ENTIERS SANS GRAND FACTEUR PREMIER EN PROGRESSIONS ARITHMETIQUES

E. FOUVRY *et* G. TENENBAUM

[Received 30 April 1990—Revised 30 October 1990]

1. *Introduction*

Désignons par $P(n)$ le plus grand facteur premier d'un entier générique n, avec la convention $P(1) = 1$. L'ensemble

$$S(x, y) := \{n \leqslant x\colon\ P(n) \leqslant y\}$$

a été abondamment étudié dans la littérature et plusieurs travaux très récents (cf. par exemple [**1**, **17–26**, **34**]) ont permis d'affiner notablement notre connaissance de sa structure. La double motivation d'un intérêt intrinsèque manifeste et d'une disponibilité nouvelle de techniques prometteuses porte donc naturellement à réexaminer le problème de la répartition dans les progressions arithmétiques des entiers de $S(x, y)$ (cf. [**9**, **11**, **16**, **28**, **33**] pour les principaux travaux antérieurs concernant cette question).

Conformément à l'usage, nous désignons par $\Psi(x, y)$ le cardinal de $S(x, y)$. Nous posons

$$\Psi(x, y\,; a, q) := \sum_{\substack{n \in S(x, y)\\ n \equiv a (\mathrm{mod}\, q)}} 1. \tag{1.1}$$

Soit $d = (a, q)$. Si $P(d) > y$, la somme précédente est nulle. Dans le cas contraire, elle vaut $\Psi(x/d, y\,; a/d, q/d)$. Nous pouvons donc sans perte de généralité restreindre l'étude au cas $(a, q) = 1$. Sous cette hypothèse, l'approximation naturelle pour (1.1) est

$$\varphi(q)^{-1}\Psi_q(x, y), \tag{1.2}$$

avec

$$\Psi_q(x, y) := \sum_{\substack{n \in S(x, y)\\ (n, q) = 1}} 1.$$

Contrairement au cas des nombres premiers et des suites arithmétiques habituellement considérées dans ce type de problème, $\Psi_q(x, y)$ n'est pas facilement approchable par une fonction simple des données—ici, q et $\Psi(x, y)$. Nous pourrions bien entendu nous fixer pour tâche d'établir une 'bonne répartition' de $S(x, y)$ dans les progressions arithmétiques sans rien connaître du 'terme principal' (1.2). Une telle démarche, quoique sacrifiant à l'attitude moderne qui consiste à ne se préoccuper exclusivement que des termes d'erreur, laisserait l'étude arithmétique par trop incomplète et restreindrait singulièrement le champ des applications (cf. par exemple le théorème 8, *infra*).

Nous avons donc considéré comme un indispensable préalable la détermination d'un assez large domaine de valeurs relatives de x, y, q pour lesquelles le rapport

---

1991 *Mathematics Subject Classification*: 11N25, 11N35.

Proc. London Math. Soc. (3) 63 (1991) 449–494.

$\Psi_q(x, y)/\Psi(x, y)$ possède un comportement simple. Nous posons, ici et dans tout l'article,

$$u := \frac{\log x}{\log y} \quad (x \geqslant y \geqslant 2)$$

et nous notons $\log_k$ la k-ième itérée de la fonction logarithme. Nous obtenons le résultat suivant.

THÉORÈME 1. *Soit ε un nombre réel positif. Sous les conditions*

$$(\mathrm{H}_\varepsilon) \qquad x \geqslant x_0(\varepsilon), \quad \exp\{(\log_2 x)^{\frac{5}{3}+\varepsilon}\} \leqslant y \leqslant x$$

et

$$(\mathrm{Q}_\varepsilon) \qquad \log_2(q+2) \leqslant \left\{\frac{\log y}{\log(u+1)}\right\}^{1-\varepsilon}$$

on a uniformément

$$\Psi_q(x, y) = \frac{\varphi(q)}{q}\Psi(x, y)\left\{1 + O\left(\frac{\log_2(qy)\log_2 x}{\log y}\right)\right\}. \tag{1.3}$$

Il est à noter qu'une limitation évidente pour une formule asymptotique de type (1.3) est

$$\log_2(q+2) \leqslant (1 + o(1))\log y.$$

En effet, $\Psi_q(x, y) = 1$ lorsque $q = \prod_{p \leqslant y} p = e^{y(1+o(1))}$.

Considérons la fonction de crible

$$\theta(x, y, z) := \operatorname{card}\{n \leqslant x\colon\ p \mid n \Rightarrow z < p \leqslant y\}.$$

Cette quantité a été étudiée par Friedlander **[10]** lorsque y et z sont des puissances fixes de x, et des estimations uniformes dans de plus larges domaines de variation font l'objet d'un récent travail de Saias **[35]**. A titre d'application immédiate du théorème 1, nous pouvons énoncer le résultat suivant.

COROLLAIRE 1. *Soit $\varepsilon > 0$. Lorsque x et y satisfont* (H_ε) *et sous la condition*

$$1 \leqslant z \leqslant \exp\left\{\left(\frac{\log y}{\log(1+u)}\right)^{1-\varepsilon}\right\}$$

on a uniformément

$$\theta(x, y, z) \sim \prod_{p \leqslant z}\left(1 - \frac{1}{p}\right)\Psi(x, y) \quad (x \to \infty).$$

La formule d'inversion de Möbius implique, pour tous x, y, $q \geqslant 1$,

$$\Psi_q(x, y) = \sum_{\substack{d \mid q \\ P(d) \leqslant y}} \mu(d)\Psi\left(\frac{x}{d}, y\right). \tag{1.4}$$

On pourrait en déduire une évaluation du membre de gauche grâce aux résultats connus concernant le comportement local de $\Psi(x, y)$ (cf. **[25, 26]**) établis par la méthode du col. Nous avons préféré suivre une autre voie, qui implique une limitation du domaine de validité des estimations en x, y mais nécessite des hypothèses moins restrictives sur q et permet une plus grande précision finale. Cela consiste à utiliser l'estimation récente de Saias [**34**],

$$\Psi(x, y) = \Lambda(x, y)\{1 + O(Y_\varepsilon^{-1})\} \tag{1.5}$$

valable, pour chaque $\varepsilon > 0$, uniformément dans le domaine (H_ε), avec

$$\Lambda(x, y) := \begin{cases} x \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(u - v)\, d([y^v]y^{-v}) & (x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^+), \\ \Lambda(x + 0, y) & (x \in \mathbb{Z}^+) \end{cases} \tag{1.6}$$

et

$$Y_\varepsilon := \exp\{(\log y)^{\frac{3}{5} - \varepsilon}\}. \tag{1.7}$$

Conformément à la tradition, nous désignons par $\rho(v)$ la fonction de Dickman, solution de l'équation différentielle aux différences

$$v\rho'(v) + \rho(v - 1) = 0 \quad (v > 1). \tag{1.8}$$

Il sera agréable par la suite de définir ρ sur $\mathbb{R}$ tout entier comme une fonction continue à droite. Nous posons donc

$$\rho(v) = 0 \ (-\infty < v < 0), \quad \rho(v) = 1 \ (0 \leqslant v \leqslant 1). \tag{1.9}$$

Ainsi $\rho(v)$ est l'unique fonction continue en $v = 1$ satisfaisant (1.8) et (1.9). Elle est de classe C^k sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 1, \ldots, k\}$. Aux points exceptionnels, $\rho^{(k)}$ possède des discontinuités de première espèce. Nous pouvons donc prolonger $\rho^{(k)}(v)$ en une fonction continue à droite sur $\mathbb{R}$.

La fonction $\Lambda(x, y)$ est l'approximation de de Bruijn [**3**] pour $\Psi(x, y)$, mais le domaine (H_ε) étend considérablement celui de [**3**]. Il est en fait identique à celui de la formule de Hildebrand [**22**],

$$\Psi(x, y) = x\rho(u)\left\{1 + O\left(\frac{\log(u + 1)}{\log y}\right)\right\}. \tag{1.10}$$

Cette dernière évaluation est d'ailleurs strictement contenue dans (1.5). Posons en effet, pour $z > 1$, $k \geqslant 0$,

$$\varepsilon_{kj}(z) := \min\left\{1, (k + 1 - j)\frac{\log z}{z}\right\} \quad (0 \leqslant j \leqslant k)$$

et

$$\mathscr{C}_k(z) := \bigcup_{j=0}^{k} [j + \varepsilon_{kj}(z), j + 1] \cup [k + 1, +\infty) \tag{1.11}$$

(noter que $\mathscr{C}_k(z) \supseteq [k + \varepsilon, +\infty)$ pour chaque $\varepsilon > 0$ et z assez grand); il est établi dans [**34**] que l'on a pour tous $\varepsilon > 0$, $k \geqslant 0$, et uniformément lorsque $(\log x)^{1+\varepsilon} \leqslant y \leqslant x$, $u \in \mathscr{C}_k(\log y)$,

$$\Lambda(x, y) = x \sum_{j=0}^{k} a_j \frac{\rho^{(j)}(u)}{(\log y)^j} + O\left(x \frac{\rho^{(k+1)}(u)}{(\log y)^{k+1}}\right) \tag{1.12}$$

où les a_j sont les coefficients de Taylor en $s = 0$ de $s\zeta(s + 1)/(s + 1)$. La formule (1.10) découle donc de (1.5) et du cas $k = 0$ de (1.12). Il est à noter, au vu de l'estimation classique $\rho^{(k)}(u) \sim (-\log u)^k \rho(u)$ $(u \to \infty)$, que (1.12) s'apparente à un véritable développement asymptotique.

Posons pour $x > 0$,

$$N_q(x) := \sum_{\substack{n \leqslant x \\ (n,q)=1}} 1 = x\left\{\frac{\varphi(q)}{q} + R_q(x)\right\} \quad \text{(disons)} \tag{1.13}$$

et

$$\Lambda_q(x, y) := \sum_{d \mid q} \mu(d) \Lambda\left(\frac{x}{d}, y\right). \tag{1.14}$$

Une interversion de sommations permet de montrer que l'on a

$$\Lambda_q(x, y) = x \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(u - v)\, dR_q(y^v) \quad (x \notin \mathbb{Z}^+). \tag{1.15}$$

Au vu de (1.4) et (1.5), la définition (1.14) laisse augurer que $\Lambda_q(x, y)$ est une bonne approximation de $\Psi_q(x, y)$ lorsque x, y satisfont (H_ε) et q n'est pas 'trop grand'.

THÉORÈME 2. *Soit* $\varepsilon > 0$. *On a uniformément sous les conditions* (H_ε) *et* (Q_ε)

$$\Psi_q(x, y) = \Lambda_q(x, y)\{1 + O(Y_\varepsilon^{-1})\} \tag{1.16}$$

où Y_ε *est défini par* (1.7).

Nous déduirons les théorèmes 1 et 2 d'une évaluation de type (1.12) pour $\Lambda_q(x, y)$. La question de l'uniformité en q se révèle ici capitale et nous développerons au § 4 une technique relativement sophistiquée pour surmonter les difficultés nouvelles qui surviennent dans ce problème à trois paramètres. Quelques notations supplémentaires sont nécessaires pour énoncer le résultat. Nous désignons par $a_j(q)$ le coefficient de s^j dans le développement de Taylor à l'origine de

$$\frac{sL(s+1, \chi_0)}{s+1} = \prod_{p \mid q} (1 - p^{-s-1}) \frac{s\zeta(s+1)}{s+1}$$

où χ_0 dénote le caractère principal de Dirichlet modulo q. Posant, pour chaque $m \geqslant 0$,

$$\varphi_m(q) := \frac{(-1)^m}{m!} \sum_{d \mid q} \frac{\mu(d)}{d} (\log d)^m \ll_m \frac{\varphi(q)}{q} (\log_2(q+2))^m$$

(cf. (4.20) pour cette dernière évaluation), on a

$$a_j(q) = \sum_{m+l=j} \varphi_m(q) a_l \ll_j \frac{\varphi(q)}{q} (\log_2(q+2))^j. \tag{1.17}$$

Pour chaque entier $k \geqslant 0$ et chaque réel $y \geqslant 2$ fixés, nous définissons une fonction $q \mapsto q_0$ où q_0 est le plus grand diviseur sans facteur carré de q satisfaisant à

$$P(q_0) \leqslant \{\omega(q) + \log y\}^{6(k+2)}. \tag{1.18}$$

(Ici et dans la suite, $\omega(q)$ désigne le nombre de facteurs premiers distincts de q.) Il s'avérera pratique d'introduire le symbole

$$\Xi = \Xi(q) := \begin{cases} 1 & \text{si } \log P(q_0) \leqslant \dfrac{\log y}{\log_2 x}, \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases} \tag{1.19}$$

Nous posons alors

$$A_k(q) := \min\{2^{\omega(q_0)}, 1 + \Xi(q)(\log P(q_0))^k\},$$

avec une interprétation évidente lorsque $\Xi = +\infty$. De l'estimation classique $\omega(q) \leqslant \log(2q)$, on déduit en particulier que l'on a

$$A_k(q) \ll_k (\log_2 qy)^k \tag{1.20}$$

dès que

$$\log_2(2qy) \leqslant \frac{\log y}{6(k+2)\log_2 x}. \tag{1.21}$$

THÉORÈME 3. *Pour chaque nombre entier $k \geqslant 0$ et uniformément sous les conditions*

$$x \geqslant 2, \quad (\log x)^2 \leqslant y \leqslant x, \quad q \geqslant 1, \quad u \in \mathscr{C}_k\left(\frac{\log y}{6 + \log P(q_0)}\right),$$

on a l'estimation

$$\Lambda_q(x, y) = x \sum_{j=0}^{k} a_j(q) \frac{\rho^{(j)}(u)}{(\log y)^j} + O\left(x A_{k+1}(q) \frac{\rho^{(k+1)}(u)}{(\log y)^{k+1}}\right). \tag{1.22}$$

REMARQUE. Saias a montré dans **[34]** qu'une restriction concernant u est indispensable (et la condition correspondante optimale) lorsque $q = 1$. Nous n'avons pas cherché ici à optimiser la dépendance relative en q de cette condition.

Il est facile de constater que (1.21) a lieu dès que les hypothèses (H_ε) et (Q_ε) sont remplies. On déduit donc immédiatement des théorèmes 2 et 3 et de (1.20) le résultat suivant.

COROLLAIRE 2. *Soient $\varepsilon > 0$, $k \geqslant 0$. Sous les conditions* (H_ε), (Q_ε), *et*

$$u \in \mathscr{C}_k\left(\frac{\log y}{6(k+3)\log_2(qy)}\right),$$

on a uniformément

$$\Psi_q(x, y) = x \sum_{j=0}^{k} a_j(q) \frac{\rho^{(j)}(u)}{(\log y)^j} + O\left(x\rho^{(k+1)}(u)\left\{\frac{\log_2(qy)}{\log y}\right\}^{k+1}\right). \tag{1.23}$$

Cette évaluation représente une amélioration considérable sur les résultats disponibles dans la littérature. Les hypothèses du Theorem 4 de Hazlewood **[16]**, par exemple, nécessitent

$$\exp\{(\log x)^{\frac{5}{8}+\varepsilon}\} \leqslant y \leqslant x, \quad u \in \mathscr{C}_{k+1}(\eta),$$

où η est une constante positive fixée. En employant (1.23) à l'ordre $k+1$, on obtient un terme d'erreur notablement moindre que celui de [16]. Cependant le progrès le plus significatif se situe dans la dépendance en q: si l'on suppose, sans perte de généralité, que $\mu(q)^2=1$ et $P(q)\leqslant y$, on a certainement dans le domaine utile des estimations de Hazlewood

$$\log q \ll (\log y)^2.$$

Le légitime souci de démystifier le 'terme principal' étant dans une certaine mesure apaisé, nous pouvons tourner notre attention vers deux questions naturelles concernant la répartition des entiers de $S(x, y)$ dans les progressions arithmétiques: quels sont les analogues des théorèmes de Siegel–Walfisz et de Bombieri–Vinogradov?

Dans la première direction, nous pouvons établir les résultats suivants. Nous désignons par c_j $(j=0, 1, 2, \ldots)$ des constantes positives, dépendant au plus du paramètre A, et introduisons, pour la concision des formules, les notations

$$Y := e^{\sqrt{\log y}}, \quad H(u) := \exp\left\{\frac{u}{\log^2(u+1)}\right\}.$$

Théorème 4. *Soit A un nombre réel positif. Sous la condition*

$$x \geqslant 3, \exp\{c_0(\log_2 x)^2\} \leqslant y \leqslant x, \tag{1.24}$$

et pour tout caractère de Dirichlet χ non principal modulo q, on a:

(i) *si $1<q\leqslant(\log x)^A$, alors*

$$\sum_{n\in S(x,y)} \chi(n) \ll \Psi(x, y) Y^{-c_1}; \tag{1.25}$$

(ii) *si $(\log x)^A<q\leqslant y^{c_2/\log_2 x}$, alors*

$$\sum_{n\in S(x,y)} \chi(n) \ll \Psi(x, y)\left\{Y^{-c_3}+y^{-c_3/\log q}+\theta(\chi)\frac{\log q}{\log y}H(u)^{-c_3}\right\} \tag{1.26}$$

où $\theta(\chi)$ vaut 1 pour au plus un caractère exceptionnel, réel, et vaut 0 pour les $\varphi(q)-2$ autres caractères non principaux.

Remarque. On verra que la démonstration fournit en fait un résultat plus précis. Si $\beta(\chi)$ désigne le plus grand zéro réel de $L(s, \chi)$, la majoration (1.26) est valable en remplaçant $\theta(\chi)$ par $x^{\beta(\chi)-1}$. Les estimations classiques concernant le zéro de Siegel montrent alors que le terme correspondant dans le membre de gauche n'est utile que pour au plus une valeur de χ.

Il est à souligner que la constante implicite dans (1.25) dépend de A de façon non effective. Cette majoration est à rapprocher du résultat de Hildebrand [24]

$$\sum_{n\in S(x,y)} \mu(n) \ll_\varepsilon \Psi(x, y)\exp\{-(\log y)^{\frac{3}{5}-\varepsilon}\} \quad (2\leqslant y\leqslant \exp\{(\log x)^{\frac{1}{21}}\}).$$

Une majoration uniforme pour $x \geqslant y \geqslant 2$, étendant notablement le domaine de validité de la précédente, est établie dans [**36**] grâce à une adaptation idoine de la méthode de démonstration du théorème 4.

