,\mathrm{d}w &= \int_0^1 \{\xi(t) - w\xi'(t) + O(w^2/t^2)\}\,\mathrm{d}w\\
&= \xi(t) - \tfrac12\xi'(t) + O(1/t^2),\\
\frac{1+h(t-1)}{1+h(t)} &= 1 + O(1/t^2).
\end{aligned}$$

Il suit

$$\begin{aligned}
r(t) &= \Big\{1 - \frac{\xi''(t)}{2\xi'(t)} + O\Big(\frac{1}{t^2}\Big)\Big\}\frac{e^{\xi(t)}}{t}\exp\Big\{-\tfrac12\xi'(t) + O\Big(\frac{1}{t^2}\Big)\Big\}\Big\{1 + O\Big(\frac{1}{t^2}\Big)\Big\}\\
&= \Big\{1 - \frac{\xi''(t)}{2\xi'(t)} + O\Big(\frac{1}{t^2}\Big)\Big\}\Big\{\xi(t) + \frac{1}{t}\Big\}\Big\{1 - \tfrac12\xi'(t) + O\Big(\frac{1}{t^2}\Big)\Big\}\\
&= \xi(t) - \tfrac12\xi(t)\xi'(t) - \frac{\xi(t)\xi''(t)}{2\xi'(t)} + \frac{1}{t} + O\Big(\frac{1}{t^2}\Big).
\end{aligned}$$

Compte tenu de (6.5), cela implique

$$r(t) - r(t-1) - 1/t \ll 1/t \log t, \tag{6.8}$$

et donc

$$r'(t) = r(t)\{r(t) - r(t-1) - 1/t\} \ll 1/t \qquad (t \geqslant 2). \tag{6.9}$$

Nous sommes maintenant en mesure de prouver facilement (6.2). Pour $0 \leqslant v \leqslant \sqrt{t}$, on a

$$\frac{\varrho(t-v)}{\varrho(t)} = \exp\Big\{\int_0^v r(t-w)\,\mathrm{d}w\Big\} = \exp\{vr(t) + O(v^2/t)\},$$

ce qui établit bien (6.2). Lorsque $\sqrt{t} \leqslant v \leqslant t$, on utilise le fait, établi par Hildebrand [18], que $r(t)$ est une fonction croissante. Il suit

$$\frac{\varrho(t-v)}{\varrho(t)} \leqslant \exp\Big\{\int_0^v r(t)\,\mathrm{d}w\Big\} = e^{vr(t)},$$

ce qui implique encore (6.2).

On procède similairement pour montrer (6.3). Lorsque $0 \leqslant v \leqslant \sqrt{t}$, on peut écrire

$$\begin{aligned}\frac{\varrho'(t-v)}{\varrho'(t)} &= \frac{t}{t-v}\,\frac{\varrho(t-1-v)}{\varrho(t-1)} = \exp\Big\{\int_0^v \big(r(t-1-w) + 1/(t-w)\big)\,\mathrm{d}w\Big\}\\ &= \exp\Big\{\int_0^v \big(r(t-1) + 1/t + O(w/t)\big)\,\mathrm{d}w\Big\}\\ &= \exp\Big\{vr(t) + O\Big(\frac{v}{t\log t} + \frac{v^2}{t}\Big)\Big\},\end{aligned}$$

grâce à (6.9) et (6.8). Lorsque $v > \sqrt{t}$, on remarque que l'on peut supposer $v \leqslant t-1$ puisque $\varrho'(t-v) = 0$ dans le cas contraire. Par la croissance de r, on obtient alors

$$\frac{\varrho'(t-v)}{\varrho'(t)} = \frac{t}{t-v}\,\frac{\varrho(t-1-v)}{\varrho(t-1)} \leqslant \frac{t}{t-v}e^{vr(t)} \ll e^{vr(t)}v^2/t.$$

Cela achève la preuve de (6.3), et partant du Lemme 6.1.

