Bull. Sc. math., 2[e] série,
108, 1984, p. 437-444.

UNE REMARQUE SUR LA CONJECTURE DE SCHINZEL

PAR

JACQUES MEYER et GÉRALD TENENBAUM (*)

[Univ. Reims; Univ. Nancy-I]

RÉSUMÉ. — Nous établissons que l'ensemble des entiers satisfaisant à l'hypothèse (H) de Schinzel possède une densité asymptotique inférieure au moins égale à 1/4.

ABSTRACT. — A remark on Schinzel's conjecture. We show that the set of those integers satisfying the hypothesis (H) of Schinzel has lower asymptotic density at least 1/4.

1. Introduction

1.1. Un cas particulier de la célèbre conjecture (H) de SCHINZEL s'énonce ainsi :

Pour chaque entier $n \geqslant 1$ il existe une infinité d'entiers u tels que les nombres $u-1$ et $nu-1$ soient simultanément premiers.

Autrement dit :

Tout entier $n \geqslant 1$ admet une infinité de représentations de la forme :

$$n=\frac{p+1}{q+1} \qquad (p,\ q \text{ premiers}). \tag{I}$$

SCHINZEL et SIERPINSKI conjecturent même que la validité de cette affirmation s'étend en fait à tous les nombres rationnels positifs [4]. Ce problème

(*) Texte reçu le 23 février 1984.

Classification matières AMS (MOS) 1980 : 10 H, 10 K, 10 J, 10 L.

Vedettes-matières : conjecture de Schinzel.

Jacques MEYER, Faculté des Sciences, Moulin de la Housse, 51062 Reims Cedex.

Gérald TENENBAUM, U.E.R. Sciences mathématiques, Université de Nancy-I, B.P. n° 239, 54506 Vandœuvre-lès-Nancy Cedex.

paraît de nature et de complexité comparables à celui de l'infinitude des nombres premiers jumeaux ou la conjecture de Goldbach.

1.2. Soit $\mathscr{F}_1$ l'ensemble des entiers positifs qui admettent au moins une représentation du type (I). A défaut d'établir que $\mathscr{F}_1$ contient tous les entiers, on peut chercher à montrer que cette classe est néanmoins assez étendue en un sens à préciser. ELLIOTT a prouvé dans [1] que la densité logarithmique inférieure de $\mathscr{F}_1$ est strictement positive et l'un des auteurs a produit une minoration effective de sa densité asymptotique inférieure $d\mathscr{F}_1$, soit [3] :

$$d\mathscr{F}_1 \geqslant 1/17{,}62.$$

L'objet essentiel de cet article est d'améliorer cette inégalité par une méthode dont la limite naturelle est le résultat optimal $d\mathscr{F}_1 = 1$. Nous établissons le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Soit M un élément de $\mathbb{N}^*$ et $\mathscr{F}_M$ l'ensemble des nombres entiers $d \geqslant 1$ qui peuvent s'écrire sous la forme :*

$$d = \frac{p+1}{M(q+1)} \qquad (p,\ q \text{ premiers}).$$

La densité asymptotique inférieure de $\mathscr{F}_M$ est au moins égale à $1/4$.

1.3. La conjecture de SCHINZEL laisse naturellement supputer que $\mathscr{F}_M$ est, pour chaque M, de densité unité. Notre méthode conduirait directement à ce résultat moyennant la véracité de deux conjectures classiques de la théorie du Crible : la conjecture de Hardy-Littlewood — qui permettrait de diviser par 2 la majoration obtenue au paragraphe 2.1 — et la conjecture d'ELLIOTT-HALBERSTAM — qui permettrait d'appliquer à toute valeur du paramètre v figurant dans $G_d(x, v)$ (*cf.* § 2.1) le théorème de Bombieri-Vinogradov.

