J. reine angew. Math.,
564 (2003), 119–166.

Moyennes de certaines fonctions multiplicatives sur les entiers friables

Gérald Tenenbaum & Jie Wu

Abstract. We give mean value estimates, over friable integers, for non-negative multiplicative functions under general average hypotheses on their values at prime arguments.

1. Historique du problème

Les entiers friables, ou sans grand facteur premier, font l'objet, depuis une quinzaine d'années, de recherches intensives en théorie des nombres et en algorithmique. D'une part, leurs propriétés de factorisation (à l'origine de la dénomination « friable », plus suggestive et plus spécifique que « lisse ») leur attribuent en effet un rôle essentiel dans la cryptographie actuelle. D'autre part, leur apparition naturelle dans le processus de décomposition canonique d'un entier n sous forme d'un produit $n = ab$, où a regroupe les « petits » et b les « grands » facteurs premiers, fait de l'étude des entiers friables un aspect incontournable de la théorie du crible et de toute branche de l'arithmétique où le crible intervient de manière essentielle. À l'appui de cette opinion, on versera ainsi, entre autres, l'incidence des entiers friables dans la méthode du cercle, due en particulier aux travaux de Vaughan et Wooley (voir par exemple le chapitre 12 de [46]) et leur apparition dans les versions quantitatives du « lemme fondamental » du modèle de Kubilius en théorie probabiliste des nombres — cf. [44].

Désignons par $P(n)$ le plus grand facteur premier d'un entier naturel positif n avec la convention $P(1) = 1$ et par

$$S(x, y) := \{n : n \leqslant x, P(n) \leqslant y\}$$

l'ensemble des entiers y-friables n'excédant pas x. Le cardinal

$$\Psi(x, y) := |S(x, y)|$$

a évidemment reçu une attention particulière de la part des chercheurs, depuis Dickman [10] et de Bruijn [5] : voir en particulier Hildebrand [20], Hildebrand–Tenenbaum [22], Saias [35], et la synthèse [24].

Classification AMS 2000 : primaire 11N37, secondaire 11N60.

Dans ce travail, nous nous intéressons au problème de la moyenne d'une fonction multiplicative f sur les entiers friables, autrement dit du comportement asymptotique de la fonction sommatoire

$$\Psi_f(x,y) := \sum_{n\in S(x,y)} f(n).$$

Alors que de nombreux cas particuliers ont été étudiés en détail,[(1)] la littérature contient relativement peu de théorèmes généraux. De Bruijn & van Lint [6] ont décrit un ensemble de conditions sur f, comprenant notamment l'hypothèse que f est positive et qu'il existe une constante $\kappa > 0$ telle que, pour tout $v > 1$ fixé,

$$\sum_{y<p\leqslant y^v} \frac{f(p)}{p} = \kappa \log v + o(1) \qquad (y \to \infty), \tag{1·1}$$

impliquant

$$\Psi_f(y^u, y) \sim C_f\,\varrho_\kappa(u) y^u (\log y)^{\kappa-1} \qquad (y\to\infty)$$

où C_f est une constante positive et ϱ_κ désigne l'unique fonction continue sur $]0,\infty[$ et dérivable sur $[1,\infty[$ satisfaisant à

$$\begin{cases} \varrho_\kappa(u) = u^{\kappa-1}/\Gamma(\kappa) & (0 < u \leqslant 1),\\ u\varrho'_\kappa(u) + (1-\kappa)\varrho_\kappa(u) + \kappa\varrho_\kappa(u-1) = 0 & (u > 1). \end{cases}$$

Il est à noter que ϱ_κ est la puissance fractionnaire de convolution d'ordre κ de la fonction classique de Dickman $\varrho = \varrho_1$ et l'on peut voir le résultat de de Bruijn et van Lint comme une généralisation aux fonctions multiplicatives positives de l'estimation historique de Dickman [10].

Halberstam & Richert [17] ont donné une estimation uniforme de sommes pondérées du type

$$\psi_f(x,y) = \sum_{n\in S(x,y)} f(n)/n, \tag{1·2}$$

où f satisfait une forme effective de la condition (1·1).

À la suite des travaux de Levin & Fainleib [28], [29], de nombreux auteurs ont donné des estimations uniformes généralisant le résultat de de Bruijn et van Lint :

1. Voir notamment : van Lint & Richert [31] pour la fonction $\mu(n)^2/\varphi(n)$; Xuan [47], [48], et Smida [36], [37] pour la fonction de Piltz $\tau_k(n)$; Alladi [1], Hildebrand [21], Tenenbaum [42] pour la fonction de Möbius ; Naïmi [33], [34], Ivić & Tenenbaum [26], de la Bretèche & Tenenbaum [4] pour la fonction indicatrice des entiers sans facteur carré, ainsi que, dans le cas de [26], d'autres « s-fonctions » ; De Koninck & Hensley [9], Alladi [2], Hensley [18] et Hildebrand [21] pour la fonction $z^{\Omega(n)}$, où z est un nombre complexe et $\Omega(n)$ désigne le nombre total des facteurs premiers de n, comptés avec multiplicité ; Fouvry & Tenenbaum [13], [14], Balog & Pomerance [3], Granville [15], [16], pour le cas des caractères de Dirichlet.

voir en particulier Chariev [7], [8], Fainleib [11], Levin & Chariev [30]. La méthode employée par ces auteurs repose sur l'exploitation systématique des équations fonctionnelles approchées satisfaites par les fonctions sommatoires de fonctions arithmétiques restreintes aux entiers friables ou aux entiers criblés[(2)]. Il est par exemple facile, sous l'hypothèse

$$\sum_{p\leqslant z}\frac{f(p)\log p}{p}-\kappa\log z\ll 1\qquad(z\geqslant 2)\tag{1·3}$$

et avec une condition de croissance inoffensive concernant les puissance $f(p^\nu)$ avec $\nu\geqslant 2$, de montrer que la quantité

$$T_f(u):=\int_0^u\psi_f(y^v,y)\,\mathrm{d}v=\sum_{n\in S(x,y)}\frac{f(n)\log(x/n)}{n\log y}$$

vérifie

$$uT_f'(u)-(1+\kappa)T_f(u)+\kappa T_f(u-1)=O((\log y)^{\kappa-1}).$$

Lorsque le membre de gauche de (1·3) vaut $b+O(r(z))$ où $r(z)$ tend vers 0 en décroissant, il est plus efficace d'utiliser la représentation

$$\psi_f(x,y)=\sum_{n\leqslant x}\frac{f(n)}{n}\sum_{\substack{m\leqslant x/n\\ P^-(m)>y}}\frac{g(m)}{m}$$

où $P^-(n)$ désigne le plus petit facteur premier d'un entier naturel positif n avec la convention $P^-(1)=\infty$ et g est une fonction multiplicative telle que $g(p)=-f(p)$ pour tout p. Une méthode essentiellement équivalente mais techniquement plus compliquée est employée en particulier dans [29] et [30].

Quelques notations supplémentaires sont nécessaires pour énoncer plus précisément un résultat typique de cette méthode.

Soit $z_\kappa(u)$ la solution de l'équation différentielle aux différences

$$\begin{cases} z_\kappa(u)=0 & \text{si } u<0,\\ z_\kappa(u)=1 & \text{si } 0\leqslant u\leqslant 1,\\ uz_\kappa'(u)=-\kappa z_\kappa(u-1) & \text{si } u>1.\end{cases}\tag{1·4}$$

D'après le lemme 3.8 de [37], on a

$$\varrho_\kappa(u)=\frac{1}{\Gamma(\kappa)}\Big(u^{\kappa-1}+\int_0^u z_\kappa'(u-v)v^{\kappa-1}\,\mathrm{d}v\Big)\qquad(u>0)$$

2. C'est-à-dire les entiers sans petit facteur premier.

d'où l'on déduit facilement que

$$\frac{1}{\Gamma(\kappa)}\int_0^u v^{\kappa-1}z_\kappa(u-v)\,\mathrm{d}v=\int_0^u \varrho_\kappa(v)\,\mathrm{d}v \qquad (u>0).$$

Par ailleurs, étant donnée une fonction arithmétique f telle que $f(1)\neq 0$, et donc inversible pour la convolution de Dirichlet, nous définissons une fonction Λ_f par

$$f\log = f*\Lambda_f.$$

La fonction Λ_f généralise celle de von Mangoldt, qui est obtenue pour $f=\mathbf{1}$. Lorsque f est multiplicative, il est facile de montrer[3] que $\Lambda_f(n)=0$ si n n'est pas une puissance de nombre premier et que l'on a, pour tout nombre premier p et tout entier $\nu\geqslant 1$,

$$\Lambda_f(p^\nu)=\log p^\nu\sum_{1\leqslant j\leqslant\nu}\frac{(-1)^{j-1}}{j}\sum_{\substack{\nu_1\geqslant 1,\dots,\nu_j\geqslant 1\\ \nu_1+\dots+\nu_j=\nu}}\prod_{r=1}^{j}f(p^{\nu_r}).$$

Un cas particulier[4] du théorème 3 de [30], peut être reformulé de la façon suivante.

Théorème A (Levin & Chariev [30]). *Soit f une fonction multiplicative positive ou nulle. On suppose que*

$$\sum_{d\in S(x,y)}\frac{\Lambda_f(d)}{d}=\kappa\log\min(x,y)+b+O(r(x)+r(y)) \tag{1·5}$$

où $\kappa>0$, $b\in\mathbb{R}$, et $r(z)$ tend vers 0 en décroissant lorsque $z\to\infty$. Alors on a

$$\Psi_f(x,y)=\Lambda_f(x,y)+O(xu^Br(y)(\log y)^{\kappa-1}) \quad (x\geqslant y\geqslant 2)$$

où B est une constante positive et où l'on a posé $u:=(\log x)/\log y)$ et

$$\Lambda_f(x,y):=x\int_{\mathbb{R}}z_\kappa(u-v)\,\mathrm{d}\{M_f(y^v)/y^v\}$$

avec $M_f(x):=\sum_{n\leqslant x}f(n)$.

Ce type d'approche, conduisant à un terme d'erreur non décroissant en u, n'est susceptible, en raison de la décroissance rapide de z_κ, de fournir une formule asymptotique pour $\Psi_f(x,y)$ que dans un domaine du type

$$\mathrm{e}^{c\sqrt{\log x}}\leqslant y\leqslant x \tag{1·6}$$

3. En utilisant par exemple la représentation $\log F(s)=\sum_{n\geqslant 2}\Lambda_f(n)/n^s\log n$.

4. Nous introduisons notamment une hypothèse de positivité de f qui n'apparaît pas dans ces travaux de l'école russe. Cela nous permet, d'une part, de simplifier l'énoncé et, d'autre part, de faciliter la comparaison avec les autres résultats cités ou établis dans la suite.

et qui s'avère, en pratique, notablement plus petit. Par ailleurs, cette technique ne fonctionne, en l'état, que sous l'hypothèse que le terme d'erreur de (1·5) tend vers 0 lorsque $z \to \infty$. Dans la mesure où toute estimation de la forme $o(\log z)$ est une information non triviale, il faut considérer cette restriction comme une sérieuse déficience de la méthode.

Récemment, Joung Min Song a obtenu des estimations effectives de $\Psi_f(x,y)$ pour f multiplicative et positive ou nulle, sous des hypothèses simples et générales concernant le comportement en moyenne de f sur les puissances de nombres premiers, à savoir des conditions du type

$$\sum_{p\leqslant z} f(p)\log p = \kappa z + O\big(z/(\log z)^\delta\big) \qquad (z>1) \tag{1·7}$$

$$\sum_{p}\sum_{\nu\geqslant 2}\frac{f(p^\nu)}{p^{(1-\eta)\nu}} \leqslant A \tag{1·8}$$

pour des constantes convenables $\kappa>0$, $\delta>0$, $\eta\in\,]0,\frac12[$ et $A>0$. L'un des intérêts de son travail est donc d'affaiblir à tout renseignement non trivial une hypothèse de type (1·5).

La méthode de Song est assez proche de celle qui est utilisée par Levin et Fainleib et leurs continuateurs. Elle obtient d'abord dans [38] un résultat sur les moyennes pondérées (1·2) au moyen de l'équation fonctionnelle approchée standard issue de la condition (1·7), et effectue le « relèvement » à $\Psi_f(x,y)$ dans un second temps. Cependant, là où une simple sommation d'Abel était précédemment utilisée, Song met en évidence, par la méthode de Hildebrand [20], une nouvelle équation fonctionnelle approchée, relative à $\Psi_f(x,y)$, et, grâce à une résolution itérative, obtient un gain notable de précision.

Introduisons la série de Dirichlet

$$F(s,y) := \sum_{P(n)\leqslant y} f(n)/n^s \qquad (y\geqslant 2),$$

évidemment convergente pour $\Re e\, s=\sigma>0$, et la notation systématique

$$u := \frac{\log x}{\log y} \qquad (x\geqslant 1, y>1).$$

Enfin, réservons la lettre γ pour désigner la constante d'Euler.

Le résultat principal de Joung Min Song dans [39] est le suivant.

Théorème B (Song). *Soient $A>0$, $\kappa>1$, $0<\delta<1$, $0<\eta<\frac12$. Alors on a*

$$\Psi_f(x,y) = \mathrm{e}^{-\gamma\kappa} x\varrho_\kappa(u)\frac{F(1,y)}{\log y}\bigg\{1+O\bigg(\frac{\log(u+1)}{(\log y)^{\delta/2}}\bigg)\bigg\}, \tag{1·9}$$

uniformément pour toute fonction arithmétique f satisfaisant à (1·7), (1·8) *et*

$$x \geqslant 3, \quad \exp\{(\log x \log_2 x)^{2/(2+\delta)}\} \leqslant y \leqslant x. \tag{1·10}$$

Nous notons, à fins de référence ultérieure, que (1·10) implique

$$1 \leqslant u \leqslant \frac{(\log y)^{\delta/2}}{\log_2 y}. \tag{1·11}$$

2. Énoncé des résultats

Notre objectif principal dans ce travail consiste à explorer la voie de l'intégration complexe, et notamment de la méthode du col, en vue d'obtenir des formules asymptotiques pour $\Psi_f(x,y)$.

Nos résultats permettent de s'affranchir des deux restrictions $\kappa > 1$ et $\delta < 1$, qui sont peu naturelles et très gênantes en pratique. En fait, nous remplaçons la condition (1·7) par une hypothèse du type

$$\Big|\sum_{p\leqslant z} f(p)\log p - \kappa z\Big| \leqslant Cz/R(z) \qquad (z > 1), \tag{2·1}$$

où C est une constante, le paramètre κ est un nombre positif arbitraire et R est une fonction positive assujettie à certaines conditions de croissance relativement anodines. Plus précises que celles de Song lorsque $\delta < 1$ (une hypothèse rédhibitoire pour les travaux cités plus haut de l'école russe), nos estimations ont également, dans ce cas, un domaine de validité plus large. Lorsque $\delta \geqslant 1$, nos conditions de validité sont notablement moins restrictives que (1·6) et coïncident avec celles de la formule de Hildebrand [20] si $f = \mathbf{1}$ ou celles de Smida [37] si $f = \tau_k$: elles sont donc essentiellement optimales en l'état actuel de nos connaissances sur les zéros de la fonction zêta de Riemann — cf. Hildebrand [19].

Donnons à présent une définition formelle de l'ensemble des fonctions R considérées dans ce travail. Il s'agit, pour chaque valeur du paramètre $b \in \left]0, \frac{1}{2}\right]$, de la classe $\mathcal{R}(b,\kappa)$ des fonctions croissantes $R \in \mathcal{C}^1(]1,\infty[,\mathbb{R}^{+*})$ satisfaisant aux conditions (i), (ii), (iii) ci-dessous, où l'on a posé

$$\varphi(v) := \log R(\mathrm{e}^v) \qquad (v > 0). \tag{2·2}$$

(i) $v \mapsto v\varphi'(v)$ *est monotone,* φ' *est décroissante et*

$$\tfrac{1}{2}\varphi'\big(\tfrac{1}{2}v\big) \leqslant (1-b)\int_b^1 \varphi'(tv)\,\mathrm{d}t + O(1/v) \qquad (v > 0); \tag{2·3}$$

(ii) *Pour tout* $w > 1$, *on a*

$$\frac{1}{R^*(w)} := \int_w^\infty \frac{\mathrm{d}v}{vR(v^b)\log v} < \infty; \tag{2·4}$$

(iii) *Il existe un nombre réel* $\varepsilon > 0$ *tel que*

$$1 + (\log v)^{1-\kappa}(\log_2 v)^{\delta_{\kappa 1}} \ll R(v) \ll \mathrm{e}^{(\log v)^{3/5-\varepsilon}} \qquad (v \geqslant 3), \tag{2·5}$$

où $\delta_{\kappa 1}$ *est le symbole de Kronecker.*

Remarque. La condition (2·3) est certainement réalisée si l'on impose à la place de (2·3)

$$\tfrac{1}{2}\varphi'\big(\tfrac{1}{2}v\big) \leqslant (1-b)^2\varphi'(v) + O(1/v) \qquad (v > 0). \tag{2·6}$$

La définition de $\mathcal{R}(b,\kappa)$ peut paraître relativement technique, mais les conditions sont facilement vérifiables en pratique. En fait, la plupart des termes d'erreur explicites de sommes arithmétiques correspondent effectivement à des éléments d'une telle classe. Les fonctions suivantes, définies pour $v > \mathrm{e}$, coïncident sur cette demi-droite avec des exemples usuels d'éléments de $\mathcal{R}(\frac{1}{2},\kappa)$:

$$\begin{array}{ll}(\log_2 v)^c \quad (c > 1, \kappa \geqslant 1), & \mathrm{e}^{(\log_2 v)^c} \quad (c > 0,\ \kappa > 0),\\ (\log v)^\delta \quad (\delta > 0, \kappa + \delta \geqslant 1), & \mathrm{e}^{(\log v)^c} \quad (0 < c < \tfrac{3}{5},\ \kappa > 0).\\ (\log v)/(\log_2 v)^c \quad (c \in \mathbb{R},\ \kappa > 0), & \end{array}$$

Étant donnés des paramètres $A > 0$, $C > 0$, $\kappa > 0$, $b \in]0, \frac{1}{2}]$, $\eta \in]0, \frac{1}{2}[$, et une fonction $R \in \mathcal{R}(b,\kappa)$, nous introduisons formellement la classe

$$\mathcal{M}_\kappa = \mathcal{M}_\kappa(A, C, \eta; R)$$

des fonctions multiplicatives réelles positives ou nulles f satisfaisant à (2·1) et (1·8) pour des valeurs convenables de A et η.

La classe $\mathcal{M}_\kappa$ est assez étendue. Des exemples types sont fournis par la fonction de Piltz τ_κ, dont la valeur en n coïncide avec le coefficient de $1/n^s$ dans le développement de $\zeta(s)^\kappa$ en série de Dirichlet, et par la fonction indicatrice β de l'ensemble des entiers représentables comme somme de deux carrés. Pour chaque $\kappa > 0$ et chaque $\varepsilon > 0$, il existe des constantes A_κ et C_κ telles que, notant $R(v) := \exp\{(\log v)^{3/5-\varepsilon}\}$, on ait $\tau_\kappa \in \mathcal{M}_\kappa(A_\kappa, C_\kappa, \eta; R)$ pour tout $\eta \in \big]0, \frac{1}{2}\big[$. De même, il existe $C > 0$ telle que $\beta \in \mathcal{M}_{1/2}(A, C, \eta; R)$ avec $R(v) := \exp\{(\log v)^{3/5-\varepsilon}\}$ — cf. (2·23) *infra.*

On déduit facilement de (2·1) et (1·8) que, pour $R \in \mathcal{R}(b,\kappa)$ et uniformément lorsque $f \in \mathcal{M}_\kappa$, on a

$$F(1,y) = \mathrm{e}^{\gamma\kappa}C_\kappa(f)(\log y)^\kappa\bigg\{1 + O\bigg(\frac{1}{R(y^b)}\bigg)\bigg\} \tag{2·7}$$

avec

$$C_\kappa(f) := \prod_p (1-1/p)^\kappa \sum_{\nu\geqslant 0} f(p^\nu)/p^\nu.$$

Ayant précisé nos hypothèses sur les fonctions f étudiées, introduisons quelques notations relatives à la forme de nos résultats.