Dans l'énoncé suivant, $\Delta(x, y ; a, q)$ désigne la quantité implicitement définie par

$$\Psi(x, y ; a, q)=\varphi(q)^{-1}\Lambda_q(x, y)\{1+\Delta(x, y ; a, q)\}. \tag{1.27}$$

Théorème 5 (*'Siegel–Walfisz' pour $S(x, y)$). Soit A un nombre réel positif. On a uniformément pour x, y, a, q satisfaisant* (1.24) *et* $(a, q)=1$*:*

$$\Delta(x, y ; a, q) \ll \begin{cases} Y^{-c_4} & (1<q \leqslant (\log x)^A), \\ Y^{-c_4}+\dfrac{q \log q}{\varphi(q)\log y} H(u)^{-c_3} & ((\log x)^A<q \leqslant Y^{c_4}). \end{cases} \tag{1.28}$$

Remarque. Comme précédemment, on peut sensiblement affiner le résultat en faisant explicitement intervenir le zéro de Siegel. Si l'on note β le plus grand zéro réel de $\prod_{\chi \neq \chi_0} L(s, \chi)$, où χ décrit les caractères modulo q, on peut multiplier le terme impliquant $H(u)$ dans (1.28) par $x^{-(1-\beta)}$.

Il serait souhaitable, et peut-être pas inespéré, d'étendre au domaine (ii) du théorème 4 la seconde majoration (1.28).

Le théorème 5 précise le Theorem 4.2.1 de Levin et Fainleb [**28**]. Une intégration par parties suffit à vérifier que le terme principal de leur formule (4.2.1) est, à un terme $O(1)$ près, identique à celui de (1.27), mais leur terme résiduel est

$$O(xu^B \exp\{-(\log y)^{\frac{3}{8}-\varepsilon}\}). \tag{1.29}$$

(L'exposant $\frac{3}{5}$ de [**28**] apparaît en effet comme une faute d'impression.) En particulier (1.29) est d'ordre supérieur à la majoration triviale $\Psi(x, y)$ dès que

$$\log y \leqslant (\log x)^{\frac{8}{11}}.$$

Lorsqu'on insère dans (1.27) l'estimation du théorème 3 pour $\Lambda_q(x, y)$, on obtient une amélioration similaire pour la seconde partie du Theorem 4.2.1 de [**28**].

Sur la voie d'énoncés de type 'Bombieri–Vinogradov', rappelons d'abord le résultat suivant, essentiellement annoncé par Wolke [**40**].

Théorème 6 (*'Bombieri–Vinogradov' pour $S(x, y)$). Soit A un nombre réel positif. Il existe une constante $B=B(A)$ telle que l'on ait pour $x \geqslant y \geqslant 2$, $Q=(\sqrt{x})(\log x)^{-B(A)}$,*

$$\sum_{q \leqslant Q} \max_{z \leqslant x} \max_{(a, q)=1} \left|\Psi(z, y ; a, q)-\frac{\Psi_q(z, y)}{\varphi(q)}\right| \ll \frac{x}{(\log x)^A}. \tag{1.30}$$

En fait, Wolke établit (1.30) pour les entiers sans *petit* facteur premier, c'est-à-dire pour la quantité

$$\Phi(x, y):=\operatorname{card}\{n \leqslant x:\ p \mid n \Rightarrow p>y\}.$$

Il affirme ensuite que sa démonstration, reposant sur la théorie des fonctions L, se transporte au cas dual, de $\Psi(x, y)$, qui nous intéresse ici. Nous donnons au § 7 quelques indications sur la manière de prouver un résultat très légèrement moins fort que le théorème 6, et qui suffit pour la plupart des applications. Notre argument est de nature différente de celui de Wolke. Il repose sur le principe de Motohashi [**32**], dans la version très générale qu'en ont donné Bombieri, Friedlander et Iwaniec [**2**].

La majoration (1.30) est essentiellement triviale lorsque

$$y \leqslant x^{c \log_3 x/\log_2 x}.$$

Dans cette optique, il serait souhaitable de remplacer le second membre de (1.30) par

$$\ll \Psi(x, y)(\log y)^{-A}. \tag{1.31}$$

Cela permettrait, par exemple, de 'cribler', pour de petites valeurs de y, l'ensemble $\{n+1\colon\ n \in S(x, y)\}$. Cependant, il semble qu'un tel renforcement du théorème 6 ne soit pas accessible, en l'état actuel des techniques disponibles, sans affaiblir l'énoncé par d'autres aspects. On peut ainsi concevoir l'obtention de l'estimation (1.31) au prix de la suppression d'un ou des deux maximums, voire des valeurs absolues, dans (1.30)—ou encore d'une réduction de la valeur du paramètre Q, cf. [**12**]. Nous nous proposons de revenir sur ces questions dans un travail ultérieur. Nous signalons cependant que de nombreuses applications, comme l'étude de sommes du type

$$\sum_{n \in S(x, y)} f(n+1)$$

pour f multiplicative, sont fortement tributaires de la possibilité de choisir Q 'proche' de $\sqrt{x}$, cf. [**8**].

En combinant les théorèmes 6, 2 et 3, nous obtenons une variante de (1.30) avec terme principal explicite.

THÉORÈME 7. *Avec les notations et hypothèses du théorème* 6, *on a*

$$\sum_{q \leqslant Q} \max_{(a, q)=1} \left| \Psi(x, y\,; a, q) - \frac{\Lambda_q(x, y)}{\varphi(q)} \right| \ll \frac{x}{(\log x)^A}. \tag{1.32}$$

COROLLAIRE 3. *Soient* $A > 0$, $k \geqslant 0$. *Sous la condition*

$$u \in \mathscr{C}_k\left(\frac{\log y}{8(k+3)\log_2 y}\right), \tag{1.33}$$

on a uniformément

$$\sum_{q \leqslant Q} \max_{(a, q)=1} \left| \Psi(x, y\,; a, q) - \frac{x}{\varphi(q)} \sum_{j=0}^{k} a_j(q) \frac{\rho^{(j)}(u)}{(\log y)^j} \right| \ll \frac{x}{(\log x)^A} + \Psi(x, y) \frac{u(\log(u+1))^{k+1} \log_2 y}{(\log y)^k}. \tag{1.34}$$

REMARQUE. Le second terme de cette majoration est en toute circonstance

$$\ll x(\log_2 x/(\log x)^k).$$

Pour illustrer l'intérêt spécifique d'estimations du type (1.32), nous en donnons maintenant une application qui ne découle pas du théorème 6. Il s'agit d'un analogue du problème des diviseurs de Titchmarsh pour l'ensemble $S(x, y)$.

Nous notons $\tau(n)$ le nombre des diviseurs d'un entier générique n. Pour $\operatorname{Re} s > 0$, nous posons

$$G(s) := \prod_p \left(1 + \frac{1 - p^{-s}}{p(p-1)}\right), \quad Z(s) := \frac{s\zeta(s+1)}{s+1}$$

et désignons respectivement par ε_j, δ_j, le j-ième coefficient de Taylor à l'origine des fonctions

$$Z(s)G(s), \quad \text{et} \quad Z(s)G(s)\left\{2\gamma - \frac{1}{s+1} - 2\sum_p \frac{(1-p^{-s})\log p}{p(p-1)+1-p^{-s}}\right\},$$

où γ est la constante d'Euler. Nous considérons alors les fonctions de variable réelle

$$\sigma_0(v) := \rho(v),$$
$$\sigma_j(v) := \varepsilon_j \rho^{(j)}(v) + \delta_{j-1}\rho^{(j-1)}(v)v^{-1} \quad (j = 1, 2, \ldots).$$

THÉORÈME 8. *Soit η une constante positive et k un entier $\geqslant 0$. Lorsque x, y satisfont*

$$\exp\left\{\eta \frac{\log x \,.\, \log_3 x}{\log_2 x}\right\} \leqslant y \leqslant x, \quad \text{et} \quad u \in \mathscr{C}_k(\tfrac{1}{2}\log y) \tag{1.35}$$

on a uniformément

$$\sum_{n \in S(x,y)} \tau(n-1) = x \log x \left\{\sum_{j=0}^{k} \frac{\sigma_j(u)}{(\log y)^j} + O\left(\frac{\rho^{(k+1)}(u)}{(\log y)^{k+1}}\right)\right\}. \tag{1.36}$$

Nous donnons dans **[8]** une preuve détaillée de ce résultat. Pour l'heure, contentons-nous de souligner la divergence radicale de comportement entre (1.36) et la quantité

$$T(x, y) := \sum_{n \in S(x,y)} \tau(n).$$

Une étude assez précise de cette somme est possible par la méthode du col. Xuan **[41]** a montré que

$$T(x, y) \sim \left(\sqrt{\frac{\pi u}{2}}\right) \frac{\rho(\frac{1}{2}u)^2}{\rho(u)} \Psi(x, y) \log y$$

lorsque x, y restent dans (H_ε) et $u \to +\infty$. On peut facilement vérifier que le facteur dépendant de u vaut

$$2^{u + O(u/\log(u+1))}.$$

Nous tenons à exprimer ici nos plus vifs remerciements à John Friedlander pour d'éclairantes conversations sur le sujet, et à Bob Vaughan qui a posé la question à l'origine de ce travail—en insistant subtilement sur le problème des termes principaux.

2. *Application aux sommes d'exponentielles*

Le théorème 5 est un outil naturel pour aborder la question des sommes d'exponentielles restreintes aux entiers sans grand facteur premier. Nous examinons ici le comportement asymptotique de la quantité

$$E(x, y\,;\theta):=\sum_{n\in S(x,y)} e(\theta n)$$

où θ est un paramètre réel et où l'on a posé

$$e(t):=\exp\{2\pi i t\}\quad (t\in\mathbb{R}).$$

Lorsque θ est un nombre rationnel à 'petit' dénominateur les résultats de la section précédente permettent une excellente évaluation de $E(x, y\,;\theta)$. Cependant la très forte dépendance de $\Psi(x, y)$ relativement à y rend vite inefficaces les techniques classiques lorsque y décroît et θ est mal approchable par des rationnels à petits dénominateurs. Nous rassemblons nos résultats aux théorèmes 9 et 10 ci-dessous—pour les énoncés desquels nous introduisons maintenant quelques notations.

Posons, pour chaque entier $q\geqslant 2$,

$$S_q(t):=\frac{1}{t}\sum_{n\leqslant t}\frac{\mu(q/(n,q))}{\varphi(q/(n,q))}\quad (t>0). \tag{2.1}$$

En scindant la somme selon les valeurs de $m:=q/(n, q)$ on obtient sans peine l'expression

$$S_q(t)=\frac{1}{q}\sum_{m\mid q}\frac{m\mu(m)}{\varphi(m)}R_m\left(\frac{mt}{q}\right) \tag{2.2}$$

où R_m est la fonction définie en (1.13). Nous pouvons donc définir, pour x réel,

$$V_q(x, y):=\begin{cases} x\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\rho(u-v)\,dS_q(y^v) & (x\notin\mathbb{Z}^+),\\ V_q(x+0, y) & (x\in\mathbb{Z}^+).\end{cases} \tag{2.3}$$

Il découle de (2.2) et (1.15) que l'on a

$$V_q(x, y)=\sum_{m\mid q}\frac{\mu(m)}{\varphi(m)}\Lambda_m\left(\frac{mx}{q}, y\right)\quad (x\in\mathbb{R}). \tag{2.4}$$

Soit

$$H_q(s):=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(q/(n,q))}{\varphi(q/(n,q))}n^{-s}\quad (\operatorname{Re}s>1). \tag{2.5}$$

On a

$$\begin{aligned} H_q(s)&=\sum_{m\mid q}\frac{\mu(m)}{\varphi(m)}\sum_{\substack{n=1\\(n,q)=q/m}}^{\infty}n^{-s}\\ &=\sum_{m\mid q}\frac{\mu(m)}{\varphi(m)}\left(\frac{m}{q}\right)^s\prod_{p\nmid m}(1-p^{-s})^{-1}\\ &=\zeta(s)\sum_{m\mid q}\frac{\mu(m)}{\varphi(m)}\left(\frac{m}{q}\right)^s\prod_{p\mid m}(1-p^{-s}). \end{aligned} \tag{2.6}$$

La somme en m est une fonction multiplicative de q. Il suit

$$H_q(s) = \frac{\zeta(s)}{\varphi(q)} q^{1-s} \prod_{p \mid q} (1 - p^{s-1}). \tag{2.7}$$

Cela montre que $H_q(s)$ est prolongeable en une fonction entière de s. Nous posons

$$\frac{sH_q(s+1)}{s+1} =: \sum_{k=1}^{\infty} b_k(q) s^k \quad (|s| < 1). \tag{2.8}$$

On déduit en particulier de (2.7) que l'on a

$$b_1(q) = -\Lambda(q)/\varphi(q) \tag{2.9}$$

(où Λ désigne la fonction de von Mangoldt) et (2.6) implique

$$b_k(q) = \sum_{m \mid q} \frac{m\mu(m)}{q\varphi(m)} \sum_{j+l=k} a_j(m) \frac{(\log m/q)^l}{l!}$$

d'où, grâce à (1.17),

$$b_k(q) \ll_k \frac{2^{\omega(q)}}{q} (\log q)^k. \tag{2.10}$$

THÉORÈME 9. (i) *Soit* $A > 0$. *Sous les conditions*

$$x \geqslant 3, \quad \exp\{c_5(\log_2 x)^2\} \leqslant y \leqslant x, \quad 2 \leqslant q \leqslant (\log x)^A, \quad (a, q) = 1, \tag{2.11}$$

on a uniformément

$$E\left(x, y\,; \frac{a}{q}\right) = V_q(x, y) + O(\Psi(x, y) e^{-c_6\sqrt{\log y}}). \tag{2.12}$$

(ii) *Soit* $k \geqslant 0$. *Si l'on suppose, outre* (2.11), *que*

$$u \in \mathscr{C}_k\left(\frac{5 \log y}{6 + \log q}\right) \tag{2.13}$$

alors on a l'estimation asymptotique

$$V_q(x, y) = x \sum_{j=1}^{k} b_j(q) \frac{\rho^{(j)}(u)}{(\log y)^j} + O\left(\frac{2^{\omega(q)}}{\varphi(q)} x \rho^{(k+1)}(u) \left\{\frac{\log q}{\log y}\right\}^{k+1}\right). \tag{2.14}$$

THÉORÈME 10. *Soient* $\delta > 0$, $A > 0$. *Il existe une constante* $B = B(\delta, A)$ *telle que, pour* $Q := x(\log y)^{-B}$ *et sous les conditions*

$$x \geqslant 3, \quad x^{\delta \log_3 x/\log_2 x} \leqslant y \leqslant x, \tag{2.15}$$

$$2 \leqslant q \leqslant Q, \quad (a, q) = 1, \quad \left|\theta - \frac{a}{q}\right| \leqslant \frac{1}{qQ}, \tag{2.16}$$

on ait uniformément

$$E(x, y\,; \theta) \ll \Psi(x, y) \left\{\frac{2^{\omega(q)} \log q}{\varphi(q)} \cdot \frac{\log(u+1)}{\log y} + \left(\frac{1}{\log y}\right)^A\right\}. \tag{2.17}$$

Cette estimation ne fournit jamais mieux qu'un facteur de gain $(\log y)^{-A}$ relativement à la majoration triviale. Il est cependant difficile d'espérer un résultat plus précis si l'on souhaite conserver l'attrait fondamental d'une complète uniformité en θ. Lorsque $\sqrt{x} \leqslant y \leqslant x$, par exemple, (2.17) équivaut, par complémentarité, à la majoration correspondante classique d'une somme trigonométrique sur des nombres premiers—elle est donc essentiellement optimale, cf. par exemple [**6**], en l'état actuel des connaissances. Dans une optique différente, comme celle de l'emploi de la méthode du cercle, d'autres techniques sont disponibles pour estimer $E(x, y\,;\theta)$. A titre d'exemple, nous montrons au § 9 (théorème 13) comment un lemme de factorisation de Vaughan [**39**] permet d'obtenir sans effort une 'bonne' majoration de $E(x, y\,;\theta)$ sur les arcs mineurs.

La fonction caractéristique de $S(x, y)$ est multiplicative. On peut donc appliquer à $E(x, y\,;\theta)$ la majoration très générale de Montgomery et Vaughan [**30**, Corollary 1]. Il est facile de constater que, lorsque les conditions sur θ et y permettent de comparer l'estimation correspondante à (2.17) (c'est-à-dire lorsque la distance $\|\theta\|$ de θ à l'ensemble des entiers satisfait à $\|\theta\| > 1/Q$), la majoration fournie par le théorème 10 est de meilleure qualité.

Si $\|\theta\| > 1/Q$, le théorème de Dirichlet assure l'existence d'un couple (a, q) satisfaisant (2.16). On a donc, sous la condition (2.15),

$$\sup_{\|\theta\|>1/Q} |E(x, y\,;\theta)| \ll \Psi(x, y)\frac{\log(u+1)}{\log y}. \tag{2.18}$$

De plus, si θ est un irrationnel fixé, q tend vers l'infini avec x et y, d'où

$$E(x, y\,;\theta) = o\left(\Psi(x, y)\frac{\log(u+1)}{\log y}\right) \quad (\theta \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}). \tag{2.19}$$

Les théorèmes 9 et 10 permettent d'apporter une réponse surprenante à une question soulevée par Mauclaire, qui conjecture (cf. [**29**, p. 36]) que pour $0 < \theta < 1$, on a

$$\lim_{y\to\infty} \prod_{p\leqslant y}\left(1-\frac{1}{p}\right) \sum_{\substack{n=1\\ P(n)\leqslant y}}^{\infty} \frac{e(\theta n)}{n} = 0 \tag{2.20}$$

et établit effectivement ce fait pour un sous-ensemble de mesure 1 contenant les rationnels. On peut confirmer (2.20) assez simplement grâce au théorème de Daboussi [**4**]. Cependant le résultat suivant montre que beaucoup plus est vrai.