2. Démonstration

2.1. Soit v un élément de $]0, 1]$, x un nombre réel suffisamment grand et $G_d(x, v)$ le nombre de couples de nombres premiers (p, q) tels que :

$$\begin{cases} p+1 = M\,d\,(q+1) \\ \qquad q \leqslant x^v - 1 \end{cases}.$$

Soit g la fonction numérique définie sur les entiers $\geqslant 2$ par :

$$g(n) = \prod_{2 < p \mid n(n-1)} \frac{p-1}{p-2}.$$

Posons :

$$S = \sum_{2 \leqslant d \leqslant x/M,\ G_d(x,\, v) > 0} \frac{1}{g(Md)} G_d(x,\, v).$$

Une modification triviale de l'argument employé dans [3] fournit l'inégalité :

$$S \leqslant 4 \prod_{p > 2} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) \frac{x^v}{v^2 \operatorname{Log}^2 x} \sum_{2 \leqslant d \leqslant x/M,\ G_d(x,\, v) > 0} 1 + O\left(\frac{x^{1+v} \operatorname{Log} \operatorname{Log} x}{M \operatorname{Log}^3 x}\right).$$

Remarquons que cette majoration est le double de la valeur asymptotique conjecturée de S. Le crible de Selberg appliqué à chaque terme $G_d(x,\, v)$ n'aurait donné qu'une majoration quatre fois supérieure à la valeur conjecturée. L'amélioration obtenue ici d'un facteur 2 est due à la majoration *globale* de S, ce qui autorise l'emploi du théorème de Barban-Davenport-Halberstam à la place du théorème de Bombieri-Vinogradov.

2.2. Définissons la fonction fortement multiplicative k_M par :

$$k_M(p) = \begin{cases} 1 & \text{si } p \mid 2M, \\ \dfrac{p-2}{p-1} & \text{si } p \nmid 2M \end{cases}$$

et posons :

$$S_1 = \prod_{2 < p \mid M} \frac{p-1}{p-2} S.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{2 \leqslant d \leqslant x/M} G_d(x,\, v)\, k_M(d)\, k_M(Md-1) \\ &= \sum_{q \leqslant x^v - 1} \sum_{p \leqslant x(q+1)-1,\ p \equiv -1\ (M(q+1)),\ p \neq M(q+1)-1} \\ &\qquad \times k_M\left(\frac{p+1}{M(q+1)}\right) k_M\left(\frac{p-q}{q+1}\right). \end{aligned}$$

Utilisant la fonction multiplicative $\mu * k_M$, qui vérifie :

$$\mu * k_M(n) = \begin{cases} \dfrac{\mu(n)}{\varphi(n)} & \text{si} \quad (n, 2M)=1, \\ 0 & \text{si} \quad (n, 2M)>1, \end{cases}$$

on obtient :

$$S_1 = \sum_{q \leqslant x^v - 1} \sum_{n \leqslant x/M,\, (n,\, 2M)=1} \frac{\mu(n)}{\varphi(n)} \times \sum_{p \leqslant x(q+1)-1,\, p \equiv -1\, (Mn(q+1)),\, p \neq M(q+1)-1} k_M\left(\frac{p-q}{q+1}\right).$$

Lorsque l'entier n est supérieur ou égal à $\text{Log}^2 x$, on peut utiliser la majoration grossière :

$$\sum_{p \leqslant x(q+1)-1,\, p \equiv -1\, (Mn(q+1)),\, p \neq M(q+1)-1} k_M\left(\frac{p-q}{q+1}\right) \leqslant \sum_{m \leqslant x(q+1),\, m \equiv -1\, (Mn(q+1))} 1 \leqslant 2\frac{x}{Mn}.$$

Il vient :

$$S_1 = \sum_{q \leqslant x^v - 1} \sum_{n \leqslant \text{Log}^2 x,\, (n,\, 2M)=1} \frac{\mu(n)}{\varphi(n)} \times \sum_{p \leqslant x(q+1)-1,\, p \equiv -1\, (Mn(q+1)),\, p \neq M(q+1)-1} k_M\left(\frac{p-q}{q+1}\right) + R_1,$$

avec :

$$|R_1| \leqslant \frac{2x}{M} \sum_{q \leqslant x^v} \sum_{n > \text{Log}^2 x} \frac{|\mu(n)|}{n\varphi(n)} \ll \frac{x^{1+v}}{v M \text{Log}^3 x}.$$