Pour $R \in \mathcal{R}(b,\kappa)$, nous posons

$$R_c(y) := \int_{3/2}^{y} \frac{\mathrm{d}t}{tR(t^c)} \quad (c>0). \tag{2·8}$$

Le terme résiduel de base de nos formules asymptotiques pour $\Psi_f(x,y)$ est

$$E(x,y) := \frac{R_b(y)\log(u+1)}{\log y} + \frac{R_b(y)^\kappa}{(\log y)^\kappa} + \frac{u\log(u+1)}{R(y^b)} + \frac{\{u\log(u+1)\}^2}{R(y^b)\log y}. \tag{2·9}$$

Soient $b \in]0,\frac12]$, $\varepsilon>0$, $\kappa>0$ et $R\in\mathcal{R}(b;\kappa)$. Nous définissons les quantités $U(y)=U(R;y)$ et $U^*(y)=U^*(R;y)$ par

$$\begin{aligned} U(y)^2 :=& R(y^b)\min\big(R(y^b),\log y\big)/\big\{1+|\log R(y^b)|\big\}^2 \\ U^*(y) :=& R(y^b)/\big\{1+|\log R(y^b)|\big\}, \end{aligned}$$

nous posons

$$Y_\varepsilon := y^{U(y)/\varepsilon}, \qquad Y_\varepsilon^* := y^{U^*(y)/\varepsilon}, \tag{2·10}$$

et nous introduisons les domaines $J_\varepsilon(R)$ et $J_\varepsilon^*(R)$ du plan en x, y, définis respectivement par les conditions

$$2\leqslant y\leqslant x\leqslant Y_\varepsilon, \tag{$J_\varepsilon(R)$}$$
$$2\leqslant y\leqslant x\leqslant Y_\varepsilon^*. \tag{$J_\varepsilon^*(R)$}$$

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer notre résultat principal.

Théorème 2.1. *Soient $A>0$, $C>0$, $\varepsilon>0$, $\kappa>0$, $b\in\left]0,\frac12\right]$, $\eta\in\left]0,\frac12\right[$, $R\in\mathcal{R}(b;\kappa)$ et $(x,y)\mapsto E(x,y)$ la fonction définie en* (2·9). *On a uniformément pour $f\in\mathcal{M}_\kappa(A,C,\eta;R)$, $(x,y)\in J_\varepsilon(R)$,*

$$\Psi_f(x,y) = C_\kappa(f)x\varrho_\kappa(u)(\log y)^{\kappa-1}\big\{1+O\big(E(x,y)\big)\big\}. \tag{2·11}$$

De plus, sous l'hypothèse supplémentaire que les nombres $f(p)$ sont bornés, la formule (2·11) *est valable dans le domaine $J_\varepsilon^*(R)$ en omettant le terme $\{u\log(u+1)\}^2/R(y^b)\log y$ dans la définition de $E(x,y)$. Dans ce cas, la constante implicite de* (2·11) *peut dépendre de la quantité $\sup_p f(p)$.*

Soit $\delta>0$. Le choix $R(v):=(\log v)^\delta$ dans le Théorème 2.1, fournit immédiatement un résultat qui renforce le Théorème B dans quatre directions : suppression des restrictions $\kappa>1$ et $\delta<1$, extension du domaine de validité en (x,y), diminution du terme d'erreur.

Corollaire 2.2. *Soient A, C, b, ε, η, δ, κ, des nombres positifs tels que $b \leqslant \frac{1}{2}$, $\eta < \frac{1}{2}$, $\kappa + \delta \geqslant 1$. Posons*

$$\delta_1 = \min(\delta, 1), \quad D := 2 + \delta_1 + \delta, \quad e := \begin{cases} 1 & si\ \delta = 1, \\ 0 & si\ \delta \neq 1, \end{cases}$$

$$r_\delta(v) := (\log v)^\delta \quad (v > 1)$$

et

$$E_{\kappa,\delta}(x, y) := \frac{(\log_2 y)^e \log(u+1)}{(\log y)^{\delta_1}} + \frac{(\log_2 y)^{e\kappa}}{(\log y)^{\delta_1 \kappa}} + \frac{u \log(u+1)}{(\log y)^\delta} + \frac{\{u \log(u+1)\}^2}{(\log y)^{1+\delta}}.$$

Alors la relation asymptotique

$$\Psi_f(x, y) = C_\kappa(f) x \varrho_\kappa(u) (\log y)^{\kappa - 1} \bigl\{1 + O\bigl(E_{\kappa,\delta}(x, y)\bigr)\bigr\} \tag{2·12}$$

a lieu uniformément pour $f \in \mathcal{M}_\kappa(A, C, \eta; r_\delta)$ et

$$x \geqslant 3, \quad \exp\{(\log x \log_2 x)^{2/D}\} \leqslant y \leqslant x. \tag{2·13}$$

Le domaine (2·13) contient strictement (1·10) puisque $D > 2 + \delta$. Sous la condition (2·13), on a de plus

$$u \log(u+1) \ll (\log y)^{(\delta + \delta_1)/2},$$

donc le terme d'erreur de (2·12) est borné dans (2·13) et tend vers 0 sous la condition supplémentaire $u = o\bigl((\log y)^{(\delta+\delta_1)/2} / \log_2 y\bigr)$. Enfin, ce terme d'erreur est

$$\ll \frac{u \log(u+1)}{(\log y)^\delta} \ll \frac{1}{(\log y)^{\delta/2}},$$

sous les conditions $\kappa > 1$, $\delta < 1$ et (1·11), il est donc toujours d'un ordre de grandeur strictement inférieur à celui de (1·9) dans le domaine (1·10).

Lorsque $f(p)$ est en moyenne très proche d'une constante, il est naturel d'attendre la validité de (2·1) avec $R(v) := \exp\{(\log v)^{3/5 - \varepsilon}\}$, ce qui correspond au meilleur terme d'erreur actuellement connu pour le théorème des nombres premiers. Le Théorème 2.1 fournit alors le résultat suivant, qui généralise, sans perte de précision, aussi bien le théorème 1 de Smida [37], relatif au cas particulier de la fonction de Piltz $f = \tau_\kappa$, que la formule asymptotique obtenue dans [26] ou [33] lorsque $f = \mu^2$.

Nous posons

$$L_\varepsilon(y) := \exp\bigl\{(\log y)^{\frac{3}{5} - \varepsilon}\bigr\}, \qquad H_\varepsilon := \{(x, y) : x \geqslant 2,\ 1 \leqslant u \leqslant L_\varepsilon(y)\}. \tag{2·14}$$

Corollaire 2.3. *Soient A, C, ε, η, κ, des nombres positifs tels que $\eta < \frac{1}{2}$. Alors, on a*

$$\Psi_f(x,y) = C_\kappa(f) x \varrho_\kappa(u)(\log y)^{\kappa-1}\bigg\{1 + O\bigg(\frac{\log(u+1)}{\log y} + \frac{1}{(\log y)^\kappa}\bigg)\bigg\}$$

uniformément pour $f \in \mathcal{M}_\kappa(A, C, \eta; L_{\varepsilon/2})$ et $(x,y) \in H_\varepsilon$.

Les difficultés inhérentes à l'emploi de l'intégration complexe pour estimer une fonction sommatoire du type $\Psi_f(x,y)$ résident principalement dans le fait que cette technique nécessite d'approcher la série de Dirichlet $F(s,y)$ pour de grandes valeurs de $\tau = \Im m\, s$, même lorsque l'abscisse d'intégration est choisie selon la méthode du col. Or, les hypothèses (1·8) et (2·1) ne permettent une telle approximation que pour des valeurs essentiellement bornées de τ — voir la preuve de la Proposition 4.3 *infra.*

Nous contournons cet obstacle méthodologique en exploitant les deux principes suivants : d'une part, la précision de la formule de Perron est notablement meilleure dans le cas de la fonction sommatoire pondérée $\psi_f(x,y)$ que dans celui de $\Psi_f(x,y)$; d'autre part, l'identité de Hildebrand [20] permet d'écrire avec une précision acceptable(5)

$$\Psi_f(x,y) = \frac{\kappa x}{\log x} \sum_{\substack{x/y < m \leqslant x \\ P(m) \leqslant y}} \frac{f(m)}{m} + \text{Erreur} \tag{2·15}$$

sous réserve de disposer d'une majoration exacte pour l'ordre de grandeur de $\Psi_f(x,y)$. Notre approche consiste donc à montrer, dans un premier temps, qu'une telle majoration peut effectivement être obtenue par intégration complexe et, dans un second temps, à évaluer la somme de (2·15) par une formule de Perron où l'intégrale complexe est tronquée à hauteur bornée. Le Lemme 3.10 *infra,* qui repose sur une idée de Landau, permet d'obtenir une précision suffisante bien que l'intégration complexe soit effectuée sur un intervalle inhabituellement court. Cette méthode est simple et remarquablement efficace. Elle est certainement susceptible d'être exploitée avec profit dans d'autres problèmes où l'intégration complexe doit être confinée à un domaine restreint.

À titre d'application du Théorème 2.1, nous obtenons un théorème d'Erdős–Wintner sur les entiers friables.

Théorème 2.4. *Soit h une fonction arithmétique additive réelle. S'il existe $H > 0$, $b \in]0, \frac{1}{2}]$ et $R \in \mathcal{R}(b;1)$ tels que, pour $z \geqslant 2$,*

$$\begin{gathered}\sum_{\substack{p \leqslant z \\ |h(p)| \leqslant H}} h(p)\log p \ll z/R(z), \qquad \sum_{\substack{p \leqslant z \\ |h(p)| \leqslant H}} h(p)^2 \log p \ll z/R(z), \\ \sum_{\substack{p \leqslant z \\ |h(p)| > H}} \log p \ll z/R(z),\end{gathered} \tag{2·16}$$

5. Voir en particulier la relation (4·1) *infra.*

alors le produit infini

$$\prod_p \Big(1 - \frac{1}{p}\Big) \sum_{\nu \geqslant 0} \frac{\mathrm{e}^{i\tau h(p^\nu)}}{p^\nu}$$

converge pour $\tau \in \mathbb{R}$ et représente la fonction caractéristique d'une fonction de répartition, F. De plus, pour tout $\varepsilon > 0$, tout point de continuité t de F, et uniformément lorsque x et y tendent vers l'infini en restant dans $J_\varepsilon(R)$, on a

$$D(t; h; x, y) := \frac{1}{\Psi(x, y)} \sum_{\substack{n \in S(x,y) \\ h(n) \leqslant t}} 1 = F(t) + o(1). \tag{2·17}$$

Ce résultat partage avec le théorème original d'Erdős et Wintner la propriété de n'imposer des conditions que sur les nombres $h(p)$. Il est à noter que l'hypothèse (2·4) est la condition la plus faible sur R qui permette de déduire de (2·16) la convergence des trois séries du théorème d'Erdős–Wintner, soit

$$\sum_{|h(p)| \leqslant H} \frac{h(p)}{p}, \qquad \sum_{|h(p)| \leqslant H} \frac{h(p)^2}{p}, \qquad \sum_{|h(p)| > H} \frac{1}{p}.$$

L'absence totale d'hypothèse concernant les nombres $h(p^\nu)$ avec $\nu \geqslant 2$ prohibe du même coup toute estimation effective du terme d'erreur de (2·17). Bien entendu, une hypothèse de croissance convenable sur $h(p^\nu)$ pour $\nu \geqslant 2$ permettrait d'exploiter l'uniformité du Théorème 2.1 et partant de préciser quantitativement la relation (2·17).

La méthode présentée dans ce travail est spécifiquement conçue pour traiter les situations où l'on dispose seulement d'une information en moyenne sur les valeurs $f(p)$ et d'une majoration relativement grossière pour les $f(p^\nu)$ lorsque $\nu \geqslant 2$. En pratique, il peut bien entendu se produire qu'un renseignement précis sur la nature analytique de la série $F(s, y)$ soit disponible. C'est le cas dans [37] où $F(s, y)$ est comparable à $\zeta(s)^\kappa \widehat{\varrho}((s - 1)\log y)^\kappa$, avec la notation

$$\widehat{\varrho}(s) := \int_0^\infty \mathrm{e}^{-ts} \varrho(t)\,\mathrm{d}t \tag{2·18}$$

pour la transformée de Laplace de la fonction de Dickman. Une généralisation est fournie dans [37] pour les fonctions de la forme $f = \tau_\kappa * h$ où $|h|$ est petite en moyenne.

Il est utile, cependant, de garder à l'esprit que la méthode de [37] s'applique aussi lorsque la série de Dirichlet associée à h possède de bonnes propriétés analytiques.

Sans chercher à énoncer un théorème général de ce type, traitons l'exemple de la fonction indicatrice β des entiers représentables comme somme de deux carrés. Il est bien connu que β est multiplicative et que l'on a, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\beta(n) = 1 \Leftrightarrow v_p(n) \equiv 0 \pmod 2 \quad \text{pour tout} \quad p \equiv 3 \pmod 4,$$

où v_p désigne la valuation p-adique. Les résultats classiques concernant la répartition des nombres premiers dans les progressions arithmétiques modulo 4 impliquent donc que β satisfait aux hypothèses du Corollaire 2.3 avec $\kappa = \frac{1}{2}$. Nous obtenons ainsi, compte tenu de (2·7),

$$\Psi_\beta(x,y) = \frac{Bx\varrho_{1/2}(u)}{\sqrt{\log y}}\left\{1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\log y}} + \frac{\log(u+1)}{\log y}\right)\right\} \qquad ((x,y)\in H_\varepsilon), \tag{2·19}$$

où l'on a posé

$$B := \sqrt{\frac{\pi}{2}} \prod_{p\equiv 3 \,(\mathrm{mod}\, 4)} \big(1 - 1/p^2\big)^{-1/2}. \tag{2·20}$$

Cela fournit immédiatement une amélioration significative d'un résultat de Moree [32], qui a obtenu une formule asymptotique pour $\Psi_\beta(x,y)$ dans le domaine restreint $x^{c(\log_3 x)/\log_2 x} \leqslant y \leqslant x$, où $c > 2$, avec un terme d'erreur moins précis.

Décrivons à présent comment on peut encore préciser (2·19). La situation est typique à bien des égards ; elle pourra, au besoin, être facilement généralisée. On a (2·21)

$$\begin{aligned}\mathcal{B}(s) := \sum_{n\geqslant 1} \frac{\beta(n)}{n^s} &= (1-2^{-s})^{-1} \prod_{p\equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, 4)} (1-p^{-s})^{-1} \prod_{p\equiv 3 \,(\mathrm{mod}\, 4)} (1-p^{-2s})^{-1}\\ &= \zeta(s)^{1/2} L(s,\chi_4)^{1/2} (1-2^{-s})^{-1/2} \prod_{p\equiv 3 \,(\mathrm{mod}\, 4)} (1-p^{-2s})^{-1/2},\end{aligned}$$

où χ_4 désigne l'unique caractère de Dirichlet non principal de module 4.

De plus, $\mathcal{B}(s,y) := \sum_{P(n)\leqslant y} \beta(n)/n^s$ est égal, pour $\sigma > 0$, au produit des facteurs eulériens d'indices $p \leqslant y$ du membre de droite de (2·21).

Évaluons

$$\zeta(s,y) := \prod_{p\leqslant y} (1 - 1/p^s)^{-1} \tag{2·22}$$

à l'aide du théorème des nombres premiers comme au lemme III.5.9.1 de [43] et effectuons le travail analogue pour $L(s,\chi_4;y) := \prod_{p\leqslant y}(1-\chi_4(p)/p^s)^{-1}$,[6] en utilisant une forme forte du théorème de Siegel–Walfisz, par exemple celle de Hinz ([25], *Korollar* 1.4) : *pour chaque* $A > 0$, *il existe une constante* $c > 0$ *telle que l'on ait uniformément pour* $x \geqslant 3$, $1 \leqslant q \leqslant (\log x)^A$, $(q,a) = 1$,

$$\sum_{\substack{p\leqslant x\\ p\equiv a \,(\mathrm{mod}\, q)}} \log p = \frac{x}{\varphi(q)} + O_A\big(x/\mathcal{L}(x)^c\big), \tag{2·23}$$

6. Voir par exemple le lemme 6.3 de [13] pour les détails.

où $\varphi(q)$ est la fonction indicatrice d'Euler et $\mathcal{L}(x) := \exp\{(\log x)^{3/5}/(\log_2 x)^{1/5}\}$. Nous sommes alors en mesure d'appliquer la méthode de [37], et en particulier d'évaluer $\Psi_\beta(x, y)$ par la formule de Perron en considérant comme terme principal la contribution d'un segment vertical de longueur tendant vers l'infini. Nous obtenons ainsi un résultat analogue au théorème 2 de [37]. La quantité $B(x, y)$ y est évaluée en fonction de

$$B(x) := \sum_{n \leqslant x} \beta(n).$$

Il peut être utile, dans ce contexte, de rappeler que la méthode de Selberg–Delange,[7] permet de déduire de (2·21) l'existence d'une fonction $\lambda \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ vérifiant $\lambda(0) > 0$ et

$$B(x) = \int_0^{1/2} x^{1-t} \lambda(t) \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} + O\big(x/\mathcal{L}(x)^c\big) \qquad (x \geqslant 3),$$

où c est une constante positive adéquate.

Nous obtenons le résultat suivant où la fonction $z_{1/2}$ est la solution du système (1·4) avec $\kappa = \frac{1}{2}$. Les détails étant très voisins de ceux de [37], nous omettons la démonstration.

Théorème 2.5. *Soit $\varepsilon > 0$. La relation asymptotique*

$$\Psi_\beta(x, y) = \left\{1 + O\left(\frac{1}{L_\varepsilon(y)}\right)\right\} x \int_0^\infty z_{1/2}(u - v)\, \mathrm{d}\left(\frac{B(y^v)}{y^v}\right)$$

a lieu uniformément dans le domaine

$$(G_\varepsilon) \qquad\qquad x \geqslant 3, \qquad \exp\{(\log x)^{2/5+\varepsilon}\} \leqslant y \leqslant x.$$

3. Lemmes

Pour $u > 0$, nous désignons par $\xi(u)$ l'unique solution réelle non nulle de $\mathrm{e}^\xi = 1 + u\xi$ si $u \neq 1$ et nous posons $\xi(1) = \xi(0) = 0$. Soit $\xi_\kappa(u) := \max\{1, \xi(u/\kappa)\}$. D'après le lemme 4.3 de [36], on a

$$\xi(u/\kappa) \geqslant -\kappa \qquad (u \geqslant 1),$$

et $\xi_\kappa(u) = \xi(u/\kappa)$ pour $u \geqslant u_0(\kappa)$. Pour $(x, y) \in J_\varepsilon^*(R)$, nous posons, avec ces notations,

$$(3{\cdot}1) \qquad\qquad \alpha = \alpha_\kappa(x, y) := 1 - \frac{\xi_\kappa(u)}{\log y}.$$

7. Voir [43], chap. II.5, et en particulier la note sur le paragraphe II.5.4

Nous commençons par une reformulation pratique des conditions $(x,y)\in J_\varepsilon(R)$ et $(x,y)\in J^*_\varepsilon(R)$.

