Ramanujan J. **9**
(2005), 139–202.

Propriétés statistiques des entiers friables*

R. de la Bretèche & G. Tenenbaum

Sommaire

1. Introduction

La décomposition canonique d'un nombre entier n sous la forme

$$n = ab, \quad \text{avec} \quad a := \prod_{\substack{p^\nu \| n \\ p \leqslant y}} p^\nu, \quad b := \prod_{\substack{p^\nu \| n \\ p > y}} p^\nu,$$

constitue un outil efficace dans beaucoup de problèmes arithmétiques. Alors que les techniques de crible sont pertinentes pour l'étude des facteurs b, des méthodes spécifiques sont nécessaires pour appréhender les facteurs a.

Désignons par $P(n)$ le plus grand facteur premier d'un entier $n > 1$ et convenons que $P(1) = 1$. L'étude de l'ensemble $S(x,y)$ des entiers y-friables n'excédant pas x, autrement dit des entiers n tels que $P(n) \leqslant y$ et $n \leqslant x$, s'est ainsi révélée, ces dernières années, comme une partie intégrante de la théorie analytique des nombres.

* Nous incluons ici certaines corrections par rapport à la version publiée.

En ce qui concerne la fonction de comptage

$$\Psi(x, y) := |S(x, y)|,$$

trois approches ont été utilisées à ce jour : l'exploitation de l'équation fonctionnelle de Buchstab, dans les travaux de de Bruijn [4] ; celle d'une équation intégrale avec paramètre dans l'article de Hildebrand [14] ; et la mise en œuvre de la méthode du col par Hildebrand et Tenenbaum [16].

Chacune de ces trois méthodes possède ses avantages et inconvénients propres. Cependant, la méthode du col fournit, en complète exclusivité, des renseignements spécifiques d'un type nouveau : les formules semi-asymptotiques, selon l'expression d'Erdős, qui permettent d'évaluer $\Psi(cx, y)$ en fonction de $\Psi(x, y)$ même dans des domaines en x, y, où aucune approximation régulière de la seconde quantité n'est connue, voire même possible — cf. [28] pour une discussion détaillée sur cet aspect de la question.

Nous désignons l'ensemble des propriétés relatives à ces phénomènes sous le terme de *comportement local*.

La connaissance du comportement local de $\Psi(x, y)$ et de la généralisation

$$\Psi_m(x, y) := \sum_{\substack{n\in S(x,y)\\(n,m)=1}} 1 \tag{1·1}$$

est capitale dans la plupart des problèmes arithmétiques utilisant les entiers friables. Cela explique pourquoi l'étude des fluctuations locales de $\Psi_m(x, y)$ a suscité un nombre important de travaux depuis une quinzaine d'années : voir notamment Hensley [12], Friedlander–Granville [9], Hildebrand [13], [15], Granville [10], Hildebrand–Tenenbaum [16], et, pour le cas particulier $m = \prod_{p\leqslant z} p$, Saias [23].

Cet article est essentiellement dévolu à fournir, pour le comportement local de la quantité (1·1), un document synthétique contenant des formules aussi précises et aussi générales que le permettent les techniques actuellement disponibles.

Si notre motivation première consiste à établir les estimations nécessaires à la preuve, développée dans [3], d'une inégalité de type Turán–Kubilius pour l'ensemble des entiers friables, nos résultats sont également susceptibles de nombreuses autres applications. À titre d'illustration, nous en développons ici quelques unes, concernant les valeurs moyennes de fonctions arithmétiques sur l'ensemble des entiers friables. Les énoncés correspondants sont présentés au paragraphe 2.2.

2. Résultats

2·1. Entiers friables criblés

Le col, ou point-selle, apparaissant dans l'évaluation de $\Psi(x, y)$ comme intégrale de Perron inverse est défini, pour $x \geqslant y \geqslant 2$, comme l'unique solution positive $\alpha := \alpha(x, y)$ de l'équation

$$\sum_{p\leqslant y} \frac{\log p}{p^\alpha - 1} = \log x. \tag{2·1}$$

Tous les résultats de comportement local sont alors du type

$$\Psi(cx, y) \approx c^\alpha \Psi(x, y) \tag{2·2}$$

sous diverses contraintes concernant les tailles relatives de c, x, y. Bien qu'elle soit définie implicitement, la quantité α possède un comportement asymptotique suffisamment élucidé — cf., notamment, le Lemme 3.1 *infra*.

Définissons

$$g_m(s) := \prod_{p|m} (1 - p^{-s}) = \sum_{d|m} \mu(d)/d^s,$$

où μ désigne la fonction de Möbius. Compte tenu de l'heuristique (2·2), le terme principal attendu pour

$$\Psi_m(x, y) = \sum_{d|m} \mu(d)\Psi(x/d, y)$$

est

$$\sum_{d|m} \mu(d)\Psi(x,y)/d^\alpha = g_m(\alpha)\Psi(x,y),$$

lorsque m est y-friable.

Notre premier résultat établit qu'une telle approximation est effectivement valable dans un large domaine. Conformément à l'usage, nous posons dans tout ce travail

$$u := (\log x)/\log y, \qquad \overline{u} := \min\{u, y/\log y\}$$

et nous désignons par $\omega(n)$ (resp. $\Omega(n)$) le nombre des facteurs premiers de l'entier n comptés sans (resp. avec) multiplicité. Nous introduisons également la quantité

$$W_m := \log p_{\omega(m)} \asymp \log\big\{\omega(m)+2\big\} \qquad (m \geqslant 1) \tag{2·3}$$

où p_k désigne le k-ième nombre premier et où l'on convient, par commodité d'écriture, que $p_0 = 2$. Nous notons encore

$$\vartheta_m = \vartheta_m(y) := \frac{W_m}{\log y}, \quad \overline{\alpha} = \overline{\alpha}(x,y) := \frac{\log(1+y/\log x)}{\log y}, \tag{2·4}$$

$$E_m := E_m(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\vartheta_m\{u\log(u+2)\}^{\vartheta_m}}{1+\vartheta_m\log(u+2)} & \text{si } y > (\log x)^2, \\ \dfrac{\overline{u}\,(\overline{u}\log y)^{\vartheta_m}}{u\log y}\Big(1+\dfrac{1}{\vartheta_m\overline{\alpha}\log y}\Big) & \text{si } y \leqslant (\log x)^2. \end{cases} \tag{2·5}$$

Théorème 2.1. *Sous les conditions*

$$x \geqslant y \geqslant 2, \quad P(m) \leqslant y, \quad \omega(m) \ll \sqrt{y}, \tag{2·6}$$

on a

$$\Psi_m(x,y) = g_m(\alpha)\Psi(x,y)\Big\{1 + O\Big(\frac{E_m(1+E_m)}{\overline{u}}\Big)\Big\}. \tag{2·7}$$

La définition de $E_m(x,y)$ étant relativement complexe, nous dégageons immédiatement quelques conséquences simples du Théorème 2.1. À cette fin, nous posons

$$E_m^*(x,y) := E_m(1+E_m)/\overline{u}$$

et, avec la notation $t^+ := \max\{0,t\}$ $(t \in \mathbb{R})$,

$$\delta = \delta(x,y) := (1-2\overline{\alpha})^+/2(1-\overline{\alpha}). \tag{2·8}$$

Nous notons que $0 \leqslant \delta \leqslant \frac{1}{2}$ en toute circonstance alors que $\delta = 0$ si $y > (\log x)^2$. Nous considérons les conditions suivantes :[1]

$$\omega(m) \ll y^{1/\log(u+2)} \tag{C_1}$$

$$y^{1/\log(u+2)} \ll \omega(m) \ll \sqrt{y}/\log y \tag{C_2}$$

$$\sqrt{y}/\log y \ll \omega(m) \ll \sqrt{y} \quad \text{et} \quad (\log_2 x)(\log_3 x) \ll \log y \tag{C_3}$$

$$\sqrt{y}/\log y \ll \omega(m) \ll \sqrt{y}/(\log y)^\delta \quad \text{et} \quad \log y \ll (\log_2 x)(\log_3 x). \tag{C_4}$$

1. Ici et dans la suite, nous notons $\log_k$ la k-ième itérée de la fonction logarithme.

Corollaire 2.2. *Sous les conditions $x \geqslant y \geqslant 2$ et $P(m) \leqslant y$, on a*

$$E_m^*(x,y) \ll \begin{cases} \dfrac{\vartheta_m}{\overline{\alpha} u} \ll \dfrac{\vartheta_m \log(\overline{u}+2)}{\overline{u}} \ll \dfrac{1}{\overline{u}} & \text{si } (C_1) \text{ est réalisée,} \\ \dfrac{\vartheta_m^2}{\log(\overline{u}+2)} & \text{si } (C_2) \text{ ou } (C_3) \text{ est réalisée,} \\ 1 & \text{si } (C_4) \text{ est réalisée.} \end{cases} \tag{2·9}$$

Le corollaire est déduit du théorème en observant que, pour chacune des deux expressions (2·5), la quantité $E_m(x,y)/\vartheta_m$ est, à toutes fins utiles, une fonction croissante de ϑ_m. Nous donnons les détails au paragraphe 3.2. Cependant, nous notons dès à présent, à fins de référence ultérieure, que l'on a

$$E_m \gg \vartheta_m, \qquad E_m^*(x,y) \gg \vartheta_m/\overline{u} \qquad (x \geqslant y \geqslant 2). \tag{2·10}$$

Ces deux estimations résultent aisément de (3·4) et (3·13) *infra.*

Remarques. (i) Lorsque $y = (\log x)^{1+\lambda}$ avec $\lambda \asymp 1$, les deux expressions de $E_m(x,y)$ apparaissant dans (2·5) sont du même ordre de grandeur.

(ii) Le cas particulier

$$m := \prod_{p \leqslant z} p, \tag{2·11}$$

qui correspond donc au problème des entiers sans grand ni petit facteur premier, a été notamment étudié par Friedlander [8] quand y et z sont de l'ordre d'une puissance de x et par Saias [23] sous la condition $\pi(z) \ll \sqrt{y}$. Lorsque nous y spécialisons m sous la forme (2·11), nos résultats sont toujours au moins aussi précis que ceux de [23].(2)

(iii) Le Théorème 2.1 rectifie et précise le théorème 1 de Xuan dans [34], où l'auteur annonce, pour chaque $\varepsilon > 0$ fixé, la validité de l'estimation

$$\Psi_m(x,y) = g_m(\alpha)\Psi(x,y)\Big\{1 + O\Big(\frac{\vartheta_m}{\log(u+2)}\Big)\Big\}, \tag{2·12}$$

uniformément dans le domaine $y \geqslant (\log x)^{1+\varepsilon}$, $\omega(m) \leqslant \sqrt{y}$. La formule (2·12) est moins précise que (2·9) lorsque (C_1), (C_2) ou (C_3) est réalisée. Dans le domaine complémentaire, la preuve donnée dans [34] est insuffisante. Nous décrivons en détail, au paragraphe 3.6,(3) l'inexactitude apparaissant au lemme 5 de [34]. Cette erreur est sans incidence dans les deux premiers cas de validité de (2·9). En revanche, sous l'hypothèse (C_4), et *a fortiori* sous la condition

$$\sqrt{y}/(\log y)^{\delta} \ll \omega(m) \leqslant \sqrt{y} \quad \text{et} \quad \log y \ll (\log_2 x)(\log_3 x), \tag{C_5}$$

la preuve de [34], une fois corrigée, fournit seulement

$$\Psi_m(x,y) = g_m(\alpha)\Psi(x,y)\Big\{1 + O\Big(\frac{\vartheta_m u^{2\log_2 y/\log y}}{\log(u+2)}\Big)\Big\},$$

ce qui n'implique certainement pas

$$\Psi_m(x,y) \ll_{\varepsilon} g_m(\alpha)\Psi(x,y) \tag{2·13}$$

lorsque, par exemple, $\omega(m) \asymp \sqrt{y}$, $(\log x)^{1+\varepsilon} \leqslant y \leqslant (\log x)^{2-\varepsilon}$ avec $\varepsilon \in]0, \frac{1}{2}[$. En fait, comme l'atteste l'énoncé du Corollaire 2.2, nous ne savons pas établir (2·13) sous la condition (C_5).