Lemme 6.2. *On a*

$$r(t) < 2\log(t+2) \qquad (t \geqslant 1).$$

Démonstration. On fait de nouveau appel à la croissance de r. On a d'abord, par la forme intégrée de l'équation différentielle de ϱ, pour $t \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}t+1 &= \int_0^1 \frac{\varrho(t+1-v)}{\varrho(t+1)}\,\mathrm{d}v = \int_0^1 \exp\Big\{\int_0^v r(t+1-s)\,\mathrm{d}s\Big\}\,\mathrm{d}v\\ &\geqslant \int_0^1 e^{vr(t)}\,\mathrm{d}v = \frac{e^{r(t)}-1}{r(t)} \geqslant 1 + \tfrac{1}{2}r(t) + \tfrac{1}{6}r(t)^2 + \tfrac{1}{24}r(t)^3.\end{aligned}$$

Notant que l'on a, pour tout nombre réel $x \geqslant 0$,

$$\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{24}x^3 = \tfrac{1}{2}x(1 + x^2/12) \geqslant x^2/\sqrt{12},$$

on obtient une première estimation grossière

$$r(t) \leqslant (t/K)^{1/2} \qquad (t \geqslant 1)$$

avec $K = 1/6 + 1/\sqrt{12}$. Maintenant, nous avons pour $t \geqslant 1$

$$(t+1)r(t+1) = \frac{\varrho(t)}{\varrho(t+1)} = \exp\Big\{\int_0^1 r(t+v)\,\mathrm{d}v\Big\} \geqslant e^{r(t)}.$$

Il suit

$$r(t) \leqslant \tfrac{3}{2}\log(t+1) - \tfrac{1}{2}\log K \leqslant \Big(\tfrac{3}{2} - \frac{\log K}{2\log 3}\Big)\log(t+2) < 2\log(t+2).$$

Nous pouvons maintenant aborder la démonstration du Théorème 5. Nous appliquons la formule (2.7) de [28], valide uniformément sous la condition (Ω), et qui est en fait une conséquence presqu'immédiate d'estimations prouvées dans [12]. Nous obtenons

$$\Psi_q(x,y) = \Lambda_q(x,y) + O\big(\Psi(x,y)/L_\varepsilon(y)\big), \tag{6.10}$$

avec les notations

$$\Lambda_q(x,y) := \begin{cases} x\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varrho(u-v)\,\mathrm{d}R_q(y^v) & (x \in \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Z}^+) \\ \Lambda_q(x+0,y) & (x \in \mathbb{Z}^+), \end{cases}$$
$$L_\varepsilon(y) := \exp\{(\log y)^{3/5-\varepsilon}\},$$

où $R_q(t)$ est défini par l'identité

$$N_q(t) := \sum_{n \leqslant x,\,(n,q)=1} 1 = t\Big\{\frac{\varphi(q)}{q} + R_q(t)\Big\} \qquad (t > 0).$$

D'après Hildebrand [18], on a dans le domaine (H)

$$\Psi(x,y) = x\varrho(u)\Big\{1 + O\Big(\frac{\log(u+1)}{\log y}\Big)\Big\}. \tag{6.11}$$

De plus $\beta = o(1)$ lorsque $x \to \infty$ et (x,y) reste dans (H). On a donc

$$Z(-\beta) = 1 + o(1) \tag{6.12}$$

et le terme d'erreur de (6.10) est bien de l'ordre de grandeur requis.

Il reste à évaluer $\Lambda_q(x,y)$. À cette fin, nous faisons appel à la formule d'intégration par parties

$$\Lambda_q(x,y) = x\Big\{\frac{\varphi(q)}{q}\varrho(u) + R_q(x) + \int_0^\infty \varrho'(u-v)R_q(y^v)\,\mathrm{d}v\Big\}. \tag{6.13}$$

Nous allons procéder en deux temps : remplacer q par un diviseur q_1 sans grand facteur premier, puis utiliser le Lemme 6.1 pour estimer l'intégrale de (6.13) relative à q_1.

Nous choisissons

$$q_1 = \prod_{p^\nu \| q,\, p\leqslant T} p^\nu,$$

avec $T := \{1+\omega(q)\}\log x \log y/\log_2 x$. Désignons par $\Delta_q(x,y)$ le terme d'erreur de (1.22). Nous allons montrer que

$$\Lambda_q(x,y) - \Lambda_{q_1}(x,y) \ll x\varrho(u)\Delta_q(x,y) \tag{6.14}$$

en estimant séparément les différences des trois termes apparaissant dans (6.13). On a d'abord

$$0 \leqslant \frac{\varphi(q_1)}{q_1} - \frac{\varphi(q)}{q} \leqslant 1 - \Big(1-\frac{1}{T}\Big)^{\omega(q)} \ll \frac{\omega(q)}{T} \ll \Delta_q(x,y).$$

Pour majorer les deux autres différences, nous faisons appel à l'estimation

$$R_q(t) \ll t^{-\alpha(q)} \qquad (t>0), \tag{6.15}$$

établie dans [12] (formule (6.12)), et où l'on a posé

$$\alpha(q) = 5/\big(6+\log P^+(q)\big). \tag{6.16}$$

On observe dès à présent que, sous les conditions (Ω) et (H),

$$\alpha(q_1)\log y \geqslant \tfrac{9}{4}\log(u+2). \tag{6.17}$$

En effet,

$$\begin{aligned} 6+\log T &\leqslant \log u + 2\log_2 y + \log\{1+\omega(q)\} \\ &\leqslant \frac{\log y}{\log(u+2)} + 2\log_2 y + \frac{\log y}{\log(u+2)} + 1 \\ &\leqslant \frac{20\log y}{9\log(u+2)} \end{aligned}$$

pour x_0 assez grand.