Lemme 3.1. *Soient* $\varepsilon>0$, $\kappa>0$, $b\in]0,\frac12]$, $R\in\mathcal{R}(b;\kappa)$. *On a*

$$u\xi_\kappa(u)\ll R(y^b),\quad \frac{u^2\xi_\kappa(u)^2}{R(y^b)\log y}\ll 1\qquad ((x,y)\in J_\varepsilon(R)) \tag{3·2}$$

et

$$u\xi_\kappa(u)\ll R(y^b)\qquad ((x,y)\in J^*_\varepsilon(R)). \tag{3·3}$$

Les constantes implicites de (3·2) *et* (3·3) *dépendent au plus de* ε.

Démonstration. Seule la seconde estimation (3·2) est non triviale. On a $u\leqslant R(y^b)/\varepsilon$, d'où $\xi_\kappa(u)\ll_\varepsilon 1+\left|\log R(y^b)\right|$, et $u^2\{1+\left|\log R(y^b)\right|\}^2/R(y^b)\log y\leqslant 1/\varepsilon$. Cela implique bien la majoration annoncée. □

Les deux résultats suivants fournissent le cadre des utilisations standard des conditions de croissance apparaissant dans la définition des classes $\mathcal{R}(b;\kappa)$.

Lemme 3.2. *Soit* $R\in\mathcal{C}^1(]1,\infty[,\mathbb{R}^{+*})$ *une fonction monotone et* φ *la fonction définie par* (2·2). *Posons* $b:=1$ *si* φ *est décroissante et supposons que, si* φ *est croissante,* φ' *est décroissante et vérifie* (2·3) *pour un nombre réel positif convenable* $b\in]0,\frac12]$. *Alors on a uniformément pour* $\alpha\in\mathbb{R}$ *et* $y\geqslant w>1$,

$$\int_w^y\frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha R(t)}\ll\int_w^y\frac{\mathrm{d}t}{tR(t^b)}+\frac{y^{1-\alpha}-1}{(1-\alpha)R(y^b)}. \tag{3·4}$$

En particulier, pour tout nombre réel β, *on a uniformément pour* $\alpha\in\mathbb{R}$ *et* $y\geqslant w>1$,

$$\int_w^y\frac{(\log t)^\beta}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t\ll\frac{(\log y)^{\beta+1}-(\log w)^{\beta+1}}{\beta+1}+\frac{y^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}(\log y)^\beta. \tag{3·5}$$

Démonstration. Soit I l'intégrale à majorer. Si R est décroissante, le résultat est évident puisque

$$I\ll\frac{1}{R(y)}\int_1^y\frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}.$$

Si R, et donc φ, est croissante, nous remarquons d'abord que le résultat est trivial si $y^{1-\alpha}\leqslant 2$, puisque l'on a alors

$$I=\int_w^y\frac{1}{t^\alpha R(t)}\,\mathrm{d}t\leqslant\int_w^y\frac{(1+y^{1-\alpha})\,\mathrm{d}t}{tR(t)}\leqslant 3\int_w^y\frac{\mathrm{d}t}{tR(t^b)}.$$

Supposons dorénavant $y^{1-\alpha}\geqslant 2$. Nous définissons z comme la plus petite solution, si elle existe, de l'équation

$$\tfrac12\varphi'\big(\tfrac12 z\big)=(1-\alpha)(1-b).$$

Nous nous plaçons dans l'hypothèse où z est bien défini et appartient à l'intervalle $[\log w, \log y]$, laissant au lecteur la vérification, facile, des autres cas. On a d'une part, puisque $(1-b)(1-\alpha)v - \varphi\big(\frac12 v\big)$ est croissante pour $v \geqslant z$,

$$\begin{aligned}\int_z^{\log y} \frac{\mathrm{e}^{(1-\alpha)v}}{R\big(\mathrm{e}^v\big)}\,\mathrm{d}v &\leqslant \int_z^{\log y} \mathrm{e}^{(1-\alpha)v-\varphi(v/2)}\,\mathrm{d}v\\ &\leqslant \frac{y^{(1-b)(1-\alpha)}}{R\big(\sqrt{y}\big)}\int_0^{\log y} \mathrm{e}^{b(1-\alpha)v}\,\mathrm{d}v\\ &\ll \frac{y^{1-\alpha}-1}{(1-\alpha)R\big(\sqrt{y}\big)}.\end{aligned}$$

D'autre part, on a, pour $\log w \leqslant v \leqslant z$,

$$\begin{aligned}(1-\alpha)v - \varphi(v) + \varphi(bv) &= \frac{\varphi'\big(\frac12 z\big)v}{2-2b} - \{\varphi(v)-\varphi(bv)\}\\ &\leqslant \frac{v}{1-b}\Big\{\tfrac12\varphi'\big(\tfrac12 v\big) - (1-b)\int_b^1 \varphi'(tv)\,\mathrm{d}t\Big\}\\ &\leqslant O(1).\end{aligned}$$

Cela implique

$$\int_{\log w}^z \frac{\mathrm{e}^{(1-\alpha)v}}{R\big(\mathrm{e}^v\big)}\,\mathrm{d}v \ll \int_{\log w}^z \mathrm{e}^{-\varphi(bv)}\,\mathrm{d}v \leqslant \int_{\log w}^{\log y} \frac{\mathrm{d}v}{R(\mathrm{e}^{bv})},$$

d'où le résultat annoncé.

La seconde partie de l'énoncé est une conséquence immédiate du fait que la fonction $R(t) := 1/(\log t)^\beta$ satisfait aux hypothèses. $\square$

Lemme 3.3. *Soient $b > 0$, $R :]1,\infty[\to \mathbb{R}^{+*}$ une fonction croissante de classe $\mathcal{C}^1$ et φ la fonction définie par (2·2). Si $v\varphi'(v)$ est monotone, alors on a*

$$\int_2^z \frac{\mathrm{d}t}{tR\big(t^b\big)} \ll \frac{(\log z)\big\{1+\big|\log R\big(z^b\big)\big|\big\}}{R\big(z^b\big)} + \log_2 2z \qquad (z \geqslant 2). \tag{3·6}$$

Démonstration. Réécrivons l'intégrale à majorer sous la forme

$$I := \int_c^Z \frac{\mathrm{d}v}{R(\mathrm{e}^v)}$$

avec $c := b\log 2$, $Z := b\log z$. Nous devons donc établir que

$$I \ll \frac{Z\big\{1+\big|\log R(\mathrm{e}^Z)\big|\big\}}{R(\mathrm{e}^Z)} + \log Z.$$

La fonction $v\varphi'(v)$ est positive et monotone, elle tend donc vers une limite, finie ou infinie, que nous notons Λ.

Si $\Lambda > 1$, il existe deux nombres réels $a > 1$, $v_0 > c$, tels que $v\varphi'(v) \geqslant a$ pour $v \geqslant v_0$. Il s'ensuit que

$$\varphi(v) \geqslant a \log v + O(1), \qquad R\big(\mathrm{e}^v\big) \gg v^a \quad (v \geqslant v_0),$$

et donc

$$\int_c^\infty \frac{\mathrm{d}v}{R\big(\mathrm{e}^v\big)} < \infty.$$

Si $\Lambda < 1$, il existe deux nombres réels $a < 1$ et $v_0 > c$ tels que $v\varphi'(v) \leqslant a$ pour $v \geqslant v_0$. Une intégration par parties permet alors d'écrire

$$\int_{v_0}^Z \frac{\mathrm{d}v}{R(\mathrm{e}^v)} = \frac{Z}{R(\mathrm{e}^Z)} - \frac{v_0}{R(\mathrm{e}^{v_0})} + \int_{v_0}^Z \frac{v\varphi'(v)}{R(\mathrm{e}^v)}\,\mathrm{d}v \leqslant \frac{Z}{R\big(\mathrm{e}^Z\big)} + a\int_{v_0}^Z \frac{\mathrm{d}v}{R(\mathrm{e}^v)} + O(1).$$

Cela implique

$$\int_c^Z \frac{\mathrm{d}v}{R(\mathrm{e}^v)} \ll \frac{Z}{R\big(\mathrm{e}^Z\big)} + 1,$$

une majoration en fait plus précise que (3·6).

Si $\Lambda = 1$ et si $v\varphi'(v)$ est décroissante, alors on a $v\varphi'(v) \geqslant 1$ pour $v \geqslant c$. On en déduit comme précédemment que $R\big(\mathrm{e}^v\big) \gg v$ pour $v \geqslant c$ et

$$\int_c^Z \frac{\mathrm{d}v}{R\big(\mathrm{e}^v\big)} \ll \int_c^Z \frac{\mathrm{d}v}{v} \ll \log Z.$$

Si $\Lambda = 1$ et si $v\varphi'(v)$ est croissante, posons $g(v) := 1 - v\varphi'(v) \geqslant 0$. Par intégration de l'équation $\varphi'(v) = 1/v - g(v)/v$, nous obtenons

$$R\big(\mathrm{e}^v\big) \asymp v\mathrm{e}^{-G(v)},$$

avec $G(v) := \int_c^v g(t)\,\mathrm{d}t/t$. Comme $g(v) = o(1)$ par hypothèse, on a $G(v) = o(\log v)$. Il s'ensuit que

$$v^{1-o(1)} \ll R\big(\mathrm{e}^v\big) \ll v \qquad (v \to \infty)$$

d'où

$$\int_c^Z \frac{\mathrm{d}v}{R\big(\mathrm{e}^v\big)} \ll \int_c^Z \mathrm{e}^{G(v)}\frac{\mathrm{d}v}{v} \ll \mathrm{e}^{G(Z)}\log Z \asymp \frac{Z\log Z}{R\big(\mathrm{e}^Z\big)} \asymp \frac{Z\big\{1 + \big|\log R\big(\mathrm{e}^Z\big)\big|\big\}}{R\big(\mathrm{e}^Z\big)}.$$

En regroupant les estimations obtenues dans les différents cas, nous obtenons bien le résultat annoncé. $\square$

Remarque. Comme on a pu le constater dans la preuve qui précède, le facteur

$$1 + \left|\log R\left(z^b\right)\right|$$

n'est nécessaire dans (3·6) que lorsque $v\varphi'(v)$ tend vers 1 en croissant. Dans cette circonstance, la majoration est effectivement optimale : si, par exemple, $R(v) := (\log v)/\log_2 2v$, on constate aisément que les deux membres de (3·6) ont le même ordre grandeur $(\log_2 2z)^2$.

Le lemme suivant, qui sera utilisé à plusieurs reprises, est crucial pour déterminer les domaines de validité $J_\varepsilon(R)$ et $J_\varepsilon^*(R)$ de nos estimations. On note que l'hypothèse (2·1) implique immédiatement

$$f(p) \ll \frac{p}{R(p)\log p}. \tag{3·7}$$

Lemme 3.4. *Soient* $C > 0$, $\varepsilon > 0$, $\kappa > 0$, $b \in]0, \frac{1}{2}]$, $R \in \mathcal{R}(b;\kappa)$. *On a uniformément pour* $(x,y) \in J_\varepsilon^*(R)$, *$f$ multiplicative positive ou nulle satisfaisant* (2·1), $j \in \{0,1\}$,

$$\sum_{p\leqslant y} \frac{f(p)^2(\log p)^j}{p^{2\alpha_\kappa}} \ll 1 + \frac{u^2\xi_\kappa(u)}{(\log y)^{1-j}R(y^b)}. \tag{3·8}$$

De plus, si la suite $\{f(p)\}_{p\geqslant 2}$ *est bornée, le membre de gauche de* (3·8) *est borné.*
Démonstration. Soit S_j la somme à majorer. Posons

$$N(t) := \sum_{p\leqslant t} f(p)\log p. \tag{3·9}$$

On déduit de (3·7) que

$$\begin{aligned} S_j &\ll \sum_{p\leqslant y} \frac{f(p)(\log p)^{j-1}}{p^{2\alpha_\kappa-1}R(p)} = \int_{2-}^y \frac{(\log t)^{j-2}}{t^{2\alpha_\kappa-1}R(t)}\,\mathrm{d}N(t) \\ &= \left[\frac{(\log t)^{j-2}N(t)}{t^{2\alpha_\kappa-1}R(t)}\right]_{2-}^y + \int_2^y \frac{(\log t)^{j-2}}{t^{2\alpha_\kappa}R(t)}\left\{\frac{j-2}{\log t} + 1 - 2\alpha_\kappa - \varphi'(\log t)\right\}N(t)\,\mathrm{d}t \\ &\ll \frac{y^{2-2\alpha_\kappa}}{(\log y)^{2-j}R(y)} + \int_2^y \frac{(\log t)^{j-2}}{t^{2\alpha_\kappa-1}R(t)}\,\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

puisque φ' est décroissante et positive ou nulle, donc bornée. À ce stade, nous observons que la fonction $v \mapsto S(v) := (\log v)^{2-j}R(v)$ satisfait aux conditions du Lemme 3.2 : en effet, si $\psi(v) := \log S(\mathrm{e}^v)$, la fonction $\psi'(v) = \varphi'(v) + (2-j)/v$ est bien décroissante pour $v > 0$ et la validité de (2·3) pour ψ résulte trivialement de (2·3) pour φ. Nous pouvons donc estimer la dernière intégrale par le Lemme 3.2. La majoration (3·8) annoncée en découle immédiatement, compte tenu de l'hypothèse (2·4).

Une intégration par parties fournit par ailleurs

$$\sum_{p\leqslant y}\frac{f(p)^2\log p}{p^{2\alpha_\kappa}}\ll\sum_{p\leqslant y}\frac{\log p}{p^{2\alpha_\kappa}}\ll 1$$

lorsque $f(p)\ll 1$ et $(x,y)\in J_\varepsilon^*(R)$ puisque l'on a, sous cette hypothèse, $\alpha_\kappa>\frac{2}{3}$ dès que y est assez grand. □

Il sera commode dans la suite d'introduire la classe

$$\mathcal{M}_\kappa^*:=\mathcal{M}_\kappa^*(C;R)$$

constituée des fonctions f qui sont exponentiellement multiplicatives, autrement dit qui vérifient

$$f(p^\nu)=f(p)^\nu/\nu!\qquad(p\geqslant 2,\ \nu\geqslant 1),$$

et qui satisfont (2·1).

Nous ferons également usage de la notation

$$H(u):=\mathrm{e}^{u/\log^2(u+1)}\qquad(u\geqslant 1).\tag{3·10}$$

Lemme 3.5. *Soient $C>0$, $\varepsilon>0$, $\kappa>0$, $b\in\,]0,\frac{1}{2}]$, $R\in\mathcal{R}(b;\kappa)$.*

(i) Il existe une constante $c_0=c_0(\kappa)>0$ telle que, uniformément pour

$$f\in\mathcal{M}_\kappa^*(C;R),\quad(x,y)\in J_\varepsilon^*(R),\quad\alpha:=\alpha_\kappa(x,y),\quad s=\alpha+i\tau,\tag{3·11}$$

et $|\tau|\leqslant\pi/\log y$, on ait

$$F(s,y)\ll F(\alpha,y)\mathrm{e}^{-c_0u(\tau\log y)^2}.\tag{3·12}$$

(ii) Il existe une constante $c_1=c_1(R)>0$ telle que, sous les hypothèses (3·11) et uniformément lorsque

$$\pi/\log y\leqslant|\tau|\leqslant c_1\min\bigl\{R(y^b)/\xi_\kappa(u)^2,\ R^*\bigl(y^{1/\xi_\kappa(u)}\bigr)\bigr\},\tag{3·13}$$

on ait

$$F(s,y)\ll F(\alpha,y)\biggl(\frac{1+|\tau|\log w_\tau}{\xi_\kappa(u)+|\tau|\log y}\biggr)^\kappa H(u)^{-1/2}\tag{3·14}$$

où w_τ est défini par la relation $|\tau|+R^*(2)=R^*(w_\tau)$.

Démonstration. Toutes les estimations annoncées étant triviales pour y borné, nous supposons dans toute la suite y assez grand.

On a

$$\left|\frac{F(s,y)}{F(\alpha,y)}\right| = \exp\Big\{-\sum_{p\leqslant y}\frac{f(p)\{1-\cos(\tau\log p)\}}{p^\alpha}\Big\}. \tag{3·15}$$

Posons

$$\begin{aligned} Q(v) &:= \sum_{p\leqslant v}\{f(p)-\kappa\}\log p \ll \frac{v}{R(v)} \qquad (v>1), \qquad (3·16)\\ X(w) &:= \sum_{w<p\leqslant y}\frac{\{f(p)-\kappa\}\{1-\cos(\tau\log p)\}}{p^\alpha}\\ &= \int_w^y \frac{1-\cos(\tau\log v)}{v^\alpha\log v}\,\mathrm{d}Q(v) \quad (1<w\leqslant y). \end{aligned}$$

Nous déduisons de (3·15) que

$$|F(s,y)|/F(\alpha,y)\leqslant \mathrm{e}^{-\kappa V-X(3/2)}, \tag{3·17}$$

avec $V:=\sum_{p\leqslant y}\{1-\cos(\tau\log p)\}/p^\alpha$.

On a pour $(x,y)\in J_\varepsilon^*(R)$, $1<w\leqslant y$,

$$\begin{aligned} X(w) &= \Big[\frac{1-\cos(\tau\log v)}{v^\alpha\log v}Q(v)\Big]_w^y + \int_w^y O\Big(\frac{(1+|\tau|)Q(v)}{v^{\alpha+1}\log v}\Big)\,\mathrm{d}v\\ &\ll \frac{y^{1-\alpha}}{R(y)\log y} + (1+|\tau|)\Big\{\frac{1}{R^*(w)}+\frac{y^{1-\alpha}-1}{(1-\alpha)R(y^b)\log y}\Big\}\\ &\ll \frac{u+u|\tau|}{R(y^b)}+\frac{1+|\tau|}{R^*(w)}, \end{aligned} \tag{3·18}$$

où l'on a appliqué le Lemme 3.2 à la fonction $v\mapsto R(v)\log v$ et tenu compte de l'hypothèse (2·4).

On a donc $X(3/2)\ll 1$ lorsque $\tau\ll 1$. De plus, on a pour $|\tau|\leqslant \pi/\log y$

$$V\geqslant \frac{2\tau^2}{\pi^2}\sum_{p\leqslant y}\frac{(\log p)^2}{p^\alpha}\geqslant \frac{c_2u}{\kappa}(\tau\log y)^2,$$

où c_2 est une constante absolue convenable : la dernière estimation résulte du théorème 2 de [22] lorsque $\kappa=1$ et des calculs identiques fournissent le cas général. Cela établit bien le point (i) en reportant dans (3·17).