Notre méthode, qui permet d'appréhender le cas $2 \leqslant y \leqslant (\log x)^{1+\varepsilon}$ exclu par Xuan, est radicalement différente de celle de [34] lorsque le paramètre u est petit : voir notamment le Lemme 3.18 et la Proposition 4.1 *infra.*

2. Voir en particulier le théorème 7 de [23].
3. Voir la remarque qui suit le Lemme 3.14.

Nous verrons au paragraphe 2.2 que certaines applications[(4)] nécessitent d'évaluer le rapport

$$\frac{\Psi_m(x/d,y)}{\Psi(x/d,y)} \tag{2·14}$$

indépendamment de $d \in [1,x]$. Au vu du Théorème 2.1, nous savons que la quantité (2·14) est proche de $g_m(\alpha(x/d,y))$. Notre prochain théorème permet, au prix d'un terme d'erreur acceptable, de choisir comme approximation l'expression plus simple $g_m(\alpha)$ où $\alpha = \alpha(x,y)$.

Théorème 2.3. *Soient $\varepsilon > 0$, $K > 0$. Sous les conditions*

$$x \geqslant 2, \quad 1 \leqslant d \leqslant x, \quad (\log x)^{1+\varepsilon} \leqslant y \leqslant x, \quad P(m) \leqslant y, \quad \omega(m) \leqslant K, \tag{2·15}$$

il existe une constante C, ne dépendant que de K, telle que l'on ait, uniformément par rapport à x, y, d, m,

$$\Psi_m\Big(\frac{x}{d},y\Big) = g_m(\alpha)\Psi\Big(\frac{x}{d},y\Big)\big\{1+O\big(E(x,y;d)\big)\big\} \tag{2·16}$$

avec

$$E(x,y;d) := \frac{1}{\log y}\log\Big(\frac{u+2}{u+1-t}\Big) + \Big(\frac{d}{x}\Big)^C \tag{2·17}$$

où l'on a posé $t := (\log d)/\log y$.

Lorsque l'on insère l'heuristique (2·2) dans le terme principal de (2·16), on obtient pour $\Psi_m(x/d,y)$ l'approximation $g_m(\alpha)\Psi(x,y)/d^\alpha$. Le résultat suivant fournit une mesure quantitative de la qualité de cette approximation.

Nous introduisons la notation

$$u_y := \overline{u} + (\log y)/\log(u+2) \qquad (y \geqslant 2) \tag{2·18}$$

qui simplifie l'écriture des termes d'erreur. Il est à noter que $u_y \gg (\log y)/\log_2(2y)$ pour $x \geqslant y \geqslant 2$. Nous rappelons par ailleurs la définition (2·8) de $\delta = \delta(x,y)$.

Théorème 2.4. *(i) L'estimation*

$$\Psi_m\Big(\frac{x}{d},y\Big) \ll \frac{g_m(\alpha)}{d^\alpha}\Psi(x,y) \tag{2·19}$$

a lieu uniformément pour $1 \leqslant d \leqslant x/y$ dans le domaine

$$x \geqslant y \geqslant 2, \quad P(m) \leqslant y, \quad \omega(m) \ll \sqrt{y}/(\log y)^\delta, \tag{2·20}$$

et uniformément pour $1 \leqslant d \leqslant x$ lorsque l'on impose la condition supplémentaire $\omega(m) \ll 1$.

(ii) Plus précisément, il existe des constantes absolues positives b_1, b_2, et une fonction $b = b(x,y;d,m)$ satisfaisant à $b_1 \leqslant b \leqslant b_2$ ($x \geqslant y \geqslant 2$, $d \geqslant 1$, $m \geqslant 1$) telles que, sous les conditions $1 \leqslant d \leqslant x/y$ et

$$x \geqslant y \geqslant 2, \quad P(m) \leqslant y, \quad \omega(m) \ll \sqrt{y}/(\log y)^\delta, \tag{2·21}$$

on ait uniformément

$$\Psi_m\Big(\frac{x}{d},y\Big) = \big\{1+O(h_m)\big\}\Big(1-\frac{t^2}{u^2+\overline{u}^2}\Big)^{b\overline{u}} g_m(\alpha)\frac{\Psi(x,y)}{d^\alpha} \tag{2·22}$$

où l'on a posé $t := (\log d)/\log y$ et

$$h_m = h_m(x,y;d) := \frac{1}{u_y} + (1+E_m)\Big(\frac{t}{u} + \frac{E_m}{\overline{u}}\Big).$$

Lorsque $\omega(m) \ll 1$, la formule (2·22) est valable uniformément sous les conditions $1 \leqslant d \leqslant x$ et (2·21) et l'on a

$$h_m \asymp h_1 \asymp \frac{1}{u_y} + \frac{t}{u}. \tag{2·23}$$

4. Voir, par exemple, la formule (2·25) *infra* ou les développements de [3].

Ce résultat précise et étend de nombreux travaux de la littérature.

Dans [10], Granville établit la formule asymptotique

$$\Psi_m(cx,y)=\big\{1+O(1/u)\big\}c^\alpha\Psi_m(x,y)$$

sous les conditions relativement restrictives

$$y\geqslant(\log x)^3,\quad 1\leqslant c\leqslant y,\quad m\leqslant y^{O(1)}.$$

Ce résultat est entièrement contenu dans (2·22), qui implique

$$\Psi_m(x/d,y)=\Big\{1+O\Big(\frac{1}{u_y}+\frac{t+E_m}{u}\Big)\Big\}\frac{\Psi_m(x,y)}{d^\alpha},\qquad E_m\ll(\log y)^{-\varepsilon/(1+2\varepsilon)}$$

lorsque $y\geqslant(\log x)^{1+\varepsilon}$, $\omega(m)\ll\log y$, $d\leqslant y^{O(1)}$.

Le cas $m=1$ de (2·22) complète notamment le théorème 3 de [16], où l'attention des auteurs était restreinte au cas $d\leqslant y$ — voir aussi le théorème III.5.11 de [30]. Il est à noter que, si $y\to\infty$, le terme d'erreur (2·23) tend vers 0 avec t même lorsque u est borné.

Remarque. L'estimation (2·19) n'a certainement pas lieu uniformément pour $1\leqslant d\leqslant x$, même lorsque $\omega(m)$ est borné, sans l'hypothèse $P(m)\leqslant y$: si par exemple $d=x$, $y=2$, $m=6$, le membre de gauche vaut 1 alors que celui de droite est $\ll 1/\log x$.

2·2. Valeurs moyennes friables de fonctions arithmétiques

Soit f une fonction arithmétique. Posant $h:=f*\mu$, nous avons

$$\Psi(x,y;f):=\sum_{n\in S(x,y)}f(n)=\sum_{d\in S(x,y)}h(d)\Psi\Big(\frac{x}{d},y\Big). \tag{2·24}$$

Lorsque f est additive, nous pouvons écrire semblablement

$$\Psi(x,y;f):=\sum_{n\in S(x,y)}f(n)=\sum_{\substack{p^\nu\leqslant x\\ p\leqslant y}}f(p^\nu)\Psi_p\Big(\frac{x}{p^\nu},y\Big). \tag{2·25}$$

Il apparaît ainsi qu'une connaissance suffisante du comportement asymptotique des quantités $\Psi_m(x/d,y)$ fournit, en théorie, le contrôle des sommes pondérées $\Psi(x,y;f)$. Nous nous proposons ici d'expliciter, comme conséquences des résultats de comportement local présentés plus haut, quelques versions effectives de ce principe.

Nous désignons par $\mathbb{F}$ la classe des fonctions arithmétiques et introduisons, pour $f\in\mathbb{F}$, $h=f*\mu$, $x\geqslant y\geqslant 2$, la notation

$$M_j=M_j(x,y;f):=\sum_{d\in S(x,y)}\frac{|h(d)|(\log d)^j}{d^\alpha}\qquad(j\geqslant 0). \tag{2·26}$$

Théorème 2.5. *On a, uniformément pour $f\in\mathbb{F}$ et $x\geqslant y\geqslant 2$,*

$$\Psi(x,y;f)=\Psi(x,y)\bigg\{\sum_{d\in S(x,y)}\frac{h(d)}{d^\alpha}+O\bigg(\frac{M_0}{u_y}+\frac{M_1}{\log x}+\frac{M_2\overline{u}}{(\log x)^2}\bigg)\bigg\}. \tag{2·27}$$

En particulier, le terme résiduel de (2·27) *est $\ll 1/u_y$ sous l'hypothèse supplémentaire $M_2\ll 1$.*

Démonstration. Appliquons (2·24) en évaluant les quantités $\Psi(x/d,y)$ par (2·22). Nous obtenons (2·27) en observant que

$$\Big\{1+O\Big(\frac{1}{u_y}+\frac{t}{u}\Big)\Big\}\Big(1-\frac{t^2}{u^2+\overline{u}^2}\Big)^{b\overline{u}}=1+O\Big(\frac{1}{u_y}+\frac{t}{u}+\frac{t^2\overline{u}}{u^2}\Big).$$

La seconde assertion en découle puisque l'on a trivialement $M_j\ll 1+M_2$ pour $j=0$ ou 1. □

Pour illustrer le champ d'application de ce théorème, nous considérons le cas $f = \mu^2$. Nous posons

$$\zeta(s,y) := \sum_{P(n)\leqslant y} \frac{1}{n^s} = \prod_{p\leqslant y} \big(1-p^{-s}\big)^{-1}.$$

Corollaire 2.6. *Sous la condition $x \geqslant y \geqslant 2$, on a*

$$\Psi(x,y;\mu^2) = \Psi(x,y)\Big\{\frac{1}{\zeta(2\alpha,y)} + O(R)\Big\}, \tag{2·28}$$

avec

$$R := \min\left\{\frac{\Theta_y\{\log\Theta_y\}^2}{u_y}, \frac{\log(\overline{u}+1)}{\sqrt{\overline{u}}}\right\} \ll \frac{\log_2(2y)}{\log y},$$

où l'on a posé $\Theta_y := \prod_{p\leqslant y}(1+p^{-2\alpha})$.