Utilisant de nouveau la fonction $\mu * k_M$, nous écrivons :

$$\sum_{p \leqslant x(q+1)-1,\, p \equiv -1\, (Mn(q+1)),\, p \neq M(q+1)-1} k_M\left(\frac{p-q}{q+1}\right) = \sum_{n' \leqslant x,\, (n',\, 2Mn)=1} \frac{\mu(n')}{\varphi(n')} \sum_{p \leqslant x(q+1)-1,\, p \equiv l\, (Mnn'(q+1)),\, p \neq M(q+1)-1} 1$$

(la progression arithmétique $\{m \equiv l(Mnn'(q+1))\}$ étant l'intersection des progressions $\{m \equiv -1\,(Mn(q+1))\}$ et $\{m \equiv q\,(n'(q+1))\}$).

Pour $n' > \operatorname{Log}^2 x$, la majoration grossière :

$$\sum_{p \leqslant x(q+1)-1,\ p \equiv l\,(Mnn'(q+1))} 1 \leqslant \frac{x}{M\,nn'} + 1,$$

permet d'écrire :

$$S_1 = \sum_{q \leqslant x^v - 1} \sum_{n \leqslant \operatorname{Log}^2 x,\ (n,\ 2M)=1} \frac{\mu(n)}{\varphi(n)} \sum_{n' \leqslant \operatorname{Log}^2 x,\ (n',\ 2Mn)=1} \frac{\mu(n')}{\varphi(n')}$$
$$\times \sum_{p \leqslant x(q+1)-1,\ p \equiv l\,(Mnn'(q+1)),\ p \neq M(q+1)-1} 1 + R_2,$$

avec :

$$|R_2| \leqslant |R_1| + \sum_{q \leqslant x^v} \sum_{n \leqslant \operatorname{Log}^2 x} \frac{|\mu(n)|}{n}$$
$$\times \sum_{\operatorname{Log}^2 x \leqslant n' \leqslant x} \frac{|\mu(n')|}{\varphi(n')} \left(\frac{x}{M\,nn'} + 1 \right) \ll \frac{x^{1+v}}{v\,M \operatorname{Log}^3 x}.$$

Ainsi :

$$S_1 = \sum_{n \leqslant \operatorname{Log}^2 x,\ (n,\ 2M)=1} \frac{\mu(n)}{\varphi(n)} \sum_{n' \leqslant \operatorname{Log}^2 x,\ (n',\ 2nM)=1} \frac{\mu(n')}{\varphi(n')}$$
$$\times \sum_{q \leqslant x^v} \pi(x(q+1),\ M\,nn'(q+1),\ l) + R_3$$

avec :

$$|R_3| \ll \frac{x^{1+v}}{v\,M \operatorname{Log}^3 x}.$$

2.3. Calculons maintenant la somme $\sum_{q \leqslant x^v} \pi(x(q+1),\ M\,nn'(q+1),\ l)$. Comme $v<1$, le théorème de Bombieri-Vinogradov ([2], p. 115) permet d'écrire :

$$\sum_{q \leqslant x^v} \pi(x(q+1),\ M\,nn'(q+1),\ l) = \sum_{q \leqslant x^v} \frac{li(x(q+1))}{\varphi(M\,nn'(q+1))} + R_4,$$

avec :

$$|R_4| \ll_v \frac{x^{1+v}}{M\,nn' \operatorname{Log}^5 x}.$$

Pour évaluer la somme du membre de droite, on utilise le lemme suivant :