Pour établir l'assertion (ii), nous déduisons de (3·15) que l'on a, pour tout $w\in\,]1,y]$, avec la notation (2·22),

$$\begin{aligned} \left|\frac{F(s,y)}{F(\alpha,y)}\right| &\leqslant \exp\Big\{-\sum_{w<p\leqslant y}\frac{f(p)}{p^\alpha}\{1-\cos(\tau\log p)\}\Big\}\\ &\ll \frac{|\zeta(s,y)/\zeta(s,w)|^\kappa}{\{\zeta(\alpha,y)/\zeta(\alpha,w)\}^\kappa}\,\mathrm{e}^{-X(w)}. \end{aligned} \tag{3·19}$$

Choisissons $w = w_\tau$ avec $|\tau| + R^*(2) = R^*(w_\tau)$. La condition (3·13) garantit que, pour un choix convenable de c_1, on a $w_\tau \leqslant y$. Nous déduisons alors de (3·18) que

$$-X(w_\tau) \ll 1 + u|\tau|/R(y^b), \tag{3·20}$$

d'où, quitte à réduire encore c_1,

$$-X(w_\tau) \leqslant \tfrac{1}{3}u/\xi_\kappa(u)^2 + O(1). \tag{3·21}$$

Portons maintenant notre attention sur l'estimation des termes $\zeta(\cdot,\cdot)$ apparaissant au membre de droite de (3·19). D'après le lemme III.5.9.1 de [43], on a

$$\frac{\zeta(s,y)}{\zeta(s,w)} \asymp \frac{(\log y)\widehat{\varrho}\big((s-1)\log y\big)}{(\log w)\widehat{\varrho}\big((s-1)\log w\big)} \tag{3·22}$$

si $u \ll L_{\varepsilon/2}(y)$ et $|\tau| \ll L_{\varepsilon/2}(w)$. La première de ces conditions résulte de l'hypothèse $(x,y) \in J_\varepsilon^*(R)$, compte tenu de (2·5). La seconde peut également être déduite de (2·5) lorsque $w = w_\tau$: en effet, l'estimation

$$\frac{1}{|\tau|} \geqslant \frac{1}{R^*(w_\tau)} \geqslant \int_{w_\tau}^{w_\tau^2} \frac{\mathrm{d}v}{vR(v^b)\log v} \gg \frac{1}{R(w_\tau^{2b})} \gg \frac{1}{L_\varepsilon(w_\tau^{2b})}$$

implique $|\tau| \ll L_{\varepsilon/2}(w_\tau)$. Nous obtenons donc que (3·22) a lieu pour $w = w_\tau$. Nous notons de plus que, dès que c_1 est assez petite et y assez grand, on a

$$R^*(w_\tau) = R^*(2) + |\tau| \leqslant R^*(2) + c_1 R^*\big(y^{1/\xi_\kappa(u)}\big) \leqslant R^*\big(y^{1/\xi_\kappa(u)}\big),$$

d'où $w_\tau \leqslant y^{1/\xi_\kappa(u)}$, ou encore

$$(\alpha - 1)\log w_\tau = -\xi_\kappa(u)(\log w_\tau)/\log y \in [-1, 0].$$

Cela étant, nous disposons d'estimations précises pour l'ordre de grandeur des valeurs de $\widehat{\varrho}$ apparaissant dans (3·22). Posant $I_1(z) := \int_1^z \mathrm{e}^v\,\mathrm{d}v/v$, on a en effet, d'après le lemme 2 de [23],

$$\widehat{\varrho}(z) \asymp \begin{cases} \dfrac{1}{1+|z|} & (\Re e\, z \ll 1),\\[2ex] \dfrac{\exp I_1(-z)}{1+|z|} & (\Re e\, z \leqslant -1),\end{cases} \tag{3·23}$$

et aussi

$$I_1(-z) = -\frac{\mathrm{e}^{-z}}{z} + O\Big(\frac{\mathrm{e}^{-z}}{z^2}\Big) \qquad (\Re e\, z \leqslant -1).$$

Il s'ensuit, grâce à (3·23) et (3·22),que

$$\begin{aligned}\frac{\zeta(\alpha,y)}{\zeta(\alpha,w_\tau)} &\asymp \frac{(\log y)\widehat{\varrho}(-\xi_\kappa(u))}{\log w_\tau},\\ \frac{\zeta(s,y)}{\zeta(s,w_\tau)} &\asymp \frac{(\log y)(1+|\tau|\log w_\tau)}{(\log w_\tau)(\xi_\kappa(u)+|\tau|\log y)}\exp\big\{I_1(\xi_\kappa(u)-i\tau\log y)\big\}.\end{aligned}$$

En reportant dans (3·19), nous obtenons donc, sous la condition (3·13),

$$\frac{F(s,y)}{F(\alpha,y)} \ll \Big(\frac{1+|\tau|\log w_\tau}{\xi_\kappa(u)+|\tau|\log y}\Big)^\kappa \mathrm{e}^{\kappa Z-X(w_\tau)}$$

avec

$$Z=-\int_0^{\xi_\kappa(u)}\frac{\mathrm{e}^v-1}{v}\,\mathrm{d}v+\frac{(u/\kappa)\xi_\kappa(u)}{\xi_\kappa(u)+|\tau|\log y}+O\Big(\frac{u\xi_\kappa(u)}{\{\xi_\kappa(u)+|\tau|\log y\}^2}\Big).$$

La dernière intégrale vaut $u/\kappa+O\big(u/\xi_\kappa(u)\big)$. Cela implique

$$\kappa Z-X(w_\tau)\leqslant -\tfrac{1}{2}u+O(1)$$

dès que $|\tau|>C_1\xi_\kappa(u)/\log y$ où C_1 est une constante assez grande. Nous avons donc établi (3·14) pour ces « grandes » valeurs de $|\tau|$. Lorsque

$$\pi<|\tau|\log y\leqslant C_1\xi_\kappa(u),$$

nous déduisons de (3·19), (3·20), (3·21) et (3·22) que

$$\frac{F(s,y)}{F(\alpha,y)} \ll \frac{\widehat{\varrho}(-\xi_\kappa(u)+i\tau\log y)^\kappa}{\widehat{\varrho}(-\xi_\kappa(u))^\kappa}\mathrm{e}^{-X(w_\tau)} \ll \mathrm{e}^{-\frac{2}{3}u/\xi_\kappa(u)^2}$$

d'après le lemme 4.10 de [36]. Cela implique encore (3·14), et achève ainsi la démonstration. □

Lemme 3.6. *Soient $C>0$, $\varepsilon>0$, $\kappa>0$, $b\in]0,\frac{1}{2}]$, $R\in\mathcal{R}(b;\kappa)$. On a uniformément pour $(x,y)\in J_\varepsilon^*(R)$, $f\in\mathcal{M}_\kappa^*(C;R)$, $\alpha=\alpha_\kappa(x,y)$,*

$$\frac{x^\alpha F(\alpha,y)}{\sqrt{u}\,\log y}\asymp x\varrho_\kappa(u)(\log y)^{\kappa-1}. \tag{3·24}$$

Démonstration. Pour $(x,y)\in J_\varepsilon^*(R)$, on a

$$F(\alpha,y)=\exp\Big\{\sum_{p\leqslant y}\frac{f(p)}{p^\alpha}\Big\}\asymp\zeta(\alpha,y)^\kappa\exp\Big\{\sum_{p\leqslant y}\frac{f(p)-\kappa}{p^\alpha}\Big\}.$$

Une sommation d'Abel analogue à celle de (3·18) pour $w = \frac{3}{2}$ fournit

$$\sum_{p\leqslant y} \frac{f(p)-\kappa}{p^\alpha} = \int_{3/2}^{y} \frac{\mathrm{d}Q(t)}{t^\alpha \log t} \ll 1 + \int_{3/2}^{y} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha R(t)\log t} \ll 1,$$

où la dernière estimation résulte d'une application du Lemme 3.2 à la fonction $v \mapsto R(v)\log v$. Nous pouvons donc écrire

$$x^\alpha F(\alpha, y) \asymp x\,\mathrm{e}^{-u\xi_\kappa(u)}\zeta(\alpha, y)^\kappa \asymp x\mathrm{e}^{-u\xi_\kappa(u)}(\log y)^\kappa \widehat{\varrho}(-\xi_\kappa(u))^\kappa,$$

où le seconde évaluation résulte du lemme III.5.9.1 de [43]. On obtient (3·24) en observant que le théorème 1 de [36] implique

$$\varrho_\kappa(u) \asymp \frac{\mathrm{e}^{-u\xi_\kappa(u)}\widehat{\varrho}(-\xi_\kappa(u))^\kappa}{\sqrt{u}} \qquad (u \geqslant 1). \tag{3·25}$$

□

Lemme 3.7. *Soient* $C > 0$, $\varepsilon > 0$, $\kappa > 0$, $b \in]0, \frac{1}{2}]$, $R \in \mathcal{R}(b;\kappa)$. *On a uniformément pour* $y \geqslant 2$, $2 \leqslant x \leqslant Y_\varepsilon^*$, $f \in \mathcal{M}_\kappa^*(C;R)$,

$$\Psi_f(x, y) \ll x\varrho_\kappa(u)(\log y)^{\kappa-1}. \tag{3·26}$$

Démonstration. Nous commençons par opérer deux réductions préliminaires. La première consiste à remarquer que, si l'estimation (3·26) est valable pour $x = y$, alors elle l'est pour $x \leqslant y$, puisque, dans ce cas, $\Psi_f(x, y) = \Psi_f(x, x)$ et

$$\varrho_\kappa(1)(\log x)^{\kappa-1} = \varrho_\kappa(1)u^{\kappa-1}(\log y)^{\kappa-1} = \varrho_\kappa(u)(\log y)^{\kappa-1}.$$

Nous supposons donc dans ce qui suit que $x \geqslant y$, c'est-à-dire $u \geqslant 1$. La seconde réduction tient au fait que, compte tenu de l'estimation

$$\varrho_\kappa(u-v) \ll \varrho_\kappa(u)\mathrm{e}^{v\xi_\kappa(u)} \qquad (u \geqslant 1,\ 0 \leqslant v \leqslant u - c_\kappa) \tag{3·27}$$

avec $c_\kappa = 0$ pour $\kappa \geqslant 1$, $c_\kappa = \frac{1}{2}$ si $0 < \kappa < 1$, prouvée dans [37] (lemme 6.1),[(8)] il suffit de montrer que

$$\Psi_f(\tfrac{3}{2}x, y) - \Psi_f(\tfrac{1}{2}x, y) \ll x\varrho_\kappa(u)(\log y)^{\kappa-1}. \tag{3·28}$$

Une récurrence simple permet ensuite d'obtenir (3·26).

Posons

$$w(z) := \Big(\frac{\sin z}{z}\Big)^2.$$

8. Il est énoncé dans [37] que (3·27) a lieu pour $0 \leqslant v \leqslant u$, cependant cette relation est en défaut lorsque $v \to u$ si $\kappa < 1$.

La transformée de Fourier de w vaut

$$\int_{\mathbb{R}} w(z)\mathrm{e}^{-i\tau z}\,\mathrm{d}z = \pi\big(1-\tfrac12|\tau|\big)^+.$$

On a clairement

$$\begin{aligned}\Psi_f\big(\tfrac32 x,y\big)-\Psi_f\big(\tfrac12 x,y\big) &\leqslant D\sum_{P(n)\leqslant y} f(n)\Big(\frac{x}{n}\Big)^{\alpha} w\big(\log(x/n)\big)\\ &= \tfrac12 D\int_{-2}^{2} F(s,y)x^s\big(1-\tfrac12|\tau|\big)\,\mathrm{d}\tau\end{aligned}$$

avec $D := 2(\log 2)^2/(\sin\log 2)^2$ et où, par convention, on a posé $s=\alpha+i\tau$ dans l'intégrale. Ici et dans toute la suite de cette démonstration, nous posons

$$\alpha := \alpha_\kappa(x,y).$$

Il reste à majorer cette intégrale sous les hypothèses effectuées. On a d'abord, grâce au Lemme 3.5(i),

$$\int_{-\pi/\log y}^{\pi/\log y} F(s,y)x^s\big(1-\tfrac12|\tau|\big)\,\mathrm{d}\tau \ll x^{\alpha}F(\alpha,y)\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-c_0 u(\tau\log y)^2}\,\mathrm{d}\tau \ll \frac{x^{\alpha}F(\alpha,y)}{\sqrt{u}\,\log y}.$$

Nous estimons séparément, à l'aide d'une intégration par parties, les contributions des intervalles $\pi/\log y\leqslant\tau\leqslant 2$ et $-2\leqslant\tau\leqslant-\pi/\log y$. Par symétrie, nous nous contentons de considérer le premier. On a pour $\tau\in[0,2]$

$$\begin{aligned}-\frac{F'(s,y)}{F(s,y)} &= \sum_{p\leqslant y}\frac{f(p)\log p}{p^s}\\ &= \kappa\sum_{p\leqslant y}\frac{\log p}{p^s}+\sum_{p\leqslant y}\frac{f(p)-\kappa}{p^s}\log p.\end{aligned}\tag{3·29}$$

On a encore, avec la notation (3·16),

$$\begin{aligned}\sum_{p\leqslant y}\frac{f(p)-\kappa}{p^s}\log p = \int_{2-}^{y}\frac{\mathrm{d}Q(t)}{t^s} &\ll \frac{y^{1-\alpha}}{R(y)}+\int_2^y\frac{\mathrm{d}t}{t^{\alpha}R(t)}\\ &\ll \frac{y^{1-\alpha}}{R(y)}+R_b(y)+\frac{y^{1-\alpha}-1}{(1-\alpha)R(y^b)}\\ &\ll R_b(y)+\frac{u\log y}{R(y^b)},\end{aligned}\tag{3·30}$$

d'après le Lemme 3.2. Nous évaluons le premier terme du membre de droite de (3·29) en faisant appel à l'estimation

$$\sum_{p\leqslant y}\frac{\log p}{p^s} = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}+\frac{y^{1-s}}{1-s}+O\Big(\frac{u}{L_\varepsilon(y)}\Big),\tag{3·31}$$

établie au cours de la preuve du lemme III.5.9.1 de [43] — formule (71). En reportant (3·30) et (3·31) dans (3·29), nous déduisons finalement que l'on a, pour $(x,y)\in J_\varepsilon^*(R)$, $\pi/\log y\leqslant\tau\leqslant 2$,

$$\begin{aligned}\frac{F'(s,y)}{F(s,y)}&\ll\frac{y^{1-\alpha}-1}{\tau}+R_b(y)+\frac{u\log y}{R(y^b)}\\&\ll(\log x)K(x,y;\tau),\end{aligned}\tag{3·32}$$

avec

$$\begin{aligned}K(x,y;\tau)&:=\frac{\xi_\kappa(u)}{\tau\log y}+\frac{R_b(y)}{u\log y}+\frac{1}{R(y^b)}\\&\ll\frac{\xi_\kappa(u)}{\tau\log y}+\frac{R_b(y)}{\log y}.\end{aligned}\tag{3·33}$$

Il suit, grâce au Lemme 3.5,

$$\begin{aligned}&\int_{\pi/\log y}^{2}F(s,y)x^s\big(1-\tfrac12\tau\big)\,\mathrm{d}\tau\\&\quad=\left[F(s,y)\frac{x^s(1-\tau/2)}{iu\log y}\right]_{\pi/\log y}^{2}+O\left(x^\alpha\int_{\pi/\log y}^{2}|F(s,y)|K(x,y;\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)\\&\quad\ll x^\alpha F(\alpha,y)\left\{\frac{\mathrm{e}^{-c_0\pi^2u}}{u\log y}+\frac{M}{\sqrt{H(u)}}\right\},\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}M&:=\int_{\pi/\log y}^{2}\frac{K(x,y;\tau)}{(\tau\log y)^\kappa}\,\mathrm{d}\tau\\&\ll\frac{1}{\log y}\int_{\pi}^{2\log y}\left(\frac{\xi_\kappa(u)}{t}+\frac{R_b(y)}{\log y}\right)\frac{\mathrm{d}t}{t^\kappa}\\&\ll\frac{\xi_\kappa(u)}{\log y}+\frac{(\log_2 y)^{\delta_{\kappa 1}}}{(\log y)^{\kappa_1+1}}R_b(y),\end{aligned}$$

où l'on a posé

$$\kappa_1:=\min(\kappa,1).\tag{3·34}$$

La minoration de (2·5) fournit aisément

$$\frac{(\log_2 y)^{\delta_{\kappa 1}}}{(\log y)^{\kappa_1+1}}R_b(y)\ll\frac{1}{\log y}.$$

Nous avons donc établi que

$$\int_{\pi/\log y}^{2}F(s,y)x^s\big(1-\tfrac12\tau\big)\,\mathrm{d}\tau\ll\frac{x^\alpha F(\alpha,y)\xi_\kappa(u)}{\sqrt{H(u)}\,\log y}\ll\frac{x^\alpha F(\alpha,y)}{\sqrt{u}\,\log y}.$$

Cela achève la démonstration, compte tenu de (3·24). □

Lemme 3.8. *Soient $C > 0$, $\varepsilon > 0$, $\kappa > 0$, $b \in]0, \frac{1}{2}]$, $R \in \mathcal{R}(b;\kappa)$. On a uniformément pour $(x,y) \in J_\varepsilon^*(R)$, $f \in \mathcal{M}_\kappa^*(C;R)$, $1 \leqslant t \leqslant x$, $\alpha = \alpha_\kappa(x,y)$,*

$$\Psi_f(tx,y) \ll t^\alpha x \varrho_\kappa(u)(\log y)^{\kappa-1}. \tag{3·35}$$

Démonstration. On peut manifestement supposer y assez grand et $\varepsilon < 1$. Alors $(tx,y) \in J_{\varepsilon/2}^*(R)$. Par (3·26), on peut donc écrire

$$\Psi_f(tx,y) \ll tx\varrho_\kappa(u+v)(\log y)^{\kappa-1}$$

avec $v := (\log t)/\log y$. Or, il résulte de (3·25) que

$$\varrho_\kappa(u) \asymp \frac{1}{\sqrt{u}} \exp\left\{ - \int_\kappa^u \xi_\kappa(w)\,\mathrm{d}w \right\} \qquad (u \geqslant 1).$$

On a donc

$$\varrho_\kappa(u+v) \ll \varrho_\kappa(u) \exp\left\{ - \int_u^{u+v} \xi_\kappa(w)\,\mathrm{d}w \right\} \ll \varrho_\kappa(u)\mathrm{e}^{-v\xi_\kappa(u)} = \varrho_\kappa(u)t^{\alpha-1}.$$

Cela achève la démonstration. □

Lemme 3.9. *Soient $C > 0$, $\varepsilon > 0$, $\kappa > 0$, $b \in]0, \frac{1}{2}]$, $R \in \mathcal{R}(b;\kappa)$. On a uniformément pour $(x,y) \in J_\varepsilon^*(R)$, $f \in \mathcal{M}_\kappa^*(C;R)$, $\alpha = \alpha_\kappa(x,y)$,*

$$f(p) \ll p^\alpha \qquad (2 \leqslant p \leqslant y). \tag{3·36}$$

De plus, il existe une constante $y_0 = y_0(A,C,\varepsilon,\kappa,\eta,R)$ telle que l'on ait, pour y assez grand,

$$f(p) \leqslant \tfrac{1}{2}p^\alpha \qquad (y_0 \leqslant p \leqslant y). \tag{3·37}$$

Démonstration. On a d'après (3·7)

$$f(p)/p^\alpha \ll \mathrm{e}^{\vartheta(\log p)}$$

avec $\vartheta(v) := (1-\alpha_\kappa)v - \log v - \varphi(v)$. L'hypothèse de décroissance de φ' implique donc que ϑ est convexe pour $v > 0$. On en déduit que pour chaque y_0 fixé, y assez grand relativement à y_0, et $(x,y) \in J_\varepsilon^*(R)$,

$$\frac{f(p)}{p^{\alpha_\kappa}} \ll \frac{y_0^{1-\alpha_\kappa}}{R(y_0)\log y_0} + \frac{y^{1-\alpha_\kappa}}{R(y)\log y} \ll \frac{1}{R(y_0)\log y_0} \qquad (y_0 \leqslant p \leqslant y),$$

où les constantes implicites sont absolues. Cela implique (3·36) en choisissant $y_0 = 2$ et (3·37) en choisissant y_0 assez grand. □

Le lemme suivant, dont l'idée de base remonte à Landau [27], permet d'affiner l'emploi de la formule de Perron lorsque l'intégrale est prise sur un segment vertical court. On pose

$$h(z) := \begin{cases} 0 & \text{si } z > 1, \\ \frac{1}{2} & \text{si } z = 1, \\ 1 & \text{si } 0 < z < 1. \end{cases}$$

Lemme 3.10. *Pour tout nombre réel $T > 0$ fixé, il existe des constantes réelles a_j $(1 \leqslant j \leqslant 5)$ telles que, posant*

$$w_T(s) := \frac{1}{s} + \sum_{1 \leqslant j \leqslant 5} \frac{a_j}{s - j}, \quad g_T(z) := h(z)\Big\{1 + \sum_{1 \leqslant j \leqslant 5} a_j z^j\Big\} \quad (z > 0),$$

on ait d'une part

$$\sum_{1 \leqslant j \leqslant 5} a_j/j = 0 \tag{3·38}$$

et d'autre part, uniformément pour $z > 0$, $c > 0$,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-c-iT}^{-c+iT} w_T(s) z^s \, \mathrm{d}s = g_T(z) + O\left(\frac{z^{-c}}{1 + (\log z)^2} + \frac{c^2 z^{-c}}{1 + |\log z|}\right). \tag{3·39}$$

Démonstration. Lorsque $|\log z| \leqslant 1$, l'estimation requise résulte de la formule classique (cf., par exemple, [43], § II.2.1)

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-c-iT}^{-c+iT} \frac{z^s}{s} \, \mathrm{d}s = h(z) + O\Big(\frac{z^{-c}}{1 + T|\log z|}\Big),$$

valable uniformément pour $z > 0$, $c > 0$, $T \gg 1$.