Le Corollaire 2.6 précise les résultats correspondants de [19],[5] qui fournissent, pour chaque $\varepsilon > 0$ fixé,

$$R \ll \begin{cases} \{\log_2(2y)\}/\log y & \text{si } y \geqslant (\log x)^{2+\varepsilon}, \\ \exp\{-(\log y)^{\varepsilon/3}\} & \text{si } y \leqslant (\log x)^{2-\varepsilon}. \end{cases}$$

La formule (2·28) possède également l'avantage de fournir, dans une certaine mesure, une description de la « transition de phase » de $\Psi(x,y;\mu^2)$ entre le domaine $\alpha > \frac12$, où $\Psi(x,y;\mu^2) \gg \Psi(x,y)$ et le domaine $\alpha < \frac12$, où $\Psi(x,y;\mu^2) = o\big(\Psi(x,y)\big)$.

Une étude spécifique de la fonction $\Psi(x,y;\mu^2)$ et de son comportement local a été récemment menée par les auteurs dans [2], à l'aide de la méthode du col. Ce travail fournit en particulier une description détaillée des variations au voisinage du centre de symétrie $x = \sqrt{N_y}$ avec $N_y := \prod_{p\leqslant y} p$. Les résultats du Corollaire 2.6, obtenus par spécialisation à partir d'un résultat très général, sont évidemment beaucoup moins précis. Ils n'ont été insérés ici qu'en tant qu'illustration des possibilités d'application de nos résultats principaux.[6] Il est à noter, par exemple, que l'on a

$$\Psi(x,y;\mu^2) = 2^{\pi(y)} \qquad (x > N_y).$$

Au vu de l'estimation essentiellement due à de Bruijn (cf., par exemple, le théorème 2 de [30])

$$\log\Psi(x,y) = Z\Big\{1 + O\Big(\frac{1}{\log y} + \frac{1}{\log_2 x}\Big)\Big\},$$

où

$$Z := \frac{\log x}{\log y}\log\Big(1+\frac{y}{\log x}\Big) + \frac{y}{\log y}\log\Big(1+\frac{\log x}{y}\Big),$$

on constate donc que, si elle fournit bien le résultat qualitatif

$$\Psi(x,y;\mu^2) = o(\Psi(x,y))$$

lorsque $\zeta(2\alpha,y) \to \infty$, la relation (2·28) est loin d'être optimale pour les très petites valeurs de y.

5. Voir la formule (2·12) et le théorème 2 de [19].
6. Il peut être utile, dans ce contexte, de situer précisément le point qui permet l'amélioration sur, par exemple, les résultats de [19]. Il est aisément localisé dans le cas du Corollaire 2.6 : contrairement aux calculs effectués dans [19], où le paramètre d était astreint à ne pas dépasser une puissance fixe de y, nous avons pu ici, via le Théorème 2.5, évaluer $\Psi(x/d,y)$ sans restriction sur d, et donc choisir optimalement les paramètres.

Lorsque f est de classe $\mathcal{C}^1$, on peut s'attendre à ce que la précision disponible pour le comportement local se reporte avec un minimum de perte dans celles de $\Psi(x,y;f)$. Notre prochaine application générique du Théorème 2.4 vient étayer ce principe sous une forme quantitative.

Pour $f \in \mathcal{C}^1([1,+\infty[)$, nous posons

$$M_j^* = M_j^*(x,y;f) := \int_1^x \frac{|f'(t)|(\log(x/t))^j}{(x/t)^\alpha}\,\mathrm{d}t \qquad (j \geqslant 0).$$

Théorème 2.7. *On a, uniformément pour* $f \in \mathcal{C}^1([1,+\infty[)$ *et* $x \geqslant y \geqslant 2$,

$$\Psi(x,y;f) = \Psi(x,y)\Big\{f(x) - \int_1^x \frac{f'(t)}{(x/t)^\alpha}\,\mathrm{d}t + O\Big(\frac{M_0^*}{u_y} + \frac{M_1^*}{\log x} + \frac{M_2^*\overline{u}}{(\log x)^2}\Big)\Big\}. \tag{2·29}$$

L'exemple fondamental de la fonction logarithme illustre bien le gain de précision généralement obtenu en exploitant la régularité de f : le lecteur vérifiera sans peine que le corollaire suivant du Théorème 2.7 fournit un résultat de meilleure qualité que celui que nous aurions pu déduire, via la relation de convolution $\Lambda = \mu * \log$, du Théorème 2.5, ou du Théorème 2.9 *infra*, qui est relatif aux fonctions additives.

Corollaire 2.8. *On a, uniformément pour* $x \geqslant y \geqslant 2$,

$$\begin{aligned}\Psi(x,y;\log) &= \Big\{\log x - \frac{1}{\alpha} + O\Big(\frac{1}{\alpha u_y}\Big)\Big\}\Psi(x,y)\\ &= \Big\{\log x - \frac{\log y + O(\log_2 y)}{\log(1+y/\log x)}\Big\}\Psi(x,y).\end{aligned} \tag{2·30}$$

Le Théorème 2.4 peut également être employé pour établir un résultat général concernant les moyennes de fonctions additives.

Nous désignons par $\mathbb{A}$ la classe des fonctions arithmétiques additives et posons, pour $f \in \mathbb{A}$,

$$m_j = m_j(x,y;f) := \sum_{p^\nu \in S(x,y)} \frac{|f(p^\nu)|g_p(\alpha)(\log p^\nu)^j}{p^{\nu\alpha}} \qquad (j \geqslant 0).$$

Théorème 2.9. *On a, uniformément pour* $f \in \mathbb{A}$ *et* $x \geqslant y \geqslant 2$,

$$\Psi(x,y;f) = \Psi(x,y)\Big\{\sum_{p^\nu \in S(x,y)} f(p^\nu)\frac{g_p(\alpha)}{p^{\nu\alpha}} + O\Big(\frac{m_0}{u_y} + \frac{m_1}{\log x} + \frac{m_2\overline{u}}{(\log x)^2}\Big)\Big\}. \tag{2·31}$$

Nous omettons la démonstration, qui est semblable à celle du Théorème 2.5.

Le membre de gauche de (2·31) peut souvent être simplifié lorsque f est une fonction additive suffisamment régulière sur l'ensemble des nombres premiers. Le corollaire suivant, relatif à la fonction additive

$$\kappa(n) := \sum_{p|n} \log p,$$

fournit un exemple d'une telle situation. On a $\kappa(n) = \log k(n)$, où $k(n) := \prod_{p|n} p$ dénote le noyau sans facteur carré de n.

Corollaire 2.10. *On a, uniformément pour* $x \geqslant y \geqslant 2$,

$$\begin{aligned}\Psi(x,y;\kappa) &= \Big\{1 + O\Big(\frac{1}{\overline{u} + \log y}\Big)\Big\}\Psi(x,y)\sum_{p \leqslant y} \frac{\log p}{p^\alpha}\\ &= \Big\{1 + O\Big(\frac{1}{\log y}\Big)\Big\}\Psi(x,y)\frac{y\log x}{y + \log x}.\end{aligned} \tag{2·32}$$

Remarque. On a $\kappa(n)=\log n$ lorsque n est sans facteur carré et il est bien connu que les valeurs moyennes ordinaires de ces deux fonctions sont proches. Il est clair, en revanche, qu'il faut attendre une divergence de comportement lorsque les moyennes sont prises sur $S(x,y)$ avec y assez petit devant x. La confrontation de (2·30) et (2·32) permet de mettre effectivement ce phénomène en évidence et de déterminer précisément les seuils critiques : on a par exemple

$$\frac{\Psi(x,y;\kappa)}{\Psi(x,y;\log)}=\begin{cases}1+o(1) & \text{si } y/\log x\to\infty,\\ o(1) & \text{si } y/\log x\to 0.\end{cases}\tag{2·33}$$

Un autre exemple d'application du Théorème 2.9, tiré de la littérature, permet d'en apprécier l'intérêt spécifique. Dans [18], Ivić étude la moyenne sur les entiers friables de la fonction $n\mapsto\Omega(n)-\omega(n)$. Sous la condition $\log y/(\log_2 x)\to\infty$, il établit la formule asymptotique

$$\Psi(x,y;\Omega-\omega)=\Psi(x,y)\Big\{H(1)+O\Big(\frac{\log_2 x}{\log y}\Big)\Big\}\tag{2·34}$$

où l'on a posé

$$H(s):=\sum_p\frac{1}{p^s(p^s-1)}=\sum_{m=2}^{\infty}\frac{\varphi(m)-\mu(m)}{m}\log\zeta(ms)\qquad(\Re e\, s>\tfrac12),$$

les logarithmes de la seconde expression étant pris en détermination principale.

Nous pouvons déduire immédiatement de (2·31) une formule asymptotique pour $\Psi(x,y;\Omega-\omega)$ valable uniformément lorsque $x\geqslant y\geqslant 2$.

Corollaire 2.11. *On a, uniformément pour $x\geqslant y\geqslant 2$,*

$$\Psi(x,y;\Omega-\omega)=\Big\{1+O\Big(\frac{1}{u_y}\Big)\Big\}\Psi(x,y)\sum_{p\leqslant y}\frac{1}{p^\alpha(p^\alpha-1)}.\tag{2·35}$$

La somme en p apparaissant dans (2·35) peut être évaluée explicitement en fonction de x et y.

Quelques notations sont nécessaires à l'écriture du résultat. Pour $t>0$, nous notons $\xi(t)$ l'unique racine réelle non nulle de l'équation

$$\mathrm{e}^{\xi}=1+t\xi\tag{2·36}$$

si $t\neq 1$ et posons $\xi(1):=0$.[7] On a

$$\begin{aligned}\xi(t)&=\log(t\log t)+O\Big(\frac{\log_2 t}{\log t}\Big)\\ t\xi'(t)&=1+\frac{1}{\log t}+O\left(\frac{\log_2 t}{(\log t)^2}\right)\end{aligned}\qquad(t\geqslant 3),\tag{2·37}$$

et

$$\begin{aligned}\xi(t)&=\frac{-1}{t}\Big\{1-\mathrm{e}^{-1/t}+O\Big(\frac{\mathrm{e}^{-2/t}}{t}\Big)\Big\}\\ t^2\xi'(t)&=1+\frac{\mathrm{e}^{-1/t}}{t}-\mathrm{e}^{-1/t}+O\Big(\frac{\mathrm{e}^{-2/t}}{t^2}\Big)\end{aligned}\qquad(0<t\leqslant 1).\tag{2·38}$$

Nous posons

$$\Xi(w):=\int_0^w\frac{t^2\xi'(t)-1}{t}\,\mathrm{d}t,\tag{2·39}$$

7. Des renseignements supplémentaires sur la fonction ξ sont disponibles par exemple au chap. III.5 de [30] ou dans les articles [16], [17].

de sorte que

$$\Xi(w) \asymp \mathrm{e}^{-1/w}(w+1) \qquad (w>0). \tag{2·40}$$

Nous définissons encore

$$F(s) := H(s) + \log(2s-1) \qquad (s \in]\tfrac12, \infty[) \tag{2·41}$$

et notons que $F(1) = H(1)$. La fonction F possède un prolongement holomorphe sur un voisinage de $]\frac13, \infty[$. Nous notons encore F ce prolongement.

Nous pouvons alors établir le résultat suivant.