LEMME. — *On a uniformément pour tout entier $K \geqslant 1$ et tout nombre réel $z \geqslant 2$ l'estimation :*

$$\sum_{q \leqslant z} \frac{q+1}{\varphi(K(q+1))} = \frac{C(K)}{\varphi(K)} \frac{z}{\operatorname{Log} z} + O\left(\frac{1}{\varphi(K)} \frac{z}{\operatorname{Log}^2 z}\right),$$

avec :

$$C(K) = \prod_{p \nmid K} \left(1 + \frac{1}{(p-1)^2}\right).$$

Démonstration. — On a :

$$\frac{n\,\varphi(K)}{\varphi(Kn)} = \prod_{p \nmid K} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} = \sum_{d \mid n} \lambda_K(d),$$

disons, où λ_K est la fonction multiplicative définie par :

$$\lambda_K(p^\nu) = \begin{cases} 1/(p-1) & \text{si } \nu = 1 \quad \text{et} \quad p \nmid K, \\ 0 & \text{si } \nu > 1 \quad \text{ou} \quad p \mid K. \end{cases}$$

En particulier $0 \leqslant \lambda_K(d) \leqslant 1/\varphi(d)$ pour tout $d \geqslant 1$.

La somme à évaluer est égale au produit de $1/\varphi(K)$ par :

$$\sum_{d \leqslant z} \lambda_K(d) \sum_{q \leqslant z-1,\ q \equiv -1 \pmod d} 1.$$

Pour $(\log z)^2 < d \leqslant z$, on majore trivialement la somme intérieure par $2z/d$. Cela fournit une contribution ne dépassant pas :

$$2z \sum_{d > (\log z)^2} \frac{\lambda_K(d)}{d} \leqslant 2z \sum_{d > (\log z)^2} \frac{1}{d\varphi(d)} \ll \frac{z}{(\log z)^2}.$$

Pour $d \leqslant (\log z)^2$, on utilise le théorème de Siegel-Walfisz sous la forme :

$$\sum_{q \leqslant z-1,\ q \equiv -1 \pmod d} 1 = \frac{li(z)}{\varphi(d)} + O\left(\frac{z}{(\log z)^3}\right).$$

On obtient une contribution égale à :

$$\sum_{d \leqslant (\log z)^2} \left\{\frac{\lambda_K(d)}{\varphi(d)} li(z) + O\left(\frac{z}{\varphi(d)(\log z)^3}\right)\right\} = C(K)\, li(z) + O\left(\frac{z}{(\log z)^2}\right).$$

Cela est suffisant.

Revenons au calcul de :

$$\sum_{q \leqslant x^v} \frac{li(x(q+1))}{\varphi(M\,nn'\,q+1))}.$$

En appliquant le lemme, on obtient par intégration par parties :

$$\sum_{q \leqslant x^v} \frac{q+1}{\varphi(M\,nn'(q+1))\operatorname{Log}(x(q+1))} = \frac{C(M\,nn')}{\varphi(M\,nn')}\,\frac{x^v}{v(1+v)\log^2 x} + O\left(\frac{x^v}{\varphi(M\,nn')\,v\operatorname{Log}^3 x}\right).$$

Donc :

$$\sum_{q \leqslant x^v} \frac{li(x(q+1))}{\varphi(M\,nn'(q+1))} = \frac{C(M\,nn')}{\varphi(M\,nn')}\,\frac{x^{1+v}}{v(1+v)\operatorname{Log}^2 x} + O\left(\frac{x^{1+v}}{\varphi(M\,nn')\,v\operatorname{Log}^3 x}\right) + O\left(\frac{x}{\operatorname{Log}^2 x}\sum_{q \leqslant x^v}\frac{q+1}{\varphi(M\,nn'(q+1))}\right).$$

Soit :

$$\sum_{q \leqslant x^v} \frac{li(x(q+1))}{\varphi(M\,nn'(q+1))} = \frac{C(M\,nn')}{\varphi(M\,nn')}\,\frac{x^{1+v}}{v(1+v)\operatorname{Log}^2 x} + O\left(\frac{x^{1+v}}{\varphi(M\,nn')\,v\operatorname{Log}^3 x}\right).$$