Nous considérons dans la suite le cas $|\log z| > 1$. Nous choisissons les a_j de sorte que l'on ait, outre (3·38), $w_T(\pm iT) = 0$, $w_T'(\pm iT) = 0$. C'est toujours possible : on vérifie en effet que le déterminant du système linéaire dont les a_j sont les solutions vaut

$$\frac{-192T^8}{5(1 + T^2)^2(4 + T^2)^2(9 + T^2)^2(16 + T^2)^2(25 + T^2)^2} \neq 0.$$

De plus, les a_j sont bien réels puisque les conditions imposées sont invariantes par conjugaison.(9) Une intégration par parties fournit alors

$$\int_{-c-iT}^{-c+iT} w_T(s) z^s \, \mathrm{d}s = -\int_{-c-iT}^{-c+iT} w_T'(s) \frac{z^s}{\log z} \, \mathrm{d}s + O\Big(\frac{z^{-c} W}{|\log z|}\Big)$$

avec

$$W := |w_T(-c + iT)| + |w_T(-c - iT)| \ll c^2,$$

puisque $w_T''(s)$ est bornée sur les segments $[-c \pm iT, \pm iT]$.

9. Une résolution par calcul formel fournit en fait $a_j = (-1)^{j-1} b_j (j^2 + T^2)^2/(12T^4)$ $(1 \leqslant j \leqslant 5)$ avec $(b_1, \dots, b_5) = (77, 428, 702, 488, 125)$.

Nous déplaçons alors, dans la dernière intégrale en s, l'abscisse du segment vertical d'intégration à l'infini, vers la droite ou vers la gauche selon que $z < 1/\mathrm{e}$ ou $z > \mathrm{e}$, et nous appliquons le théorème des résidus. L'intégrale sur le contour déplacé tend vers 0 dans les deux cas, la contribution des résidus vaut exactement $g_T(z)$, et celle des demi-droites horizontales est $\ll z^{-c}/(\log z)^2$. On peut donc écrire

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{-c-iT}^{-c+iT} w_T'(s)\frac{z^s}{\log z}\,\mathrm{d}s = g_T(z) + O\Big(\frac{z^{-c}}{(\log z)^2}\Big).$$

Cela implique bien (3·39). □

4. Démonstration du Théorème 2.1

Nous dégageons les principales étapes de la démonstration sous forme d'énoncés distincts.

Proposition 4.1. *Soient $C > 0$, $\varepsilon > 0$, $\kappa > 0$, $b \in]0, \frac{1}{2}]$, $R \in \mathcal{R}(b;\kappa)$. On a uniformément pour $(x, y) \in J_\varepsilon^*(R)$, $f \in \mathcal{M}_\kappa^*(C; R)$,*

$$\Psi_f(x,y) = \frac{\kappa x}{\log x}\sum_{\substack{x/y<m\leqslant x\\ P(m)\leqslant y}}\frac{f(m)}{m} + O\big(x\varrho_\kappa(u)(\log y)^{\kappa-1}E_1(x,y)\big), \tag{4·1}$$

où

$$E_1(x,y) := \frac{\xi_\kappa(u)}{\log y} + \frac{1}{(\log y)^\kappa} + \frac{R_b(y)}{\log y}.$$

Démonstration. Suivant la méthode de Hildebrand [20], nous évaluons de deux manières la fonction sommatoire de $f(n)\log n$ sur $S(x, y)$.

On a d'une part, par sommation d'Abel,

$$\sum_{n\in S(x,y)} f(n)\log n = \Psi_f(x,y)\log x - \int_1^x \frac{\Psi_f(t,y)}{t}\,\mathrm{d}t. \tag{4·2}$$

On déduit de (3·26) et (3·27) que

$$\begin{aligned}\int_1^x \frac{\Psi_f(t,y)}{t}\,\mathrm{d}t &\ll \int_1^y (\log 2t)^{\kappa-1}\,\mathrm{d}t + x(\log y)^\kappa\int_0^{u-1}\varrho_\kappa(u-v)y^{-v}\,\mathrm{d}v\\ &\ll y(\log y)^{\kappa-1} + x(\log y)^\kappa\varrho_\kappa(u)\int_0^u \mathrm{e}^{v\xi_\kappa(u)}y^{-v}\,\mathrm{d}v\\ &\ll x(\log y)^{\kappa-1}\varrho_\kappa(u).\end{aligned} \tag{4·3}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}\sum_{n\in S(x,y)} f(n)\log n &= \sum_{\substack{mp^\nu\in S(x,y)\\ p\nmid m}} f(m)\frac{f(p)^\nu}{\nu!}\log p^\nu\\ &= \sum_{mp\in S(x,y)} f(m)f(p)\log p + O(S_1+S_2),\end{aligned} \tag{4·4}$$

avec

$$S_1 := \sum_{\substack{mp\in S(x,y)\\ p\,|\,m}} f(m)f(p)\log p, \qquad S_2 := \sum_{\substack{mp^\nu\in S(x,y)\\ p\nmid m,\,\nu\geqslant 2}} f(m)\frac{f(p)^\nu}{\nu!}\log p^\nu.$$

En explicitant, dans la sommation de S_1, la puissance de p divisant exactement m, on voit facilement que

$$\max(S_1,S_2)\leqslant S := \sum_{\substack{mp^\nu\in S(x,y)\\ \nu\geqslant 2}} f(m)\frac{f(p)^\nu}{\nu!}\log p^\nu.$$

Nous allons montrer que

$$S \ll xu\varrho_\kappa(u)(\log y)^{\kappa-\kappa_1}, \tag{4·5}$$

où κ_1 est défini par (3·34). Compte tenu de (4·2), (4·3) et (4·4), cela fournira

$$\Psi_f(x,y)=\frac{1}{\log x}\sum_{mp\in S(x,y)} f(m)f(p)\log p + O\bigg(\frac{x\varrho_\kappa(u)(\log y)^{\kappa-1}}{(\log y)^{\kappa_1}}\bigg). \tag{4·6}$$

Pour établir (4·5), nous observons d'abord que

$$S\leqslant \sum_{\substack{p\leqslant y,\nu\geqslant 2\\ p^\nu\leqslant x}} \frac{f(p)^\nu\log p^\nu}{\nu!}\Psi_f(x/p^\nu,y).$$

Considérons d'abord le cas $\kappa\geqslant 1$. Nous déduisons alors de (3·26), (3·27), (3·36) et (3·8) que

$$\begin{aligned}
S &\ll x(\log y)^{\kappa-1}\sum_{\substack{p\leqslant y,\nu\geqslant 2\\ p^\nu\leqslant x}} \frac{f(p)^\nu\log p^\nu}{p^\nu\nu!}\varrho_\kappa\Big(u-\frac{\nu\log p}{\log y}\Big)\\
&\ll x\varrho_\kappa(u)(\log y)^{\kappa-1}\sum_{p\leqslant y,\nu\geqslant 2}\frac{f(p)^\nu\log p^\nu}{p^{\alpha\nu}\nu!}\\
&\ll x\varrho_\kappa(u)(\log y)^{\kappa-1}\sum_{p\leqslant y}\frac{f(p)\log p}{p^\alpha}\Big\{\mathrm{e}^{f(p)/p^\alpha}-1\Big\}\\
&\ll x\varrho_\kappa(u)(\log y)^{\kappa-1}\sum_{p\leqslant y}\frac{f(p)^2\log p}{p^{2\alpha}}\\
&\ll xu\varrho_\kappa(u)(\log y)^{\kappa-1}.
\end{aligned}$$

Si $0 < \kappa < 1$, la majoration précédente doit être augmentée d'une quantité $O(S^*)$ avec

$$S^* := x \sum_{\substack{p\leqslant y, \nu\geqslant 2\\ x/\sqrt{y}<p^\nu\leqslant x}} \frac{f(p)^\nu \log p^\nu}{p^\nu \nu!}\{\log(2x/p^\nu)\}^{\kappa-1}.$$

On a

$$\frac{x}{p^\nu} \leqslant \frac{x^\alpha}{p^{\nu\alpha}}\mathrm{e}^{\xi_\kappa(u)/2} \ll \frac{ux^\alpha}{p^{\nu\alpha}}$$

pour $1 \leqslant x/p^\nu \leqslant \sqrt{y}$. Nous obtenons donc, sous l'hypothèse $(x,y)\in J_\varepsilon^*(R)$,

$$\begin{aligned} S^* &\ll ux^\alpha \sum_{\substack{p\leqslant y, \nu\geqslant 2\\ x/\sqrt{y}<p^\nu\leqslant x}} \frac{f(p)^\nu \log p^\nu}{p^{\alpha\nu}\nu!}\\ &\ll u\mathrm{e}^{-u\xi_\kappa(u)}x\sum_{p\leqslant y}\frac{f(p)^2\log p}{p^{2\alpha}}\\ &\ll u\mathrm{e}^{-u\xi_\kappa(u)}x\Big\{1+\frac{u^2\xi_\kappa(u)}{R(y^b)}\Big\} \ll \varrho_\kappa(u)x, \end{aligned}$$

où nous avons fait appel à (3·8) et (3·25).

Nous avons donc établi (4·6) sous les hypothèses de l'énoncé.

Nous allons à présent évaluer la somme double de (4·6). Nous écrivons à cette fin

$$\sum_{mp\in S(x,y)} f(m)f(p)\log p = U_1 + U_2, \tag{4·7}$$

avec

$$U_1 := N(y)\sum_{m\in S(x/y,y)} f(m), \qquad U_2 := \sum_{\substack{x/y<m\leqslant x/2\\ P(m)\leqslant y}} f(m)N(x/m).$$

Par (2·1), (3·26) et (3·27), on a, lorsque $x\geqslant y^2$,

$$U_1 \ll x\varrho_\kappa(u-1)(\log y)^{\kappa-1} \ll x\varrho_\kappa(u)u\xi_\kappa(u)(\log y)^{\kappa-1},$$

alors que $U_1 \ll x$ si $y\leqslant x\leqslant y^2$. On a donc dans tous les cas

$$U_1 \ll x\varrho_\kappa(u)\xi_\kappa(u)u(\log y)^{\kappa-1} + x\varrho_\kappa(u)(\log y)^{\kappa-\kappa_1}. \tag{4·8}$$

De même,

$$U_2 = \kappa x \sum_{\substack{x/y<m\leqslant x/2\\ P(m)\leqslant y}} \frac{f(m)}{m} + U_3, \tag{4·9}$$

avec

$$
\begin{aligned}
U_3 &\ll \sum_{\substack{x/y<m\leqslant x/2\\ P(m)\leqslant y}} \frac{xf(m)}{mR(x/m)} = \int_2^y \frac{t}{R(t)}\,\mathrm{d}\Psi_f(x/t,y)\\
&\ll \frac{y\Psi_f(x/y,y)}{R(y)} + \Psi_f(x,y) + \int_2^y \frac{\Psi_f(x/t,y)}{R(t)}|1-\varphi'(\log t)|\,\mathrm{d}t\\
&\ll \frac{y\Psi_f(x/y,y)}{R(y)} + \Psi_f(x,y) + \int_2^y \frac{\Psi_f(x/t,y)}{R(t)}\,\mathrm{d}t,
\end{aligned}
\tag{4·10}
$$

puisque φ' est bornée. Lorsque $x>y^2$ ou $\kappa\geqslant 1$, il suit

$$
\begin{aligned}
U_3 &\ll x(\log y)^{\kappa-1}\Big\{\varrho_\kappa(u) + \int_2^y \varrho_\kappa\Big(u-\frac{\log t}{\log y}\Big)\frac{\mathrm{d}t}{tR(t)}\Big\}\\
&\ll x(\log y)^{\kappa-1}\varrho_\kappa(u)\Big\{1+\int_2^y \frac{\mathrm{d}t}{t^{\alpha_\kappa}R(t)}\Big\}\\
&\ll x(\log y)^{\kappa-1}\varrho_\kappa(u)\Big\{R_b(y)+\frac{u\log y}{R(y^b)}\Big\},
\end{aligned}
\tag{4·11}
$$

où nous avons fait appel à (3·27) et à (3·4). Lorsque $0<\kappa<1$ et $y\leqslant x\leqslant y^2$, nous avons cependant par (4·10) et (3·26)

$$
\begin{aligned}
U_3 &\ll x(\log x)^{\kappa-1} + x\int_2^x \frac{\{\log(x/t)\}^{\kappa-1}}{tR(t)}\,\mathrm{d}t\\
&\ll x(\log x)^{\kappa-1} + x\int_2^{\sqrt{x}} \frac{(\log x)^{\kappa-1}}{tR(t)}\,\mathrm{d}t + x\int_{\sqrt{x}}^x \frac{(\log x/t)^{\kappa-1}}{tR\big(\sqrt{x}\,\big)}\,\mathrm{d}t\\
&\ll x(\log y)^{\kappa-1}\Big\{R_b(y)+\frac{u\log y}{R\big(\sqrt{y}\,\big)}\Big\}.
\end{aligned}
$$

Comme $b\leqslant\frac12$ et R est croissante, cela montre que (4·11) est toujours valable.

Insérons cette estimation dans (4·9) puis reportons (4·8) et (4·7) dans (4·6). Nous obtenons bien (4·1). □

Nous introduisons à présent les fonctions

$$
\lambda_\kappa(u) := \mathrm{e}^{-\gamma\kappa}\int_u^\infty \varrho_\kappa(v)\,\mathrm{d}v, \qquad j_\kappa(u) := 1-\lambda_\kappa(u) = \mathrm{e}^{-\gamma\kappa}\int_0^u \varrho_\kappa(v)\,\mathrm{d}v.
$$

Nous notons que

$$
\lambda_\kappa(u) = \frac{\mathrm{e}^{-\gamma\kappa}\varrho_\kappa(u)}{\xi_\kappa(u)}\Big\{1+O\Big(\frac{1}{u}\Big)\Big\} \qquad (u\geqslant 1).
\tag{4·12}
$$

Cela résulte, par exemple, du théorème 1 de [23]. Une preuve alternative consiste à appliquer le corollaire III.5.8.3 de [43] dans le cas $\kappa=1$ et à remarquer que la démonstration peut être étendue sans difficulté au cas général.

Posant

$$E_0(x,y) := \frac{\xi_\kappa(u)}{\log y} + \frac{1}{(\log y)^\kappa}, \tag{4·13}$$

nous aurons à plusieurs reprises l'occasion d'utiliser la majoration, uniforme pour $f \in \mathcal{M}_\kappa^*$,

$$\Psi_f(x,y)/x \ll \lambda_\kappa(u)(\log y)^\kappa E_0(x,y) \qquad (y \geqslant 2,\ 1 \leqslant x \leqslant Y_\varepsilon^*) \tag{4·14}$$

qui résulte de (3·26) et (4·12).

Nous posons également, avec les notations du Lemme 3.10,

$$q(s) = (s-1)w_{1/2}(s-1) = 1 + (s-1)\sum_{1\leqslant j\leqslant 5} \frac{a_j}{s-j-1}. \tag{4·15}$$

On note que q est holomorphe pour $|s-1| < 1$ et qu'elle est bornée ainsi que toutes ses dérivées pour $|s-1| \leqslant \frac{1}{2}$. Il résulte de plus de la condition (3·38) que

$$q'(1) = 0. \tag{4·16}$$

Proposition 4.2. *Soient* $C > 0$, $\varepsilon > 0$, $\kappa > 0$, $b \in]0, \frac{1}{2}]$, $R \in \mathcal{R}(b;\kappa)$. *On a uniformément pour* $y \geqslant 2$, $1 \leqslant x \leqslant Y_\varepsilon^*$, $f \in \mathcal{M}_\kappa^*(C;R)$, $\alpha := \alpha_\kappa(x,y)$,

(4·17)

$$\sum_{\substack{n>x\\ P(n)\leqslant y}} \frac{f(n)}{n} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i/2}^{\alpha+i/2} F(s,y)q(s)\frac{x^{s-1}}{s-1}\,\mathrm{d}s + O\big(\lambda_\kappa(u)(\log y)^\kappa E_0(x,y)\big),$$

où $E_0(x,y)$ *est défini en* (4·13).

Démonstration. Nous notons d'emblée que la condition $x \leqslant Y_\varepsilon^*$ implique, compte tenu de (2·5),

$$\frac{\xi_\kappa(u)^2 \log_2(x+y)}{(\log y)^2} \ll 1. \tag{4·18}$$

Nous aurons plusieurs fois l'occasion d'employer cette estimation.

Nous supposons également dans toute la suite que $x > 1$, le cas $x = 1$ en découlant trivialement par passage à la limite.