THÉORÈME 11. *Soit* $\theta \in (0, 1)$. *Posons*

$$m(\theta) := \begin{cases} \Lambda(q)/\varphi(q) & si\ \theta = a/q,\ (a, q) = 1, \\ 0 & si\ \theta \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}. \end{cases}$$

Alors on a

$$\lim_{y\to\infty} \sum_{\substack{n=1\\ P(n)\leqslant y}}^{\infty} \frac{e(\theta n)}{n} = \log\left(\frac{1}{1-e(\theta)}\right) + m(\theta). \tag{2.21}$$

Démonstration. On a

$$\sum_{\substack{n=1\\ P(n)\leqslant y}}^{\infty} \frac{e(\theta n)}{n} = \sum_{n\leqslant y} \frac{e(\theta n)}{n} - \frac{E(y, y\,;\theta)}{y} + \int_y^{+\infty} E(x, y\,;\theta)\frac{dx}{x^2}.$$

Il nous suffit donc de montrer que l'intégrale tend vers $m(\theta)$ lorsque $y \to \infty$. Posons

$$Y = \exp\left\{2 \log y \frac{\log_2 y}{\log_3 y}\right\}, \quad Z = \exp\{(\log y)^2\}.$$

Par (1.10), on a

$$\int_Y^Z \Psi(x, y) \frac{dx}{x^2} \ll \int_Y^Z \rho(u) \frac{dx}{x} \ll \rho\left(\frac{\log Y}{\log y}\right) \log y = o(1).$$

De plus, une majoration classique de de Bruijn **[3]** permet d'écrire, pour une constante convenable $c > 0$,

$$\int_Z^\infty \Psi(x, y) \frac{dx}{x^2} \ll \int_Z^\infty x^{-1-c/\log y}\, dx \ll y^{-c/2}.$$

Ainsi (2.21) équivaut à

$$\int_y^Y E(x, y\,; \theta) \frac{dx}{x^2} = m(\theta) + o(1) \quad (y \to \infty). \tag{2.22}$$

Lorsque θ est irrationnel, (2.22) découle immédiatement de (2.19). Le membre de gauche est alors

$$\int_y^Y o\left(\frac{\rho(u)\log(u+1)}{x \log y}\right) dx = o\left(\int_1^{+\infty} \rho(u)\log(u+1)\, du\right) = o(1).$$

Lorsque θ est rationnel, on peut utiliser (2.14) avec $k = 1$ si u n'est pas trop voisin de 1, disons par exemple

$$x > y_1 := y \exp \sqrt{\log y}.$$

On a alors d'une part, par (2.17),

$$\left|\int_y^{y_1} E(x, y\,; \theta) \frac{dx}{x^2}\right| \ll \int_y^{y_1} \frac{dx}{x \log y} \ll \frac{1}{\sqrt{\log y}}$$

et d'autre part, par (2.14),

$$\begin{aligned}\int_{y_1}^Y E(x, y\,; \theta) \frac{dx}{x^2} &= b_1(q) \int_{1+1/\sqrt{\log y}}^{\log Y/\log y} \rho'(u)\, du + O\left(\int_1^{+\infty} \frac{\rho(u)(\log(1+u))^2}{\log y}\, du\right) \\ &= -b_1(q) + O\left(\frac{1}{\sqrt{\log y}}\right).\end{aligned}$$

Au vu de (2.9), cela achève la démonstration.

Remarque. On peut montrer directement (2.21), lorsque θ est rationnel, en utilisant les propriétés classiques des fonctions L.

3. *Un procédé de sommation*

Le théorème 11 incite à définir un procédé de sommation lié à la fonction $P(n)$. Nous dirons qu'une série, $\sum_{n=1}^\infty \alpha_n$, '$P$-converge' vers α, et nous noterons

$$\sum_{n=1}^\infty \alpha_n = \alpha \quad (P) \tag{3.1}$$

si l'on a

$$\sum_{P(n)\leqslant y} \alpha_n = \alpha + o(1) \quad (y \to \infty). \tag{3.2}$$

Cette définition suppose bien entendu que pour chaque $y \geqslant 2$ le membre de gauche de (3.2) converge au sens usuel. C'est certainement le cas s'il existe un $\delta > 0$ tel que $\alpha_n \ll n^{-\delta}$.

Le procédé P n'est pas régulier puisque le théorème 11 fournit une infinité d'exemples de séries semi-convergentes qui sont P-sommables mais dont la P-somme n'est pas égale à la somme ordinaire. Le résultat suivant, que nous a aimablement communiqué Hugh Montgomery, fournit une classe de séries où P est régulier.

THÉORÈME 12 (Montgomery). *Soit f une fonction multiplicative à valeurs complexes dans le disque unité. Supposons de plus l'existence d'au moins un entier $\nu \geqslant 1$ tel que $f(2^\nu) \neq -1$. Si la série $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-1}$ est convergente, elle est aussi P-convergente et les deux sommes sont égales.*

Démonstration. Nous nous bornons à préciser les étapes principales. Supposons que $\sum_{n=1}^{\infty} (f(n)/n) = \alpha$. Par le théorème d'Abel on en déduit

$$\lim_{\sigma \to 1+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^\sigma} = \alpha,$$

c'est-à-dire

$$\lim_{\sigma \to 1+} \prod_p \sum_{\nu=0}^{\infty} f(p^\nu)p^{-\nu\sigma} = \alpha. \tag{3.3}$$

La condition sur les $f(2^\nu)$ permet aisément de montrer que le produit

$$\prod_p e^{-f(p)p^{-\sigma}} \sum_{\nu=0}^{\infty} f(p^\nu)p^{-\nu\sigma}$$

converge uniformément pour $\sigma \geqslant 1$ et est non nul. Si β désigne sa valeur en $\sigma = 1$ on a donc

$$\lim_{\sigma \to 1+} \exp\left\{\sum_p \frac{f(p)}{p^\sigma}\right\} = \alpha\beta^{-1}.$$

Si $\alpha \neq 0$, cela implique que $\sum_p f(p)p^{-\sigma}$ tend vers une limite lorsque $\sigma \to 1+$, et le théorème taubérien de Hardy–Littlewood permet de conclure, grâce à une manipulation classique dont nous omettons les détails ici, que $\sum_p f(p)p^{-1}$ converge. Il en va donc de même du produit

$$\prod_p \sum_{\nu=0}^{\infty} f(p^\nu)p^{-\nu},$$

ce qui signifie exactement que $\sum f(n)n^{-1}$ est P-convergente. Si $\alpha = 0$, alors

$$\lim_{\sigma \to 1+} \operatorname{Re} \sum_p f(p)p^{-\sigma} = -\infty. \tag{3.4}$$

Or, on a

$$\sum_p f(p)p^{-\sigma} = \sum_{p \leqslant \exp\{1/(\sigma-1)\}} \frac{f(p)}{p^\sigma} + O(1) = \sum_{p \leqslant \exp\{1/(\sigma-1)\}} \frac{f(p)}{p} + O(1).$$

La relation (3.4) implique donc

$$\prod_{p \leqslant y} e^{f(p)p^{-1}} = o(1) \quad (y \to \infty).$$

On en déduit immédiatement que $\sum f(n)n^{-1}$ est P-convergente et de P-somme nulle.

Lorsqu'on s'affranchit de l'hypothèse de multiplicativité, des phénomènes plus radicaux encore que ceux qui sont décrits par le théorème 11 peuvent se produire. A partir d'une idée d'Erdös, nous pouvons construire une série semi-convergente de P-somme infinie. Posons $\varepsilon_n = 1$ si $P(n) \leqslant n^{1/\sqrt{e}}$, $\varepsilon_n = -1$ dans le cas contraire. D'après (1.10), on obtient facilement

$$\sum_{n \leqslant x} \varepsilon_n = O\left(\frac{x}{\log x}\right). \tag{3.5}$$

Soit alors $\alpha_n := \varepsilon_n / n\sqrt{\log(n+1)}$. Par sommation d'Abel, on voit que $\sum \alpha_n$ est semi-convergente. Considérons maintenant la quantité

$$\sum_{\substack{n=1 \\ P(n) \leqslant y}}^{\infty} \alpha_n. \tag{3.6}$$

Nous posons $x := y^{\sqrt{e}}$, et examinons séparément les sous-sommes A et B correspondant aux conditions $n \leqslant x$ et $n > x$. On a

$$A = \sum_{n \leqslant x} \alpha_n - \sum_{\substack{n \leqslant x \\ P(n) > y}} \alpha_n \geqslant O(1)$$

puisque la première somme est bornée est que la seconde ne contient que des termes négatifs. De plus tous les entiers n qui contribuent à B sont tels que $P(n) \leqslant y < n^{1/\sqrt{e}}$, donc $\varepsilon_n = 1$. Ainsi

$$B = \sum_{\substack{n > x \\ P(n) \leqslant y}} \frac{1}{n\sqrt{\log(n+1)}} \sim \left(\int_{\sqrt{e}}^{\infty} \frac{\rho(u)}{\sqrt{u}}\, du\right)\sqrt{\log y} \to +\infty.$$

Cela implique bien que (3.6) tend vers l'infini.

Ainsi la semi-convergence ordinaire n'implique même pas que les P-sommes partielles soient bornées. Réciproquement, la P-convergence n'implique certainement pas la convergence ordinaire, comme l'atteste le contre-exemple de $\alpha_n = n^{-1-i\tau}$ où τ est un réel non nul. On sait classiquement que

$$\prod_p (1 - p^{-1-i\tau})^{-1} = \zeta(1 + i\tau)$$

alors que la série $\sum n^{-1-i\tau}$ n'est pas semi-convergente. Cependant, un récent théorème de Montgomery et Vaughan [**31**] permet de montrer que, pour toute série de terme général $f(n)/n$ où f est multiplicative à valeurs dans le disque unité, les sommes partielles sont bornées dès que les P-sommes partielles le sont. Ce résultat nous a été récemment communiqué par Montgomery dans une lettre au second auteur.

4. *Preuve du théorème* 3

Nous aurons besoin de quatre résultats auxiliaires. Les deux premiers concernent la fonction de Dickman $\rho(v)$; les deux derniers sont dévolus à la fonction $R_q(x)$ implicitement définie par (1.13).

LEMME 4.1. (i) *On a*

$$\log \rho(v) \sim -v \log v \quad (v \to +\infty). \tag{4.1}$$

(ii) *Pour chaque entier $k \geqslant 0$, on a*

$$(-1)^k \rho^{(k)}(v) > 0 \quad (v \geqslant 1) \tag{4.2}$$

et

$$\rho^{(k)}(v) \sim (-1)^k \rho(v)(\log v)^k \quad (v \to +\infty). \tag{4.3}$$

(iii) *Soient $k \geqslant 0$, $0 < \varepsilon < 1$. On a uniformément pour $y \geqslant 2$, $0 \leqslant v \leqslant y^{1-\varepsilon}$,*

$$\int_0^{+\infty} \rho^{(k)}(v-w) y^{-w}\, dw \ll \frac{\rho^{(k)}(v)}{\log y}. \tag{4.4}$$

Démonstration. Les estimations (4.1) et (4.3) sont classiques et essentiellement dues à de Bruijn—voir [**34**, lemme 3] pour plus de détails. La relation (4.2) est obtenue par récurrence sur k en dérivant k fois l'équation fonctionnelle (1.8) et en remarquant que

$$\rho^{(k)}(v) = (-1)^k (k-1)!\, v^{-k} \quad (1 \leqslant v \leqslant 2).$$

Le point (iii) est établi dans [**34**, équation (21)] et généralise un résultat de Hildebrand, cf. [**22**, Lemma 2].

Dans toute cette section, nous notons

$$r_{mj} := \rho^{(j)}(m) - \rho^{(j)}(m-0) \quad (0 \leqslant m \leqslant j), \tag{4.5}$$

la discontinuité de $\rho^{(j)}(v)$ en $v = m$. Il est facile de vérifier que $r_{0j} = 0$ pour tout $j \geqslant 1$.

LEMME 4.2. *Pour $k \geqslant 0$, $u \geqslant 0$, $v \geqslant 0$, on a*

$$\begin{aligned}\rho(u-v) = \sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^j}{j!} \rho^{(j)}(u) v^j + \sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^{j+1}}{j!} \sum_{\substack{u-v<m\leqslant j \\ m \leqslant u}} r_{mj}(v+m-u)^j \\ + \frac{(-1)^{k+1}}{k!} \int_0^v (v-w)^k \rho^{(k+1)}(u-w)\, dw.\end{aligned} \tag{4.6}$$

Démonstration. Il s'agit essentiellement d'écrire la formule de Taylor avec reste intégral en tenant compte de l'existence de discontinuités de première espèce pour ρ et ses dérivées. Il est capital de garder en mémoire que, par convention, toutes ces fonctions sont prolongées par continuité à droite.

Nous procédons par récurrence sur k. Puisque $r_{00} = 1$, la formule (4.6) s'écrit, lorsque $k = 0$,

$$\rho(u-v) = \rho(u) - \theta - \int_{u-v}^{u} \rho'(w)\, dw \tag{4.7}$$

avec

$$\theta := \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leqslant u < v, \\ 0 & \text{dans tous les autres cas.} \end{cases}$$

Lorsque $0 \leqslant u < v$, l'intégrale de (4.7) vaut

$$\int_1^u \rho'(w)\,dw = \rho(u) - 1.$$

Comme $\rho(u - v) = 0$, on a bien (4.7) dans ce cas. Lorsque $u \geqslant v$, l'intégrale de (4.7) vaut $\rho(u) - \rho(u - v)$ et la relation est encore satisfaite puisque $\theta = 0$.

Supposons donc que (4.6) est vérifiée pour un certain $k \geqslant 0$. De l'égalité entre mesures

$$d\rho^{(k+1)}(u - w) = -\rho^{(k+2)}(u - w)\,dw - \sum_{m=0}^{k+1} r_{m,k+1}\delta_{u-m}$$

(où δ_α désigne la measure de Dirac en $w = \alpha$), on déduit que

$$\begin{aligned}\int_0^v (v - w)^k \rho^{(k+1)}(u - w)\,dw &= -\left[\frac{(v - w)^{k+1}}{k+1}\rho^{(k+1)}(u - w)\right]_{0^-}^{v^-} \\ &\quad + \frac{1}{k+1}\int_{0^-}^{v^-} (v - w)^{k+1}\,d\rho^{(k+1)}(u - w) \\ &= \frac{v^{k+1}}{k+1}\rho^{(k+1)}(u) - \frac{1}{k+1}\int_0^v (v - w)^{k+1}\rho^{(k+2)}(u - w)\,dw \\ &\quad - \frac{1}{k+1}\sum_{\substack{u-v<m\leqslant k+1 \\ m\leqslant u}} r_{m,k+1}(v + m - u)^{k+1}.\end{aligned}$$

En multipliant par $(-1)^{k+1}/k!$ et en appliquant l'hypothèse de récurrence, on obtient exactement (4.6) à l'ordre $k + 1$.

Par commodité d'écriture, nous introduisons la quantité

$$\alpha(q) := \frac{5}{6 + \log P(q)} \quad (q \geqslant 1). \tag{4.8}$$

LEMME 4.3. *Soit $k \geqslant 0$. On a uniformément pour $y \geqslant 2$, $v \geqslant 0$, $q \geqslant 1$,*

$$\int_{0^+}^{+\infty} w^k\,dR_q(y^{v+w}) \ll \frac{\min\{2^{\omega(q)}y^{-v},\ \alpha(q)^{-k}y^{-v\alpha(q)}\}}{(\log y)^k}. \tag{4.9}$$

Démonstration. Nous utiliserons trois majorations pour $R_q(t)$. On a d'abord l'estimation triviale

$$R_q(t) = \frac{N_q(t)}{t} - \frac{\varphi(q)}{q} \ll 1 \quad (t > 0). \tag{4.10}$$

Ensuite, la formule d'inversion de Möbius permet d'écrire

$$R_q(t) = -\frac{1}{t}\sum_{d\mid q}\mu(d)\left\{\frac{t}{d}\right\} \ll \frac{2^{\omega(q)}}{t} \quad (t > 0). \tag{4.11}$$

Enfin, le lemme fondamental du crible (cf. par exemple [**13**, Theorem 7.1]) fournit l'évaluation suivante, pour chaque valeur du paramètre $v \geqslant 1$,

$$R_q(t) \ll \frac{\varphi(q)}{q} e^{-v \log v} + \frac{1}{t} \sum_{n \leqslant P(q)^{2v}} 3^{\omega(n)}.$$

Choisissons $v = \frac{1}{15}\alpha(q)\log t$, de sorte que $P(q)^{3v} = t^{1-6\alpha(q)/5}$. On déduit de ce qui précède que l'on a

$$R_q(t) \ll t^{-\alpha(q)} \quad (P(q) \leqslant e^{-6} t^K) \tag{4.12}$$

avec $K := \frac{1}{3}e^{-15}$, car la dernière condition implique $\log v \geqslant 15$. Grâce à (4.10), on voit alors que (4.12) est en réalité valable inconditionnellement. En combinant cette estimation avec (4.11), il vient

$$R_q(t) \ll \min\{2^{\omega(q)}t^{-1}, t^{-\alpha(q)}\} \quad (t > 0). \tag{4.13}$$

Cela implique (4.9) lorsque $k = 0$. Une intégration par parties suffit pour en déduire que cette estimation persiste pour tout $k \geqslant 1$. En effet, le membre de gauche de (4.9) vaut alors

$$-k \int_0^{+\infty} w^{k-1} R_q(y^{v+w})\, dw$$
$$\ll_k \min\left\{2^{\omega(q)} y^{-v} \int_0^{+\infty} w^{k-1} y^{-w}\, dw, \quad y^{-v\alpha(q)} \int_0^{+\infty} w^{k-1} y^{-w\alpha(q)}\, dw\right\}.$$

En effectuant le calcul des intégrales en w, on obtient bien (4.9).

LEMME 4.4. *Soit $q \geqslant 1$ et χ_0 le caractère principal de Dirichlet modulo q. Pour $s \in \mathbb{C}$, $|s| < 1$, on a*

$$\frac{sL(s+1, \chi_0)}{s+1} = \sum_{j=0}^{\infty} a_j(q) s^j \tag{4.14}$$

avec

$$a_j(q) = \frac{(-1)^j}{j!} \int_{-\infty}^{+\infty} v^j\, dR_q(e^v) \quad (j \geqslant 0). \tag{4.15}$$

De plus, on a pour chaque $j \geqslant 0$ fixé

$$a_j(q) \ll \frac{\varphi(q)}{q} (\log_2(2+q))^j. \tag{4.16}$$

Démonstration. Pour $\operatorname{Re} s > 0$, on peut écrire

$$L(s+1, \chi_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(s+1)v}\, dN_q(e^v) = (s+1) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(s+1)v} N_q(e^v)\, dv,$$

et aussi

$$L(s+1, \chi_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-sv}\, d\{e^{-v} N_q(e^v)\} + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(s+1)v} N_q(e^v)\, dv$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-sv}\, dR_q(e^v) + \frac{1}{s+1} L(s+1, \chi_0)$$

d'où

$$\frac{sL(s+1; \chi_0)}{s+1} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-sv}\, dR_q(e^v). \tag{4.17}$$

La majoration (4.11) implique la convergence uniforme de l'intégrale précédente sur tout compact du disque unité ouvert. On obtient donc (4.15) par dérivation sous le signe somme.