On a pour $t>0$

$$\begin{aligned} R_q(t) - R_{q_1}(t) &= \sum_{d|q/q_1,\, d>1} \frac{\mu(d)}{d} R_{q_1}(t/d) \\ &\ll t^{-\alpha(q_1)}\big\{\big(1+T^{\alpha(q_1)-1}\big)^{\omega(q)} - 1\big\} \ll t^{-\alpha(q_1)}\Delta_q(x,y), \end{aligned} \tag{6.18}$$

puisque $T^{\alpha(q_1)} \ll 1$. En appliquant (6.18) et (6.17) pour $t = x$, on obtient immédiatement

$$R_q(x) - R_{q_1}(x) \ll (u+1)^{-2u}\Delta_q(x,y) \ll \varrho(u)\Delta_q(x,y),$$

ce qui est bien compatible avec (6.14).

Il reste à traiter la différence des intégrales de (6.13) relatives à R_q et R_{q_1}. Outre (6.17) et (6.18), nous utilisons l'estimation suivante concernant la fonction de Dickman, et qui découle par exemple des corollaires III.8.1 & III.8.2 de [27],

$$\varrho'(u-v) \ll \log(u+1)\varrho(u-v) \ll \log(u+1)\varrho(u)e^{v\xi(u)}.$$

Il suit

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \varrho'(u-v)\big\{R_q(y^v) - R_{q_1}(y^v)\big\}\,\mathrm{d}v \\ \ll \log(u+1)\varrho(u)\Delta_q(x,y)\int_0^u e^{v\{\xi(u)-\alpha(q_1)\log y\}}\,\mathrm{d}v.\end{aligned} \tag{6.19}$$

Lorsque u est assez grand, on a par (6.4) et (6.17)

$$\alpha(q_1)\log y - \xi(u) > \tfrac{1}{2}\log(u+1).$$

L'intégrale précédente est donc $\ll 1/\log(u+1)$ et le membre de gauche de (6.19) est $\ll \varrho(u)\Delta_q(x,y)$. Cette estimation est encore trivialement vérifiée lorsque u est borné. Elle est donc valable sans restriction. Cela achève la preuve de (6.14).

Nous allons maintenant montrer que l'on a sous les conditions (H) et (Ω)

$$\Lambda_{q_1}(x,y) = \varrho(u)Z(-\beta)g(q;\beta) + O\big(\varrho(u)\Delta_q(x,y)\big). \tag{6.20}$$

Nous avons, avec la notation (6.1),

$$\begin{aligned}\Lambda_{q_1}(x,y) &= \int_{0-}^\infty \varrho(u-v)\,\mathrm{d}R_{q_1}(y^v)\\ &= x\varrho(u)\int_{0-}^\infty e^{vr(u)}\,\mathrm{d}R_{q_1}(y^v) + \int_{0-}^\infty \big\{\varrho(u-v) - \varrho(u)e^{vr(u)}\big\}\,\mathrm{d}R_{q_1}(y^v).\end{aligned} \tag{6.21}$$

La première des deux intégrales ci-dessus relève de la formule (4.17) de [12] : elle vaut $Z(-\beta)g(q_1;\beta)$. Or, on a $T^\beta \ll 1$ par (6.17). Donc

$$0 \leqslant g(q_1;\beta) - g(q;\beta) \leqslant 1 - \big(1 - T^{\beta-1}\big)^{\omega(q)} \ll \omega(q)/T \ll \Delta_q(x,y).$$

On voit ainsi que (6.20) sera établie dès que nous aurons montré que la dernière intégrale de (6.21) est $\ll \varrho(u)\Delta_q(x,y)$. Une intégration par parties permet d'écrire la quantité à majorer sous la forme

$$R_{q_1}(x) + \int_0^\infty \big\{\varrho'(u-v) - \varrho'(u)e^{vr(u)}\big\}R_{q_1}(y^v)\,\mathrm{d}v.$$