Proposition 2.12. *On a, uniformément pour $x \geqslant y \geqslant 2$,*

$$\sum_{p\leqslant y} \frac{1}{p^\alpha(p^\alpha-1)} = \log(w\log y) + F(\alpha_*) + \Xi(w)\frac{y+\log x}{y}\Big\{1 + O\Big(\frac{1}{\log y}\Big)\Big\} \tag{2·42}$$

où l'on a posé

$$\alpha_* := \max\{\alpha, \tfrac25\}, \qquad w := \frac{y^{1-2\alpha}-1}{(1-2\alpha)\log y}.$$

En particulier,

$$\inf_{2\leqslant y\leqslant Y(x)} \frac{\Psi(x,y;\Omega-\omega)}{\Psi(x,y)} \to \infty \qquad (x\to\infty)$$

si, et seulement si, $Y(x) \leqslant (\log x)^{2+o(1)}$.

La dernière assertion résulte immédiatement de (2·35), (2·42), (2·40) et (3·3).

Nous n'avons pas cherché une précision optimale dans (2·42), notre objectif essentiel étant ici d'établir une formule asymptotique uniforme dans l'ensemble du domaine $x \geqslant y \geqslant 2$.

En notant que, sous l'hypothèse

$$(\log y)/\log_2 x \to \infty, \tag{2·43}$$

on a $(2\alpha-1)w\log y = 1 + O\big(u^2\xi(u)^2/y\big)$, nous déduisons de (2·35), (2·40) et (2·41) un renforcement considérable de (2·34).

Corollaire 2.13. *Lorsque* (2·43) *est réalisée on a*

$$\Psi(x,y;\Omega-\omega) = \Psi(x,y)\Big\{H(\alpha) + O(1/u_y)\Big\}. \tag{2·44}$$

Si, par exemple, $\log y = (\log_2 x)^2$, le terme d'erreur de (2·44) est $\ll (\log_2 x)^2/\log x$ alors que celui de (2·34) est de l'ordre de $1/\log_2 x$.

Sans développer plus avant d'autres applications du Théorème 2.4, notons que les propriétés de comportement local de $\Psi(x,y)$ ou $\Psi_m(x,y)$ sous-tendent de nombreux autres problèmes abordés dans la littérature.

Considérons, par exemple, les travaux de Scourfield [24], [25], [26], consacrés à l'étude et à la comparaison des sommes

$$\begin{aligned} A_f(x) &:= \sum_{nf(P(n))\leqslant x} 1 = \sum_{pf(p)\leqslant x} \Psi\Big(\frac{x}{pf(p)}, p\Big), \\ B_f(x) &:= \sum_{n\leqslant x} \frac{1}{f(P(n))} = \sum_{p\leqslant x} \frac{1}{f(p)}\Psi\Big(\frac{x}{p}, p\Big). \end{aligned} \tag{2·45}$$

L'approche standard de ces questions consiste à déterminer, spécifiquement pour chaque fonction f, un intervalle de valeurs de p — disons $L_1 \leqslant p \leqslant L_2$ — apportant une contribution prépondérante à chacune des deux sommes de droite dans (2·45). Les résultats de comportement local permettent d'approcher, dans l'expression de $A_f(x)$, chaque terme $\Psi(x/pf(p), p)$ par $\Psi(x/p,p)f(p)^{-\alpha(x/p,p)}$. S'il existe une fonction $T(x)$ telle que l'on ait, en un sens convenable du signe $\approx$,

$$f(p)^{1-\alpha(x/p,p)} \approx T(x) \qquad (L_1 \leqslant p \leqslant L_2),$$

on obtient

$$(2{\cdot}46)\qquad \begin{aligned} A_f(x) &\approx \sum_{\substack{pf(p)\leqslant x\\ L_1\leqslant p\leqslant L_2}} \Psi\Big(\frac{x}{pf(p)},p\Big) \approx \sum_{L_1\leqslant p\leqslant L_2} \frac{f(p)^{1-\alpha(x/p,p)}}{f(p)}\Psi\Big(\frac{x}{p},p\Big)\\ &\approx T(x)\sum_{L_1\leqslant p\leqslant L_2}\frac{1}{f(p)}\Psi\Big(\frac{x}{p},p\Big)\approx T(x)B_f(x). \end{aligned}$$

Dans [25], Scourfield considère le cas d'une fonction f positive, strictement croissante et continue, vérifiant

$$\log f(t) = (\log t)^{\nu+o(1)} \qquad (t\to\infty)$$

pour un paramètre convenable $\nu \geqslant 0$. On peut alors alors choisir, en vertu du lemme 2.5 de [25],

$$\log L_j = (\log x)^{1/(1+\nu)+o(1)} \quad (j=1,2).$$

Lorsque $\nu < 1$, nous pouvons ainsi déduire, par exemple, du Lemme 3.1 *infra* que

$$\{1-\alpha(x/p,p)\}\log f(p) \ll \frac{\{\log f(p)\}\log_2 x}{\log p} = o(1) \qquad (L_1\leqslant p\leqslant L_2).$$

Autrement dit, cela autorise le choix $T(x) = 1$ dans (2·46) : c'est la substance du théorème 1 de [25]. Lorsque $\nu \geqslant 1$, on n'a plus $T(x) = 1 + o(1)$ mais la même approche, reposant fondamentalement sur les propriétés du comportement local de $\Psi(x, y)$, demeure essentiellement pertinente.

3. Préliminaires

3·1. Point-selle

Nous rassemblons dans l'énoncé suivant les estimations explicites de $\alpha(x, y)$ dont nous aurons l'usage, et qui sont établies dans [16], formule (7·8) et théorème 2 — ou formules (III.5·73) et (III.5·12) de [30]. Nous posons

$$(3{\cdot}1)\qquad L_\varepsilon(y) := \exp\{(\log y)^{3/5-\varepsilon}\} \qquad (\varepsilon>0,\ y\geqslant 2).$$

Lemme 3.1. *On a*

$$(3{\cdot}2)\qquad \alpha(x,y) = \frac{\log(1+y/\log x)}{\log y}\Big\{1+O\Big(\frac{\log_2 y}{\log y}\Big)\Big\} \qquad (x\geqslant y\geqslant 2).$$

Plus précisément, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$(3{\cdot}3)\qquad \alpha(x,y) = \begin{cases} 1-\dfrac{\xi(u)}{\log y}+O\Big(\dfrac{1}{L_\varepsilon(y)}+\dfrac{1}{u(\log y)^2}\Big) & ((\log x)^{1+\varepsilon}\leqslant y\leqslant x),\\[2ex] \dfrac{\log(1+y/\log x)}{\log y}\Big\{1+O\Big(\dfrac{1}{\log y}\Big)\Big\} & (2\leqslant y\leqslant (\log x)^2). \end{cases}$$

Nous notons que (3·2) implique

$$(3{\cdot}4)\qquad \frac{\overline{u}+\log y}{u\log y} \ll \alpha \ll \frac{\overline{u}}{u}.$$

Comme on a classiquement

$$\sum_{p\leqslant x}\frac{\log p}{p-1} = \log x - \gamma + o(1) \qquad (x\to\infty)^{(8)}$$

8. Ici et dans tout l'article, nous désignons par γ la constante d'Euler.

on a aussi pour une constante convenable x_0,

$$\alpha < 1 \qquad (x > x_0,\ x \geqslant y \geqslant 2). \tag{3·5}$$

Le lemme suivant, qui est implicitement contenu dans [16], fournit une évaluation très utile pour estimer les sommes sur les nombres premiers apparaissant lors de la mise en œuvre de la méthode du col.

Lemme 3.2. *On a*

$$\frac{y^{1-\alpha}-1}{(1-\alpha)\log y} = \Big\{1+O\Big(\frac{1}{\log y}\Big)\Big\}\frac{uy}{y+\log x} \qquad (x \geqslant y \geqslant 2). \tag{3·6}$$

Démonstration. Il découle du lemme 13 de [16] que

$$\log x = \Big\{1+O\Big(\frac{1}{\log y}\Big)\Big\}\frac{y^{1-\alpha}-1}{(1-y^{-\alpha})(1-\alpha)} + O(1)$$

alors que la formule (7·18) de [16] fournit l'estimation

$$\frac{1}{1-y^{-\alpha}} = \Big\{1+O\Big(\frac{1}{\log y}\Big)\Big\}\frac{y+\log x}{y} \qquad (x \geqslant y \geqslant 2). \tag{3·7}$$

Cela implique bien (3·6). □

Désignons par

$$\zeta(s,y) := \prod_{p\leqslant y}\big(1-1/p^s\big)^{-1}$$

le facteur initial du produit eulérien de $\zeta(s)$. Nous posons

$$\begin{gathered}\varphi_0(s,y) := \log\zeta(s,y), \quad \varphi_k(s,y) := \varphi_0^{(k)}(s,y),\\ \sigma_k := (-1)^k\varphi_k(\alpha,y) \quad (k\in\mathbb{N}).\end{gathered} \tag{3·8}$$

Nous ferons usage des relations

$$\sigma_k \asymp (u\log y)^k/(\overline{u})^{k-1} \qquad (k\geqslant 1), \tag{3·9}$$

établies aux lemmes 2 et 4 de [16].

Le résultat suivant, qui décrit une approximation uniforme de $\Psi(x,y)$ en fonction de α et y, constitue le théorème principal de [16].

Lemme 3.3 (Hildebrand & Tenenbaum). *On a*

$$\Psi(x,y) = \frac{x^\alpha\zeta(\alpha,y)}{\alpha\sqrt{2\pi\sigma_2}}\Big\{1+O\Big(\frac{1}{\overline{u}}\Big)\Big\} \qquad (x \geqslant y \geqslant 2). \tag{3·10}$$

3·2. Preuve du Corollaire 2.2

Nous allons établir des majorations de $E_m(x,y)$ qui impliquent directement le Corollaire 2.2.

Proposition 3.4. *Sous les conditions $x \geqslant y \geqslant 2$ et $P(m) \leqslant y$, on a*

$$E_m(x,y) \ll \begin{cases} \dfrac{\vartheta_m\overline{u}}{\overline{\alpha}u} \ll \vartheta_m\log(\overline{u}+2) \ll 1 & \text{si } (C_1) \text{ est réalisée,}\\ \dfrac{\vartheta_m\sqrt{\overline{u}}}{\sqrt{\log(\overline{u}+2)}} & \text{si } (C_2) \text{ ou } (C_3) \text{ est réalisée,}\\ \sqrt{\overline{u}} & \text{si } (C_4) \text{ est réalisée.}\end{cases} \tag{3·11}$$

La déduction du Corollaire 2.2 à partir de la Proposition 3.4 est immédiate sous les conditions (C_1) ou (C_4). Sous les conditions (C_2) ou (C_3), il suffit de remarquer que $\vartheta_m \gg 1/\log(\overline{u}+2)$.

Démonstration. Lorsque $2 \leqslant y \leqslant 4$, on a $\vartheta_m \asymp 1$, donc

$$E_m \asymp \overline{u}/\overline{\alpha} u \asymp 1/\log y \asymp 1$$

et finalement $E_m^*(x,y) \asymp 1/\overline{u}$, ce qui fournit bien (3·11).