L'estimation (4.16) est établie par Hazlewood, cf. [**16**, Lemma 1]. Pour la commodité du lecteur nous donnons rapidement les détails. Posons

$$\Phi(s) = \Phi_q(s) = \prod_{p \mid q} (1 - p^{-s-1}).$$

On déduit de l'identité $L(s+1, \chi_0) = \zeta(s+1)\Phi(s)$ que les coefficients $a_j(q)$ définis par (4.14) satisfont à

$$a_j(q) = \sum_{m+l=j} \varphi_m(q) a_l \tag{4.18}$$

avec $a_l = a_l(1)$ et

$$\varphi_m(q) = \frac{1}{m!}\Phi^{(m)}(0) = \frac{(-1)^m}{m!} \sum_{d \mid q} \frac{\mu(d)}{d} (\log d)^m. \tag{4.19}$$

Pour établir (4.16), nous allons montrer par récurrence sur $m \geqslant 0$ que l'on a

$$\Phi^{(m)}(0) \ll_m \frac{\varphi(q)}{q} (\log_2(2+q))^m. \tag{4.20}$$

Cette estimation est trivialement vérifiée lorsque $m = 0$ puisque $\Phi(0) = \varphi(q)/q$. Supposons-la satisfaite pour tout $j \leqslant m$. Posant

$$M(s) := -\frac{\Phi'(s)}{\Phi(s)} = \sum_{p \mid q} \frac{\log p}{p^{s+1} - 1},$$

on a

$$\Phi^{(m+1)}(0) = -\sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} \Phi^{(j)}(0) M^{(m-j)}(0). \tag{4.21}$$

Or, il est facile de constater que l'on a, pour tout $h \geqslant 0$,

$$M^{(h)}(s) = \sum_{p \mid q} \frac{(\log p)^{h+1} Q_h(p^{s+1})}{(p^{s+1} - 1)^{h+1}}$$

où Q_h est un polynôme de degré h. On en déduit

$$M^{(h)}(0) \ll_h \sum_{p \mid q} \frac{(\log p)^{h+1}}{p} \ll \sum_{p \leqslant P} \frac{(\log p)^{h+1}}{p} \ll_h (\log P)^{h+1}$$

où P est le $\omega(q)$-ième nombre premier. Par une majoration classique on a $P \ll \log(2+q)$. En reportant dans (4.21) et en tenant compte de l'hypothèse de récurrence, on obtient bien (4.20).

Preuve du théorème 3. Nous intégrons l'identité (4.6) sur $\mathbb{R}$ relativement à la mesure $dR_{q_0}(y^v)$, où q_0 est le plus grand diviseur sans facteur carré de q

satisfaisant à (1.18). Grâce à (4.15), nous obtenons

$$\Lambda_{q_0}(x, y) = x\left\{\sum_{j=0}^{k} a_j(q_0)\frac{\rho^{(j)}(u)}{(\log y)^j} + S_1 + S_2\right\}, \tag{4.22}$$

avec

$$S_1 := \sum_{j=0}^{k}\frac{(-1)^{j+1}}{j!}\sum_{\substack{0\leqslant m\leqslant j\\ m\leqslant u}} r_{mj}\int_{0^+}^{+\infty} w^j\, dR_{q_0}(y^{w+u-m})$$

et

$$S_2 := \frac{(-1)^{k+1}}{k!}\int_0^{+\infty}\rho^{(k+1)}(u-v)\int_{0^+}^{+\infty} w^k\, dR_{q_0}(y^{w+v})\, dv.$$

Dans un premier temps, nous allons montrer que S_1 et S_2 sont bien de l'ordre de grandeur du terme d'erreur de (1.22) sous les hypothèses du théorème 3. Ensuite, nous établirons que l'erreur impliquée par le fait de remplacer q_0 par q dans le membre de gauche et les termes principaux de (4.22) est également acceptable.

Commençons par estimer S_2. Nous rappelons la définition du symbole $\Xi(q)$ à la formule (1.19) et celle de la quantité $\alpha(q)$ par l'expression (4.8). Nous avons en particulier pour $k \geqslant 0$ fixé

$$A_{k+1}(q) \asymp \min\{2^{\omega(q_0)}, \Xi(q)\alpha(q_0)^{-k-1}\}. \tag{4.23}$$

Le lemme 4.3 permet d'écrire

$$S_2 \ll (\log y)^{-k}\int_0^{+\infty}\rho^{(k+1)}(u-v)\min\left\{\frac{2^{\omega(q_0)}}{y^v}, \frac{\Xi(q)}{\alpha(q_0)^k y^{v\alpha(q_0)}}\right\} dv.$$

Nous faisons appel au lemme 4.1(iii), avec $\varepsilon = \frac{1}{4}$, pour majorer l'intégrale en v. Les hypothèses requises sont bien satisfaites puisque l'on a en toute circonstance $u \leqslant \log x \leqslant \sqrt{y}$ et, lorsque $\Xi(q) = 1$,

$$\begin{aligned} y^{\alpha(q_0)} &= \exp\left\{\frac{5\log y}{6+\log P(q_0)}\right\} \geqslant \exp\left\{\frac{5\log y}{6+\log y/\log_2 x}\right\} \\ &\geqslant \exp\left\{\frac{5\log_2 x}{1+6\log_2 x/\log y}\right\} \geqslant (\log x)^{\frac{5}{4}} \geqslant u^{\frac{5}{4}}. \end{aligned} \tag{4.24}$$

Compte tenu de (4.23), on obtient

$$S_2 \ll A_{k+1}(q)\frac{\rho^{(k+1)}(u)}{(\log y)^{k+1}}. \tag{4.25}$$

Cette majoration est bien de l'ordre de grandeur souhaité.

Nous procédons maintenant à l'estimation de S_1. Le lemme 4.3 fournit immédiatement la majoration

$$\begin{aligned} S_1 &\ll_k \sum_{j=0}^{k}(\log y)^{-j}\sum_{\substack{0\leqslant m\leqslant j\\ m\leqslant u}}\min\{2^{\omega(q_0)}y^{m-u}, \alpha(q_0)^{-j}y^{\alpha(q_0)(m-u)}\} \\ &\ll_k (\log y)^{-t}\min\{2^{\omega(q_0)}y^{t-u}, \alpha(q_0)^{-t}y^{\alpha(q_0)(t-u)}\} \end{aligned} \tag{4.26}$$

où l'on a posé

$$t := \min\{k, [u]\}.$$

Majorons d'abord le terme relatif à $\omega(q_0)$. Nous distinguons deux cas selon les valeurs de u. Si $u > k+1$, on a

$$S_1 \ll 2^{\omega(q_0)}(\log y)^{-k} y^{(k+1-u)-1}$$

et, puisque $y \geq u^2$,

$$y^{k+1-u} \leq e^{-2(u-k-1)\log u} \ll_k \rho(u)$$

par (4.1). D'où

$$S_1 \ll_k 2^{\omega(q_0)} \rho(u)(\log y)^{-k-1} \quad (u > k+1). \tag{4.27}$$

Si $1 \leq u \leq k+1$, on a

$$S_1 \ll 2^{\omega(q_0)}(\log y)^{-t} y^{t-u} \ll_k 2^{\omega(q_0)}(\log y)^{-k-1}$$

puisque

$$u \in \mathscr{C}_k\left(\frac{\log y}{6 + \log P(q_0)}\right) \subseteq \mathscr{C}_k(\log y).$$

Comme $\rho(u) \gg_k 1$ lorsque $1 \leq u \leq k+1$, on voit que (4.27) est encore satisfaite dans ce cas.

Evaluons ensuite, sous l'hypothèse supplémentaire $\Xi(q) = 1$, le terme de (4.26) impliquant $\alpha(q_0)$. Si $u > k+1$ on déduit de (4.24) que

$$\begin{aligned} S_1 &\ll_k \{\alpha(q_0)\log y\}^{-k} y^{\alpha(q_0)(k-u)} \\ &\ll \left\{\frac{1 + \log P(q_0)}{\log y}\right\}^k (\log x)^{\frac{5}{4}(k+1-u)-\frac{5}{4}} \\ &\ll \left\{\frac{1 + \log P(q_0)}{\log y}\right\}^{k+1} e^{\frac{5}{4}(k+1-u)\log u} \\ &\ll_k \left\{\frac{1 + \log P(q_0)}{\log y}\right\}^{k+1} \rho(u). \end{aligned} \tag{4.28}$$

Si $1 \leq u \leq k+1$, on utilise l'hypothèse

$$u \in \mathscr{C}_k\left(\frac{\log y}{6 + \log P(q_0)}\right)$$

sous la forme

$$S_1 \ll \left\{\frac{6 + \log P(q_0)}{\log y}\right\}^t \exp\left\{-\frac{(u-t)\log y}{6 + \log P(q_0)}\right\} \ll_k \left\{\frac{1 + \log P(q_0)}{\log y}\right\}^{k+1}.$$

Cela implique encore (4.28). Nous avons finalement établi

$$S_1 \ll \rho(u) A_{k+1}(q)\left(\frac{1}{\log y}\right)^{k+1}. \tag{4.29}$$

Pour compléter la démonstration du théorème, nous allons montrer que, sous les hypothèses effectuées, nous avons

$$a_j(q) - a_j(q_0) \ll_k \frac{A_{k+1}(q)}{(\log y)^{k+1}} \quad (0 \leq j \leq k) \tag{4.30}$$

et

$$\Lambda_q(x, y) - \Lambda_{q_0}(x, y) \ll x\rho(u) \frac{A_{k+1}(q)}{(\log y)^{k+1}}. \tag{4.31}$$

Cela suffit pleinement à établir le résultat annoncé.

Grâce à (4.14), nous avons pour $|s| < 1$,

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j(q)s^j = \prod_{p \mid q/q_0} (1 - p^{-s-1}) \sum_{j=0}^{\infty} a_j(q_0)s^j.$$

Désignons par $T(s)$ le produit sur p. Pour $|s| \leqslant \frac{1}{2}$, on a

$$|T(s) - 1| \ll \prod_{p|q/q_0} (1 + p^{-\frac{1}{2}}) - 1 \leqslant (1 + (\omega(q) + \log y)^{-k-2})^{\omega(q)} - 1 \ll (\log y)^{-k-1}.$$

On déduit donc des formules de Cauchy et de (4.16) appliquée à q_0 que l'on a

$$\begin{aligned} a_j(q) - a_j(q_0) &= \sum_{m=1}^{j} \frac{1}{m!} T^{(m)}(0) a_{j-m}(q_0) \\ &\ll \frac{(\log_2(2 + q_0))^j}{(\log y)^{k+1}} \ll \left\{\frac{1 + \log P(q_0)}{\log y}\right\}^{k+1}. \end{aligned}$$

La dernière majoration provient de l'estimation $\log_2(2 + q_0) \ll 1 + \log P(q_0)$ qui est valable pour tout entier q_0 sans facteur carré. De plus, en faisant appel à l'évaluation

$$a_{j-m}(q_0) \ll_j 2^{\omega(q_0)},$$

qui découle trivialement de (4.18) et (4.19), on obtient encore

$$a_j(q) - a_j(q_0) \ll \frac{2^{\omega(q_0)}}{(\log y)^{k+1}} \quad (1 \leqslant j \leqslant k).$$

Cela complète la preuve de (4.30).

Pour montrer (4.31), observons que l'on a pour tout $t > 0$,

$$N_q(t) = \sum_{\substack{d \mid q/q_0 \\ (d, q_0)=1}} \mu(d) N_{q_0}\left(\frac{t}{d}\right)$$

d'où

$$R_q(t) - R_{q_0}(t) = \sum_{\substack{d \mid q/q_0 \\ (d, q_0)=1,\, d>1}} \frac{\mu(d)}{d} R_{q_0}\left(\frac{t}{d}\right).$$

En faisant appel à (4.13) sous la forme légèrement altérée

$$R_{q_0}(t) \ll \min\{2^{\omega(q_0)} t^{-\frac{5}{6}}, t^{-\alpha(q_0)}\} \quad (t > 0)$$

et en remarquant que $\alpha(q_0) \leqslant \frac{5}{6}$, on obtient

$$R_q(t) - R_{q_0}(t) \ll \sum_{\substack{d \mid q/q_0 \\ d>1}} \frac{\mu(d)^2}{d^{\frac{1}{6}}} \min\{2^{\omega(q_0)} t^{-\frac{5}{6}}, t^{-\alpha(q_0)}\}.$$

La somme en d n'excède pas

$$\{1 + (\omega(q) + \log y)^{-k-2}\}^{\omega(q)} - 1 \ll \left(\frac{1}{\log y}\right)^{k+1}$$

d'où

$$R_q(t) - R_{q_0}(t) \ll \frac{\min\{2^{\omega(q_0)}t^{-\frac{5}{6}}, t^{-\alpha(q_0)}\}}{(\log y)^{k+1}}. \tag{4.32}$$

Nous pouvons alors écrire

$$\begin{aligned}\Lambda_q(x, y) - \Lambda_{q_0}(x, y) &= x\int_{0-}^{+\infty} \rho(u-v)\, d\{R_q(y^v) - R_{q_0}(y^v)\}\\ &= x\rho(u)\left\{\frac{\varphi(q)}{q} - \frac{\varphi(q_0)}{q_0}\right\} + x\{R_q(x) - R_{q_0}(x)\}\\ &\quad + x\int_0^{+\infty} \rho'(u-v)\{R_q(y^v) - R_{q_0}(y^v)\}\, dv.\end{aligned}$$

Le premier terme de cette expression est clairement

$$\ll x\rho(u)(\log y)^{-k-1}.$$

En utilisant (4.32) et (4.24) on voit que le second est

$$\begin{aligned}&\ll \frac{x}{(\log y)^{k+1}} \min\{2^{\omega(q_0)}e^{-\frac{5}{3}u\log u}, e^{-\frac{5}{4}u\log u}\}\\ &\ll x\rho(u)\frac{A_{k+1}(q)}{(\log y)^{k+1}}.\end{aligned}$$

On majore le troisième terme en faisant appel à (4.32) et à (4.4). On obtient

$$\ll x\rho'(u)\frac{A_1(q)}{(\log y)^{k+2}} \ll x\rho(u)\frac{A_1(q)}{(\log y)^{k+1}}.$$

Cela implique bien (4.31) et achève ainsi la démonstration du théorème 3.

5. *Preuve des théorèmes* 1 *et* 2

La démonstration nécessite le résultat suivant concernant le comportement local de $\Psi(x, y)$ et établi dans [**26**, Lemma 3]. Pour $x \geqslant y \geqslant 2$, nous posons

$$\beta = \beta(x, y) := \frac{\log u + \log_2(u+1) + B}{\log y} \tag{5.1}$$

où B est une constante absolue convenable.

Lemme 5.1. *Soit* $\varepsilon > 0$. *Sous les conditions*

$$x \geqslant 2, \quad (\log x)^{1+\varepsilon} \leqslant y \leqslant x, \quad 1 \leqslant d \leqslant x, \tag{5.2}$$

on a uniformément

$$\Psi\left(\frac{x}{d}, y\right) \ll \frac{\Psi(x, y)}{d^{1-\beta}}. \tag{5.3}$$

Nous sommes maintenant en mesure d'établir le théorème 1. La première étape consiste à appliquer la formule d'inversion de Möbius (1.4) et l'évaluation de Saias (1.5). Désignons par $\bar{q}$ le plus grand diviseur de q tel que $P(\bar{q}) \leqslant y$. Sous l'hypothèse (H_ε), on obtient

$$\begin{aligned}\Psi_q(x, y) = \Psi_{\bar{q}}(x, y) &= \sum_{d \mid \bar{q}} \mu(d)\Psi\Big(\frac{x}{d}, y\Big) \\ &= \sum_{d \mid \bar{q}} \mu(d)\Big\{\Lambda\Big(\frac{x}{d}, y\Big) + O\Big(Y_{\varepsilon/2}^{-1}\Psi\Big(\frac{x}{d}, y\Big)\Big)\Big\}.\end{aligned}$$

Cela découle de (1.5) lorsque $x/d \geqslant y$ et du fait que $\Psi(t, y) = \Lambda(t, y) = [t]$ $(0 < t \leqslant y)$ dans le cas contraire. (Nous utilisons ici le choix particulier explicité en (1.6) de la définition de $\Lambda(x, y)$ aux points entiers.) En regroupant les termes principaux, il suit

$$\Psi_q(x, y) = \Lambda_{\bar{q}}(x, y) + O\Big(Y_{\varepsilon/2}^{-1} \sum_{d \mid \bar{q}} \mu(d)^2\Psi\Big(\frac{x}{d}, y\Big)\Big). \tag{5.4}$$

Grâce à (5.3), on voit que la somme en d est

$$\ll \Psi(x, y) \prod_{p \mid \bar{q}} (1 + p^{\beta-1}) \leqslant \Psi(x, y) \prod_{p \leqslant P} (1 + p^{\beta-1}) \tag{5.5}$$

où P est le $\omega(q)$-ième nombre premier. La seconde majoration est clairement valide dès que $\beta < 1$; en fait $\beta = o(1)$ lorsque x et y tendent vers l'infini dans (H_ε). On a certainement

$$P \ll \omega(q)\log(2\omega(q)) \ll \log(2q)$$

et l'hypothèse (Q_ε) implique $P^\beta \ll 1$. Le produit de (5.5) est donc

$$\ll \prod_{p \leqslant P} \Big(1 + O\Big(\frac{1}{p}\Big)\Big) \ll (\log P)^{O(1)} \ll (\log y)^{O(1)}.$$

En reportant dans (5.4), il vient

$$\Psi_q(x, y) = \Lambda_{\bar{q}}(x, y) + O(Y_\varepsilon^{-1}\Psi(x, y)). \tag{5.6}$$

Cela implique en particulier, sous (H_ε) et (Q_ε),

$$\Lambda_{\bar{q}}(x, y) \ll \Psi(x, y). \tag{5.7}$$

Cette estimation persiste également pour $0 < x \leqslant y$ puisque dans ce cas $\Lambda_{\bar{q}}(x, y) = N_{\bar{q}}(x) \leqslant x$. Or on a

$$\Lambda_q(x, y) = \sum_{d \mid q/\bar{q}} \mu(d)\Lambda_{\bar{q}}\Big(\frac{x}{d}, y\Big).$$

Grâce à (5.7) et (5.3), on en déduit

$$\Lambda_q(x, y) = \Lambda_{\bar{q}}(x, y) + O\Big(\Psi(x, y) \sum_{\substack{d \mid q/\bar{q} \\ d>1}} \frac{\mu(d)^2}{d^{1-\beta}}\Big). \tag{5.8}$$

Sous l'hypothèse (Q_ε) la somme en d n'excède pas

$$\begin{aligned}\prod_{\substack{p \mid q \\ p>y}} (1 + p^{\beta-1}) - 1 &\leqslant \Big(1 + \frac{1}{\sqrt{y}}\Big)^{\omega(q)} - 1 \\ &\leqslant \exp\Big\{O\Big(\frac{\log q}{\sqrt{y}}\Big)\Big\} - 1 \ll y^{-\frac{1}{3}}.\end{aligned}$$