On a

$$R_{q_1}(x) \ll \varrho(u)\Delta_q(x,y).$$

Grâce à la formule (6.3) du Lemme 6.1, on peut écrire

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \big\{\varrho'(u-v) - \varrho'(u)e^{vr(u)}\big\} R_{q_1}(y^v)\,\mathrm{d}v \\
&\qquad \ll \frac{\varrho(u)}{u}\int_0^\infty \big\{v + v^2\log(u+1)\big\} e^{-\{\alpha(q_1)\log y - r(u)\}v}\,\mathrm{d}v \qquad (6.22)\\
&\qquad \ll \frac{\varrho(u)}{u\alpha(q_1)^2(\log y)^2}\Big(1 + \frac{\log(u+1)}{\alpha(q_1)\log y}\Big) \ll \frac{\varrho(u)(\log T)^2}{\log x \log y},
\end{aligned}$$

où nous avons utlisé le Lemme 6.2 et (6.17) sous la forme

$$\alpha(q_1)\log y - r(u) \geqslant \tfrac{1}{9}\alpha(q_1)\log y.$$

Comme $\log T \ll \log_2 x + \log\{1+\omega(q)\}$, la majoration de (6.22) est bien $\ll \varrho(u)\Delta_q(x,y)$. La démonstration du Théorème 5 est donc complète.

§7. Démonstration du Corollaire 5.

Ainsi que nous l'avons signalé dans l'introduction, la démonstration du Corollaire 5 repose essentiellement sur les Théorèmes 1 et 5. En fait, nous aurons besoin d'une légère variante du Corollaire 1, à savoir que l'estimation

$$\sum_{q\leqslant Q} \tau(q)^3 \max_{(a,q)=1} |E(x,y;a,q)| \ll_{A,\varepsilon} \frac{\Psi(x,y)}{H(u)^c \mathcal{L}^A}. \qquad (7.1)$$

est valable dans les hypothèses du Corollaire 1. Le lecteur se convaincra aisément que le membre de gauche est majoré par la quantité analogue au W de (2.6), où l'on a inséré un facteur $\tau(e)^3$ dans la sommation en e et un facteur $\tau(f)^3$ dans la sommation en f. Tous les calculs des sections 2.2 et 2.3 restent valables à ceci près que les majorations sont augmentées d'un facteur $\mathcal{L}^c$ où c est absolue. Comme l'exposant A du Théorème 1 est arbitraire, cela n'affecte pas la majoration finale.

Désignons par $\Psi(x,y;t)$ le membre de gauche de (1.23) et introduisons la fonction

$$\omega(n,Y) := \sum_{p|n,\, p\leqslant Y} 1.$$

Nous allons montrer que l'on peut approcher $\Psi(x,y;t)$ par

$$\Psi(x,y;t,Y) := \big|\{n \in S(x,y) : \omega(n-1,Y) \leqslant \log_2 x + t\sqrt{\log_2 x}\}\big|$$

pour une valeur convenable de $Y = Y(x,y)$.

La première étape de la démonstration consiste à déterminer une fonction $Y(x,y)$ et une constante positive $C = C(A)$ de sorte que l'on ait

$$\big|\{n \in S(x,y) : \omega(n-1) - \omega(n-1,Y) > C\log_3 x\}\big| \ll \Psi(x,y)/\log_2 x. \qquad (7.2)$$

Nous choisissons

$$Y := \exp\Big\{\frac{\log y}{u(\log_2 x)^2}\Big\}. \tag{7.3}$$

Il est utile de noter dès à présent que l'on a

$$\frac{\log x}{\log Y} \leqslant (\log_2 x)^{2A+2} \tag{7.4}$$

Pour établir (7.2), nous utilisons, dans un cas particulier, une inégalité classique de van der Corput [4] sous une forme effective donnée par Landreau [24], soit

$$\tau(m) \leqslant 3^6 \sum_{d|m,\, d\leqslant m^{1/3}} \tau(d)^3 \qquad (m \geqslant 1). \tag{7.5}$$

Nous appliquons cette inégalité à $m = m(n) = \prod_{p^\nu \| n-1,\, p>Y} p^\nu$, de sorte que $\tau(m)$ est un majorant de $2^{\omega(n-1)-\omega(n-1,Y)}$. Le membre de gauche de (7.2) est donc au plus égal à

$$\begin{aligned}\sum_{n\in S(x,y)} & 2^{\omega(n-1)-\omega(n-1,Y)-C\log_3 x}\\ &\leqslant 3^6(\log_2 x)^{-C\log 2} \sum_{n\in S(x,y)} \sum_{\substack{d|m(n)\\ d\leqslant x^{1/3}}} \tau(d)^3\\ &\ll (\log_2 x)^{-C\log 2} \sum_{d\leqslant x^{1/3},\, P^-(d)>Y} \tau(d)^3 \Psi(x,y;1,d).\end{aligned}$$