Utilisons la formule de Perron tronquée (3·39) avec $T := \frac{1}{2}$, $c := 1-\alpha$, $z := x/n$ pour $P(n) \leqslant y$, et sommons sur n après multiplication par $f(n)/n$. Nous obtenons, sous les conditions indiquées,

$$\sum_{\substack{n>x\\ P(n)\leqslant y}} \frac{f(n)}{n} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i/2}^{\alpha+i/2} F(s,y)q(s)\frac{x^{s-1}}{s-1}\,\mathrm{d}s + O\left(\frac{\xi_\kappa(u)^2}{(\log y)^2}W_1 + W_2 + W_3\right)$$

avec

$$\begin{aligned}W_1 &:= \sum_{P(n)\leqslant y} \frac{x^{\alpha-1}f(n)}{n^\alpha\{1+|\log(x/n)|\}},\\ W_2 &:= \sum_{P(n)\leqslant y} \frac{x^{\alpha-1}f(n)}{n^\alpha\{1+|\log(x/n)|\}^2},\\ W_3 &:= x\sum_{\substack{n>x\\ P(n)\leqslant y}} \frac{f(n)}{n^2}.\end{aligned}$$

Pour $j=1$ ou 2, nous décomposons la somme W_j sous la forme

$$W_j = W_{j1}+W_{j2}+W_{j3},$$

où W_{j1}, W_{j2}, W_{j3} correspondent respectivement aux conditions de sommation supplémentaires $n\leqslant \frac12 x$, $\frac12 x<n\leqslant\frac32 x$ et $n>\frac32 x$. On a d'après (3·35)

$$W_{j2}\ll \frac{\Psi_f(3x/2,y)}{x}\ll \lambda_\kappa(u)(\log y)^\kappa E_0(x,y)\quad (j=1,2),$$

d'où

$$\frac{\xi_\kappa(u)^2}{(\log y)^2}W_{12}+W_{22}\ll \lambda_\kappa(u)(\log y)^\kappa E_0(x,y).$$

Nous utilisons également (3·26) pour évaluer W_{j1} et W_{j3}. On a ainsi, pour $j=1$ ou 2,

$$\begin{aligned}W_{j1} &\ll \frac1x\sum_{n\in S(x/2,y)} f(n)\int_1^{x/n}\frac{t^{\alpha-1}}{(\log 2t)^j}\,\mathrm{d}t\\ &\ll \frac1x\int_1^x \Psi_f\Big(\frac xt,y\Big)\frac{t^{\alpha-1}}{(\log 2t)^j}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Si $x\leqslant y$, on obtient, en majorant $t^{\alpha-1}$ par 1,

$$\begin{aligned}\frac{\xi_\kappa(u)^2}{(\log y)^2}W_{11}+W_{21} &\ll \frac{1}{\log y}\int_1^x\frac{(\log 2x/t)^{\kappa-1}}{t\log 2t}\,\mathrm{d}t+\int_1^x\frac{(\log 2x/t)^{\kappa-1}}{t(\log 2t)^2}\,\mathrm{d}t\\ &\ll (\log 2x)^{\kappa-1}\ll \lambda_\kappa(u)(\log y)^\kappa E_0(x,y).\end{aligned}$$

Cette majoration est bien compatible avec (4·17). Si $x>y$, on a

$$\begin{aligned}W_{j1} &\ll (\log y)^{\kappa-1}\int_1^{x/y}\frac{t^{\alpha-2}}{(\log 2t)^j}\varrho_\kappa\Big(u-\frac{\log t}{\log y}\Big)\,\mathrm{d}t+\int_{x/y}^x\frac{t^{\alpha-2}}{(\log 2t)^j}\Big(\log\frac{2x}{t}\Big)^{\kappa-1}\mathrm{d}t\\ &\ll (\log y)^{\kappa-1}\varrho_\kappa(u)\int_1^{x/y}\frac{\mathrm{d}t}{t(\log 2t)^j}+x^{\alpha-1}\int_1^y\frac{(\log 2v)^{\kappa-1}}{v^\alpha\log^j(2x/v)}\,\mathrm{d}v\\ &\ll (\log y)^{\kappa-1}\varrho_\kappa(u)\int_1^x\frac{\mathrm{d}t}{t(\log 2t)^j}+\mathrm{e}^{-(u-1)\xi_\kappa(u)}\int_1^y\frac{(\log 2v)^{\kappa-1}}{v\{\log(2x/v)\}^j}\,\mathrm{d}v.\end{aligned}$$

En utilisant (3·25) sous la forme $\mathrm{e}^{-(u-1)\xi_\kappa(u)} \ll \varrho_\kappa(u)$ $(u \geqslant 1)$, nous en déduisons que

$$\begin{aligned}W_{11} &\ll \varrho_\kappa(u)(\log y)^{\kappa-1}\log_2 2x,\\ W_{21} &\ll \varrho_\kappa(u)(\log y)^{\kappa-1}.\end{aligned}$$

Nous obtenons donc finalement, compte tenu de l'hypothèse $x \leqslant Y_\varepsilon^*$,

$$\begin{aligned}\frac{\xi_\kappa(u)^2}{(\log y)^2}W_{11} + W_{21} &\ll \varrho_\kappa(u)(\log y)^{\kappa-1}\Big\{1 + \frac{\xi_\kappa(u)^2\log_2 3x}{(\log y)^2}\Big\}\\ &\ll \lambda_\kappa(u)(\log y)^\kappa E_0(x,y),\end{aligned}$$

ce qui est encore conforme à (4·17).

Semblablement, lorsque $x > \sqrt{y}$, $j = 1, 2$,

$$\begin{aligned}W_{j3} &\ll \frac{1}{x}\sum_{\substack{3x/2<n\leqslant x^2\\ P(n)\leqslant y}} \frac{f(n)x^\alpha}{n^\alpha\{\log(n/x)\}^j} + \frac{x^{\alpha-1}F(\alpha,y)}{(u\log y)^j}\\ &\ll \frac{1}{x}\int_1^{2x}\frac{\Psi_f(tx,y)}{t^{\alpha+1}(\log 2t)^j}\,\mathrm{d}t + \frac{\varrho_\kappa(u)(\log y)^{\kappa-j}}{u^{j-1/2}}\\ &\ll (\log y)^{\kappa-1}\varrho_\kappa(u)\int_1^{2x}\frac{\mathrm{d}t}{t(\log 2t)^j},\end{aligned}$$

où nous avons employé (3·24) et fait appel à (3·35).

Une manipulation analogue est valable dans le cas $x \leqslant \sqrt{y}$. On a

$$\begin{aligned}W_{j3} &\ll \sum_{3x/2<n\leqslant xy}\frac{f(n)}{n\{\log(n/x)\}^j} + \frac{F(\alpha,y)}{(\log y)^j}\\ &\ll \frac{1}{x}\int_{3/2}^{2y}\frac{\Psi_f(tx,y)}{t^2(\log 2t)^j}\,\mathrm{d}t + (\log y)^{\kappa-1}\\ &\ll \int_{3/2}^{2y}\frac{(\log x)^{\kappa-1} + (\log y)^{\kappa-1}}{t(\log 2t)^j}\,\mathrm{d}t + (\log y)^{\kappa-1}\\ &\ll \lambda_\kappa(u)(\log y)^\kappa E_0(x,y)\int_1^{2y}\frac{\mathrm{d}t}{t(\log 2t)^j}.\end{aligned}$$

Il s'ensuit que l'on a dans tous les cas

$$\begin{aligned}\frac{\xi_\kappa(u)^2}{(\log y)^2}W_{13} + W_{23} &\ll \lambda_\kappa(u)(\log y)^\kappa E_0(x,y)\Big\{1 + \frac{\xi_\kappa(u)^2\log_2 y}{(\log y)^2}\Big\}\\ &\ll \lambda_\kappa(u)(\log y)^\kappa E_0(x,y),\end{aligned}$$

ce qui est toujours compatible avec (4·17).

Il reste à montrer que W_3 est au plus de l'ordre de grandeur du terme d'erreur de (4·17). On a

$$\begin{aligned}W_3 &\leqslant x\int_x^{xY_\varepsilon^*}\frac{\mathrm{d}\Psi_f(t,y)}{t^2}+x^{\alpha-1}(Y_\varepsilon^*)^{\alpha-2}F(\alpha,y)\\ &\ll \frac{x\Psi_f(xY_\varepsilon^*,y)}{(xY_\varepsilon^*)^2}+x\int_x^{xY_\varepsilon^*}\frac{\Psi_f(t,y)}{t^3}\,\mathrm{d}t+\mathrm{e}^{-u\xi_\kappa(u)}(\log y)^{\kappa-1}\frac{\sqrt{u+1}\log y}{Y_\varepsilon^*}.\end{aligned}$$

Le premier et le second termes sont certainement $\ll \lambda_\kappa(u)(\log y)^\kappa E_0(x,y)$, en vertu de (4·14). Il en va de même du troisième, grâce à (3·25) et (4·12).

Cela achève la preuve de (4·17). □

La quantité

$$\varepsilon(u,y):=\frac{1}{\log y}\int_{3/2}^{y}\frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha R(t)},\tag{4·19}$$

où $\alpha=\alpha_\kappa(x,y)$, apparaîtra naturellement au cours de la démonstration de la proposition suivante. On a, avec la notation (2·8),

$$\frac{u+1}{R(y)}+\frac{R_1(y)}{\log y}\ll\varepsilon(u,y)\ll\frac{u+1}{R(y^b)}+\frac{R_b(y)}{\log y}\tag{4·20}$$

où la majoration résulte du Lemme 3.2 et la minoration est obtenue en utilisant d'une part la croissance de R et d'autre part le fait que $\alpha\leqslant 1$. En employant le Lemme 3.3 on obtient de plus, pour $y\geqslant 2$, $1\leqslant x\leqslant Y_\varepsilon^*$

$$\varepsilon(u,y)\ll\frac{u+1+\big|\log R(y^b)\big|}{R(y^b)}+\frac{\log_2 y}{\log y}\ll 1/\xi_\kappa(u).\tag{4·21}$$

Proposition 4.3. *Soient $C>0$, $\varepsilon>0$, $\kappa>0$, $b\in]0,\frac12]$, $R\in\mathcal{R}(b;\kappa)$. On a uniformément pour $y\geqslant 2$, $1\leqslant x\leqslant Y_\varepsilon^*$, $f\in\mathcal{M}_\kappa^*(C;R)$, $\alpha:=\alpha_\kappa(x,y)$,*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i/2}^{\alpha+i/2}F(s,y)q(s)\frac{x^{s-1}}{s-1}\,\mathrm{d}s=F(1,y)\lambda_\kappa(u)\Big\{1+O(E_\kappa^*(x,y))\Big\},\tag{4·22}$$

avec

$$E_\kappa^*(x,y):=\frac{\xi_\kappa(u)(u+1)}{R(y^b)}+\frac{\xi_\kappa(u)R_b(y)}{\log y}+\frac{R_b(y)^\kappa}{(\log y)^\kappa}.\tag{4·23}$$

Démonstration. Le résultat étant trivial lorsque y est borné, nous supposons y assez grand dans toute la suite de la démonstration. Nous supposons également $u>0$, le cas $u=0$, soit $x=1$, résultant ensuite d'un passage à la limite.

Un calcul standard permet de montrer que l'on a pour $\sigma > 0$

$$\widehat{\jmath}_\kappa(s) = \mathrm{e}^{-\gamma\kappa}\widehat{\varrho}_\kappa(s)/s = \mathrm{e}^{-\gamma\kappa}\widehat{\varrho}(s)^\kappa/s, \tag{4·24}$$

et nous pouvons utiliser cette formule pour prolonger analytiquement le membre de gauche en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ ayant un seul pôle, simple, en $s = 0$, de résidu 1.

Posons

$$B_y(s) := \{\zeta(s)(s-1)\}^\kappa q(s)F(s,y)/\zeta(s,y)^\kappa.$$

Cette fonction est initialement définie pour $\sigma > 1$, mais nous pouvons la prolonger analytiquement au disque $|s-1| < 1$. D'après le lemme III.5.9.1 de [43], on a pour $1 < x \leqslant Y_\varepsilon^*$, $s = \alpha + i\tau$, $|\tau| \leqslant \frac{1}{2}$, avec la notation (2·14),

$$q(s)\frac{F(s,y)}{s-1} = \mathrm{e}^{\gamma\kappa}(\log y)^{\kappa+1}B_y(s)\widehat{\jmath}_\kappa\big((s-1)\log y\big)\Big\{1 + O\Big(\frac{1}{L_{\varepsilon/2}(y)}\Big)\Big\}. \tag{4·25}$$

Nous pouvons estimer trivialement la contribution du terme d'erreur de (4·25) au membre de gauche de (4·22). Dans le domaine considéré, elle est

$$\ll \frac{x^{\alpha-1}F(\alpha,y)}{(1-\alpha)L_{\varepsilon/2}(y)} \ll \lambda_\kappa(u)(\log y)^{\kappa-2},$$

d'après (3·24), (4·12) et (2·5).

En effectuant dans l'intégrale de (4·22) le changement de variables $s = 1 + w/\log y$ avec $w = -\xi_\kappa(u) + it$, on obtient donc

(4·26)

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}&\int_{\alpha-i/2}^{\alpha+i/2} F(s,y)q(s)\frac{x^{s-1}}{s-1}\,\mathrm{d}s \\ &= \frac{\mathrm{e}^{\gamma\kappa}(\log y)^\kappa}{2\pi}\int_{-\frac{1}{2}\log y}^{\frac{1}{2}\log y} B_y\left(1 + \frac{w}{\log y}\right)\widehat{\jmath}_\kappa(w)\mathrm{e}^{uw}\,\mathrm{d}t + O\left(\lambda_\kappa(u)(\log y)^{\kappa-2}\right).\end{aligned}$$

Posons

$$D_y(s) := \mathrm{e}^{\gamma\kappa}\{B_y(s) - B_y(\alpha)\}.$$

Alors, $D_y(s)$ est holomorphe pour $|s-1| < 1$ et nous allons majorer $|D_y(s)|$ pour $s = \alpha + i\tau$, $|\tau| \leqslant \frac{1}{2}$. Nous avons, pour $s = \alpha + i\tau$, $\tau \in \mathbb{R}$,

$$G(s,y) := F(s,y)/\zeta(s,y)^\kappa = \mathrm{e}^{\mu(s,y)}$$

avec

$$\begin{aligned}\mu(s,y) &:= \sum_{p\leqslant y}\left\{\frac{f(p)}{p^s} + \kappa\log\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)\right\} \\ &= \sum_{p\leqslant y}\frac{f(p)-\kappa}{p^s} + O(1).\end{aligned}$$

Une sommation d'Abel analogue à celle de (3·30) permet de montrer que le terme principal est borné lorsque $\tau \ll 1$, d'où, pour $y \geqslant 2$, $1 < x \leqslant Y_\varepsilon^*$,

$$\mu(s, y) \ll 1 \qquad (s = \alpha + i\tau,\ \tau \ll 1). \tag{4·27}$$

On en déduit que, dans les mêmes conditions,

$$D_y(s) \ll |\tau| + \big|\mu(s, y) - \mu(\alpha, y)\big|.$$

Une nouvelle sommation d'Abel à partir de (2·1) fournit, toujours pour $s = \alpha + i\tau$, $\tau \ll 1$,

$$\mu'(s, y) = \sum_{p \leqslant y} \frac{\{f(p) - \kappa\} \log p}{p^s} + O(1) \ll \int_{3/2}^{y} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha R(t)} = \varepsilon(u, y) \log y\,. \tag{4·28}$$

Nous obtenons donc, pour $1 < x \leqslant Y_\varepsilon^*$, $s = \alpha + i\tau$, $\tau \ll 1$,

$$D_y(s) \ll |\tau| \varepsilon(u, y) \log y. \tag{4·29}$$

Il découle en fait de (4·27) et (4·29) que l'on a dans les mêmes conditions

$$D_y(s) \ll \frac{\tau \varepsilon(u, y) \log y}{1 + |\tau| \varepsilon(u, y) \log y}. \tag{4·30}$$

Nous déduisons également de (4·28) et (4·21) que

$$\begin{aligned} \frac{G(\alpha, y)}{G(1, y)} &= \exp\Big\{O\Big((1 - \alpha)\varepsilon(u, y) \log y\Big)\Big\} \\ &= \exp\big\{O\big(\xi_\kappa(u)\varepsilon(u, y)\big)\big\} \\ &= 1 + O\big(\xi_\kappa(u)\varepsilon(u, y)\big). \end{aligned}$$

Comme on a par ailleurs, d'après la formule de Mertens,

$$G(1, y) = \frac{\mathrm{e}^{-\gamma\kappa} F(1, y)}{(\log y)^\kappa} \bigg\{1 + O\bigg(\frac{1}{L_\varepsilon(y)}\bigg)\bigg\},$$

il s'ensuit que

$$\mathrm{e}^{\gamma\kappa} (\log y)^\kappa B_y(\alpha) = F(1, y)\big\{1 + O\big(\xi_\kappa(u)\varepsilon(u, y)\big)\big\}. \tag{4·31}$$

En reportant les estimations obtenues dans (4·26), nous pouvons écrire à ce stade

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha - i/2}^{\alpha + i/2} F(s, y) q(s) \frac{x^{s-1}}{s - 1} \,\mathrm{d}s \\ &= (\log y)^\kappa \bigg\{\mathrm{e}^{\gamma\kappa} B_y(\alpha) I_1 + I_2 + O\bigg(\frac{\lambda_\kappa(u)}{(\log y)^2}\bigg)\bigg\} \\ &= \big\{1 + O\big(\xi_\kappa(u)\varepsilon(u, y)\big)\big\} F(1, y) I_1 + O\left(\bigg\{|I_2| + \frac{\lambda_\kappa(u)}{(\log y)^2}\bigg\}(\log y)^\kappa\right), \end{aligned} \tag{4·32}$$

avec

$$I_1 := \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac12\log y}^{\frac12\log y} \widehat{\jmath}_\kappa(w)\mathrm{e}^{uw}\,\mathrm{d}t, \tag{4·33}$$

$$I_2 := \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac12\log y}^{\frac12\log y} D_y\Big(1+\frac{w}{\log y}\Big)\widehat{\jmath}_\kappa(w)\mathrm{e}^{uw}\,\mathrm{d}t \tag{4·34}$$

où, par convention, $w=-\xi_\kappa(u)+it$. Nous allons évaluer I_1 et majorer $|I_2|$.

On a pour $s\in\mathbb{C}\smallsetminus]-\infty,0]$

$$\widehat{\varrho}_\kappa(s)=\widehat{\varrho}(s)^\kappa=\frac{1}{s^\kappa}\exp\Big\{\kappa\int_0^\infty\frac{\mathrm{e}^{-s-t}}{s+t}\,\mathrm{d}t\Big\},$$

où le logarithme complexe est pris en détermination principale (voir, par exemple, le lemme III.5.7.1 de [43]). Cela implique, pour $w=-\xi_\kappa(u)+it$, $|t|\gg 1+u\xi_\kappa(u)$,

$$\widehat{\jmath}_\kappa(w)=\frac{\mathrm{e}^{-\gamma\kappa}}{w^{1+\kappa}}\Big\{1+O\Big(\frac{1+u\xi_\kappa(u)}{w}\Big)\Big\}\ll\frac{1}{w^{\kappa+1}}. \tag{4·35}$$

On peut donc étendre l'intégrale de (4·33) à la droite $\Re e\, w=-\xi_\kappa(u)$ tout entière. En déplaçant maintenant cette droite d'intégration vers la droite et en prenant en compte le résidu en $w=0$, nous obtenons, sous l'hypothèse $1<x\leqslant Y_\varepsilon^*$,

$$\begin{aligned} I_1&=1-\frac{1}{2\pi i}\int_{1-i\infty}^{1+i\infty}\widehat{\jmath}_\kappa(w)\mathrm{e}^{uw}\,\mathrm{d}w+O\Big(\frac{\mathrm{e}^{-u\xi_\kappa(u)}}{(\log y)^\kappa}\Big)\\ &=\lambda_\kappa(u)\Big\{1+O\Big(\frac{1}{(\log y)^\kappa}\Big)\Big\}, \end{aligned} \tag{4·36}$$

où nous avons appliqué le théorème d'inversion de Laplace et fait appel à (4·12).

En reportant (4·36) dans (4·32), nous obtenons

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i/2}^{\alpha+i/2}F(s,y)q(s)\frac{x^{s-1}}{s-1}\,\mathrm{d}s\\ &\qquad=\lambda_\kappa(u)F(1,y)\Big\{1+O\Big(\xi_\kappa(u)\varepsilon(u,y)+\frac{1}{(\log y)^\kappa}+\frac{|I_2|}{\lambda_\kappa(u)}\Big)\Big\}. \end{aligned} \tag{4·37}$$

Il reste à estimer I_2. À cette fin, nous posons $T_2:=1+u\xi_\kappa(u)$ et nous désignons par I_{21}, I_{22}, les contributions respectives à l'intégrale de (4·34) des domaines $|t|\leqslant T_2$ et $|t|>T_2$.

D'après le lemme 3.3 de [37], il existe une constante absolue $c_3>0$ telle que l'on ait, pour $w=-\xi_\kappa(u)+it$, $t\in\mathbb{R}$,

$$\widehat{\varrho}_\kappa(w)\ll\begin{cases}\widehat{\varrho}(-\xi_\kappa(u))^\kappa\mathrm{e}^{-c_3ut^2} & (|t|\leqslant\pi),\\ \widehat{\varrho}(-\xi_\kappa(u))^\kappa H(u)^{-c_3} & (|t|>\pi).\end{cases}$$

Compte tenu de (4·24) et (4·29), il s'ensuit que

$$\begin{aligned} I_{21} &\ll \widehat{\varrho}(-\xi_\kappa(u))^\kappa \mathrm{e}^{-u\xi_\kappa(u)}\varepsilon(u,y)\bigg(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{e}^{-c_3ut^2}|t|}{\xi_\kappa(u)}\,\mathrm{d}t + \frac{T_2^2}{H(u)^{c_3}}\bigg) \\ &\ll \frac{\widehat{\varrho}(-\xi_\kappa(u))^\kappa \mathrm{e}^{-u\xi_\kappa(u)}\varepsilon(u,y)}{(u+1)\xi_\kappa(u)} \\ &\ll \frac{\lambda_\kappa(u)\varepsilon(u,y)}{\sqrt{u+1}}, \end{aligned} \tag{4·38}$$

d'après (3·25) et (4·12).