Nous pouvons donc supposer $y > 4$, de sorte que l'on a $\overline{\alpha} < 1$ si $x \geqslant y$ et $\overline{\alpha} < (\log 3)/\log 4 < \frac{4}{5}$ si $y \leqslant (\log x)^2$. Posons alors

$$\begin{aligned} K_1(v) &:= \int_0^{1+v} \frac{\mathrm{e}^t - 1}{t} \,\mathrm{d}t \asymp \frac{\mathrm{e}^v}{1+v} \qquad (v \geqslant 0), \\ K_2(v) &:= \int_0^{1+v} \frac{\mathrm{e}^{(1-\overline{\alpha})t} - 1}{t} \Big(1 + \frac{1}{\overline{\alpha}(t+1)}\Big) \,\mathrm{d}t \\ &\asymp \frac{\mathrm{e}^{(1-\overline{\alpha})v}}{v} \Big(1 + \frac{1}{\overline{\alpha} v}\Big) \qquad (0 < \overline{\alpha} < \tfrac{4}{5},\ v \gg 1). \end{aligned}$$

En notant que

$$y^{1-\overline{\alpha}} = \frac{y \log x}{y + \log x} \asymp \overline{u} \log y \qquad (x \geqslant y \geqslant 2), \tag{3·12}$$

nous obtenons

$$\frac{E_m(x,y)}{\vartheta_m} \asymp \begin{cases} K_1\big(\vartheta_m \log\{u \log(u+2)\}\big) & \text{si } y > (\log x)^2, \\ \dfrac{\overline{u}}{u} K_2(\vartheta_m \log y) & \text{si } y \leqslant (\log x)^2. \end{cases} \tag{3·13}$$

Nous utiliserons cette relation en exploitant le fait que les fonctions K_j sont croissantes.

Sous la condition (C_1), soit $\omega(m) \ll y^{1/\log(u+2)}$, et donc $\vartheta_m \ll 1/\log(\overline{u}+2)$, nous avons certainement $\vartheta_m \log y \ll 1$ lorsque $y \leqslant (\log x)^2$. Nous déduisons alors de (3·13) et (3·4) que

$$E_m/\vartheta_m \ll \overline{u}/(\overline{\alpha} u) \ll \log(\overline{u}+2) \ll 1/\vartheta_m,$$

ce qui implique bien l'évaluation requise (3·11).

Lorsque (C_2) est réalisée, soit $y^{1/\log(u+2)} \ll \omega(m) \ll \sqrt{y}/\log y$, nous avons

$$\frac{1}{\log(\overline{u}+2)} \ll \vartheta_m \leqslant \tfrac{1}{2} + O\Big(\frac{1}{\log y}\Big) \tag{3·14}$$

et, grâce à (3·13), la dernière majoration implique

$$\frac{E_m(x,y)}{\vartheta_m} \ll \begin{cases} \sqrt{u/\log(u+2)} & \text{si } y > (\log x)^2, \\ \dfrac{\overline{u}\, y^{(1-\overline{\alpha})/2}}{u \log y} \Big(1 + \dfrac{1}{\overline{\alpha} \log y}\Big) & \text{si } y \leqslant (\log x)^2. \end{cases}$$

La relation (3·12) et la définition de $\overline{\alpha}$ à la formule (2·4) permettent alors, par un calcul de routine que nous ne détaillons pas, d'établir (3·11).

Supposons finalement que (C_3) ou (C_4) est satisfaite. On a

$$\tfrac{1}{2} + O\Big(\frac{1}{\log y}\Big) \leqslant \vartheta_m \leqslant \tfrac{1}{2} + \frac{\lambda \log_2 y + O(1)}{\log y} \tag{3·15}$$

avec $\lambda = 1$ si $\log y \gg (\log_2 x)\log_3 x$ et $\lambda = 1 - \delta$ dans le cas contraire.

Lorsque $y > (\log x)^2$, et donc $\lambda = 1$, nous déduisons de (3·15) et (3·13) que

$$E_m \ll \sqrt{\frac{u}{\log(u+2)}}\, u^{(\log_2 y)/\log y}. \tag{3·16}$$

Le dernier facteur est borné sous la condition (C_3) et il est $\ll \sqrt{\log(u+2)}$ sous la condition (C_4). Nous obtenons donc bien (3·11) dans ce cas.

Lorsque $y \leqslant (\log x)^2$, nous déduisons de (3·12) et (3·13) que

$$\begin{aligned} E_m &\ll \frac{\overline{u}}{u} y^{(1-\overline{\alpha})/2} (\log y)^{(1-\overline{\alpha})\lambda - 1}\Big(1+\frac{1}{\overline{\alpha}\log y}\Big) \\ &\ll \frac{\overline{u}^{3/2}}{u} (\log y)^{(1-\overline{\alpha})\lambda-1/2}\Big(1+\frac{1}{\overline{\alpha}\log y}\Big). \end{aligned} \tag{3·17}$$

Cela fournit encore (3·11) si (C_3) est réalisée, puisque l'on a alors

$$\log y \gg \log(\overline{u}+2), \quad \overline{\alpha}\log y \gg 1, \quad 1-\overline{\alpha} \ll 1/\log_2 y.$$

La conclusion persiste sous la condition (C_4), car on a dans cette circonstance

$$(1-\overline{\alpha})\lambda = (1-\overline{\alpha})(1-\delta) \leqslant \tfrac12 + O(1/\log y), \quad 1+1/(\overline{\alpha}\log y) \ll u/\overline{u}.$$

□

3·3. Sommes sur les nombres premiers

Nous nous proposons dans ce paragraphe de donner des estimations uniformes dans le domaine $\sigma > 0$, $y \geqslant 2$, pour les quantités

$$H_0(\sigma,y) := \sum_{p\leqslant y} \frac{1}{p^\sigma}, \qquad H_1(\sigma,y) := \sum_{p\leqslant y}\frac{\log p}{p^\sigma}. \tag{3·18}$$

Nous introduisons à cet effet les séries de Dirichlet

$$H_0(s) := \sum_p \frac{1}{p^s}, \quad H_1(s) := \sum_p \frac{\log p}{p^s} \qquad (\Re e\, s > 1).$$

Un calcul classique reposant sur la formule d'inversion de Möbius fournit

$$H_0(s) = \sum_{m=1}^\infty \frac{\mu(m)}{m}\log\zeta(ms), \quad H_1(s) = -\sum_{m=1}^\infty \mu(m)\frac{\zeta'(ms)}{\zeta(ms)} \qquad (\Re e\, s>1).$$

Nous posons

$$F_1(s) := H_1(s) - 1/(s-1). \tag{3·19}$$

Cette fonction, initialement définie pour $\Re e\, s > 1$, possède un prolongement holomorphe, que nous notons encore $F_1(s)$, dans un ouvert contenant $]\frac12, +\infty[$.

Similairement, nous posons

$$F_0(s) := H_0(s) + \log(s-1) \qquad (\Re e\, s > 1), \tag{3·20}$$

où le logarithme est pris en détermination principale, et nous étendons par prolongement analytique le domaine de définition à un ouvert contenant $]\frac12,\infty[$. Dans cet ouvert, $F_0(s)$ est l'unique primitive de $-F_1(s)$ satisfaisant à $F_0(2) = H_0(2)$.

Enfin, nous introduisons la fonction

$$L(y) := \exp\big\{(\log y)^{3/5}/(\log_2 y)^{1/5}\big\} \tag{3·21}$$

et rappelons la forme classique du théorème des nombres premiers

$$\vartheta(x) := \sum_{p\leqslant x}\log p = x + O(x/L(x)^{2c}) \qquad (x \geqslant 2), \tag{3·22}$$

où c est une constante positive convenable.

Lemme 3.5. *On a, uniformément pour $\sigma \geqslant 0$ et $y \geqslant 2$,*

$$\sum_{p\leqslant y} \frac{\log p}{p^\sigma} = \frac{y^{1-\sigma}-1}{1-\sigma} + F_1(\sigma^*) + O\Big(\frac{y^{1-\sigma}}{L(y)^c}\Big) \tag{3·23}$$

avec $\sigma^* := \max(\sigma, 2/3)$.

En particulier, on a, uniformément pour $x \geqslant y \geqslant 2$,

$$\sum_{p\leqslant y} \frac{\log p}{p^\alpha} = \Big\{1 + O\Big(\frac{1}{\log y}\Big)\Big\} \frac{y \log x}{y + \log x}. \tag{3·24}$$

Démonstration. Considérons d'abord le cas $\sigma > 1$. Une sommation d'Abel utilisant (3·22) permet d'écrire

$$\begin{aligned} H_1(\sigma, y) &= H_1(\sigma) - \int_y^\infty \frac{\mathrm{d}\vartheta(x)}{x^\sigma} \\ &= F_1(\sigma) + \frac{y^{1-\sigma}-1}{1-\sigma} + O\bigg(\frac{y^{1-\sigma}}{L(y)^{2c}} + \int_y^\infty \frac{\sigma\,\mathrm{d}x}{x^\sigma L(x)^{2c}}\bigg). \end{aligned}$$

On obtient le résultat indiqué en minorant, dans la dernière intégrale, $x^\sigma L(x)^{2c}$ par

$$y^{(\sigma-1)/2} L(y)^c x^{(\sigma+1)/2} L(x)^c.$$

Le cas $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$ relève de la méthode classique d'intégration complexe. Nous omettons les détails, qui sont très voisins de ceux de la preuve de l'estimation (III·5·71) de [30] relative à la somme analogue $\sum_{n\leqslant y} \Lambda(n)/n^\sigma$. Il est à noter que le terme $F_1(\sigma^*)$ est englobé par le terme d'erreur lorsque $\sigma \leqslant \frac{2}{3}$.

La formule (3·24) découle immédiatement de (3·23) et (3·6). □

Par intégration de (3·23), nous obtenons une estimation de $H_0(\sigma, y)$ plus précise que celle du lemme 3.5 de [2]. Rappelons que la fonction Ξ a été définie en (2·39).