On peut majorer la somme en d grâce à (7.1). On obtient qu'elle est

$$\begin{aligned}&\ll \sum_{d\leqslant x^{1/3},\, P^-(d)>Y} \frac{\tau(d)^3}{\varphi(d)} \Psi_d(x,y) + \sum_{d\leqslant x^{1/3}} \tau(d)^3 |E(x,y;1,d)|\\ &\ll \prod_{Y<p\leqslant x} \Big(1+\frac{8}{p}\Big)\Psi(x,y) \ll \Psi(x,y)(\log_2 x)^{16A+16},\end{aligned}$$

où nous avons utilisé (7.1) pour estimer la contribution des $E(x,y;1,d)$, et (7.4) pour évaluer le dernier produit en p. On a donc (7.2) dès que $C\log 2 \geqslant 16A+17$.

Dans un second temps, nous allons établir la validité de la formule asymptotique

$$\Psi(x,y;t,Y) = \Psi(x,y)\Big\{\Phi(t) + O(\log_3 x/\sqrt{\log_2 x})\Big\} \tag{7.6}$$

uniformément pour $\exp\big\{\log x/(\log_2 x)^A\big\} \leqslant y \leqslant x$ et $t \in \mathbb{R}$. Compte tenu de l'encadrement

$$\Psi\Big(x,y;t-\frac{C\log_3 x}{\sqrt{\log_2 x}},Y\Big) - O\Big(\frac{\Psi(x,y)}{\log_2 x}\Big) \leqslant \Psi(x,y;t) \leqslant \Psi(x,y;t,Y)$$

qui découle de (7.2), on voit que (7.6) implique facilement l'estimation (1.23) du Corollaire 5.

Pour établir, (7.6), nous utilisons la méthode des fonctions caractéristiques et le théorème d'inversion de Fourier quantitative de Berry-Esseen. Plus précisément, nous allons montrer que l'on a dans les hypothèses indiquées plus haut et en posant $\xi := \log_2 Y$

$$\Psi(x,y)^{-1} \sum_{n\in S(x,y)} e^{i\vartheta(\omega(n-1,Y)-\xi)/\sqrt{\xi}} = e^{-\vartheta^2/2} + O\big(R(x,y;\vartheta)\big) \tag{7.7}$$

avec

$$R(x,y;\vartheta) \ll \begin{cases} |\vartheta| & \text{si } |\vartheta| \leqslant 1/\log Y, \\ e^{-\vartheta^2/2}\big(|\vartheta|+|\vartheta|^3\big)/\sqrt{\xi} + 1/\xi^2 & \text{si } 1/\log Y < |\vartheta| \leqslant \sqrt{\xi}. \end{cases} \tag{7.8}$$

Soit $\Psi^*(x,y;t,Y) := \big\{n \in S(x,y) : \omega(n-1,Y) \leqslant \xi + t\sqrt{\xi}\big\}$. Le théorème de Berry-Esseen sous la forme

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \Big| \frac{\Psi^*(x,y;t,Y)}{\Psi(x,y)} - \Phi(t) \Big| \ll \frac{1}{\sqrt{\xi}} + \int_0^{\sqrt{\xi}} |R(x,y;\vartheta)| \frac{\mathrm{d}\vartheta}{\vartheta}$$

permet de déduire immédiatement de (7.8) que l'on a

$$\Psi^*(x,y;t,Y) = \Psi(x,y)\big\{\Phi(t) + O(1/\sqrt{\xi})\big\}. \tag{7.9}$$

Comme $\xi = \log_2 Y = \log_2 x + O(\log_3 x)$ d'après (7.4), il est clair que (7.9) implique (7.6) et partant suffit à établir le Corollaire 5.

Il reste donc à montrer (7.8).