En insérant (5.8) dans (5.6), on obtient finalement

$$\Psi_q(x, y) = \Lambda_q(x, y) + O(Y_\varepsilon^{-1}\Psi(x, y)). \tag{5.9}$$

Dans un deuxième temps, nous appliquons le théorème 3 avec $k = [1/\varepsilon]$ en traitant les termes d'indice $j \geqslant 1$ dans le développement asymptotique comme des termes d'erreur. Sous l'hypothèse (Q_ε) on a d'une part, grâce à (1.17) et (4.3),

$$a_j(q)\frac{\rho^{(j)}(u)}{(\log y)^j} \ll \frac{\varphi(q)}{q}\rho(u)\frac{\log(1+u)\log_2(q+2)}{\log y} \qquad (j \geqslant 1)$$

et d'autre part, par (1.20),

$$\rho(u)A_{k+1}(q)\left\{\frac{\log(1+u)}{\log y}\right\}^{k+1} \ll \rho(u)\left\{\frac{\log(1+u)}{\log y}\right\}^{\varepsilon(k+1)}$$
$$\ll \frac{\varphi(q)}{q}\rho(u)\frac{\log(1+u)\log_2(q+2)}{\log y}.$$

Sous l'hypothèse supplémentaire

$$u \in \mathscr{C}_k\left(\frac{\log y}{6(k+3)\log_2(qy)}\right),$$

on peut donc écrire

$$\Lambda_q(x, y) = \frac{\varphi(q)}{q}x\rho(u)\left\{1 + O\left(\frac{\log(1+u)\log_2(q+2)}{\log y}\right)\right\}.$$

En reportant cette évaluation dans (5.9) et en tenant compte de (1.10), nous obtenons ainsi que l'estimation

$$\Psi_q(x, y) = \frac{\varphi(q)}{q}\Psi(x, y)\left\{1 + O\left(\frac{\log(1+u)\log_2(q+2)}{\log y}\right)\right\}. \tag{5.10}$$

a lieu uniformément sous les conditions (H_ε), (Q_ε) et

$$u \in \mathscr{C}_{[1/\varepsilon]}\left(\frac{\log y}{6(k+3)\log_2(qy)}\right).$$

Lorsque cette dernière hypothèse n'est pas satisfaite, il existe un entier t $(1 \leqslant t \leqslant k)$, tel que $t \leqslant u \leqslant t + \eta$ avec

$$\eta := 6(k+3)^2 \cdot \frac{\log_2(qy)\log_3 y}{\log y}.$$

Posons $u_i = u + (-1)^i 2\eta$ $(i = 1, 2)$ et $y_i = x^{1/u_i}$. Alors (5.10) est valide pour $y = y_i$. De plus d'après (1.10), on a, pour $i = 1, 2$,

$$\Psi(x, y_i) = x\rho(u_i)\left\{1 + O\left(\frac{1}{\log y}\right)\right\} = x\rho(u)\{1 + O(\eta)\},$$

où la seconde évaluation provient du fait que ρ est lipschitzienne d'ordre 1 sur $[\frac{1}{2}, +\infty)$. En remarquant finalement que

$$\Psi_q(x, y_2) \leqslant \Psi_q(x, y) \leqslant \Psi_q(x, y_1)$$

on obtient (1.3) avec un terme d'erreur relatif $\ll \eta$. Associée à (5.10), cette estimation complète la preuve du théorème 1.

Le théorème 2 découle maintenant de (5.9) puisque, sous les hypothèses indiquées, le théorème 1 implique

$$\Lambda_q(x, y) \asymp \frac{\varphi(q)}{q} \Psi(x, y). \tag{5.11}$$

6. *Preuve des théorèmes* 4 *et* 5

Soit χ un caractère de Dirichlet modulo $q > 1$ et $L(s, \chi)$ la série de Dirichlet correspondante. Nous posons

$$L(s, \chi ; y) := \prod_{p \leqslant y} (1 - \chi(p) p^{-s})^{-1} \quad (y \geqslant 2). \tag{6.1}$$

Ici et dans la suite s désigne une variable complexe et nous définissons implicitement les réels σ et τ par $s = \sigma + i\tau$. Le principe de la démonstration consiste à expliciter l'approximation de $L(s ; \chi)$ par $L(s, \chi ; y)$ lorsque $\chi \neq \chi_0$ et σ est assez proche de 1. Cela permet la mise en évidence d'un terme principal dans l'intégrale de Perron relative à (6.1).

Comme on peut s'y attendre, la localisation des zéros des fonctions L joue ici un rôle déterminant. Nous désignons par b une constante absolue positive telle que $\prod_{\chi \neq \chi_0} L(s, \chi)$ ait au plus un zéro β dans la région

$$\sigma \geqslant 1 - \frac{6b}{\log(q(1 + |\tau|))}. \tag{6.2}$$

Nous savons (cf. [**6**, Chapter 14]) que β est réel, simple, et satisfait pour chaque $\varepsilon > 0$, à

$$1 - \beta \gg_\varepsilon q^{-\varepsilon}. \tag{6.3}$$

Nous pouvons supposer sans perte de généralité que $b \leqslant \frac{1}{6}$ et

$$1 - \beta \leqslant b / \log q. \tag{6.4}$$

La fonction de Buchstab $\omega(t)$ apparaît dans cette étude, de façon assez inattendue, cf. Lemme 6.3. Elle est définie comme la solution continue sur $[1, +\infty)$ de l'équation différentielle aux différences

$$\begin{cases} t\omega(t) = 1 & (1 \leqslant t \leqslant 2), \\ (t\omega(t))' = \omega(t-1) & (t > 2). \end{cases} \tag{6.5}$$

Il est pratique de prolonger $\omega(t)$ par 0 pour $-\infty < t < 1$, ainsi que $\omega'(t)$ par continuité à droite sur $\mathbb{R}$. De Bruijn a montré que

$$\lim_{t \to \infty} \omega(t) = e^{-\gamma} \tag{6.6}$$

où γ est la constante d'Euler. La définition (6.5) fournit facilement une équation différentielle du premier ordre satisfaite par la transformée de Laplace

$$\hat{\omega}(s) := \int_0^{+\infty} e^{-ts} \omega(t)\, dt$$

et (6.6) donne la valeur de la constante d'intégration. Le résultat de ce calcul classique est

$$1+\hat{\omega}(s)=\exp J(s) \quad (\sigma>0) \tag{6.7}$$

avec

$$J(s):=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-s-t}}{s+t}\,dt. \tag{6.8}$$

Par (6.5), on a

$$t\omega'(t)=-\int_{t-1}^{t}\omega'(v)\,dv \quad (t\geqslant 2)$$

de sorte que

$$t\,|\omega'(t)|\leqslant\int_{t-1}^{t}|\omega'(v)|\,dv \quad (t\geqslant 2). \tag{6.9}$$

Cela permet de comparer $|\omega'(t)|$ à la fonction de Dickman $\rho(t)$ qui satisfait l'*équation* fonctionnelle associée à (6.9). On déduit sans peine de (6.9) et de la majoration triviale $|\omega'(t)|/\rho(t)\ll 1$ $(0\leqslant t\leqslant 3)$ l'estimation

$$|\omega'(t)|\ll\rho(t) \quad (t\geqslant 0). \tag{6.10}$$

D'après (4.1), cela montre que l'intégrale de Laplace inverse pour $\omega'(t)$ converge pour toute abscisse d'intégration. Grâce à (6.7), nous pourrons ainsi affiner (6.10)—Lemme 6.2. L'évaluation classique de de Bruijn, récemment précisée par Alladi [**1**],

$$\rho(t)\sim\frac{1}{\sqrt{(2\pi t)}}\exp\{\gamma-t\xi(t)+I(\xi(t))\} \tag{6.11}$$

nous sera utile. Nous avons posé ici

$$I(s)=\int_0^s\frac{e^v-1}{v}\,dv \tag{6.12}$$

et défini $\xi=\xi(t)$ comme l'unique solution positive de l'équation $e^\xi=1+t\xi$ $(t>1)$, $\xi(1)=0$. On constate sans peine que $\xi(t)\sim\log t$, $I(\xi(t))\sim t$ $(t\to\infty)$.

LEMME 6.1. *Pour* $s\in\mathbb{C}\backslash(-\infty,0]$, *on a*

$$I(-s)+J(s)=-\gamma-\log s \tag{6.13}$$

où le logarithme complexe est pris en détermination principale.

REMARQUE. Les équations (6.7) et (6.13) impliquent

$$1+\hat{\omega}(s)=s^{-1}\exp\{-\gamma-I(-s)\}. \tag{6.14}$$

Cela définit un prolongement méromorphe de $\hat{\omega}(s)$ au plan complexe tout entier en une fonction ayant pour seule singularité un pôle d'ordre 1 en $s=0$.

Démonstration. On a

$$-\gamma = \int_0^{-1} \frac{e^v - 1}{v}\,dv + \int_{-1}^{-\infty} e^v \frac{dv}{v}$$

et l'on peut, sans altérer la valeur de cette expression, remplacer, dans la seconde intégrale, le chemin réel $[-1, -\infty)$ par la ligne brisée composée du segment $[-1, -s]$ et de la demi droite $\{-s-t\colon\ t \geqslant 0\}$. Il suit

$$-\gamma = \int_0^{-1} \frac{e^v - 1}{v}\,dv + \int_{-1}^{-s} \frac{e^v - 1}{v}\,dv + \int_{-1}^{-s} \frac{dv}{v} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-s-t}}{s+t}\,dt.$$

En regroupant les deux premières intégrales, on obtient (6.13).

LEMME 6.2. *Il existe une constante absolue $a > 0$ telle que*

$$\left.\begin{array}{r}|\omega'(t)|\\ |\omega(t) - e^{-\gamma}|\end{array}\right\} \ll \rho(t)\exp\left\{\frac{-at}{\log^2(t+2)}\right\} \quad (t \geqslant 0). \tag{6.15}$$

Démonstration. Observons d'abord que la première majoration implique facilement la seconde. Par (6.6) on a en effet

$$|\omega(t) - e^{-\gamma}| = \left|\int_t^{+\infty} \omega'(v)\,dv\right|$$

et le résultat souhaité découle alors de la décroissance du facteur exponentiel de (6.15) et de l'estimation

$$\int_t^{\infty} \rho(v)\,dv \ll \int_t^{\infty} \frac{-\rho'(v)}{\log(v+2)}\,dv \ll \frac{\rho(t)}{\log(2+t)}$$

qui provient de (4.3).

Soit $h(s)$ la transformée de Laplace de $\omega'(t)$. Comme nous l'avons déjà remarqué, (6.10) implique

$$\omega'(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\kappa - i\infty}^{\kappa + i\infty} h(s) e^{ts}\,ds \tag{6.16}$$

pour tout $\kappa \in \mathbb{R}$. On a $h(s) = s\hat{\omega}(s) - e^{-s}$, où le second terme provient de la discontinuité de $\omega(t)$ en $t = 1$. Nous choisissons $\kappa = -\xi$, avec $\xi = \xi(t)$ et considérons d'abord la contribution à (6.16) du domaine $|\tau| > e^{\xi}$. De l'évaluation

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{s+t}\,dt = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} + O\left(\frac{1}{|\tau|^3}\right),$$

on déduit de (6.7),

$$\begin{aligned} h(s) &= -\frac{e^{-s}}{s} + \frac{e^{-2s}}{2s} + O\left(\frac{e^{3\xi}}{|\tau|^3}\right) \\ &= -\frac{e^{-s}}{i\tau} + \frac{e^{-2s}}{2i\tau} + O\left(\frac{e^{3\xi}}{|\tau|^3}\right) \quad (|\tau| > e^{\xi}). \end{aligned}$$

Par la seconde formule de la moyenne, cela implique que la contribution à (6.16) de $\{-\xi + i\tau\colon\ |\tau| > e^{\xi}\}$ est $\ll e^{-t\xi + 2\xi} \ll \rho(t) e^{-\frac{1}{2}t}$ où la seconde estimation découle de (6.11). Pour évaluer la contribution du domaine complémentaire, nous utilisons (6.14) sous la forme

$$h(s) = e^{-\gamma - I(-s)} - s - e^{-s}.$$

Admettons un instant que l'on ait pour $a > 0$ convenable

$$\operatorname{Re}\{I(\xi + i\tau) + I(\xi)\} \geqslant \frac{2at}{\log^2(2+t)} =: T \quad (|\tau| \leqslant e^{\xi}). \tag{6.17}$$

Il suit

$$\int_{-e^{\xi}}^{e^{\xi}} |h(s)e^{ts}|\, d\tau \ll e^{-t\xi+\xi}[e^{\xi} + e^{I(\xi)-T}] \ll \rho(t)e^{-\frac{1}{2}T}.$$

On obtient ainsi (6.15).

Montrons maintenant (6.17). Le membre de gauche vaut

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \{e^{v\xi}(1+\cos(\tau v)) - 2\} \frac{dv}{v} \\
&\geqslant -\int_0^{\frac{1}{2}} (1-\cos(\tau v)) \frac{dv}{v} + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left\{e^{v\xi}(1+\cos(\tau v)) - \frac{2}{v}\right\} dv \\
&= -2\int_0^{\tau/4} \sin^2(v) \frac{dv}{v} + \left[\frac{e^{v\xi}}{\xi} + \operatorname{Re}\left(\frac{e^{v(\xi+i\tau)}}{\xi+i\tau}\right)\right]_{\frac{1}{2}}^1 - \log 4 \\
&\geqslant O(\log(1+\tau^2)) + e^{\xi}\left\{\frac{1}{\xi} + \frac{\cos\lambda}{\sqrt{(\xi^2+\tau^2)}}\right\} + O\left(\sqrt{\frac{t}{\xi}}\right)
\end{aligned}$$

où l'on a posé $\lambda = \tau - \operatorname{Arctan}(\tau/\xi)$. Il existe une constante absolue τ_0 telle que $\cos\lambda \geqslant 0$ pour $|\tau| \leqslant \tau_0$. La minoration précédente est alors $\geqslant t + O(\sqrt{(t/\xi)})$. Lorsque $|\tau| > \tau_0$, elle est

$$\geqslant e^{\xi}\left\{\frac{1}{\xi} - \frac{1}{\sqrt{(\xi^2+\tau_0^2)}}\right\} + O\left(\sqrt{\frac{t}{\xi}}\right) \gg e^{\xi}\xi^{-3} + O\left(\sqrt{\frac{t}{\xi}}\right) \gg \frac{t}{\log^2(2+t)} + O(1).$$

Cela établit (6.17) et complète la preuve du lemme 6.2.

LEMME 6.3. *Posons* $Y := \exp\sqrt{\log y}$ $(y \geqslant 2)$. *On a uniformément pour* $y \geqslant 2$, $2 \leqslant q \leqslant y^{b/(2\log_2 y)}$, $\sigma \geqslant 1 - b/(2\log(qY))$, $|\tau| \leqslant Y$ *et* χ *non principal modulo* q,

$$L(s,\chi\,;y) = L(s,\chi)(1+\theta(\chi)\hat{\omega}((s-\beta)\log y))\{1+O(y^{-b/\log(qY)})\} \tag{6.18}$$

où $\theta(\chi)$ *vaut* 1 *ou* 0 *selon que* β *est ou non un zéro de* $L(s,\chi)$.

REMARQUE. Lorsque $\theta(\chi) = 1$ et $s \in \mathbb{R}$, $s \leqslant \beta$, le terme principal de (6.18) doit être interprété en faisant appel à (6.14), le pôle de $\hat{\omega}((s-\beta)\log y)$ en $s = \beta$ étant compensé par le zéro de $L(s,\chi)$.

Démonstration. Observons d'abord que l'on a sous les hypothèses indiquées

$$-\frac{L'}{L}(s,\chi\,;y) = \sum_{n\leqslant y} \Lambda(n)\chi(n)n^{-s} + O(y^{\frac{1}{2}-\sigma}). \tag{6.19}$$

En effet, le terme d'erreur est en valeur absolue au plus égal à

$$\sum_{\substack{n>y\\ P(n)\leqslant y}} \Lambda(n)n^{-\sigma} = \sum_{p\leqslant y}\ \sum_{\nu>\log y/\log p} \log p\,.\,p^{-\nu\sigma}$$
$$\leqslant \sum_{p\leqslant\sqrt{y}} \frac{\log p}{y^{\sigma}} + \sum_{\sqrt{y}<p\leqslant y} \frac{\log p}{p^{2\sigma}} \ll y^{\frac{1}{2}-\sigma}.$$

Supposons maintenant $\sigma \leqslant 1 + (2/\log Y)$. La formule de Perron effective—dans la version du Lemma 3.19 de [**37**]—permet d'écrire le terme principal de (6.19) sous la forme

$$\frac{-1}{2\pi i}\int_{\kappa-iY^3}^{\kappa+iY^3} \frac{L'}{L}(s+w,\chi)\frac{y^{w}}{w}\,dw + O(y^{1-\sigma}Y^{-1}\log^2 y) \tag{6.20}$$

avec

$$\kappa := 1-\sigma+\frac{1+2\log Y}{\log y} > 0.$$

Pour estimer l'intégrale en w, nous déplaçons l'abscisse d'intégration vers la gauche jusqu'à $-\eta := 1-\sigma-2b/\log(qY)$. La partie réelle de l'argument de $-L'/L$ reste donc constamment au moins égale à $\sigma-\eta = 1-2b/\log(qY)$, et il découle de la définition de b que le segment d'intégration a traveısé, outre le pôle $w=0$, au plus une autre singularité, à savoir $w=\beta-s$. Par le théorème des résidus, l'intégrale de (6.20) vaut donc

$$-\frac{L'}{L}(s,\chi) - \theta(\chi)\frac{y^{\beta-s}}{\beta-s} - \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathscr{L}} \frac{L'}{L}(s+w,\chi)y^{w}\frac{dw}{w}, \tag{6.21}$$

où $\mathscr{L}$ désigne la ligne brisée joignant les points $\kappa \pm iY^3$, en passant par $-\eta \pm iY^3$ et parcourue dans le sens trignométrique inverse. Lorsque $w \in \mathscr{L}$, on a grâce à (6.4) (cf. [**6**, Chapter 19])

$$\frac{L'}{L}(s+w,\chi) \ll \log^2(qY) + |s+w-\beta|^{-1} \ll \log^2(qY).$$

On voit ainsi que la contribution à l'intégrale de (6.21) du segment vertical de $\mathscr{L}$ est

$$\ll y^{-\eta}\int_0^{Y^3} \frac{\log^2(qY)}{\eta+t}\,dt \ll y^{1-\sigma-3b/(2\log(qY))}.$$

Celle des segments horizontaux peut être majorée par

$$\ll y^{1-\sigma}Y^{-3}\log(qY) \ll y^{1-\sigma-3b/(2\log(qY))}.$$

En tenant compte de (6.19), nous avons finalement obtenu, pour $\sigma \leqslant 1+(2/\log Y)$,

$$\frac{L'}{L}(s,\chi\,;y) = \frac{L'}{L}(s,\chi) + \theta(\chi)\frac{y^{\beta-s}}{\beta-s} + O(y^{1-\sigma-3b/(2\log(qY))}). \tag{6.22}$$

Cette estimation est encore valable pour $\sigma > 1+(2/\log Y)$, quitte à remplacer, dans le terme d'erreur, $y^{1-\sigma}$ par $y^{(1-\sigma)/2}$. Cela découle, grâce à (6.19), d'une simple sommation d'Abel, à partir de la formule classique (cf. [**6**, p. 122])

$$\sum_{n\leqslant t}\chi(n)\Lambda(n)=-\theta(\chi)t^{\beta}\beta^{-1}+O(ty^{-2b/\log(qY)}),$$

valable pour $t\geqslant y$, $2\leqslant q\leqslant y^{b/2\log_2 y}$. En intégrant la relation (6.22) ainsi modifiée sur la demi-droite $\{s+t\colon\ t\geqslant 0\}$ et en faisant appel à (6.7), on obtient le résultat annoncé.