Lemme 3.6. *On a, uniformément pour $\sigma \geqslant 0$ et $y \geqslant 2$,*

$$\sum_{p\leqslant y} \frac{1}{p^\sigma} = \log(w_\sigma \log y) + F_0(\sigma^*) + \Xi(w_\sigma) + O\Big(\frac{y^{1-\sigma}}{L(y)^c}\Big) \tag{3·25}$$

où $\sigma^* := \max(\sigma, 2/3)$ *et*

$$w_\sigma := \frac{y^{1-\sigma}-1}{(1-\sigma)\log y}. \tag{3·26}$$

En particulier, on a, uniformément pour $y \geqslant 2$ et $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$,

$$\begin{aligned} \sum_{p\leqslant y} \frac{1}{p^\sigma} &= \log_2 y + \Big\{1 + O\Big(\frac{1-\sigma}{L(y)^c}\Big)\Big\} \int_1^{w_\sigma} t\xi'(t)\,\mathrm{d}t + O(1) \\ &= \log_2 y + O(w_\sigma). \end{aligned} \tag{3·27}$$

Démonstration. Lorsque $0 \leqslant \sigma \leqslant \frac{3}{2}$, nous pouvons écrire, grâce à (3·23),

$$\begin{aligned} H_0(\sigma, y) &= \int_\sigma^2 H_1(v, y)\,\mathrm{d}v + \int_2^\infty H_1(v, y)\,\mathrm{d}v \\ &= \int_\sigma^2 \frac{y^{1-v}-1}{1-v}\,\mathrm{d}v + F_0(\sigma) - H_0(2) + O\Big(\frac{y^{1-\sigma}}{L(y)^c}\Big) \\ &\quad + \int_2^\infty \frac{y^{1-v}\,\mathrm{d}v}{1-v} + H_0(2) + O\Big(\frac{1}{yL(y)^c}\Big) \\ &= \int_\sigma^2 \frac{y^{1-v}-1}{1-v}\,\mathrm{d}v + F_0(\sigma) + O\Big(\frac{y^{1-\sigma}}{L(y)^c}\Big). \end{aligned}$$

Évaluons la dernière intégrale en effectuant le changement de variable défini par $(1-v)\log y = \xi(t)$. Nous obtenons

$$\int_\sigma^2 \frac{y^{1-v}-1}{1-v}\,\mathrm{d}v = \Xi(w_\sigma) - \Xi(w_2) + \log(w_\sigma/w_2). \tag{3·28}$$

En observant, d'une part, que $w_2 = (1-1/y)/\log y$ — et donc $\Xi(w_2) \ll 1/y$ en vertu de (2·40) — et, d'autre part, que le terme $F_0(\sigma^*)$ est englobé par le terme d'erreur lorsque $\sigma \leqslant \frac{2}{3}$, nous obtenons bien (3·25).

Il reste à traiter le cas $\sigma > \frac{3}{2}$. À cette fin, nous récrivons, d'après (3·19), l'estimation (3·23) pour $v > 1$ sous la forme

$$H_1(v,y) = \frac{y^{1-v}}{1-v} + H_1(v) + O\Big(\frac{y^{1-v}}{L(y)^c}\Big).$$

Il suit, pour $\sigma > \frac{3}{2}$,

$$\begin{aligned} H_0(\sigma,y) &= \int_\sigma^\infty H_1(y,v)\,\mathrm{d}v = \int_\sigma^\infty \frac{y^{1-v}\,\mathrm{d}v}{1-v} + H_0(\sigma) + O\Big(\frac{y^{1-\sigma}}{L(y)^c}\Big) \\ &= \int_0^{w_\sigma} \frac{\{1+t\xi(t)\}\xi'(t)}{\xi(t)}\,\mathrm{d}t - \log(\sigma-1) + F_0(\sigma) + O\Big(\frac{y^{1-\sigma}}{L(y)^c}\Big). \end{aligned} \tag{3·29}$$

Nous avons

$$\begin{aligned} -\log(\sigma-1) &= \log(w_\sigma \log y) - \log(1-y^{1-\sigma}) \\ &= \log(w_\sigma \log y) + y^{1-\sigma} + O\big(y^{2(1-\sigma)}\big) \end{aligned}$$

et, grâce à (2·38),

$$\begin{aligned} \int_0^{w_\sigma} \frac{\{1+t\xi(t)\}\xi'(t)}{\xi(t)}\,\mathrm{d}t &= \Xi(w_\sigma) + \int_0^{w_\sigma} \Big\{\frac{\xi'(t)}{\xi(t)} + \frac{1}{t}\Big\}\,\mathrm{d}t \\ &= \Xi(w_\sigma) + \log\big|w_\sigma\xi(w_\sigma)\big| \\ &= \Xi(w_\sigma) - \mathrm{e}^{-1/w_\sigma} + O\bigg(\frac{\mathrm{e}^{-2/w_\sigma}}{w_\sigma}\bigg) \\ &= \Xi(w_\sigma) - y^{1-\sigma} + O\big(y^{3(1-\sigma)/2}\big). \end{aligned}$$

En reportant ces deux estimations dans (3·29), nous obtenons bien (3·25). □

3·4. La fonction de Dickman

La théorie des entiers friables fait fondamentalement intervenir la fonction de Dickman, traditionnellement désignée par la lettre ϱ et définie comme l'unique solution continue sur $[0,\infty[$ et dérivable sur $]1,\infty[$ de l'équation différentielle aux différences

$$v\varrho'(v) + \varrho(v-1) = 0$$

avec la condition initiale $\varrho(v) = 1$ pour $0 \leqslant v \leqslant 1$.[(9)] Nous posons $\varrho(v) = 0$ pour $v < 0$ et prolongeons toutes les dérivées de ϱ par continuité à droite sur $\mathbb{R}$. Nous introduisons également la dérivée logarithmique

$$r(v) := \frac{-\varrho'(v)}{\varrho(v)} = \frac{\varrho(v-1)}{v\varrho(v)} \qquad (v > 0). \tag{3·30}$$

On peut établir facilement (voir par exemple le corollaire III.5.8.3 de [30]) que

$$r(v) = \xi(v) + O\Big(\frac{1+\log v}{v}\Big) \qquad (v \geqslant 1), \tag{3·31}$$

et l'estimation plus précise

$$r(v) = \xi(v) + O(1/v), \tag{3·32}$$

est établie au lemme 3.7 de [3].

D'après le théorème III.5.7 de [30], on a

$$\widehat{\varrho}(s) := \int_0^\infty \mathrm{e}^{-vs}\varrho(v)\,\mathrm{d}v = \exp\{\gamma + I(-s)\} \qquad (s \in \mathbb{C}) \tag{3·33}$$

où

$$I(s) := \int_0^s \frac{\mathrm{e}^t - 1}{t}\,\mathrm{d}t.$$

9. Voir notamment (4·7) *infra*.

Avec ces notations, la formule d'Alladi–de Bruijn (voir par exemple le théorème III.5.8 de [30]) s'écrit

$$\varrho(v) = \Big\{1 + O\Big(\frac{1}{v}\Big)\Big\}\frac{\mathrm{e}^{-v\xi(v)}\widehat{\varrho}\big(-\xi(v)\big)}{\sqrt{2\pi/\xi'(v)}} \qquad (v \geqslant 1)$$

et l'on déduit aisément de cette formule, de (2·37) et de (3·32) que

$$\begin{aligned}\varrho(v) &\asymp \widehat{\varrho}\big(-r(v)\big)\mathrm{e}^{-vr(v)}/\sqrt{v} \\ &= \mathrm{e}^{-vr(v)+v+O(v/\log(v+1))} \qquad (v \geqslant 1).\end{aligned} \tag{3·34}$$

La fin de ce paragraphe est consacrée à deux estimations de $\widehat{\varrho}(s)$ lorsque $s = -r(u) + i\tau$, $|\tau| \leqslant 1$.

Lemme 3.7. *Il existe une constante $c > 0$ telle que, pour $u \geqslant 1$, $s = -r(u) + i\tau$, $|\tau| \leqslant 1$, on ait*

$$s\widehat{\varrho}(s) \ll r(u)\widehat{\varrho}(-r(u))\mathrm{e}^{-cu\tau^2}. \tag{3·35}$$

Démonstration. L'estimation annoncée découle trivialement de celle du lemme III.5.8.2 de [30] lorsque la partie réelle de s est choisie égale à $-\xi(u)$ au lieu de $-r(u)$. On vérifie aisément que la démonstration donnée dans [30] reste valable sans changement dans le cas énoncé. □

Lemme 3.8. *Pour $u \geqslant 1$, $s = -r(u) + i\tau$, $|\tau| \leqslant u^{-1/3}$, on a*

$$\widehat{\varrho}(s) = \big\{1 + O\left(\tau(1+\tau^2 u)\right)\big\}\widehat{\varrho}(-r(u))\exp\big\{-i\tau u - \tfrac{1}{2}\tau^2 u\big(1 - 1/\xi(u)\big)\big\}.$$

Démonstration. Le résultat indiqué est obtenu par un développement de Taylor de $I(-s)$ à l'ordre 3 grâce aux évaluations

$$\begin{aligned}I'(r(u)) &= \frac{\mathrm{e}^{r(u)} - 1}{r(u)} = u + O(1), \\ I''(r(u)) &= \frac{(r(u)-1)\mathrm{e}^{r(u)} + 1}{r(u)^2} = u - u/\xi(u) + O(1), \\ I'''(r(u) + i\tau) &\ll u,\end{aligned}$$

qui résultent aisément de (3·32). □

3·5. Estimations de crible

Posons

$$N_m(t) := \sum_{\substack{n \leqslant t \\ (n,m)=1}} 1 \tag{3·36}$$

et définissons $R_m(t)$ par l'identité

$$N_m(t) = t\big\{\varphi(m)/m + R_m(t)\big\} \qquad (t > 0).$$

Les estimations suivantes du terme d'erreur $R_m(t)$ constituent un point de départ indispensable pour notre étude de $\Psi_m(x, y)$. Elles remplacent avantageusement la majoration classique, obtenue par inversion de Möbius,

$$|R_m(t)| \leqslant 2^{\omega(m)}/t \qquad (t > 0) \tag{3·37}$$

au moins lorsque $t \leqslant 2^{\omega(m)(1+4/W_m)}$.

Lemme 3.9. *On a uniformément pour m entier, $m \geqslant 1$,*

$$R_m(t) \ll \begin{cases} \dfrac{\varphi(m)}{m} t^{-4/(6+W_m)} & (t \geqslant \omega(m) + 1), \\ 1 & (0 < t \leqslant \omega(m) + 1), \end{cases} \tag{3·38}$$

où W_m désigne la quantité définie en (2·3).

Démonstration. Soit $\kappa > 0$. Nous observons d'abord que l'on a

$$R_m(t) \ll \begin{cases} \dfrac{\varphi(m)}{m}\Big\{t^{-\kappa/W_m} + \mathrm{e}^{-\sqrt{\log t}}\Big\} & (t \geqslant \omega(m)+1) \\ t^{-1/W_m^*} & (t > 0) \end{cases} \tag{3·39}$$

où l'on a posé $W_m^* := \frac{1}{5}(6 + W_m)$. La première estimation (3·39) coïncide avec celle du lemme de [29]. Pour établir la seconde, nous faisons appel à la majoration (4·12) de [6] sous la forme

$$R_{m_0}(t) \ll t^{-1/W_m^*} \qquad (t > 0)$$

pour

$$m_0 := \prod_{\substack{p^\nu \| m \\ p \leqslant \omega(m)+1}} p^\nu.$$

Cela implique

$$\begin{aligned} R_m(t) &= \sum_{d \mid m/m_0} \frac{\mu(d)}{d} R_{m_0}(t/d) \\ &\ll t^{-1/W_m^*} \prod_{\substack{p \mid m \\ p > \omega(m)+1}} \Big(1 + \frac{1}{p^{1-1/W_m^*}}\Big) \ll t^{-1/W_m^*}. \end{aligned}$$

La relation (3·38) est clairement conséquence de la première majoration (3·39) avec $\kappa = 5$ lorsque $t \leqslant \mathrm{e}^{W_m^2/25}$. Dans le cas contraire, la seconde majoration fournit

$$R_m(t) \ll t^{-4/(6+W_m)} \mathrm{e}^{-W_m^2/(150+25W_m)} \ll \frac{t^{-4/(6+W_m)}}{W_m} \ll \frac{\varphi(m)}{m} t^{-4/(6+W_m)}.$$

□

Le résultat suivant renforce légèrement la première estimation de (3·39).