Dans le domaine $|\vartheta| \leqslant 1/\log Y$, nous pouvons nous contenter d'insérer dans (7.7) l'estimation triviale $|e^{i\vartheta z} - e^{-\vartheta^2/2}| \ll |\vartheta|\{|z|+1\}$ avec $z = \big(\omega(n-1,Y) - \xi\big)/\sqrt{\xi}$. Il suit

$$\begin{aligned} R(x,y;\vartheta) &\ll |\vartheta| + \frac{|\vartheta|}{\sqrt{\xi}\Psi(x,y)} \sum_{n\in S(x,y)} |\omega(n-1,Y)-\xi| \\ &\ll |\vartheta| + |\vartheta| \sqrt{\frac{1}{\xi\Psi(x,y)} \sum_{n\in S(x,y)} \big(\omega(n-1,Y)-\xi\big)^2}. \end{aligned} \tag{7.10}$$

La dernière somme en n est aisément estimée grâce au Corollaire 1 et au Théorème 5. En notant que $\beta = \dfrac{-\varrho'(u)}{\varrho(u)\log y} \ll \dfrac{(\log_2 x)^{A+1}}{\log x}$, et donc $Z(-\beta) = 1 + O(1/\sqrt{\log x})$, on a par exemple

$$\begin{aligned} \sum_{n\in S(x,y)} \omega(n-1,Y)^2 &= \sum_{p\leqslant Y} \Psi(x,y;1,p) + \sum_{\substack{p,q\leqslant Y \\ p\neq q}} \Psi(x,y;1,pq) \\ &= \sum_{p\leqslant Y} \frac{\Psi_p(x,y)}{p-1} + \sum_{\substack{p,q\leqslant Y \\ p\neq q}} \frac{\Psi_{pq}(x,y)}{(p-1)(q-1)} + O\big(\Psi(x,y)\big) \\ &= \Psi(x,y)\big\{\xi^2 + O(\xi)\big\}, \end{aligned}$$

où nous avons utilisé le Théorème 5 sous la forme

$$\Psi_p(x,y) = \Psi(x,y)\Big\{1 + O\Big(\frac{1}{\sqrt{p}} + \frac{1}{\sqrt{\log x}}\Big)\Big\},$$
$$\Psi_{pq}(x,y) = \Psi(x,y)\Big\{1 + O\Big(\frac{1}{\sqrt{p}} + \frac{1}{\sqrt{q}} + \frac{1}{\sqrt{\log x}}\Big)\Big\}.$$

On montre similairement que

$$\sum_{n\in S(x,y)} \omega(n-1,Y) = \Psi(x,y)\big\{\xi + O(1)\big\},$$

d'où l'on déduit que

$$\sum_{n\in S(x,y)} \big(\omega(n-1,Y) - \xi\big)^2 \ll \Psi(x,y)\xi. \tag{7.11}$$

en reportant dans (7.10), on obtient $R(x,y;\vartheta) \ll |\vartheta|$, ce qui établit bien la première des deux estimations (7.8).

Pour prouver la seconde estimation, nous utilisons la formule de Möbius

$$e^{i\vartheta\omega(m,Y)/\sqrt{\xi}} = \sum_{d|m,\, P^+(d)\leqslant Y} f(d) \tag{7.12}$$

avec $f(d) := \mu(d)^2\big(e^{i\vartheta/\sqrt{\xi}} - 1\big)^{\omega(d)}$. Il est utile de garder à l'esprit que l'on a $|f(d)| \leqslant 1$ pour tout d lorsque $|\vartheta| \leqslant \sqrt{\xi}$. L'estimation de type Bombieri-Vinogradov (1.11) ne permet pas d'insérer directement (7.12) (avec $m = n-1$) dans (7.7) car on ne peut exclure la présence de diviseurs d de m excédant la borne supérieure Q du Corollaire 1. Cependant, cette éventualité n'est possible que si la quantité $\ell(m,Y) := \prod_{p^\nu\|m,\, p\leqslant Y} p^\nu$ est elle-même anormalement grande. Nous pouvons ainsi écrire

$$e^{i\vartheta\omega(m,Y)/\sqrt{\xi}} = \sum_{\substack{d|m,\, P^+(d)\leqslant Y\\ d\leqslant x^{1/3}}} f(d) + O\big(\chi(m,Y)2^{\omega(m)}\big) \tag{7.13}$$

où $\chi(m,Y)$ est la fonction indicatrice de l'ensemble des entiers m tels que $\ell(m,Y) > x^{1/3}$. Le lemme 2 de [26] fournit alors l'estimation