2.4. On obtient alors pour S_1 :

$$S_1 = \sum_{n \leqslant \operatorname{Log}^2 x,\ (n,\,2M)=1} \frac{\mu(n)}{\varphi(n)} \sum_{n' \leqslant \operatorname{Log}^2 x,\ (n',\,2Mn)=1} \frac{\mu(n')}{\varphi(n')}\,\frac{C(M\,nn')}{\varphi(M\,nn')} \times \frac{x^{1+v}}{v(1+v)\operatorname{Log}^2 x} + O\left(\frac{x^{1+v}}{M\,v\operatorname{Log}^3 x}\right).$$

Il reste à calculer la partie principale du membre de droite de la dernière égalité. Elle peut s'écrire :

$$\prod_{p \geqslant 2}\left(1+\frac{1}{(p-1)^2}\right)\frac{1}{\varphi(M)}\prod_{p \mid M}\left(1+\frac{1}{(p-1)^2}\right)^{-1} \times \sum_{n \leqslant \operatorname{Log}^2 x,\ (n,\,2M)=1}\frac{\mu(n)}{\varphi^2(n)}\prod_{p \mid n}\left(1+\frac{1}{(p-1)^2}\right)^{-1}\sum_{n' \leqslant \operatorname{Log}^2 x,\ (n',\,2Mn)=1} \times \frac{\mu(n')}{\varphi^2(n')}\prod_{p \mid n'}\left(1+\frac{1}{(p-1)^2}\right)^{-1}$$

et vaut :

$$\prod_{p \geqslant d2} \left(1+\frac{1}{(p-1)^2}\right) \frac{1}{\varphi(M)} \prod_{p \mid M} \left(1+\frac{1}{(p-1)^2}\right)^{-1}$$

$$\times \sum_{m=1,\ (m,\ M)=1}^{\infty} \frac{\mu(m)\, 2^{\nu(m)}}{\varphi^2(m)} \prod_{p \mid m} \left(1+\frac{1}{(p-1)^2}\right)^{-1} (1+o(1))$$

$$= \prod_{p \geqslant 2} \left(1+\frac{1}{(p-1)^2}\right) \frac{1}{\varphi(M)}$$

$$\times \prod_{p \mid M} \left(1+\frac{1}{(p-1)^2}\right)^{-1} \prod_{p \nmid 2M} \left(1+\frac{-2}{1+(p-1)^2}\right) (1+o(1))$$

$$= 2 \prod_{p > 2} \left(1+\frac{1}{(p-1)^2}\right) \left(1+\frac{-2}{1+(p-1)^2}\right) \frac{1}{M} \prod_{2 < p \mid M} \frac{p-1}{p-2} (1+o(1)).$$

En définitive :

$$S = 2 \prod_{p > 2} \left(\frac{p^2-2p}{(p-1)^2}\right) \frac{x^{1+v}}{v(1+v)\, M \operatorname{Log}^2 x} (1+o(1)).$$

2.5. Rapprochons cette dernière égalité de la majoration de S page 439 ; on obtient :

$$\sum_{2 \leqslant d \leqslant x/M,\ G_d(x,\, v) > 0} 1 \geqslant \frac{1}{2} \frac{v}{1+v} \frac{x}{M} + o(x).$$

On en déduit que la densité asymptotique inférieure de $\mathscr{F}_M$ est au moins égale à $v/(2(1+v))$ et on obtient le théorème en se rappelant que v peut être choisi arbitrairement proche de 1.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Elliott (P. D. T. A.). — A conjecture of Katai, *Acta Arithm.*, Warszawa, t. 26, 1974, p. 11-20.

[2] Halberstam (H.) and Richert (H. E.). — *Sieve methods.* London, New York, San Francisco, Academic Press, 1974 (*London mathematical Society Monographs*, 4).

[3] Meyer (J.). — Représentation multiplicative des entiers, *Thèse* de doctorat, ch. VII, Reims 1982.

[4] Schinzel (A.) et Sierpinski (W.). — Sur certaines hypothèses concernant les nombres premiers, *Acta Arithm.*, Warszawa, t. 4, 1958, p. 185-208.