Lemme 3.10. *Soit $a \in]0,1[$. Il existe une constante $b = b(a) > 0$ telle que, pour $m \geqslant 1$, $t \geqslant \omega(m)+1$, on ait*

$$R_m(t) \ll \frac{\varphi(m)}{m}\Big\{D^{-(1-a)D} + \mathrm{e}^{-b\sqrt{\log t \log_2(2t)}}\Big\} \tag{3·40}$$

où $D := (\log t)/\log\{\omega(m)+2\}$.

De plus, sous les conditions $y \geqslant 2$, $P(m) \leqslant y$, $u \geqslant 2$, on a

$$R_m(y^u) \ll \frac{\varphi(m)}{m}\Big\{u^{-(1-a)u} + y^{-bu}\Big\}. \tag{3·41}$$

Démonstration. Soit $c > 0$ un paramètre que nous choisirons suffisamment petit par rapport à a. Ainsi qu'il a été remarqué dans [29], la majoration classique issue du crible de Brun permet de supposer

$$t \geqslant (\omega(m)+1)^{2/(1-c)}. \tag{3·42}$$

Nous appliquons ensuite le lemme fondamental du crible combinatoire sous la forme énoncée dans [5]. Notant

$$m_z := \prod_{\substack{p^\nu \| m \\ p \leqslant z}} p^\nu,$$

nous avons, uniformément par rapport à $z \geqslant 1$ et $v \geqslant 1$,

$$N_{m_z}(t) = t\frac{\varphi(m_z)}{m_z}\big\{1 + O\big(v^{-(1-c)v}\big)\big\} + O(z^v). \tag{3·43}$$

Si $z \geqslant \omega(m)+1$, on a

$$0 \leqslant \frac{\varphi(m_z)}{m_z} - \frac{\varphi(m)}{m} \leqslant \frac{\varphi(m)}{m}\Big\{(1-1/z)^{-\omega(m)} - 1\Big\} \ll \frac{\varphi(m)\omega(m)}{mz}.$$

De plus, sous la même condition, la formule d'inversion de Möbius permet d'écrire

$$\begin{aligned}0 \leqslant N_{m_z}(t) - N_m(t) &= \sum_{\substack{d\mid m/m_z\\ d>1}} \mu(d) N_{m_z}\Big(\frac{t}{d}\Big) \leqslant t \sum_{\substack{d\mid m/m_z\\ d>1}} \frac{\mu(d)^2}{d}\\ &= t\Big\{\prod_{p\mid m/m_z}\Big(1+\frac{1}{p}\Big) - 1\Big\} \ll t\frac{\omega(m)}{z}.\end{aligned}$$

Grâce à la majoration classique $1 \ll \varphi(m)\log\{\omega(m)+2\}/m$, nous obtenons ainsi lorsque $z \geqslant \omega(m)+1$, $v \geqslant 1$

$$N_m(t) = t\frac{\varphi(m)}{m}\Big\{1 + O\Big(v^{-(1-c)v} + \frac{\omega(m)\log(\omega(m)+2)}{z}\Big)\Big\} + O(z^v). \tag{3·44}$$

Pour le choix des paramètres

$$z := (\omega(m)+1)\Big\{\omega(m) + \mathrm{e}^{\sqrt{\log t \log_2 2t}}\Big\}^c, \qquad v := (1-c)\frac{\log t}{\log z},$$

nous avons $z \geqslant \omega(m)+1$ et, en vertu de (3·42), $v \geqslant 1$. En choisissant c de sorte que $(1-c)^2 > 1-a$, nous déduisons bien (3·40) de (3·44).

Pour établir (3·41), il suffit de spécialiser, dans (3·43), $z = y$ et $v = (1-c)u$ où c satisfait à $(1-c)^2 > 1-a$. □

Les deux résultats suivants peuvent être considérés comme une estimation de crible en moyenne. Nous rappelons la notation (2·4), soit $\vartheta_m := W_m/\log y$.

Lemme 3.11. *Pour $1 \leqslant u \leqslant (\log_2 y)^2$ et $\omega(m) \ll \sqrt{y}$, on a*

$$\int_0^u |R_m(y^v)|\mathrm{e}^{vr(u)}\,\mathrm{d}v \ll \frac{\varphi(m)}{m}\vartheta_m\,\mathrm{e}^{u^{2/3}} \tag{3·45}$$

et

$$\int_u^\infty |R_m(y^v)|\mathrm{e}^{vr(u)}\,\mathrm{d}v \ll \frac{\varphi(m)}{m}\vartheta_m\,u^{-u/2}. \tag{3·46}$$

Remarques. (i) Nous n'avons pas cherché ici à optimiser les exposants $\frac{2}{3}$ de (3·45) et $\frac{1}{2}$ de (3·46) : au prix de quelques complications techniques, ils pourraient être respectivement remplacés par $\frac{1}{2}+\varepsilon$ et $1-\varepsilon$ pour $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit.

(ii) Les estimations (3·45) et (3·46) sont plus précises mais analogues à celles des lemmes 13 et 14 de [34], qui auraient suffi à nos présentes applications. Nous avons cependant choisi de présenter ici une courte preuve autonome pour le confort du lecteur et en vue de référence ultérieure.

Démonstration. Lorsque y est borné, les estimations annoncées résultent de (3·37). Nous pouvons donc supposer y assez grand et par conséquent

$$\lambda := \frac{\log y}{\log\{\omega(m)+2\}} = 2 + O\Big(\frac{1}{\log y}\Big) \geqslant \tfrac{15}{8}. \tag{3·47}$$

Nous commençons par établir la majoration

$$\int_0^\vartheta |R_m(y^v)|\,\mathrm{d}v \ll \frac{\varphi(m)}{m}\vartheta \qquad (\vartheta \geqslant \vartheta_m). \tag{3·48}$$

On a en effet

$$\begin{aligned}\int_0^{\vartheta}|R_m(y^v)|\,\mathrm{d}v &\ll \int_0^{\vartheta}\Big\{\frac{\varphi(m)}{m}+\frac{N_m(y^v)}{y^v}\Big\}\,\mathrm{d}v\\ &\ll \frac{\varphi(m)}{m}\vartheta+\frac{1}{\log y}\sum_{\substack{n\leqslant y^{\vartheta}\\(n,m)=1}}\frac{1}{n}.\end{aligned}\tag{3·49}$$

On obtient (3·48) en observant que la dernière somme en n n'excède pas

$$\prod_{\substack{p\leqslant y^{\vartheta}\\ p\nmid m}}(1+1/p)\ll\frac{\varphi(m)}{m}\vartheta\log y.$$

Nous déduisons ensuite de (3·48) et (3·31) que la contribution de l'intervalle $[0,u^{3/5}]$ à l'intégrale de (3·45) est majorée par le membre de droite.

Lorsque $u^{3/5}<v\leqslant u$ nous pouvons écrire, grâce à (3·40) avec $a=1/15$, (3·47) et (3·31),

$$\begin{aligned}R_m(y^v)\mathrm{e}^{vr(u)} &\ll \frac{\varphi(m)}{m}\Big\{(\lambda v)^{-14\lambda v/15}+\mathrm{e}^{-\sqrt{v\log y}}\Big\}\mathrm{e}^{v\xi(u)+O(\log u)}\\ &\ll \frac{\varphi(m)}{m}\lambda^{-7v/4}u^{-(21v/20)+v+O(v(\log_2 3u)/\log 2u)}\\ &\ll \frac{\varphi(m)}{m\lambda}\ll\frac{\varphi(m)}{m}\vartheta_m.\end{aligned}$$

Cela implique bien (3·45).

Pour établir (3·46), nous évaluons l'intégrande en appliquant (3·40) si $u\leqslant v\leqslant\log y$, et (3·41) si $v>\log y$. Nous obtenons après calcul

$$|R_m(y^v)|\mathrm{e}^{vr(u)}\ll\frac{\varphi(m)}{m}\vartheta_m\mathrm{e}^{-3vr(u)/2}\qquad(v\geqslant u).\tag{3·50}$$

Cela implique immédiatement (3·46). □

Notons

$$\beta=\beta(x,y):=1-\frac{r(u)}{\log y}\qquad(x\geqslant y\geqslant 2)\tag{3·51}$$

et posons

$$F_m(z):=\int_z^{\infty}t^{1-\beta}\,\mathrm{d}R_m(t).$$

Lemme 3.12. *Pour $1\leqslant u\leqslant(\log_2 y)^2$, $m\geqslant 1$, $\omega(m)\ll\sqrt{y}$, on a*

$$F_m(y^u)\ll g_m(\beta)\vartheta_m\,u^{-u/3}.$$

Démonstration. Le résultat annoncé est, après intégration par parties, conséquence immédiate de (3·46), (3·50) et de la minoration issue de (3·27) et (3·6)

$$g_m(\beta)\gg\exp\Big\{-\sum_{p\leqslant p_{\omega(m)}}1/p^{\beta}\Big\}\gg\frac{\mathrm{e}^{O(u)}}{\log y}.$$

□

3·6. Estimations relatives à $g_m(s)$

Nous commençons par un lemme concernant les dérivées logarithmiques de g_m. Nous posons

$$\gamma_m(s) := \log g_m(s) \quad (\sigma > 0), \quad z_m := p_{\omega(m)},$$

où p_k désigne le k-ième nombre premier lorsque $k \geqslant 1$ et $p_0 := 2$.

Lemme 3.13. *On a uniformément pour* $0 < \sigma < 1$ *et* $\Re e\, s = \sigma$

$$\begin{aligned} |\gamma_m'(s)| &\leqslant \gamma_m'(\sigma) \ll \frac{z_m^{1-\sigma} - 1}{(1 - z_m^{-\sigma})(1-\sigma)}, \\ |\gamma_m''(s)| &\leqslant |\gamma_m''(\sigma)| \ll \frac{(z_m^{1-\sigma} - 1)\log z_m}{(1 - z_m^{-\sigma})^2(1-\sigma)}. \end{aligned} \tag{3·52}$$

Démonstration. On a

$$\gamma_m'(s) = \sum_{p|m} \frac{\log p}{p^s - 1}, \quad \gamma_m''(s) = -\sum_{p|m} \frac{(\log p)^2 p^s}{(p^s - 1)^2}.$$

Le module maximal de ces fonctions sur une droite verticale d'abscisse $\sigma > 0$ est donc atteint en $s = \sigma$. De plus, comme les fonctions $t \mapsto (\log t)/(t-1)$ et $t \mapsto t(\log t)^2/(t-1)^2$ sont décroissantes pour $t \geqslant 1$, nous obtenons des majorations de $|\gamma_m'(\sigma)|$ et $|\gamma_m''(\sigma)|$ en choisissant comme domaine de sommation l'ensemble des nombres premiers n'excédant pas z_m. Le résultat annoncé découle alors du lemme 13 de [16]. □

Les trois lemmes suivants concernent la fonction $g_m(s)$ et ses dérivées. Le premier et le troisième sont des versions amendées de certains énoncés de [34]. Nous rappelons les définitions (2·4) de ϑ_m et (3·51) de β.