$$\sum_{n\leqslant x} \chi(n-1,Y)2^{\omega(n-1)} \ll x^{1-c_0/\log Y},$$

où c_0 est une constante abolue positive. Par (7.3) et (1.10) cette majoration

est $\ll \Psi(x,y)/\log x$, et il découle alors de (7.13) que l'on peut écrire

(7.14)
$$\begin{aligned}\sum_{n\in S(x,y)} e^{i\vartheta\omega(n-1,Y)/\sqrt{\xi}} &= \sum_{d\leqslant x^{1/3},\, P^+(d)\leqslant Y} f(d)\Psi(x,y;1,d) + O\Big(\frac{\Psi(x,y)}{\log x}\Big)\\ &= \sum_{d\leqslant x^{1/3},\, P^+(d)\leqslant Y} \frac{f(d)}{\varphi(d)}\Psi_d(x,y) + O\Big(\frac{\Psi(x,y)}{\log x}\Big)\\ &= \Psi(x,y)Z(-\beta)\sum_{d\leqslant x^{1/3},\, P^+(d)\leqslant Y} \frac{f(d)g(d;\beta)}{\varphi(d)} + O\Big(\frac{\Psi(x,y)}{\log Y}\Big)\\ &= \Psi(x,y)\sum_{d\leqslant x^{1/3},\, P^+(d)\leqslant Y} \frac{f(d)g(d;\beta)}{\varphi(d)} + O\Big(\frac{\Psi(x,y)}{(\log_2 x)^2}\Big),\end{aligned}$$

où nous avons successivement utilisé le Corollaire 1, le Théorème 5 et l'estimation $Z(-\beta) = 1 + O(1/(\log_2 x)^2 \log Y)$. La majoration universelle (cf.[27], théorème III.5.1)

$$\Psi(x,y) \ll xe^{-u/2} \qquad (x \geqslant y \geqslant 2)$$

implique facilement par sommation d'Abel que

$$\Big|\sum_{d>x^{1/3},\, P^+(d)\leqslant Y} \frac{f(d)g(d;\beta)}{\varphi(d)}\Big| \leqslant \int_{x^{1/3}}^{\infty} \frac{\mathrm{d}\Psi(v,Y)}{v} \ll \frac{1}{\log x}.$$

En reportant cette estimation dans (7.14), nous obtenons finalement

(7.15)
$$\sum_{n\in S(x,y)} e^{i\vartheta\omega(n-1,Y)/\sqrt{\xi}} = \Psi(x,y)\prod_{p\leqslant Y}\Big(1+\frac{f(p)g(p;\beta)}{p-1}\Big) + O\Big(\frac{\Psi(x,y)}{(\log_2 x)^2}\Big).$$

On a $g(p;\beta)/(p-1) = 1/p + O(\beta\log p/p^2)$. Le dernier produit en p vaut donc encore

(7.16)
$$\begin{aligned}&\exp\Big\{\sum_{p\leqslant Y}\Big(\frac{f(p)}{p} + O\Big(\frac{|\beta f(p)|\log p + |f(p)|^2}{p^2}\Big)\Big)\Big\}\\ &\qquad = \exp\Big\{\sum_{p\leqslant Y}\frac{e^{i\vartheta/\sqrt{\xi}}-1}{p} + O\Big(\frac{|\vartheta|}{\sqrt{\xi}}\Big)\Big\}.\end{aligned}$$

Lorsque $|\vartheta| \leqslant \xi^{1/6}$, nous utilisons l'estimation

$$e^{i\vartheta/\sqrt{\xi}} - 1 = i\vartheta/\sqrt{\xi} - \vartheta^2/2\xi + O(|\vartheta|^3/\xi^{3/2}).$$

Comme la somme en p vaut $\log_2 Y + O(1) = \xi + O(1)$, nous obtenons que le produit de (7.15) est égal à

$$e^{i\vartheta\sqrt{\xi}-\vartheta^2/2}\Big\{1 + O\Big(\frac{|\vartheta|+|\vartheta|^3}{\sqrt{\xi}}\Big)\Big\}.$$

En reportant dans (7.15), on obtient que la seconde des estimations (7.8) est valable dans ce cas.

Lorsque $\xi^{1/6} < |\vartheta| \leqslant \xi^{1/2}$, nous nous contentons d'insérer l'inégalité

$$1 - \cos(\vartheta/\sqrt{\xi}) \geqslant 2\vartheta^2/\pi^2\xi$$

pour majorer le membre de droite de (7.16). Cela implique que le terme principal de (7.15) est alors englobé par le terme d'erreur, et cela confirme encore la seconde estimation de (7.8). La démonstration du Corollaire 5 est ainsi complète.

Bibliographie

[1] E. Bombieri, J. Friedlander & H. Iwaniec, Primes in arithmetic progressions to large moduli, *Acta math.* **156** (1986), 203–251.

[2] E. Bombieri, J. Friedlander & H. Iwaniec, Primes in arithmetic progressions to large moduli II, *Math. Ann.* **277** (1987), 361–393.

[3] R.C. Baker & G. Harman, The Brun-Titchmarsh Theorem on average, à paraître.