Pour estimer I_{22}, nous distinguons deux cas, selon que $\kappa=1$ ou non.

Lorsque $\kappa\neq 1$, nous faisons appel à (4·35) et (4·30). Il suit

$$\begin{aligned} I_{22} &\ll \mathrm{e}^{-u\xi_\kappa(u)}\varepsilon(u,y)\int_1^{\log y} \frac{t^{-\kappa}\,\mathrm{d}t}{1+\varepsilon(u,y)t} \\ &\ll \mathrm{e}^{-u\xi_\kappa(u)}\varepsilon(u,y)^{\kappa_1} \\ &\ll \lambda_\kappa(u)\mathrm{e}^{-u/2}\varepsilon(u,y)^{\kappa_1}. \end{aligned} \tag{4·39}$$

Lorsque $\kappa=1$, nous écrivons d'abord, en vertu de la formule asymptotique de (4·35),

$$I_{22} = I_{221} + I_{222}$$

avec

$$I_{221} := \frac{-\mathrm{e}^{-u\xi_1(u)-\gamma}}{\pi}\int_{T_2}^{\frac12\log y} \Re e\left\{D_y\left(1+\frac{w}{\log y}\right)\mathrm{e}^{uit}\right\}\frac{\mathrm{d}t}{t^2}, \tag{4·40),}$$

puisque l'on a $D_y(\overline{s}) = \overline{D_y(s)}$ pour $|s-1|<1$, et

$$\begin{aligned} I_{222} &\ll \frac{T_2\varepsilon(u,y)}{\mathrm{e}^{u\xi_1(u)}}\int_{T_2}^{\log y} \frac{t^{-2}\,\mathrm{d}t}{1+\varepsilon(u,y)t} \\ &\ll \lambda_1(u)\mathrm{e}^{-u/2}\varepsilon(u,y). \end{aligned}$$

Il reste à majorer I_{221} et nous procédons différemment selon que l'on a ou non $u>1$. Dans le premier cas, une intégration par parties fournit, compte tenu de (4·28) et (4·29),

$$\begin{aligned} I_{221} &\ll \mathrm{e}^{-u\xi_1(u)}\bigg(\frac{\varepsilon(u,y)}{T_2} + \int_{T_2}^{\frac12\log y}\bigg\{\frac{\big|D_y'\left(1+w/\log y\right)\big|}{t^2\log y} + \frac{\big|D_y\left(1+w/\log y\right)\big|}{t^3}\bigg\}\,\mathrm{d}t\bigg) \\ &\ll \mathrm{e}^{-u\xi_1(u)}\int_{T_2}^{\frac12\log y}\frac{\varepsilon(u,y)}{t^2}\,\mathrm{d}t \ll \lambda_1(u)\mathrm{e}^{-u/2}\varepsilon(u,y), \end{aligned}$$

où nous avons utilisé (4·28) sous la forme

$$D_y'\,(1+w/\log y) \ll \varepsilon(u,y)\log y \tag{4·41}$$

lorsque $w=-\xi_1(u)+it$, $|t|\leqslant \frac12\log y$.

Le traitement du cas $u\leqslant 1$, $\kappa=1$, est assez technique, aussi nous posons

$$\varepsilon=\varepsilon(u,y)$$

dans toute la fin de cette démonstration, afin d'alléger les notations. Nous écrivons, avec $s=\alpha+it/\log y$,

$$\Re e\left\{D_y(s)\mathrm{e}^{iut}\right\}=\Re e\,D_y(s)\cos(ut)-\Im m\,D_y(s)\sin(ut). \tag{4·42}$$

La contribution à l'intégrale de (4·40) du second terme du membre de droite de (4·42) est aisément majorée. On a en effet

$$\begin{aligned}\int_{T_2}^{\frac12\log y} & D_y\left(\alpha+\frac{it}{\log y}\right)\sin(ut)\frac{\mathrm{d}t}{t^2}\\ &=\frac{i}{\log y}\int_{T_2}^{\frac12\log y}\frac{\sin(ut)}{t^2}\int_0^t D_y'\left(\alpha+\frac{iv}{\log y}\right)\mathrm{d}v\,\mathrm{d}t\\ &=\frac{i}{\log y}\int_0^{\frac12\log y}D_y'\left(\alpha+\frac{iv}{\log y}\right)\int_{\max(T_2,v)}^{\frac12\log y}\frac{\sin(ut)}{t^2}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}v.\end{aligned}$$

Nous majorons l'intégrale intérieure en la scindant à $\max(T_2/u,v)$, la première partie étant estimée en utilisant l'inégalité $|\sin(ut)|\leqslant ut$ et la seconde en faisant appel à la seconde formule de la moyenne. Nous obtenons que cette fonction de v est

$$\ll\begin{cases}u\log(3/uv)+u/(1+u^2v^2) & \text{si } uv\leqslant T_2,\\ u/(1+u^2v^2) & \text{si } uv>T_2.\end{cases}$$

En reportant cette estimation dans notre majoration et en tenant compte de (4·41), nous obtenons bien

$$\int_{T_2}^{\frac12\log y}D_y\left(\alpha+\frac{it}{\log y}\right)\sin(ut)\frac{\mathrm{d}t}{t^2}\ll\varepsilon. \tag{4·43}$$

Nous allons montrer que

$$\int_{T_2}^{\frac12\log y}\left|\Re e\,D_y\left(\alpha+\frac{it}{\log y}\right)\right|\frac{\mathrm{d}t}{t^2}\ll\varepsilon. \tag{4·44}$$

Cela impliquera que (4·39) est valable également pour $\kappa=1$, nous obtiendrons (4·22) en reportant cette estimation et (4·38) dans (4·37). L'expression (4·23) résultera ensuite de la majoration de (4·20).

On a, pour $s = \alpha + it/\log y$, et en posant $M(s) := (s-1)\zeta(s)q(s)$,[10]

$$D_y(s) = M(\alpha)\mathrm{e}^{\gamma+\mu(\alpha,y)}\Big\{\frac{M(s)}{M(\alpha)}\mathrm{e}^{\mu(s,y)-\mu(\alpha,y)} - 1\Big\}.$$

On a $M(1) = 1$ et $M'(1) = \gamma$, d'après (4·16). Il s'ensuit que

$$M'(\alpha)/M(\alpha) = \gamma + O\left(1/\log y\right),$$

et

$$\frac{M(s)}{M(\alpha)} = 1 + \frac{i\gamma t}{\log y} + O\left(\frac{t^2}{(\log y)^2}\right) \qquad (1 \leqslant t \leqslant \tfrac{1}{2}\log y),$$

d'où

$$\left|\frac{M(s)}{M(\alpha)}\right| = 1 + O\left(\frac{t^2}{(\log y)^2}\right) \qquad (1 \leqslant t \leqslant \tfrac{1}{2}\log y).$$

En employant la relation

$$\Re e\left\{w\mathrm{e}^z - 1\right\} \ll |\Re e\, z| + |\Im m\, z|^2 + \big||w|-1\big| + |\Im m\, w|^2$$

valable pour tous nombres complexes z, w tel que $|z| \asymp 1$, $|w| \asymp 1$, nous obtenons donc donc, grâce à (4·28)

$$\big|\Re e\, D_y(s)\big| \ll \big|\Re e\left\{\mu(\alpha,y) - \mu(s,y)\right\}\big| + \big|\Im m\, \mu(s,y)\big|^2 + O\left(\frac{t^2}{(\log y)^2}\right).$$

La contribution du terme d'erreur à l'intégrale (4·44) est clairement de la taille requise. Nous allons maintenant montrer qu'il en va de même des deux autres termes. À cette fin, nous remarquons d'abord que l'erreur commise en y remplaçant $\mu(s,y)$ par

$$\mu_1(s,y) := \sum_{p\leqslant y} \frac{f(p)-1}{p^s}$$

est trivialement $\ll t^2/(\log y)^2$. Ensuite, nous posons

$$r(t) := \mu_1(\alpha,y) - \Re e\, \mu_1(s,y), \qquad i(t) := \Im m\, \mu_1(s,y).$$

On a, avec la notation (3·16), pour $1 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}\log y$,

$$\begin{aligned} r'(t) &= \frac{1}{\log y}\int_{2-}^{y} \sin\Big(\frac{t\log v}{\log y}\Big)\frac{\mathrm{d}Q(v)}{v^\alpha} \\ &= \frac{Q(y)\sin t}{y^\alpha \log y} + \frac{1}{\log y}\int_2^y \frac{Q(v)}{v^{\alpha+1}}\Big\{\alpha\sin\Big(\frac{t\log v}{\log y}\Big) - \frac{t}{\log y}\cos\Big(\frac{t\log v}{\log y}\Big)\Big\}\,\mathrm{d}v \\ &= \frac{Q(y)\sin t}{y^\alpha \log y} + O\bigg(\frac{t}{(\log y)^2}\int_2^{y^{1/t}} \frac{\log v}{v^\alpha R(v)}\,\mathrm{d}v + \frac{1}{\log y}\int_{y^{1/t}}^{y}\frac{\mathrm{d}v}{v^\alpha R(v)}\bigg). \end{aligned}$$

10. Rappelons que nous supposons ici $\kappa = 1$.

Comme $r(1) \ll \varepsilon$ d'après (4·28), on déduit de ce qui précède que

$$\begin{aligned} r(t) &\ll \varepsilon + \int_1^t \frac{\vartheta}{(\log y)^2} \int_2^{y^{1/\vartheta}} \frac{\log v}{v^\alpha R(v)} \,\mathrm{d}v \,\mathrm{d}\vartheta + \int_1^t \frac{1}{\log y} \int_{y^{1/\vartheta}}^y \frac{\mathrm{d}v}{v^\alpha R(v)} \,\mathrm{d}\vartheta \\ &\ll \varepsilon + \frac{t^2}{(\log y)^2} \int_2^{y^{1/t}} \frac{\log v}{v^\alpha R(v)} \,\mathrm{d}v + \int_{y^{1/t}}^y \frac{\mathrm{d}v}{v^\alpha R(v) \log v}. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \int_1^{\frac12 \log y} \frac{|r(t)|}{t^2} \,\mathrm{d}t &\ll \varepsilon + \frac{1}{(\log y)^2} \int_2^y \frac{\log v}{v^\alpha R(v)} \int_2^{(\log y)/\log v} \mathrm{d}t \,\mathrm{d}v \\ &\qquad + \int_2^y \frac{\mathrm{d}v}{v^\alpha R(v)\log v} \int_{(\log y)/\log v}^\infty \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \\ &\ll \varepsilon + \frac{1}{\log y} \int_2^y \frac{\mathrm{d}v}{v^\alpha R(v)} \ll \varepsilon. \end{aligned} \tag{4·45}$$

Semblablement, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} i(t) &= \int_{2-}^y \sin\Big(\frac{t\log v}{\log y}\Big) \frac{\mathrm{d}Q(v)}{v^\alpha \log v} \\ &\ll \frac{|Q(y)|}{y^\alpha \log y} + \int_2^y \frac{1}{v^\alpha R(v) \log v} \Big\{ \frac{t}{\log y} + \Big| \sin\Big(\frac{t \log v}{\log y}\Big)\Big| \Big\} \,\mathrm{d}v \\ &\ll \varepsilon + \frac{t}{\log y} \int_2^{y^{1/t}} \frac{\mathrm{d}v}{v^\alpha R(v)} + \int_{y^{1/t}}^y \frac{\mathrm{d}v}{v^\alpha R(v)\log v}. \end{aligned}$$

Il suffit de majorer la contribution à l'intégrale $\int_1^{(\log y)/2} i(t)^2 \,\mathrm{d}t/t^2$ du terme médian de la dernière majoration : en effet, celle du terme ε est trivialement $\ll \varepsilon^2$ et celle du troisième terme, qui est borné en vertu de l'hypothèse (2·4) de la définition de $\mathcal{R}(b;1)$,[(11)] a déjà été estimée dans (4·45). Or, on a

$$\begin{aligned} \int_1^{\frac12 \log y} \frac{\vartheta^2}{(\log y)^2} \Big(\int_2^{y^{1/\vartheta}} \frac{\mathrm{d}v}{v^\alpha R(v)} \Big)^2 \frac{\mathrm{d}\vartheta}{\vartheta^2} &\ll \frac{\varepsilon}{\log y} \int_1^{\frac12 \log y} \int_2^{y^{1/\vartheta}} \frac{\mathrm{d}v}{v^\alpha R(v)} \,\mathrm{d}\vartheta \\ &\ll \frac{\varepsilon}{\log y} \int_2^y \frac{\mathrm{d}v}{v^\alpha R(v)} \int_1^{(\log y)/\log v} \mathrm{d}\vartheta \\ &\ll \varepsilon \int_2^y \frac{\mathrm{d}v}{v^\alpha R(v) \log v} \ll \varepsilon, \end{aligned}$$

où nous avons de nouveau utilisé l'hypothèse (2·4).

Cela achève la preuve de (4·39) pour $\kappa = 1$ et partant celle de (4·22). □

---

11. Noter que $\alpha = 1 + O(1/\log y)$ implique $v^\alpha \asymp v$ pour $1 \leqslant v \leqslant y$.

Proposition 4.4. *Soient $C > 0$, $\varepsilon > 0$, $\kappa > 0$, $b \in]0, \frac{1}{2}]$, $R \in \mathcal{R}(b;\kappa)$. On a uniformément pour $y \geqslant 2$, $1 \leqslant x \leqslant Y_\varepsilon^*$, $f \in \mathcal{M}_\kappa^*(C;R)$, $\alpha := \alpha_\kappa(x,y)$,*

$$\sum_{\substack{n>x\\ P(n)\leqslant y}} \frac{f(n)}{n} = F(1,y)\lambda_\kappa(u)\Big\{1 + O\left(E_\kappa^*(x,y)\right)\Big\}, \tag{4·46}$$

où $E_\kappa^*(x,y)$ est la quantité définie en (4·23).
Démonstration. La formule annoncée est une conséquence immédiate de (4·17), (4·22) et (4·23). □

Fin de la démonstration du Théorème 2.1.
Il résulte des Propositions 4.1, 4.4, de l'équation

$$\kappa\big\{\lambda_\kappa(u-1) - \lambda_\kappa(u)\big\} = \mathrm{e}^{-\gamma\kappa}\kappa\int_{u-1}^{u} \varrho_\kappa(v)\,\mathrm{d}v = \mathrm{e}^{-\gamma\kappa}u\varrho_\kappa(u) \qquad (u \geqslant 1),$$

et de la majoration

$$\frac{\lambda_\kappa(u-1)}{u\varrho_\kappa(u)} \ll 1 \qquad (u \geqslant 1),$$

que l'on a uniformément pour $f \in \mathcal{M}_\kappa^*(C;R)$, $2 \leqslant y \leqslant x \leqslant Y_\varepsilon$,

$$\Psi_f(x,y) = \mathrm{e}^{-\gamma\kappa}x\varrho_\kappa(u)\frac{F(1,y)}{\log y}\big\{1 + O\big(E_\kappa^*(x,y)\big)\big\}. \tag{4·47}$$

Il est à noter que $E_\kappa^*(x,y)$ est, à y fixé, une fonction croissante de x.

Considérons alors une fonction quelconque $f \in \mathcal{M}_\kappa(A,C,\eta;R)$. On peut écrire $f = f^* * g$ avec $f^* \in \mathcal{M}_\kappa^*(C;R)$,[12] et

$$g(p^\nu) := \sum_{j+k=\nu} (-1)^j f(p^k)f(p)^j/j! \qquad (p \geqslant 2, \nu \geqslant 1).$$

Dans un premier temps, nous établissons les majorations

$$\sum_{\substack{p\leqslant y\\ \nu\geqslant 1}} \frac{|g(p^\nu)|}{p^{\nu\alpha}} \ll 1 \tag{4·48}$$

$$\sum_{\substack{p\leqslant y\\ \nu\geqslant 1}} \frac{|g(p^\nu)|\log p^\nu}{p^{\nu\alpha}} \ll 1 + u^2\xi_\kappa(u)/R(y^b) \tag{4·49}$$

12. Plus précisément, $f^*(p^\nu) := f(p)^\nu/\nu!$ pour tous p, ν.

avec $\alpha := \alpha_\kappa(x,y)$. Les deux estimations étant semblables, nous nous bornons à établir la seconde. On a pour chaque p, puisque $g(p)=0$,

$$\sum_{\nu\geqslant 1}\frac{|g(p^\nu)|\log p^\nu}{p^{\nu\alpha}}\leqslant\sum_{k\geqslant 0}\frac{f(p^k)\log p}{p^{k\alpha}}\sum_{j\geqslant\max(0,2-k)}\frac{f(p)^j(j+k)}{j!p^{j\alpha}}.$$

Désignons par S_k la somme intérieure. On a, compte tenu de (3·37),

$$\begin{aligned}S_0&=(f(p)/p^\alpha)\big\{\mathrm{e}^{f(p)/p^\alpha}-1\big\}\ll f(p)^2/p^{2\alpha},\\ S_1&=\mathrm{e}^{f(p)/p^\alpha}\big(1+f(p)/p^\alpha\big)-1\ll f(p)/p^\alpha,\\ S_k&=\Big(\frac{f(p)}{p^\alpha}+k\Big)\mathrm{e}^{f(p)/p^\alpha}\ll k\qquad(k\geqslant 2).\end{aligned}$$

En faisant appel à l'hypothèse (1·8), on déduit que

$$\sum_{p\leqslant y}\sum_{\nu\geqslant 1}\frac{|g(p^\nu)|\log p^\nu}{p^{\nu\alpha}}\ll 1+\sum_{p\leqslant y}\frac{f(p)^2\log p}{p^{2\alpha}}.$$

L'estimation requise (4·49) découle donc de (3·8) avec $j=1$.