Preuve du théorème 4. Posons

$$w(z):=\begin{cases}0 & (0<z<1),\\ 1 & (z\geqslant 1).\end{cases}$$

Nous utiliserons à plusieurs reprises l'estimation suivante que l'on établit facilement par intégration complexe

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-iT}^{\alpha+iT}z^s\frac{ds}{s}=w(z)+O\Big(\frac{z^\alpha}{1+T\,|\log z|}\Big)\quad(\alpha>0,\ T>0). \tag{6.23}$$

Dans un premier temps, nous spécialisons $z=x/n$ $(n=1,2,\ldots)$, multiplions (6.23) par $\chi(n)$ et sommons sur tous les entiers $n\geqslant 1$ tels que $P(n)\leqslant y$. Nous obtenons

$$\sum_{n\in S(x,y)}\chi(n)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-iT}^{\alpha+iT}L(s,\chi\,;y)\frac{x^s}{s}ds+\mathfrak{R}\quad\text{(disons)}. \tag{6.24}$$

On constate aisément que l'on a, si $\frac{1}{2}\leqslant\alpha\leqslant\frac{3}{2}$,

$$\mathfrak{R}\ll\frac{x^\alpha\zeta(\alpha,y)}{\sqrt{T}}+\Big\{\Psi\Big(x+\frac{x}{\sqrt{T}},y\Big)-\Psi\Big(x-\frac{x}{\sqrt{T}},y\Big)\Big\} \tag{6.25}$$

avec

$$\zeta(\alpha,y):=\prod_{p\leqslant y}(1-p^{-\alpha})^{-1}.$$

Nous choisissons $T=Y=\exp\sqrt{\log y}$, et $\alpha=\alpha(x,y)$, l'unique solution de l'équation

$$\sum_{p\leqslant y}\frac{\log p}{p^\alpha-1}=\log x.$$

D'après [**25**, Theorems 1, 2], on a dans le domaine considéré en x, y,

$$x^\alpha\zeta(\alpha,y)\ll\Psi(x,y)\sqrt{(\log x\log y)}. \tag{6.26}$$

De plus, le second terme du membre de droite de (6.25) est $\ll\Psi(x,y)/\sqrt{T}$. Cela découle d'un résultat de Hildebrand [**22**, Theorem 3]. Sous l'hypothèse (1.24) avec c_0 convenable, on obtient l'estimation

$$\mathfrak{R}\ll\Psi(x,y)e^{-\frac{1}{3}\sqrt{\log y}}.$$

Il reste à évaluer l'intégrale de (6.24). On peut, à cette fin, faire appel à (6.18) car on a (cf. [**25**, équation (7.8)])

$$\alpha=1-\frac{\xi(u)}{\log y}+O\Big(\frac{1}{(\log y)^2}\Big)\geqslant 1-\frac{b}{2\log(qY)} \tag{6.27}$$

sous l'hypothèse $\log q \leqslant c_2 \log y/\log_2 x$. La relation (6.18) implique en particulier que son terme principal est

$$\ll |L(s, \chi\,; y)| \leqslant \zeta(\alpha, y).$$

Son terme résiduel fournit donc une contribution globale

$$\ll x^{\alpha}\zeta(\alpha, y)\log Y y^{-b/\log(qY)} \ll \Psi(x, y)E(q, y),$$

où l'on a posé

$$E(q, y) := e^{-\frac{1}{2}b\sqrt{\log y}} + y^{-b/(2\log q)}. \tag{6.28}$$

Nous avons donc obtenu à ce stade

$$\sum_{n\in S(x, y)} \chi(n) = P_1 + P_2 + O(\Psi(x, y)E(q, y)) \tag{6.29}$$

avec

$$P_1 := \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-iY}^{\alpha+iY} L(s, \chi)\frac{x^s}{s}\,ds,$$

$$P_2 := \frac{\theta(\chi)}{2\pi i}\int_{\alpha-iY}^{\alpha+iY} L(s, \chi)\hat{\omega}((s-\beta)\log y)\frac{x^s}{s}\,ds.$$

Estimons d'abord P_1. Pour $s = \alpha + i\tau$, $|\tau| \leqslant Y$, on a

$$L(s, \chi) = \sum_{n\leqslant\frac{1}{2}y} \chi(n)n^{-s} + O(qYy^{-\alpha}). \tag{6.30}$$

Cela provient, par sommation d'Abel, de la majoration triviale

$$K(t) := \sum_{n\leqslant t} \chi(n) \ll q. \tag{6.31}$$

En faisant appel à (6.23), on déduit de (6.30) l'évaluation

$$P_1 = K(\tfrac{1}{2}y) + O\Big(\frac{x^{\alpha}}{Y}\sum_{n\leqslant\frac{1}{2}y} n^{-\alpha} + qY\Big(\frac{x}{y}\Big)^{\alpha}\log Y\Big)$$

$$\ll q + \frac{x^{\alpha}\zeta(\alpha, y)}{Y} + x^{\alpha}y^{-\frac{1}{2}} \ll \Psi(x, y)Y^{-\frac{1}{2}},$$

où nous avons utilisé (6.31), (6.26), et (6.27). Ainsi, P_1 est de l'ordre du terme d'erreur de (6.29).

Pour évaluer P_2, nous remarquons d'abord que l'on a

$$\frac{L(s, \chi)}{s} = \int_0^{+\infty} e^{-sv}K(e^v)\,dv. \tag{6.32}$$

Le théorème de convolution implique donc

$$\frac{L(s, \chi)}{s}\,\hat{\omega}((s-\beta)\log y) = \hat{F}(s) \tag{6.33}$$

avec

$$F(t) := e^{\beta t}\int_0^{+\infty} y^{-\beta v}\omega\Big(\frac{t}{\log y} - v\Big)K(y^v)\,dv.$$

Puisque $L(\beta, \chi) = 0$, on déduit de (6.33) que

$$\int_0^{+\infty} y^{-\beta v} K(y^v)\, dv = 0$$

et l'on peut écrire, pour tout $t > 0$,

$$F(t \log y) = y^{\beta t} \int_0^{+\infty} y^{-\beta v}\{\omega(t-v) - e^{-\gamma}\} K(y^v)\, dv. \tag{6.34}$$

On a trivialement $F(t) \ll e^{\beta t} q$. Donc l'intégrale de Laplace inverse

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa - i\infty}^{\kappa + i\infty} \hat{F}(s) e^{ts}\, ds \tag{6.35}$$

n'est *a priori* convergente que pour $\kappa > \beta$. Cependant, (6.14) montre que $\hat{F}(s)$ est holomorphe pour $\sigma > 0$; de plus, (6.7) et les majorations classiques de $L(s, \chi)$ impliquent

$$\hat{F}(s) \ll_{\sigma, q} \tau^{-\sigma} \quad (0 < \sigma < 1,\ |\tau| \geqslant 1)$$

puisque $\operatorname{Re} J(s) \leqslant e^{-\sigma} |\tau|^{-1}$. Le théorème des résidus nous permet donc d'inférer que la représentation (6.35) est valide pour tout $\kappa > 0$. D'où, lorsque $\theta(\chi) = 1$,

$$P_2 = F(\log x) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\substack{|\tau| > Y \\ \sigma = \alpha}} \hat{F}(s) x^s\, ds. \tag{6.36}$$

Lorsque x, y satisfont (1.24), $s = \alpha + i\tau$, $|\tau| > Y$, on a d'une part

$$L(s, \chi) \ll (q\tau)^{1-\alpha} \ll \tau^{1-\alpha}$$

et d'autre part, par (6.7) et (6.27),

$$1 + \hat{\omega}((\beta - s)\log y) = \exp\left\{O\left(\frac{y^{\beta - \alpha}}{|\tau| \log y}\right)\right\} = 1 + O\left(\frac{e^{\xi(u)}}{|\tau| \log y}\right).$$

Il s'ensuit

$$\hat{F}(s) \ll \frac{e^{\xi(u)}}{\log y} \cdot |\tau|^{-1-\alpha}$$

et l'intégrale de (6.36) est $\ll x^\alpha Y^{-\frac{1}{2}} \ll \Psi(x, y) Y^{-\frac{1}{3}}$.

Par (6.34) et (6.15) on a encore

$$F(\log x) \ll x^\beta \int_0^{+\infty} y^{-\beta v} \rho(u - v) H(u)^{-a} e^{2av} |K(y^v)|\, dv$$

où l'on a posé

$$H(u) = \exp\left\{\frac{u}{\log^2(1+u)}\right\}.$$

Majorons $|K(y^v)|$ par y^v si $v \leqslant 2 \log q / \log y$ et par $y^{\frac{1}{2}v}$ dans le cas contraire. Il vient

$$\begin{aligned} F(\log x) &\ll x^\beta H(u)^{-a}\left\{\frac{\log q}{\log y} \rho\left(u - \frac{2\log q}{\log y}\right) + \int_0^\infty \rho(u - v)\left(\frac{y^{\beta - \frac{1}{2}}}{e^{2a}}\right)^{-v} dv\right\} \\ &\ll x^\beta \rho(u) H(u)^{-a} \log q / \log y \end{aligned}$$

où nous avons utilisé (4.3), sous la forme

$$\rho(u-\lambda) \ll \rho(u) \quad (0 \leqslant \lambda \ll 1/\log(u+1)),$$

et (4.4) avec $k=0$.

En regroupant les résultats, nous pouvons énoncer

$$\sum_{n \in S(x,y)} \chi(n) \ll \Psi(x,y)\{E(q,y) + \theta(\chi) x^{-(1-\beta)} H(u)^{-a} (\log q/\log y)\}.$$

Cela implique clairement le résultat annoncé.

Preuve du théorème 5. La relation d'orthogonalité des caractères permet d'écrire

$$\Psi(x,y\,;a,q) = \frac{1}{\varphi(q)}\Big\{\Psi_q(x,y) + \sum_{\chi \neq \chi_0} \overline{\chi(a)} \sum_{n \in S(x,y)} \chi(n)\Big\}.$$

En appliquant les théorèmes 2 et 4, on peut transformer, sous l'hypothèse supplémentaire $q \leqslant Y^{c_4}$, le second membre en

$$\frac{1}{\varphi(q)}\Big\{\Lambda_q(x,y)(1+O(Y^{-1})) + O\Big(\Psi(x,y)\Big\{\varphi(q)Y^{-2c_4} + \frac{\log q}{\log y} H(u)^{-c_3}\Big\}\Big)\Big\},$$

où le terme impliquant $H(u)$ peut être omis si $q \leqslant (\log x)^A$. On peut donc conclure grâce à (5.11).

7. *Estimations de type 'Bombieri–Vinogradov'*

Nous commençons par donner un schéma de démonstration pour le résultat suivant, qui est un peu moins précis que le théorème 6, mais d'utilité pratique équivalente. La démarche étant aujourd'hui standard (cf. par exemple [**2**, **7**, **27**, **32**]) il nous a semblé superflu de fournir tous les détails.

THÉORÈME 6'. *Soit A un nombre réel positif. Il existe une constante $B=B(A)$ telle que l'on ait pour $x \geqslant y \geqslant 2$, $Q = \sqrt{x}/(\log x)^{B(A)}$,*

$$\sum_{q \leqslant Q} \max_{(a,q)=1} \Big|\Psi(x,y\,;a,q) - \frac{\Psi_q(x,y)}{\varphi(q)}\Big| \ll \frac{x}{(\log x)^A}. \tag{7.1}$$

Le lemme général suivant est utile à plusieurs reprises dans la démonstration de ce théorème.

LEMME 7.1. *Soit $\mathcal{B}$ un ensemble de nombres entiers inclus dans* $[1,x]$. *On a*

$$\sum_{q \leqslant \sqrt{x}} \max_{(a,q)=1} \Big| \sum_{\substack{b \in \mathcal{B} \\ b \equiv a (\bmod q)}} 1 - \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\substack{b \in \mathcal{B} \\ (b,q)=1}} 1 \Big| \ll \sqrt{(x\,|\mathcal{B}|)}\,.\,\log^2 x. \tag{7.2}$$

Pour obtenir cette estimation, on transforme classiquement le membre de gauche en une somme sur des caractères primitifs. On obtient la majoration (cf. par exemple [**2**, formule (2.4)])

$$\ll \sum_{e \leqslant \sqrt{x}} \frac{1}{\varphi(e)} \sum_{2 \leqslant f \leqslant \sqrt{x}/e} \frac{1}{\varphi(f)} \sum_{\chi (\bmod f)}^{*} \Big| \sum_{\substack{b \in \mathcal{B} \\ (b,e)=1}} \chi(b) \Big|.$$

On scinde la sommation sur f en intervalles dyadiques $F<f\leqslant 2F$, puis on applique l'inégalité de Cauchy–Schwarz et celle du grand crible, soit

$$\sum_{F<f\leqslant 2F}\frac{1}{\varphi(f)}\sideset{}{^*}\sum_{\chi(\operatorname{mod} f)}\Bigg|\sum_{\substack{b\in\mathscr{B}\\(b,e)=1}}\chi(b)\Bigg|\leqslant F^{\frac12}\Bigg\{\sum_{F<f\leqslant 2F}\frac{1}{\varphi(f)}\sideset{}{^*}\sum_{\chi(\operatorname{mod} f)}\Bigg|\sum_{\substack{b\in\mathscr{B}\\(b,e)=1}}\chi(b)\Bigg|^2\Bigg\}^{\frac12}$$
$$\ll(x+F^2)^{\frac12}\,|\mathscr{B}|^{\frac12}\ll\sqrt{(x\,|\mathscr{B}|)}.$$

On conclut alors en sommant sur F et e.

A ce stade, nous observons que la majoration (7.1) découle de (7.2) dès que l'on a

$$y\leqslant X:=\exp\{(\log x)^{\frac34}\}.\tag{7.3}$$

En effet, nous obtenons sous cette hypothèse que le membre de gauche de (7.1) est

$$\ll(\sqrt{x}\Psi(x,X))\log^2 x\ll x\exp\{-(\tfrac18+o(1))\log^{\frac14}x\,\log_2 x\}$$

où la seconde estimation découle de (1.10).

Nous pouvons donc supposer désormais que $y>X$. Ainsi que nous l'avons signalé dans l'introduction, il est capital d'écrire la fonction caractéristique de $S(x,y)$ comme un produit de convolution. Une façon (parmi d'autres) de réaliser cela consiste à factoriser chaque entier n de $S(x,y)$, $n>1$, sous la forme

$$n=pm,\quad P(m)\leqslant p\leqslant y.\tag{7.4}$$

La décomposition est unique, mais introduit une dépendance entre les variables p et m. Pour surmonter cet obstacle technique, nous opérons un découpage de pas multiplicatif $\Delta:=1+\mathscr{L}^{-C}$ où l'on a posé $\mathscr{L}:=\log x$, et où $C=C(A)$ est une constante positive assez grande. Plus précisément, notons

$$P_i:=X\Delta^i,\quad M_j:=\Delta^j\quad(i,j\geqslant 0),$$

et considérons l'ensemble $\mathscr{R}$ des couples (i,j) tels que

$$x\mathscr{L}^{-2A-10}<P_{i+1}M_{j+1}\leqslant x,\quad P_{j+1}\leqslant y.$$

Grâce à (7.4), on peut décomposer le membre de gauche de (1.30) sous la forme d'une somme $\sum_{(i,j)\in\mathscr{R}}S_{ij}+S$ où l'on a posé

$$S_{ij}:=\sum_{q\leqslant Q}\max_{(a,q)=1}\Bigg|\sideset{}{^{(\dagger)}}\sum_{pm\equiv a(\operatorname{mod} q)}1-\frac{1}{\varphi(q)}\sideset{}{^{(\dagger)}}\sum_{(pm,q)=1}1\Bigg|$$

avec les conditions de sommations

$$P_i<p\leqslant P_{i+1},\quad M_j<m\leqslant M_{j+1},\quad P(m)\leqslant P_i.\tag{$\dagger$}$$

Il y a $|\mathscr{R}|\ll\mathscr{L}^{2C+2}$ sommes élémentaires S_{ij} où les variables p et m sont maintenant indépendantes. Il est facile de montrer, si C est assez grand, qu'au plus $O(x\mathscr{L}^{-2A-2})$ entiers exceptionnels $n=mp$ contribuent effectivement à la sommation complémentaire S. Le lemme 7.1 permet donc d'estimer S de manière acceptable.

Il reste à majorer les S_{ij}. On fait appel, pour cela, au Theorem 0(b) de **[2]**. La variable p vérifie bien la condition de **[2]** de bonne répartition dans les progressions arithmétiques de raison n'excédant pas $(\log P_{i+1})^A$. On remarque de plus que la condition A_1 de [**2**], soit $\min(P_i, M_j) \geqslant x^\varepsilon$, peut être assouplie en

$$\log P_i > \mathscr{L}^\varepsilon, \quad M_j \geqslant \mathscr{L}^{C_1(A)}. \tag{7.5}$$

(Cela découle des inégalités (2.6) et (2.7) de [**2**].) On obtient ainsi

$$S_{ij} \ll x\mathscr{L}^{-A-2C-2} \tag{7.6}$$

sauf peut-être lorsque $M_j \leqslant \mathscr{L}^{C_1(A)}$. Dans ce dernier cas, on a $P_i \geqslant x\mathscr{L}^{-C_2(A)}$ et (7.6) peut être établie par application directe du théorème de Bombieri–Vinogradov et sommation triviale sur m. Depuis les travaux de Vaughan, on sait que ce dernier résultat n'est pas tributaire de la théorie des fonctions L (une fois admis le théorème de Siegel–Walfisz). Pour achever la preuve de (7.1), il suffit de sommer (7.6) pour $(i, j) \in \mathscr{R}$.