[4] J.G. van der Corput, Une inégalité relative au nombre des diviseurs, *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A* **42** (1939), 547–553.

[5] W.J. Ellison & M. Mendès France, *Les nombres premiers*, Hermann, Paris (1975).

[6] E. Fouvry, Répartition des suites dans les progressions arithmétiques, *Acta Arith.* **41** (1982), 359–382.

[7] E. Fouvry, Autour du théorème de Bombieri–Vinogradov, *Acta math.* **152** (1984), 219–244.

[8] E. Fouvry, Autour du théorème de Bombieri–Vinogradov II, *Ann. Sc. Éc. Norm. Sup. (4ième série)* **20** (1987), 617–640.

[9] E. Fouvry, Théorème de Brun-Titchmarsh ; application au Théorème de Fermat, *Invent. Math.* **79** (1985), 383–407.

[10] E. Fouvry & H. Iwaniec, On a theorem of Bombieri–Vinogradov type, *Mathematika* **27** (1980), 135–172.

[11] E. Fouvry & H. Iwaniec, Primes in arithmetic progressions, *Acta Arith.* **42** (1983), 197–218.

[12] E. Fouvry & G. Tenenbaum, Entiers sans grand facteur premier en progressions arithmétiques, *Proc. London Math. Soc.* (3) **63** (1991), 449–494.

[13] J.B. Friedlander, Shifted primes without large prime factors, in : R.A. Mollin (ed.), *Number Theory and applications*, Banff Conference, 1988, Kluwer Academic Press, 393–401.

[14] A. Granville, Integers, without large prime factors, in arithmetic progressions, I, *Acta Math.* **170** (1993), 255–273.

[15] A. Granville, Integers, without large prime factors, in arithmetic progressions, II, in : R.C.Vaughan (ed.), *Theory and applications of numbers without large prime factors, Phil. Trans. R. Soc. Lond.* A **345** (1993), 349–362.

[16] H. Halberstam & H.-E. Richert, *Sieve Methods,* Academic Press, London, New York, San Francisco,1974.

[17] R.R. Hall & G. Tenenbaum, *Divisors*, Cambridge Tracts in Mathematics no 90, Cambridge University Press, 1988.

[18] A. Hildebrand, On the number of positive integers $\leqslant x$ and free of prime factors $> y$, *J. Number Theory* **22** (1986), 265–290.

[19] A. Hildebrand & G. Tenenbaum, On integers free of large prime factors, *Trans. Amer. Math. Soc.* **296** (1986), 265–290.

[20] H. Hildebrand & G. Tenenbaum, Integers without large prime factors, *J. Théorie des Nombres de Bordeaux* **5** (1993), 411–484.

[21] A. Ivić & G. Tenenbaum, Local densities over integers free of large prime factors, *Quart. J. Math. Oxford* (2) **37** (1986), 401–417.

[22] H. Iwaniec, Rosser's sieve, *Acta Arith.* **36** (1980), 171–202.

[23] H. Iwaniec, A new form of the error term in the linear sieve, *Acta Arith.* **37** (1980), 307–320.

[24] B. Landreau, A new proof of a theorem of van der Corput, *Bull. London Math. Soc.* **21** (1989), 366–368.

[25] H. Smida, Sur les puissances de convolution de la fonction de Dickman, *Acta Arith.* **59**, *no 2* (1991), 123–143.

[26] G. Tenenbaum, Un problème de probabilité conditionnelle en arithmétique, *Acta Arith.* **49** (1987), 165–187.

[27] G. Tenenbaum, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, Cours spécialisés, no. 1, Société mathématique de France (1995).

[28] G. Tenenbaum, Cribler les entiers sans grand facteur premier, in : R.C.Vaughan (ed.), *Theory and applications of numbers without large prime factors, Phil. Trans. R. Soc. Lond.* A **345** (1993), 377–384.

[29] R. C. Vaughan, A new iterative method in Waring's problem, *Acta math.* **162** (1989), 1–71.

[30] R. C. Vaughan (ed.), *Theory and applications of numbers without large prime factors, Phil. Trans. R. Soc. Lond.* A **345** (1993).

[31] D. Wolke, Über die mittlere Verteilung der Werte zahlentheorische Funktionen auf Restklassen I, *Math. Ann.* **202** (1973), 1–25.

Département de Mathématiques
Bâtiment 425
Université Paris XI–Orsay
91405 Orsay Cedex
France

Département de Mathématiques
Université Nancy 1
BP 239
54506 Vandœuvre Cedex
France