La relation (4·48) implique

$$\sum_{P(m)\leqslant y}\frac{|g(m)|}{m^\alpha}\ll 1 \tag{4·50}$$

d'où l'on déduit, grâce à (4·49),

$$\begin{aligned}\sum_{P(m)\leqslant y}\frac{|g(m)|\log m}{m^\alpha}&\leqslant\sum_{P(m)\leqslant y}\frac{|g(m)|}{m^\alpha}\sum_{\substack{p\leqslant y\\ \nu\geqslant 1}}\frac{|g(p^\nu)|\log p^\nu}{p^{\nu\alpha}}\\ &\ll 1+u^2\xi_\kappa(u)/R(y^b).\end{aligned}\tag{4·51}$$

Posons $z:=y^{1/2\xi_\kappa(u)}$, $F^*(s,y):=\sum_{P(n)\leqslant y}f^*(n)/n^s$, $u_m:=(\log m)/\log y$ $(m\geqslant 1)$. Nous avons, d'après (4·47) appliquée à f^*,

$$\begin{aligned}\Psi_f(x,y)&=\sum_{m\in S(x,y)}g(m)\Psi_{f^*}(x/m,y)\\ &=x\mathrm{e}^{-\gamma\kappa}\frac{F^*(1,y)}{\log y}\sum_{m\leqslant z}\frac{g(m)\varrho_\kappa(u-u_m)}{m}+\sum_{1\leqslant j\leqslant 3}W_j,\end{aligned}\tag{4·52}$$

disons, avec

$$\begin{aligned} W_1 &\ll x(\log y)^{\kappa-1}E^*_\kappa(x,y)\sum_{m\leqslant z}\frac{|g(m)|\varrho_\kappa(u-u_m)}{m},\\ W_2 &\ll x(\log y)^{\kappa-1}\sum_{\substack{z<m\leqslant x/\sqrt{y}\\ P(m)\leqslant y}}\frac{|g(m)|\varrho_\kappa(u-u_m)}{m},\\ W_3 &\ll x\sum_{\substack{x/\sqrt{y}<m\leqslant x\\ P(m)\leqslant y}}\frac{|g(m)|}{m}\Big(\log\frac{2x}{m}\Big)^{\kappa-1}. \end{aligned}$$

D'après (3·27), on a $\varrho_\kappa(u-u_m)\ll\varrho_\kappa(u)$ pour $m\leqslant z$. Nous déduisons donc de (4·50) que

$$W_1\ll x\varrho_\kappa(u)(\log y)^{\kappa-1}E^*_\kappa(x,y). \tag{4·53}$$

En utilisant (3·27) et (4·51), nous obtenons encore

$$\begin{aligned} W_2 &\ll x\varrho_\kappa(u)(\log y)^{\kappa-1}\sum_{P(m)\leqslant y}\frac{|g(m)|\log m}{m^\alpha\log z}\\ &\ll x\varrho_\kappa(u)(\log y)^{\kappa-1}\bigg\{\frac{\xi_\kappa(u)}{\log y}+\frac{u^2\xi_\kappa(u)^2}{R(y^b)\log y}\bigg\}. \end{aligned}$$

La même majoration est valable pour W_3 si $\kappa\geqslant 1$. Dans le cas contraire, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} W_3 &\ll x^\alpha y^{(1-\alpha)/2}\sum_{P(m)\leqslant y}\frac{|g(m)|\log m}{m^\alpha\log x}\\ &\ll\bigg(1+\frac{u^2\xi_\kappa(u)}{R(y^b)}\bigg)\frac{x\mathrm{e}^{-(u-1/2)\xi_\kappa(u)}}{u\log y}\ll\frac{x\varrho_\kappa(u)}{\log y}. \end{aligned}$$

Nous avons donc dans tous les cas

$$W_2+W_3\ll x\varrho_\kappa(u)(\log y)^{\kappa-1}\bigg\{\frac{\xi_\kappa(u)}{\log y}+\frac{1}{(\log y)^\kappa}+\frac{u^2\xi_\kappa(u)^2}{R(y^b)\log y}\bigg\}.$$

Il reste à estimer le terme principal de (4·52). À cette fin, nous observons que l'on a pour tout v, $0\leqslant v\leqslant 1/(2\xi_\kappa(u))$,

$$\varrho_\kappa(u-v)=\varrho_\kappa(u)\big\{1+O\big(v\log(u+1)\big)\big\},$$

puisque $\varrho_\kappa'(u-w) \asymp \varrho_\kappa(u)\log(u+1)$ pour tout $w \in [0, 1/(2\xi_\kappa(u))]$. Il suit

$$\begin{aligned}\sum_{m\leqslant z}\frac{g(m)\varrho_\kappa(u-u_m)}{m} &= \varrho_\kappa(u)\sum_{m\leqslant z}\frac{g(m)}{m} + O\bigg(\frac{\varrho_\kappa(u)\xi_\kappa(u)}{\log y}\sum_{m\leqslant z}\frac{|g(m)|\log m}{m}\bigg)\\ &= \varrho_\kappa(u)\bigg\{\prod_{p\leqslant y}\sum_{\nu\geqslant 0}\frac{g(p^\nu)}{p^\nu} + O\bigg(\sum_{P(m)\leqslant y}\frac{|g(m)|\log m}{m\log z}\bigg)\bigg\}\\ &= \varrho_\kappa(u)\bigg\{\prod_{p\leqslant y}\sum_{\nu\geqslant 0}\frac{g(p^\nu)}{p^\nu} + O\bigg(\frac{\xi_\kappa(u)}{\log y} + \frac{u^2\xi_\kappa(u)^2}{R(y^b)\log y}\bigg)\bigg\}.\end{aligned}$$

Cela achève la démonstration de (2·11). La seconde assertion de l'énoncé résulte immédiatement du fait que, lorsque $f(p) \ll 1$, le membre de gauche de (4·49) est borné. □

5. Preuve du Théorème 2.4

Désignons par

$$\widehat{F}(v) := \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-vz}\,\mathrm{d}F(z)$$

la transformée de Laplace–Stieltjes bilatérale d'une fonction de répartition F sur $\mathbb{R}$. Le domaine de convergence contient, en toute généralité, une bande verticale $-\alpha \leqslant \Re e\, v \leqslant \beta$ avec $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$.

Le résultat préliminaire suivant est une version adaptée à ce cadre, et ne faisant intervenir que des valeurs réelles de la variable, du théorème de continuité de Lévy — cf., par exemple, Feller [12], th. XIII.1.2. Il est très certainement connu, mais nous n'en avons pas trouvé d'énoncé dans la littérature.

Lemme 5.1. *Soit $\{F_n\}_{n=1}^\infty$ une suite de fonctions de répartition. On suppose qu'il existe $\alpha > 0$ tel que les transformées de Laplace–Stieltjes $\widehat{F}_n(v)$ soient définies pour $|v| < \alpha$. Si la limite $\varphi(v) := \lim_{n\to\infty}\widehat{F}_n(v)$ existe pour $v \in]-\alpha, \alpha[$, alors $\{F_n\}_{n=1}^\infty$ converge faiblement vers une fonction de répartition F et l'on a $\widehat{F}(v) = \varphi(v)$ pour $v \in]-\alpha, \alpha[$.*

Démonstration. D'après un théorème classique de Helly, on peut extraire de $\{F_n\}_{n=1}^\infty$ une sous-suite $\{F_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ qui converge faiblement vers une fonction croissante F à valeurs dans $[0,1]$. On a, pour tout $X > 0$ et tout $\beta \in]0, \alpha[$,

$$1 - \{F_n(X) - F_n(-X)\} \leqslant \mathrm{e}^{-\beta X}\big\{\widehat{F}_n(\beta) + \widehat{F}_n(-\beta)\big\}.$$

En spécialisant $n = n_k$ et en passant à la limite pour $k \to \infty$, on obtient

$$1 - \{F(X) - F(-X)\} \leqslant \mathrm{e}^{-\beta X}\big\{\varphi(\beta) + \varphi(-\beta)\big\}$$

pour chaque point X de continuité de F. Cela montre que F est une fonction de répartition et que $\widehat{F}$ définit un prolongement analytique de φ à la bande verticale

$B_\alpha := \{v \in \mathbb{C} : |\Re e\, v| < \alpha\}$. Il en va de même de toute autre limite faible, disons F^*, d'une sous-suite de $\{F_n\}_{n=1}^\infty$. Le principe du prolongement analytique implique donc que $\widehat{F}$ et $\widehat{F^*}$ coïncident dans B_α et en particulier sur l'axe imaginaire. L'injectivité de la transformation de Fourier permet alors de conclure que $F = F^*$. Cela implique bien la propriété souhaitée. □

Remarque. On peut aussi donner du Lemme 5.1 une preuve plus courte mais plus savante, en se ramenant directement au théorème de continuité de Lévy. En effet, la suite $\{\widehat{F}_n\}_{n=1}^\infty$, considérée comme suite de fonctions holomorphes de la bande verticale B_α, est clairement bornée sur tout compact. Comme elle converge simplement sur le segment réel $]-\alpha, \alpha[$, le théorème de Vitali permet de conclure qu'elle converge uniformément sur tout compact de B_α vers une fonction holomorphe φ, donc en particulier sur l'axe imaginaire. La fonction $t \mapsto \varphi(it)$ étant évidemment continue en 0, la conclusion souhaitée découle du théorème de Lévy.

Fin de la preuve du Théorème 2.4.

Soit Y un paramètre positif. On définit une fonction additive h_Y par

$$h_Y(p^\nu) := \begin{cases} h(p^\nu) & \text{si } p^\nu \leqslant Y \text{ ou } \nu = 1,\ |h(p)| \leqslant H, \\ 0 & \text{si } p^\nu > Y,\ \nu \geqslant 2, \text{ ou } \nu = 1,\ |h(p)| > H. \end{cases}$$

Pour tous $v \in \mathbb{R}$, $z \geqslant 2$, on a, en notant ϑ la fonction de Tchébychev,

$$\begin{aligned} &\sum_{p \leqslant z} \mathrm{e}^{-vh_Y(p)} \log p \\ &\quad= \vartheta(z) + \sum_{\substack{p \leqslant Y \\ |h(p)| > H}} \big(\mathrm{e}^{-vh(p)} - 1\big) \log p + \sum_{\substack{p \leqslant z \\ |h(p)| \leqslant H}} \big(\mathrm{e}^{-vh(p)} - 1\big) \log p \\ &\quad= \vartheta(z) + O_Y(1) - \sum_{\substack{p \leqslant z \\ |h(p)| \leqslant H}} \big\{vh(p) + O_H(v^2 h(p)^2)\big\} \log p \\ &\quad= z + O_{H,v,Y}(z/R(z)). \end{aligned}$$

Comme la série

$$\sum_{p,\,\nu \geqslant 2} \frac{\mathrm{e}^{vh_Y(p^\nu)}}{p^{3\nu/4}} \leqslant \sum_{p^\nu \leqslant Y} \frac{\mathrm{e}^{vh(p^\nu)}}{p^{3\nu/4}} + \sum_{p > Y} \frac{1}{p^{3/4}(p^{3/4} - 1)}$$

est convergente, on en déduit que la fonction multiplicative $n \mapsto \mathrm{e}^{-vh_Y(n)}$ est dans $\mathcal{M}_1(A, C, \frac{1}{4}; R)$ pour des constantes convenables A et C, dépendant de H, v, Y. D'après le Théorème 2.1, on a donc, pour tout nombre réel v fixé,

$$\frac{1}{\Psi(x,y)} \sum_{n \in S(x,y)} \mathrm{e}^{-vh_Y(n)} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{\nu \geqslant 0} \frac{\mathrm{e}^{-vh_Y(p^\nu)}}{p^\nu} + o(1)$$

uniformément lorsque x et y tendent vers l'infini et $(x,y) \in J_\varepsilon(R)$. Par le Lemme 5.1, cela implique l'existence d'une fonction de répartition F_Y telle que, pour chaque nombre réel t en lequel F_Y est continue, on ait

$$D(t; h_Y, x, y) = F_Y(t) + o(1) \tag{5·1}$$

uniformément pour $(x,y) \in J_\varepsilon(R)$.

Nous observons maintenant que $h(n) \neq h_Y(n)$ implique que n est divisible par p^ν avec $\nu \geqslant 2$, $p^\nu > Y$ ou $\nu = 1$, $|h(p)| > H$. La densité supérieure de l'ensemble de tels entiers n n'excède pas

$$\sum_{\substack{p,\, \nu \geqslant 2 \\ p^\nu > Y}} \frac{1}{p^\nu} + \sum_{\substack{p > Y \\ |h(p)| > H}} \frac{1}{p} = o(1) \qquad (Y \to \infty),$$

en vertu de (2·16) et (2·4). En faisant tendre Y vers l'infini dans (5·1), on obtient donc bien l'existence d'une loi limite pour h dans le domaine $J_\varepsilon(R)$. En appliquant ce résultat dans le cas particulier $x = y$, on voit que cette loi coïncide avec la loi limite usuelle de h. Cela complète la démonstration. □

Bibliographie

[1] K. Alladi, Asymptotic estimates for sums involving the Möbius function II, *Trans. Amer. Math. Soc.* **272** (1982), 87–105.

[2] K. Alladi, An Erdős-Kac theorem for integers without large prime factors, *Acta Arith.* **49** (1987), 81–105.

[3] A. Balog & C. Pomerance, The distribution of smooth numbers in arithmetic progressions, *Proc. Amer. Math. Soc.* **115** (1992), 33–43.

[4] R. de la Bretèche & G. Tenenbaum, Sur les lois locales de la répartition du k-ième diviseur d'un entier, *Proc. London Math. Soc.*, (3) **84** (2002), 289–323.

[5] N.G. de Bruijn, On the number of positive integers $\leqslant x$ and free of prime factors $> y$, I, II, *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A* **54** (1951), 50–60 ; **69** (1966), 239–247.

[6] N.G. de Bruijn & J.H. van Lint, Incomplete sums of multiplicative function, I, II, *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A* **67** (1966), 339–347 ; 348–359.

[7] U. Chariev, A generalized problem of numbers with small and large prime divisors (en russe, résumé Tajiki), *Izv. Akad. Nauk Tadzhik. SSR Otdel. Fiz.-Mat. Khim. i Geol. Nauk* **71** (1979), 13–20.

[8] U. Chariev, Asymptotic expansion of the generalized problem of numbers with "small" and "large" prime divisors (en russe), *Izv. Akad. Nauk Tadzhik. SSR Otdel. Fiz.-Mat. Khim. i Geol. Nauk* **74** (1979), 99–101.

[9] J.-M. De Koninck & D. Hensley, Sums taken over $n \leqslant x$ with prime factors $\leqslant y$ of $z^{\Omega(n)}$, and their derivatives with respect to z, *J. Indian Math. Soc. (N.S.)* **42** (1978), 353–365.

[10] K. Dickman, On the frequency of numbers containing prime factors of a certain relative magnitude, *Ark. Math. Astr. Fys.* **22** (1930), 1–14.

[11] A.S. Fainleib, Tauberian theorems and mean values of multiplicative functions (en russe, résumé en anglais), *Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI)* **91** (1979), 145–157.

[12] W. J. Feller, *An introduction to probability theory and its applications*, vol. 2, John Wiley, 1971.

[13] E. Fouvry & G. Tenenbaum, Entiers sans grand facteur premier en progressions arithmétiques, *Proc. London Math. Soc.* (3) **63** (1991), 449–494.

[14] E. Fouvry & G. Tenenbaum, Répartition statistique des entiers sans grand facteur premier dans progressions arithmétiques, *Proc. London Math. Soc.* (3) **72** (1996), 481–514.

[15] A. Granville, Integers, without large prime factors, in arithmetic progressions I, *Acta Arith.* **170** (1993), 255–273.

[16] A. Granville, Integers, without large prime factors, in arithmetic progressions II, *Theory and applications of integers without prime factors* (ed. R.C. Vaughan), *Philos. Trans. Roy. Soc. London* A **345** (1993), 349–362.

[17] H. Halberstam & H.-E. Richert, Mean value theorems for a class of arithmetic functions, *Acta Arith.* **18** (1971), 243–256 ; Add. & Corr., *ibid.* **28** (1975), 107–110.

[18] D. Hensley, The distribution of $\Omega(n)$ among numbers with no large prime factors, in : *Analytic Number Theory and Diophantine Problems* (A. Adolphson and al., eds), Proc. of a Conf. at Oklahoma State University 1984, Birkhäuser, *Progress in Math.* **70** (1987), 247–281.

[19] A. Hildebrand, Integers free of large prime factors and the Riemann hypothesis, *Mathematika* **31** (1984), 258–271.

[20] A. Hildebrand, On the number of positive integers $\leqslant x$ and free of prime factors $> y$, *J. Number Theory* **22** (1986), 289–307.

[21] A. Hildebrand, On the number of prime factors of integers without large prime divisors, *J. Number Theory* **25** (1987), 81–106.

[22] A. Hildebrand & G. Tenenbaum, On integers free of large prime factors, *Trans. Amer. Math. Soc.* **296** (1986), 265–290.

[23] A. Hildebrand & G. Tenenbaum, On a class of difference differential equations arising in number theory, *J. d'Analyse* **61** (1993), 145–179.

[24] A. Hildebrand & G. Tenenbaum, Integers without large prime factors, *J. Théorie des Nombres de Bordeaux* **5** (1993), 265–290.

[25] J.G. Hinz, Eine Erweitherung des nullstellenfreien Bereiches der Heckescheen Zetafunktion und Primideale, *Acta Arith.* **38** (1980), 209–251.

[26] A. Ivić & G. Tenenbaum, Local densities over integers free of large prime factors, *Quart. J. Math. Oxford (2)* **37** (1986), 401–417.

[27] E. Landau, Über die Bedeutung einiger neuen Grenzwertsätze der Herren Hardy und Axer, *Prace matematyczno-fizycne (Warszawa),* **21** (1910), 97-177.

[28] B.V. Levin & A.S. Fainleib, The generalized problem of numbers with small and large prime divisors and its applications (en russe, résumé en anglais), *Dolk. Akad. Nauk. SSSR* **3** (1966), 3–7.

[29] B.V. Levin & A.S. Fainleib, Application of some integral equations to problems in number theory, *Russian Math. Surveys* **22** (1967), 119–204.

[30] B.V. Levin & U. Chariev, Sums of multiplicative functions with respect to numbers with prime divisors from given intervals (en russe), *Dolk. Akad. Nauk. Tadzh. SSSR* **29** (1986), 383–387.

[31] J. H. van Lint & H.-E. Richert, Über die summe $\sum_{n\leqslant x, P(n)\leqslant y}\mu(n)^2/\varphi(n)$, *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A* **67** (1964), 582–587.

[32] P. Moree, On the number of y-smooth natural numbers $\leqslant x$ representable as a sum of two integer squares, *Manuscripta Math.* **80**, n° 2 (1993), 199–211.

[33] M. Naïmi, Les entiers sans facteur carré et certaines généralisations, Thèse de troisième cycle, Université de Tunis, 1987.

[34] M. Naïmi, Les entiers sans facteur carré $\leqslant x$ dont leurs facteurs premiers $\leqslant y$, Groupe de travail en théorie analytique et élémentaire des nombres, 1986–87, 69–76, *Publ. Math. Orsay* 88-01, Univ. Paris XI, Orsay, 1988.

[35] E. Saias, Sur le nombre des entiers sans grand facteur premier, *J. Number Theory* **32** (1989), 78–99.

[36] H. Smida, Sur les puissances de convolution de la fonction de Dickman, *Acta Arith.* **59**, n° 2 (1991), 124–143.

[37] H. Smida, Valeur moyenne des fonctions de Piltz sur les entiers sans grand facteur premier, *Acta Arith.* **63**, n° 1 (1993), 21–50.

[38] J. M. Song, Sums of nonnegative multiplicative functions over integers free of large prime factors I, *Acta Arith.*, **97**, 4 (2001), 329–351.

[39] J. M. Song, Sums of nonnegative multiplicative functions over integers free of large prime factors II, *Acta Arith.*, **102** (2002), 105–129.

[40] E. Wirsing, Das asymptotische Verhalten von Summen über multiplikative Funktionen, *Math. Ann.* **143**, (1961), 75–102.

[41] G. Tenenbaum, La méthode du col en théorie analytique des nombres, *Séminaire de Théorie des Nombres* (C. Goldstein, ed.), Paris 1988–89, Birkhäuser, Progress in Math. Vol. **91**, 221–239.

[42] G. Tenenbaum, Sur un problème d'Erdős et Alladi, *Séminaire de Théorie des Nombres* (C. Goldstein, ed.), Paris 1985–86, Birkhäuser, Progress in Math. Vol. **75**, 411–441.

[43] G. Tenenbaum, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, Cours spécialisés, n° 1, Société Mathématique de France (1995), xv + 457 pp.

[44] G. Tenenbaum, Crible d'Ératosthène et modèle de Kubilius, in : K. Győry, H. Iwaniec, J. Urbanowicz (eds.), *Number Theory in Progress*, Proceedings of the conference in honor of Andrzej Schinzel, Zakopane, Poland 1997, 1099–1129, Walter de Gruyter, Berlin, New York, 1999.

[45] G. Tenenbaum, Note on a paper by Joung Min Song, *Acta Arith.* **97**, 4 (2001), 353–360.

[46] R.C. Vaughan, *The Hardy-Littlewood method*, second edition, Cambridge University Press, 1997.

[47] T.Z. Xuan, The average of $d_k(n)$ over integers free of large prime factors, *Acta Arith.* **55** (1990), 249–260.

[48] T.Z. Xuan, The average of the divisor function over integers free of large prime factors, *Chinese Ann. Math. Ser A* **12** (1991), 28–33.

Institut Élie Cartan
Université Henri Poincaré–Nancy 1
BP 239
54506 Vandœuvre Cedex
France