Preuve du théorème 7. Lorsque $y > X$, nous pouvons insérer l'évaluation du théorème 2 dans celle du théorème 6'. La condition (Q_ε) est remplie pour tout $q \leqslant Q$. L'erreur impliquée est

$$\ll \sum_{q \leqslant Q} \frac{\Psi(x, X)}{\varphi(q)} \exp\{-(\log X)^{\frac{3}{5}-\varepsilon}\} \ll_A x\mathscr{L}^{-A}.$$

Lorsque $2 \leqslant y \leqslant X$, nous avons en fait

$$\sum_{q \leqslant Q} \max_{(a, q)=1} \Psi(x, y\,; a, q) + \sum_{q \leqslant Q} \frac{\Lambda_q(x, y)}{\varphi(q)} \ll_A x\mathscr{L}^{-A}.$$

La majoration de la somme de gauche est obtenue grâce à (7.1) et (1.10). Elle n'excède pas

$$\sum_{q \leqslant Q} \max_{(a, q)} \left| \Psi(x, X\,; a, q) - \frac{1}{\varphi(q)} \Psi_q(x, X) \right| + \sum_{q \leqslant Q} \frac{1}{\varphi(q)} \Psi_q(x, X)$$
$$\ll \frac{x}{\mathscr{L}^A} + \Psi(x, X)\mathscr{L} \ll \frac{x}{\mathscr{L}^A}.$$

Pour la somme de droite, il suffit de remarquer que l'on a

$$\begin{aligned}\Lambda_q(x, y) &= x \int_{0^-}^{+\infty} \rho(u - v)\, dR_q(y^v) \\ &= \frac{\varphi(q)}{q} x\rho(u) + xR_q(x) + x \int_0^\infty \rho'(u - v) R_q(y^v)\, dv.\end{aligned}$$

Par (4.11), on a $xR_q(x) \ll 2^{\omega(q)}$ et

$$\int_0^\infty \rho'(u - v) R_q(y^v)\, dv \ll 2^{\omega(q)} \int_0^\infty \rho'(u - v) y^{-v}\, dv \ll 2^{\omega(q)}\{\rho(\tfrac{1}{2}u) + x^{-\frac{1}{2}}\}.$$

D'où , pour $x \geqslant y \geqslant 2$, $q \geqslant 1$,

$$\Lambda_q(x, y) \ll 2^{\omega(q)}\{x\rho(\tfrac{1}{2}u) + \sqrt{x}\}. \tag{7.7}$$

On en déduit facilement

$$\sum_{q \leqslant Q} \frac{\Lambda_q(x, y)}{\varphi(q)} \ll_A x\mathscr{L}^{-A} \quad (2 \leqslant y \leqslant X).$$

Preuve du corollaire 3. Comme précédemment, on peut supposer $y > X$. Pour $q \leq Q$, on a

$$6 + \log P(q_0) \leq 6\{1 + (k+2)\log_2(2xy)\} \leq 8(k+3)\log_2 y.$$

Sous la condition (1.33) on peut donc utiliser l'estimation (1.22) du théorème 3 pour $\Lambda_q(x, y)$. L'erreur provenant du terme reste de (1.22) fournit une contribution globale

$$\ll x\rho(u)\left\{\frac{\log(u+1)}{\log y}\right\}^{k+1} \sum_{q \leq Q} \frac{2^{\omega(q_0)}}{\varphi(q)}.$$

La somme en q n'excède pas

$$\prod_{p \leq H}\left(1 + \frac{2p}{(p-1)^2}\right) \prod_{H < p \leq Q}\left(1 + \frac{1}{p-1}\right)$$

avec $H := (\log y)^{8(k+3)}$. Elle est donc

$$\ll \log x \,.\, \log H \ll \log x \,.\, \log_2 y = u \log y \log_2 y.$$

Cela achève la démonstration.

8. *Preuve du théorème* 9

Le point (i) est une conséquence facile des théorèmes 2 et 5. On peut manifestement supposer x non entier et assez grand relativement à A. On a

$$\begin{aligned} E\left(x, y\,; \frac{a}{q}\right) &= \sum_{n \in S(x,y)} e\left(\frac{an}{q}\right) = \sum_{b=1}^{q} e\left(\frac{ab}{q}\right)\Psi(x, y\,; b, q) \\ &= \sum_{b=1}^{q} e\left(\frac{ab}{q}\right)\Psi\left(\frac{x}{(b,q)}, y\,; \frac{b}{(b,q)}, \frac{q}{(b,q)}\right) \\ &= \sum_{m \mid q} \sum_{\substack{c=1 \\ (c,m)=1}}^{m} e\left(\frac{ac}{m}\right)\Psi\left(\frac{mx}{q}, y\,; c, m\right), \end{aligned}$$

où nous avons posé $m = q/(b, q)$, $b = cq/m$, avec $(c, m) = 1$. En évaluant $\Psi(mx/q, y\,; c, m)$ par le théorème 5 et en utilisant le théorème 2 sous la forme faible $\Lambda_q(x, y) \asymp \Psi_q(x, y)$ pour traiter le terme d'erreur, il vient

$$E\left(x, y\,; \frac{a}{q}\right) = \sum_{m \mid q} \Lambda_m\left(\frac{mx}{q}, y\right) \frac{1}{\varphi(m)} \sum_{\substack{c=1 \\ (c,m)=1}}^{m} e\left(\frac{ac}{m}\right) + O(\tau(q)\Psi(x, y)e^{-c_4\sqrt{\log y}}).$$

L'estimation (2.12) découle donc de la formule de Ramanujan

$$\sum_{\substack{c=1 \\ (c,m)=1}}^{m} e\left(\frac{ac}{m}\right) = \mu(m) \quad ((a, m) = 1)$$

et de l'expression (2.4) pour $V_q(x, y)$.

Pour établir le point (ii), nous aurons besoin de deux résultats auxiliaires.

LEMME 8.1. *Posons* $\beta(q) := 5/(6 + \log q)$ $(q \geq 2)$. *Pour chaque entier* $k \geq 0$, *on a uniformément pour* $y \geq 2$, $q \geq 2$, $v \geq 0$,

$$\int_{0^-}^{+\infty} w^k \, dS_q(y^{v+w}) \ll \frac{2^{\omega(q)}}{\varphi(q)} \left(\frac{\log q}{\log y}\right)^k y^{-\beta(q)v}. \tag{8.1}$$

Démonstration. Puisque $\beta(q)$ est une fonction décroissante de q, on déduit de (4.13) que l'on a

$$R_m(t) \ll \min\{2^{\omega(m)}t^{-1}, t^{-\beta(q)}\} \quad (m \mid q, t>0). \tag{8.2}$$

En reportant cette majoration dans la définition (2.1), on obtient

$$S_q(t) \ll \sum_{m \mid q} \frac{\mu(m)^2}{\varphi(m)} \min\left\{2^{\omega(m)}t^{-1}, \left(\frac{m}{q}\right)^{1-\beta(q)} t^{-\beta(q)}\right\}.$$

Puisque $q^{\beta(q)} \ll 1$, il suit

$$S_q(t) \ll \min\left\{t^{-1} \sum_{m \mid q} \frac{\mu(m)^2 2^{\omega(m)}}{\varphi(m)}, t^{-\beta(q)} \sum_{m \mid q} \frac{\mu(m)^2 m}{q\varphi(m)}\right\}.$$

La première somme en m vaut

$$\prod_{m \mid q} \left(1 + \frac{2}{p-1}\right) \ll \left(\frac{q}{\varphi(q)}\right)^2;$$

la seconde est égale à

$$\frac{1}{q} \prod_{p \mid q} \frac{2p-1}{p-1} \leqslant \frac{1}{q} \prod_{p \mid q} \left(\frac{2}{1-p^{-1}}\right) = \frac{2^{\omega(q)}}{\varphi(q)}.$$

D'où

$$S_q(t) \ll \min\left\{t^{-1}\left(\frac{q}{\varphi(q)}\right)^2, \frac{2^{\omega(q)}}{\varphi(q)} t^{-\beta(q)}\right\}. \tag{8.3}$$

Nous n'utiliserons ici que la seconde partie de cette majoration. Elle équivaut à (8.1) lorsque $k=0$. Si $k \geqslant 1$, une intégration par parties amène le résultat.

LEMME 8.2. *Soit $q \geqslant 2$ et $\{b_k(q)\colon k=1, 2, \dots\}$ la suite définie par* (2.8). *On a pour $k \geqslant 1$,*

$$b_k(q) = \frac{(-1)^k}{k!} \int_{-\infty}^{+\infty} v^k \, dS_q(e^v). \tag{8.4}$$

Démonstration. Par (2.6) et (4.17), on peut écrire pour $|s|<1$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} b_k(q)s^k &= \frac{sH_q(s+1)}{s+1} \\ &= \sum_{m \mid q} \frac{\mu(m)}{\varphi(m)} \left(\frac{m}{q}\right)^{s+1} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-sv} \, dR_m(e^v) \\ &= \sum_{m \mid q} \frac{\mu(m)}{\varphi(m)} \frac{m}{q} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-sv} \, dR_m\left(\frac{m}{q} e^v\right) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-sv} \, dS_q(e^v), \end{aligned} \tag{8.5}$$

où la dernière égalité découle, après interversion de sommations, de (2.2). La majoration (8.3) implique la convergence uniforme de l'intégrale (8.5) sur tout compact du disque unité ouvert. Cela fournit (8.4) par dérivation sous le signe somme.

Nous sommes maintenant en mesure de prouver le point (ii) du théorème 9. Nous intégrons (4.6) sur $\mathbb{R}$ relativement à la mesure $dS_q(y^v)$. Grâce à (8.4), nous obtenons

$$V_q(x, y) = x\left\{\sum_{j=1}^{k} b_j(q)\frac{\rho^{(j)}(u)}{(\log y)^j} + U_1 + U_2\right\}$$

avec

$$U_1 := \sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^{j+1}}{j!} \sum_{\substack{0\leqslant m\leqslant j\\ m\leqslant u}} r_{mj} \int_{0^-}^{+\infty} w^j \, dS_q(y^{w+u-m})$$

et

$$U_2 := \frac{(-1)^{k+1}}{k!} \int_0^{+\infty} \rho^{(k+1)}(u-v) \int_{0^-}^{+\infty} w^k \, dS_q(y^{w+v}) \, dv.$$

Majorons d'abord U_2. D'après (8.1) on a

$$U_2 \ll \frac{2^{\omega(q)}}{\varphi(q)} \left(\frac{\log q}{\log y}\right)^k \int_0^{+\infty} \rho^{(k+1)}(u-v) y^{-5v/(6+\log q)} \, dv.$$

Lorsque $y \geqslant y_0(A)$, on peut utiliser (4.4) pour estimer l'intégrale en v. On a en effet

$$u \leqslant \log x \leqslant \exp\left\{\sqrt{\frac{\log y}{c_5}}\right\} \leqslant y^{1/(6+\log q)}.$$

Cela implique que U_2 est au plus de l'ordre du terme d'erreur de (2.14).

Pour évaluer U_1, nous faisons également appel à la majoration (8.1). Il vient

$$U_1 \ll \sum_{j=0}^{k} \sum_{\substack{0\leqslant m\leqslant j\\ m\leqslant u}} \frac{2^{\omega(q)}}{\varphi(q)} \left(\frac{\log q}{\log y}\right)^j y^{5(m-u)/(6+\log q)}.$$

Lorsque $u \in \mathscr{C}_k(5\log y/(6+\log q))$, on a

$$y^{5(m-u)/(6+\log q)} \ll (\log q/\log y)^{k+1-j} \quad (0 \leqslant m \leqslant j \leqslant k).$$

Cela implique l'estimation souhaitée si $u \leqslant k+1$. Dans le cas contraire, on a pour y assez grand

$$\begin{aligned} y^{5(m-u)/(6+\log q)} &\leqslant \exp\left\{\frac{5(k+1-u)}{6+\log q} \cdot \log y\right\} \exp\left\{-\frac{5\log y}{6+\log q}\right\} \\ &\leqslant e^{2(k+1-u)\log u} \exp\{-\sqrt{\log y}\} \ll \rho(u)(\log y)^{-k-1}. \end{aligned}$$

La démonstration du théorème 9 est ainsi complétée.

9. *Estimations de $E(x, y\,;\theta)$, pour $\theta \in \mathbb{R}$*

Nous donnons d'abord un résultat indépendant du théorème 10, et qui fournit une bonne majoration de $E(x, y\,;\theta)$ lorsque $y = o(\sqrt{x})$ et θ n'est pas trop proche d'un nombre rationnel à petit dénominateur.

THÉORÈME 13. *On a uniformément pour* $3 \leqslant y \leqslant \sqrt{x}$, $\theta \in \mathbb{R}$, $a \geqslant 1$, $q \geqslant 1$, $(a, q) = 1$,

$$E(x, y\,; \theta) \ll x \log^3(qx)\left\{\frac{\sqrt{y}}{x^{\frac14}} + \frac{1}{\sqrt{q}} + \sqrt{\frac{qy}{x}}\right\}\left(1 + x\left|\theta - \frac{a}{q}\right|\right). \tag{9.1}$$

COROLLAIRE. *Lorsque* $3 \leqslant y \leqslant x^{\frac13}$, $1 \leqslant q \leqslant \sqrt{x}$, $(a, q) = 1$, $|\theta - a/q| \leqslant 1/x$, *on a*

$$E(x, y\,; \theta) \ll x \log^3 x\{q^{-\frac12} + x^{-\frac{1}{12}}\}. \tag{9.2}$$

Preuve du théorème 13. Posons $M := \sqrt{x}$. Puisque le membre de droite de (9.1) est en toute circonstance $\gg M$, nous pouvons nous restreindre à majorer

$$E_1(x, y\,; \theta) := \sum_{\substack{M < n \leqslant x \\ P(n) \leqslant y}} e(\theta n).$$

On peut transformer $E_1(x, y\,; \theta)$ en une somme de formes bilinéaires grâce à une idée de Vaughan [**39**, Lemma 10.1], dont nous rappelons les détails pour la commodité du lecteur. Nous considérons, pour chaque entier n compté dans $E_1(x, y\,; \theta)$, la suite croissante $p_1 \leqslant \ldots \leqslant p_k$ de ses facteurs premiers et celle de ses 'facteurs initiaux'

$$n_j := \prod_{i=1}^{j} p_i \quad (0 \leqslant j \leqslant k).$$

On a $\max(n_{j+1}/n_j) \leqslant y$. Puisque $n > M$, il existe un unique entier s, avec $0 \leqslant s < k$, tel que $n_s \leqslant M < n_{s+1}$. Posant $m = n_s$, $p = p_{s+1}$, $h = n/n_{s+1}$, on voit que n peut se décomposer sous la forme $n = mph$ avec les conditions

$$M/p < m \leqslant M, \quad P(m) \leqslant p \leqslant y, \quad P^-(h) \geqslant p \tag{9.3}$$

où $P^-(h)$ désigne le plus petit facteur premier de h, avec la convention $P^-(1) = +\infty$. Une telle décomposition est nécessairement unique: si m était un diviseur de n_{s-1}, on aurait $pm \leqslant n_s \leqslant M$.

On a donc

$$E_1(x, y\,; \theta) = \sum_{p \leqslant y} \sum_{M/p < m \leqslant M} \sum_{\substack{h \leqslant x/mp \\ P^-(h) \geqslant p}} e(\theta mph) \ll \sum_{p \leqslant y} T_p(x, \theta)$$

avec $T_p(x, \theta) := \sum_{M/p < m \leqslant M} |\sum_{h \leqslant x/mp, P^-(h) \geqslant p} e(\theta mph)|$. Lorsque $\theta = a/q$, on peut majorer $T_p(x, \theta)$ par un lemme de Davenport [**5**, Lemma 8]. On obtient

$$T_p\left(x, \frac{a}{q}\right) \ll \begin{cases} \dfrac{x}{p}\log^2 x\left(\dfrac{p}{M} + \dfrac{Mp}{x} + \dfrac{1}{q} + \dfrac{qp}{x}\right)^{\frac12} & (p \nmid q), \\[2ex] \dfrac{x}{p}\log^2 x\left(\dfrac{p}{M} + \dfrac{Mp}{x} + \dfrac{p}{q} + \dfrac{q}{x}\right)^{\frac12} & (p \mid q). \end{cases}$$

En majorant p par y dans la première racine carrée et en sommant sur p, il vient

$$\begin{aligned} E_1(x, y\,; \theta) &\ll x \log^2 x \left(\frac{y}{M} + \frac{My}{x} + \frac{1}{q} + \frac{qy}{x}\right)^{\frac12}\left(\log_2 y + \sum_{p \mid q} \frac{1}{\sqrt{p}}\right) \\ &\ll x \log^3(qx)\left(\frac{\sqrt{y}}{x^{\frac14}} + \frac{1}{\sqrt{q}} + \sqrt{\frac{qy}{x}}\right). \end{aligned} \tag{9.4}$$

Cette majoration est en fait valable pour $F(x, y\,; a/q)$ avec

$$F(x, y\,; \theta) := \sum_{p \leqslant y} T_p(x, \theta).$$

Or une intégration par parties fournit l'inégalité

$$F(x, y\,; \theta) \leqslant F\Big(x, y\,; \frac{a}{q}\Big) + 2\pi \left|\theta - \frac{a}{q}\right| \int_1^x F\Big(z, y\,; \frac{a}{q}\Big)\, dz.$$

En appliquant (9.4) à $F(z, y\,; a/q)$ lorsque $y^2 < z \leqslant x$, et en estimant trivialement $F(z, y\,; a/q) \ll z \log y$ lorsque $z \leqslant y^2$, on obtient bien (9.1).

Preuve du théorème 10. Il est nécessaire, avant de développer l'argument, d'établir un résultat complémentaire concernant la quantité $V_q(x, y)$ définie en (2.3). Fixons y et considérons $V_q(x, y)$ comme une fonction de x. Alors $V_q(x, y)$ est continue sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}^+$ et possède aux points entiers une discontinuité de première espèce, soit

$$V_q(n, y) - V_q(n-0, y) = n\{S_q(n) - S_q(n-0)\} = \frac{\mu(q/(n, q))}{\varphi(q/(n, q))} \quad (n \in \mathbb{Z}^+).$$

On peut donc écrire l'égalité entre mesures sur $\mathbb{R}^+$,

$$dV_q(x, y) = \Big\{v_q(x, y) + \frac{w_q(x, y)}{\log y}\Big\}\, dx + d\{xS_q(x)\} \tag{9.5}$$

avec

$$v_q(x, y) := \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(u - v)\, dS_q(y^v), \tag{9.6}$$

$$w_q(x, y) := \int_{-\infty}^{+\infty} \rho'(u - v)\, dS_q(y^v). \tag{9.7}$$

Lemme 9.1. *Soit $A > 0$. Sous les conditions*

$$x \geqslant 3, \quad \exp\{c_5 (\log_2 x)^2\} \leqslant y \leqslant x, \quad 2 \leqslant q \leqslant (\log y)^A, \tag{9.8}$$

on a

$$v_q(x, y) \ll \frac{2^{\omega(q)} \log q}{\varphi(q)} \cdot \frac{\rho(u) \log(u+1)}{\log y} \tag{9.9}$$

et

$$w_q(x, y) \ll \frac{2^{\omega(q)}}{\varphi(q)} \Big\{\frac{\rho''(u) \log q}{\log y} + y^{-(5(u-1)/(6+\log q))}\Big\}. \tag{9.10}$$

Démonstration. On a $v_q(x, y) = x^{-1} V_q(x, y)$. La majoration (9.9) est donc impliquée par (2.14) avec $k = 0$. Pour montrer (9.10), on intègre d'abord par parties le membre de gauche de (9.7). On obtient

$$w_q(x, y) = -\int_{-\infty}^{+\infty} S_q(y^v)\, d\rho'(u - v) = -S_q(y^{u-1}) + \int_{-\infty}^{+\infty} \rho''(u - v) S_q(y^v)\, dv.$$

L'évaluation souhaitée découle donc de (8.3) et de (4.4).

LEMME 9.2. *Soit $A>0$. On a uniformément, sous l'hypothèse* (9.8),

$$\int_{x/y}^{x}\left|v_q(t,y)+\frac{w_q(t,y)}{\log y}\right|dt \ll \frac{2^{\omega(q)}\log q}{\varphi(q)}\Psi(x,y)\frac{\log(u+1)}{\log y}. \tag{9.11}$$

Démonstration. En faisant appel à (9.9) et (9.10) et en effectuant le changement de variables $t=y^{u-v}$, on obtient que l'intégrale à estimer est

$$\ll\frac{2^{\omega(q)}\log q}{\varphi(q)}\int_0^1\{\rho(u-v)\log(u+1)+y^{5(v+1-u)/(6+\log q)}\}y^{u-v}\,dv.$$

L'intégrale en v n'excède pas

$$x\log(u+1)\int_0^{+\infty}\rho(u-v)y^{-v}\,dv+xe^{-5(u-1)\log y/(6+\log q)}\int_0^{\infty}y^{-v/6}\,dv$$
$$\ll x\rho(u)\frac{\log(u+1)}{\log y}+\frac{x}{\log y}e^{-2(u-1)\log u},$$

d'après (4.4) et (9.8). Compte tenu de (1.10) et (4.1), cela implique le résultat annoncé.

Nous sommes maintenant en mesure d'aborder la phase finale de la démonstration du théorème 10. Dans tout ce qui suit nous supposons que $B=B(\delta,A)$ est suffisamment grande.

Rappelons que $Q=x(\log y)^{-B}$, et que $2\leqslant q\leqslant Q$, $(a,q)=1$, $|\theta-a/q|\leqslant 1/qQ$. Nous opérons une dichotomie liée à la taille de q. Dans un premier temps, nous supposons

$$q\leqslant(\log y)^B. \tag{9.12}$$

Soit $\eta:=\theta-a/q$. On a

$$E(x,y;\theta)=\int_0^x e(\eta t)\,dE\Big(t,y;\frac{a}{q}\Big)=\int_{x/y}^x e(\eta t)\,dE\Big(t,y;\frac{a}{q}\Big)+O\Big(\Psi\Big(\frac{x}{y},y\Big)\Big).$$

D'après (5.3), on a $\Psi(x/y,y)\ll\Psi(x,y)y^{-\frac12}$. Il suffit donc de majorer l'intégrale en t. A cette fin, nous faisons appel à (2.12). La contribution du terme résiduel vaut

$$\int_{x/y}^x e(\eta t)\,d\{O(\Psi(t,y)e^{-c_6\sqrt{\log y}})\}\ll e^{-c_6\sqrt{\log y}}\Big\{\Psi(x,y)+\eta\int_0^x\Psi(t,y)\,dt\Big\}$$
$$\ll e^{-c_6\sqrt{\log y}}\Psi(x,y)\{1+\eta x\}$$
$$\ll e^{-\frac12 c_6\sqrt{\log y}}\Psi(x,y)$$

puisque $\eta x\leqslant Q^{-1}x=(\log y)^B$. Grâce à (9.5), on peut écrire la contribution du terme principal de (2.12) sous la forme

$$\int_{x/y}^x e(\eta t)\,dV_q(t,y)=\int_{x/y}^x e(\eta t)\Big\{v_q(t,y)+\frac{w_q(t,y)}{\log y}\Big\}dt+\int_{x/y}^x e(\eta t)\,d\{tS_q(t)\}.$$

Par le lemme 9.2, on voit que la première intégrale est de l'ordre de grandeur souhaité. La seconde est égale à

$$\sum_{x/y<n\leqslant x}\frac{e(\eta n)\mu(q/(q,n))}{\varphi(q/(q,n))}=\sum_{x/y<n\leqslant x}e(\eta n)\cdot\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\substack{h=1\\(h,q)=1}}^{q}e\Big(\frac{hn}{q}\Big),$$

d'après une formule de Ramanujan, cf. par exemple [**14**, Theorem 272]. Après interversion de sommations, l'expression précédente s'écrit encore

$$\frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\substack{h=1 \\ (h,q)=1}}^{q} \sum_{x/y<n\leqslant x} e\left(\left(\eta+\frac{h}{q}\right)n\right). \tag{9.13}$$

Puisque $|\eta| \leqslant 1/qQ$, on a

$$\left\|\eta+\frac{h}{q}\right\| \geqslant \left\|\frac{h\pm\frac{1}{2}}{q}\right\| \gg \frac{\min(h, q-h)}{q}.$$

La quantité (9.13) est donc

$$\ll \frac{q}{\varphi(q)} \sum_{\substack{h=1 \\ (h,q)=1}}^{q} \frac{1}{\min(h, q-h)} \ll \frac{q\log q}{\varphi(q)}.$$

Compte tenu de (9.12), cette majoration est (largement!) acceptable.

Nous pouvons donc nous placer maintenant dans l'hypothèse où

$$q > (\log y)^B. \tag{9.14}$$

Soit $Q_1 := x(\log y)^{-B/2}$, $Y := \exp\sqrt{\log y}$. Nous distinguons deux cas selon la place de y relativement à Q_1.

Considérons d'abord la situation où $y \leqslant Q_1$. En classant les entiers comptés dans $E(x, y\,;\theta)$ selon la valeur de leur plus grand facteur premier, on obtient

$$E(x, y\,;\theta) = E(x, Y\,;\theta) + \sum_{Y<p\leqslant y} E\left(\frac{x}{p}, p\,;\theta p\right). \tag{9.15}$$

Par (1.10), on a, sous l'hypothèse (2.15),

$$|E(x, Y\,;\theta)| \leqslant \Psi(x, Y) \ll \Psi(x, y)e^{-\sqrt{\log y}}.$$

Désignons par $W(x, \theta)$ la somme en p de (9.15). Pour $Q_1 \leqslant t \leqslant x$, on a

$$\begin{aligned} \left|W\left(t, \frac{a}{q}\right)\right| &\leqslant \sum_{Y<m\leqslant y} \left|\sum_{\substack{n\leqslant t/m \\ P(n)\leqslant y}} e\left(\frac{anm}{q}\right)\right| \\ &\ll t(\log t)^2\left\{\frac{1}{Y}+\frac{y}{t}+\frac{1}{q}+\frac{q}{t}\right\}^{\frac{1}{2}} \\ &\ll x(\log x)^2(\log y)^{-\frac{1}{4}B}, \end{aligned} \tag{9.16}$$

d'après le lemme de Davenport [**5**, Lemma 8]. En fait, au vu de l'estimation triviale $|W(t, \theta)| \ll t\log y$, la majoration (9.16) est également valable pour $t \leqslant Q_1$. De plus, une intégration par parties permet de montrer que

$$|W(x, \theta)| \leqslant \left|W\left(x, \frac{a}{q}\right)\right| + 2\pi\left|\theta-\frac{a}{q}\right| \int_1^x \left|W\left(t, \frac{a}{q}\right)\right| dt.$$

Par (9.16), il suit

$$|W(x, \theta)| \ll x(\log x)^2(\log y)^{-\frac{1}{4}B}\left\{1+\frac{x}{qQ}\right\} \ll x(\log y)^{-\frac{1}{5}B},$$

pour B assez grand, grâce à (2.15) et (9.14). On en déduit, pour une valeur convenable de $B(\delta, A)$,

$$|W(x, \theta)| \ll \Psi(x, y)(\log y)^{-A}.$$

Cela établit la majoration annoncée pour $E(x, y\,;\theta)$ lorsque $y \leqslant Q_1$.

Supposons maintenant $Q_1 < y \leqslant x$. Puisque $Q_1 > \sqrt{x}$, on a

$$E(x, y\,;\theta) = E(x, x\,;\theta) - \sum_{m \leqslant x/y} \sum_{y < p \leqslant x/m} e(\theta m p). \tag{9.17}$$

Comme $\|\theta\| \geqslant 1/2q \geqslant 1/2Q$, on a d'abord

$$E(x, x\,;\theta) \ll \|\theta\|^{-1} \ll Q \ll \Psi(x, y)(\log y)^{-A}.$$

Nous traitons la somme double de (9.17) en utilisant le théorème de Vaughan sur les sommes d'exponentielles d'arguments premiers [**38**, Theorem 3.1]. Pour chaque $m \leqslant x/y \leqslant (\log y)^{\frac{1}{2}B}$, il existe des entiers a_m et q_m tels que

$$\left|m\theta - \frac{a_m}{q_m}\right| \leqslant \frac{1}{2q_m Q}, \quad 1 \leqslant q_m \leqslant 2Q, \quad (a_m, q_m) = 1.$$

D'où

$$\left|\frac{a}{q} - \frac{a_m}{mq_m}\right| \leqslant \frac{1}{Q}\left\{\frac{1}{q} + \frac{1}{2mq_m}\right\}.$$

Si $mq_m \neq q$, on en déduit

$$\frac{1}{qmq_m} \leqslant \frac{1}{Q}\left\{\frac{1}{q} + \frac{1}{2mq_m}\right\}$$

soit encore $\frac{1}{2}Q \leqslant Q - \frac{1}{2}q \leqslant mq_m$. On a donc dans tous les cas

$$q_m \geqslant \frac{1}{m}(\log y)^B \geqslant (\log y)^{\frac{1}{2}B}.$$

Le théorème de Vaughan implique alors

$$\begin{aligned}\sum_{y < p \leqslant x/m} e(\theta m p) &\ll \left\{\frac{x}{m\sqrt{q_m}} + \left(\frac{x}{m}\right)^{\frac{4}{5}} + \sqrt{\left(\frac{x}{m} q_m\right)}\right\}(\log x)^3 \\ &\ll (x/m)(\log x)^3(\log y)^{-\frac{1}{4}B}.\end{aligned}$$

En reportant dans la somme double de (9.17), on obtient la majoration

$$\ll x(\log x)^4(\log y)^{-\frac{1}{4}B} \ll \Psi(x, y)(\log y)^{-A}$$

pour un choix convenable de B.

Cela achève la preuve du théorème 10.

Bibliographie

1. K. ALLADI, 'An Erdös–Kac theorem for integers without large prime factors', *Acta Arith.* 49 (1987) 81–105.

2. E. BOMBIERI, J. B. FRIEDLANDER, et H. IWANIEC, 'Primes in arithmetic progressions to large moduli', *Acta Math.* 156 (1986) 203–251.

3. N. G. DE BRUIJN, 'On the number of positive integers $\leqslant x$ and free of prime factors $>y$', *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A* 54 (1951) 50–60; II, *Indag. Math.* 28 (1966) 239–247.

4. H. DABOUSSI et H. DELANGE, 'Quelques propriétés des fonctions multiplicatives de module au plus égal à 1', *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A* 278 (1974) 657–660.

5. H. Davenport, 'On some infinite series involving arithmetical functions, II', *Quart. J. Math. Oxford* 8 (1937) 313–320.
6. H. Davenport, *Multiplicative number theory,* 2ième édn, Graduate Texts in Mathematics 74 (Springer, Berlin, 1980).
7. E. Fouvry et H. Iwaniec, 'On a theorem of Bombieri Vinogradov type', *Mathematika* 27 (1980) 137–172.
8. E. Fouvry et G. Tenenbaum, 'Diviseurs de Titchmarsh des entiers sans grand facteur premier', *Analytic number theory (Tokyo, 1988)* (eds K. Nagasaki et E. Fouvry) Lecture Notes in Mathematics 1434 (Springer, Berlin, 1990), pp. 86–102.
9. J. B. Friedlander, 'Integers without large prime factors', *Proc. Kon. Ned. Akad. Wetensch A* 76 (1973) 443–451.
10. J. B. Friedlander, 'Integers free from large and small primes', *Proc. London Math. Soc.* (3) 33 (1976) 565–576.
11. J. B. Friedlander, 'Integers without large prime factors, II', *Acta Arith.* 39 (1981) 53–57.
12. A. Granville, 'Integers, without large prime factors, in arithmetic progressions', prépublication, Institute for Advanced Study, Princeton, 1990.
13. H. Halberstam et H.-E. Richert, *Sieve methods* (Academic Press, London, 1974).
14. G. H. Hardy et E. M. Wright, *An introduction to the theory of numbers,* 5ième édn (Oxford University Press, 1979).
15. D. G. Hazlewood, 'On integers all of whose prime factors are small', *Bull. London Math. Soc.* 5 (1973) 159–163.
16. D. G. Hazlewood, 'Sums over positive integers with few prime factors', *J. Number Theory* 7 (1975) 189–207.
17. D. Hensley, 'The number of positive integers $\leqslant x$ and free of prime divisors $>y$', *J. Number Theory* 21 (1985) 286–298.
18. D. Hensley, 'A property of the counting function of integers with no large prime factors', *J. Number Theory* 22 (1986) 46–74.
19. D. Hensley, 'An Erdös–Kac theorem for integers with no large prime divisors', prépublication, Texas A & M University, 1986.
20. D. Hensley, 'The distribution of $\Omega(n)$ among numbers with no large prime factors', *Analytic number theory and diophantine problems* (Proceedings of a conference at Oklahoma State University, 1984), Progress in Mathematics 70 (Birkhäuser, Boston, 1987), pp. 247–281.
21. A. Hildebrand, 'Integers free of large prime factors and the Riemann hypothesis', *Mathematika* 31 (1984) 258–271.
22. A. Hildebrand, 'On the number of positive integers $\leqslant x$ and free of prime factors $>y$', *J. Number Theory* 22 (1986) 289–307.
23. A. Hildebrand, 'On the local behaviour of $\Psi(x, y)$', *Trans. Amer. Math. Soc.* 297 (1986) 729–751.
24. A. Hildebrand, 'On the number of prime factors of integers without large prime divisors', *J. Number Theory* 25 (1987) 81–106.
25. A. Hildebrand et G. Tenenbaum, 'On integers free of large prime factors', *Trans. Amer. Math. Soc.* 296 (1986) 265–290.
26. A. Ivić et G. Tenenbaum, 'Local densities over integers free of large prime factors', *Quart. J. Math. Oxford* (2) 37 (1986) 401–417.
27. H. Iwaniec, 'On sums of two norms from cubic fields', *Journées de théorie additive des nombres* (Université de Bordeaux I, 1977), pp. 71–89.
28. B. V. Levin et A. S. Fainleb, 'Application of some integral equations to problems in number theory', *Uspekhi Mat. Nauk* 22 (1967) n° 3, 119–197; *Russian Math. Surveys* 22 (1967) n° 3, 119–204.
29. J.-L. Mauclaire, Intégration et théorie des nombres (Hermann, Paris, 1986).
30. H. L. Montgomery et R. C. Vaughan, 'Exponential sums with multiplicative coefficients', *Invent. Math.* 43 (1977) 69–82.
31. H. L. Montgomery et R. C. Vaughan, 'Mean values of multiplicative functions', manuscript.
32. Y. Motohashi, 'An induction principle for the generalization of Bombieri's prime number theorem', *Proc. Japan Acad.* 52 (1976) n° 6, 273–275.
33. K. K. Norton, 'Numbers with small prime factors and the least kth power non residue', *Mem. Amer. Math. Soc.* 106 (1971).
34. E. Saias, 'Sur le nombre des entiers sans grand facteur premier', *J. Number Theory* 32 (1989) 78–99.
35. E. Saias, 'Applications de la méthode du col à certains problèmes de crible', thèse d'Université, Nancy 1, 1990.
36. G. Tenenbaum, 'Sur un problème d'Erdös et Alladi', *Séminaire de théorie des nombres, Paris 1988–89* (ed. C. Goldstein), Progress in Mathematics 91 (Birkhäuser, Boston, 1990), pp. 221–239.
37. E. C. Titchmarsh, *The theory of the Riemann zeta function,* 2nd edn (revised by D. R. Heath-Brown, Oxford University Press, 1986).

38. R. C. VAUGHAN, *The Hardy-Littlewood method* (Cambridge University Press, 1981).
39. R. C. VAUGHAN, 'A new iterative method in Waring's problem', *Acta Math.* 162 (1989) 1–71.
40. D. WOLKE, 'Über die mittlere Verteilung der Werte zahlentheorische Funktionen auf Restklassen, I, II', *Math. Ann.* 202 (1973) 1–25, 204 (1973) 145–153.
41. T. XUAN, 'The average of $d(n)$ over integers free of large prime factors' (en chinois), *Chinese Ann. Math.*, à paraître.
42. T. XUAN, 'The average of $d_k(n)$ over integers free of large prime factors', *Acta Arith.* 55 (1990) 249–260.

Département de Mathématiques
Bâtiment 425
Université de Paris XI-*Orsay*
91405 *Orsay Cedex*
France

Département de Mathématiques
Université de Nancy I
BP 239
54506 *Vandœuvre Cedex*
France