Lemme 3.14. *Soit* $\varepsilon > 0$. *Sous les conditions*

$$(\log x)^{1+\varepsilon} \leqslant y \leqslant x, \qquad |\tau| \leqslant \frac{1}{u^{1/3}\log y}, \qquad \omega(m) \ll \sqrt{y}, \qquad \sigma = \alpha \text{ ou } \beta,$$

on a

$$g_m(\sigma + i\tau) = g_m(\sigma)\big\{1 + i\tau\gamma_m'(\beta) + O(\tau^2(E_m \log y)^2)\big\} \tag{3·53}$$

et

$$\gamma_m'(\sigma) \ll E_m \log y, \qquad \gamma_m''(\sigma) \ll E_m \vartheta_m (\log y)^2. \tag{3·54}$$

Démonstration. Traitons par exemple le cas $\sigma = \beta$, les formules relatives à $\sigma = \alpha$ étant obtenues de manière similaire. Nous avons, d'après le théorème des accroissements finis,

$$g_m(s) = g_m(\beta) \exp\big\{i\tau\gamma_m'(\beta) + O(\tau^2\gamma_m''(\beta))\big\}. \tag{3·55}$$

Lorsque $(\log x)^{1+\varepsilon} \leqslant y \leqslant x$, $\omega(m) \ll \sqrt{y}$, le Lemme 3.13 fournit

$$\begin{aligned} \gamma_m'(\beta) &\ll \vartheta_m \log y \frac{\mathrm{e}^{\vartheta_m r(u)} - 1}{\vartheta_m r(u)} \ll \vartheta_m \log y \frac{\{u \log(u+2)\}^{\vartheta_m}}{1 + \vartheta_m \log(u+2)} = E_m \log y, \\ \gamma_m''(\beta) &\ll (\vartheta_m \log y)^2 \frac{\mathrm{e}^{\vartheta_m r(u)} - 1}{\vartheta_m r(u)} \ll E_m \vartheta_m (\log y)^2, \end{aligned}$$

où nous avons utilisé le fait que la fonction $x \mapsto (\mathrm{e}^x - 1)/x$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et fait appel à (3·31) sous la forme

$$r(u) \leqslant \log\{u \log(u+2)\} + O(1). \tag{3·56}$$

Comme on a $\gamma_m''(\beta)\tau^2 \ll 1$ sous les hypothèses effectuées, un développement limité de l'exponentielle dans (3·55) permet de conclure. □

Remarque. La première partie du Lemme 3.14 précise et rectifie le lemme 5 de [34]. Nous notons en premier lieu que l'énoncé de Xuan est incorrect parce qu'il n'y précise pas la condition sur y. C'est sans conséquence pour la suite car le lemme n'est effectivement utilisé que pour $y \geqslant (\log x)^{1+\varepsilon}$. Cependant, une autre imprécision, beaucoup plus sérieuse, apparaît dans la majoration de $\gamma_m'(\beta)$ donnée dans [34], qui repose implicitement sur l'idée que la condition $\omega(m) \leqslant \sqrt{y}$ impliquerait $\vartheta_m \leqslant \frac12$. Or, on ne peut pas déduire de l'hypothèse une estimation plus précise que

$$\vartheta_m \leqslant \tfrac12 + \{\log_2 y + O(1)\}/\log y, \tag{3·57}$$

comme l'atteste l'exemple $m = \prod_{1\leqslant j\leqslant\sqrt{y}} p_j$ où p_j désigne le j-ème nombre premier. On a, pour ce choix de m,

$$\gamma_m'(\beta) \asymp \frac{\vartheta_m \log y}{\log(u+2)}\{u\log(u+2)\}^{\frac12+\log_2 y/\log y}$$

alors qu'il est énoncé dans [34] que

$$\gamma_m'(\beta) \ll \frac{\vartheta_m \log y}{\log(u+2)}\{u\log(u+2)\}^{1/2}.$$

La quantité $u^{\log_2 y/\log y}$ n'étant pas nécessairement bornée dans le domaine considéré, le résultat de [34] est clairement en défaut.

Lemme 3.15. *Sous les conditions*

$$x \geqslant y \geqslant 2, \quad \omega(m) \ll \sqrt{y}, \tag{3·58}$$

on a

$$\gamma_m^{(j)}(\alpha) \ll \big(E_m u \log y/\overline{u}\big)^j \qquad (j=1,2). \tag{3·59}$$

Démonstration. Lorsque $y > (\log x)^2$, les estimations (3·54) et (2·10) impliquent immédiatement (3·59). Nous pouvons donc nous placer dans le cas $2 \leqslant y \leqslant (\log x)^2$. D'après (3·52), (3·3) et (3·12), nous pouvons alors écrire,

$$\begin{aligned}\gamma_m'(\alpha) &\ll \mathrm{e}^{(1-\alpha)W_m}\Big(1+\frac{1}{\alpha W_m}\Big)\\ &\ll y^{\vartheta_m(1-\overline{\alpha})}\Big(1+\frac{1}{\overline{\alpha}\vartheta_m\log y}\Big) \asymp (\overline{u}\log y)^{\vartheta_m}\Big(1+\frac{1}{\overline{\alpha}\vartheta_m\log y}\Big)\\ &\ll E_m u(\log y)/\overline{u}.\end{aligned} \tag{3·60}$$

De même,

$$\gamma_m''(\alpha) \ll \mathrm{e}^{(1-\alpha)W_m}W_m\Big(1+\frac{1}{\overline{\alpha}W_m}\Big)^2 \ll \Big(\frac{E_m u\log y}{\overline{u}}\Big)^2.$$

□

Lemme 3.16. *Sous les conditions*

$$(\log x)^2 \leqslant y \leqslant x,\ \omega(m) \ll \sqrt{y},\ \beta = 1 - \frac{r(u)}{\log y},\ s = \beta + i\tau, \tag{3·61}$$

il existe une constante C_0 telle que l'on ait

$$g_m(s) \ll \begin{cases} g_m(\beta)\mathrm{e}^{C_0\sqrt{u}\,(\tau W_m)^2} & \textit{si } |\tau| \leqslant 1/\log y,\\ g_m(\beta)W_m^2\mathrm{e}^{C_0\sqrt{u}} & \textit{si } |\tau| > 1/\log y.\end{cases} \tag{3·62}$$

Remarque. Ce résultat précise et rectifie les lemmes 7 et 8 de [34], qui omettent la nouvelle, et indispensable, condition sur y.

Démonstration. La première estimation (3·62) résulte de (3·55) et de la majoration $\gamma_m''(\beta) \ll W_m^2\sqrt{u}$, qui est elle-même conséquence de (3·54). En effet, dans le domaine (3·61), on déduit de (3·57) que

$$\frac{E_m}{\vartheta_m} = \frac{\{u\log(u+2)\}^{\vartheta_m}}{1+\vartheta_m\log(u+2)} \ll \sqrt{u}\frac{(\log x)^{(\log_2 y)/\log y}}{\sqrt{\log(u+2)}} \ll \sqrt{u}. \tag{3·63}$$

La seconde majoration découle, toujours sous l'hypothèse (3·61), de l'estimation

$$\begin{aligned}|g_m(s)| \leqslant \frac{1}{g_m(\beta)} &\ll \exp\Big\{\sum_{p\leqslant p_{\omega(m)}}\frac{1}{p^\beta}\Big\}\\ &\ll W_m\exp\Big\{O\Big(\frac{\{u\log(u+2)\}^{\vartheta_m}}{1+\vartheta_m\log(u+2)}\Big)\Big\} \ll W_m\mathrm{e}^{O(\sqrt{u})},\end{aligned} \tag{3·64}$$

issue de (3·27), (3·56) et (3·63). □

Lemme 3.17. *Il existe une constante absolue b_3 telle que, pour toute constante positive c, sous les conditions*

$$x \geqslant y \geqslant 2, \quad P(m) \leqslant y, \quad 1 \leqslant d \leqslant x/y, \quad \omega(m) \ll \sqrt{y}/(\log y)^\delta, \tag{3·65}$$

et avec les notations $t := (\log d)/\log y$, $\alpha_t := \alpha(y^{u-t}, y) = \alpha(x/d, y)$, on ait

$$\frac{g_m(\alpha_t)}{g_m(\alpha)} \leqslant \Big(1-\frac{t^2}{u^2+\overline{u}^2}\Big)^{-c\overline{u}-b_3\sqrt{\overline{u}}}\Big\{1+O\Big(\frac{tE_m}{u}\Big)\Big\}. \tag{3·66}$$

Démonstration. Commençons par établir l'estimation

$$\log\Big(\frac{g_m(\alpha_t)}{g_m(\alpha)}\Big) \ll E_m\log\Big(\frac{u+1}{u+1-t}\Big) \quad (y > \log x \text{ ou } t \leqslant u/2). \tag{3·67}$$

À cette fin, nous observons que, d'après (3·59),

$$\gamma_m'(\sigma) \leqslant \gamma_m'(\alpha) \ll E_m u(\log y)/\overline{u} \qquad (\alpha \leqslant \sigma \leqslant 1). \tag{3·68}$$

Nous pouvons donc écrire

$$\log\Big(\frac{g_m(\alpha_t)}{g_m(\alpha)}\Big) = \int_\alpha^{\alpha_t}\gamma_m'(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma \ll (\alpha_t-\alpha)E_m\frac{u\log y}{\overline{u}}. \tag{3·69}$$

Pour établir (3·67), il suffit donc de montrer que l'on a sous les hypothèses indiquées

$$\alpha_t - \alpha \ll \frac{\overline{u}}{u\log y}\log\Big(\frac{u+1}{u+1-t}\Big). \tag{3·70}$$

Or, d'après (5·3),

$$\alpha_t - \alpha \ll \int_{u-t}^u \frac{\overline{v}\,\mathrm{d}v}{v^2\log y},$$

où nous avons posé $\overline{v} = \min(v, y/\log y)$. Cela implique trivialement (3·70) lorsque $y > \log x$ puisque $\overline{v} \leqslant v$. Si $y \leqslant \log x$, et donc $t \leqslant u/2$, la majoration $\overline{v} \leqslant \overline{u}$ est suffisante puisque l'on a alors

$$\int_{u-t}^u\frac{\overline{v}\,\mathrm{d}v}{v^2} \leqslant \frac{t\overline{u}}{u(u-t)} \ll \frac{t\overline{u}}{u^2} \asymp \frac{\overline{u}}{u}\log\Big(\frac{u+1}{u+1-t}\Big).$$

Montrons à présent que, dans son domaine de validité, la formule (3·67) implique (3·66).

Considérons d'abord le cas $t \leqslant u/2$. D'après la Proposition 3.4, on a

$$E_m \ll \sqrt{\overline{u}} \tag{3·71}$$

sous l'hypothèse (3·65). Soit alors A un paramètre positif. Si $t \leqslant \min(u/2, Au/\sqrt{\overline{u}})$, et donc $tE_m/u \ll_A 1$, nous déduisons de (3·67) que

$$\frac{g_m(\alpha_t)}{g_m(\alpha)} \leqslant \exp\{O_A(tE_m/u)\} \leqslant 1 + O_A(tE_m/u),$$

ce qui implique bien (3·66). Si $Au/\sqrt{\overline{u}} < t \leqslant u/2$, il découle de (3·67) et (3·71) qu'il existe une constante absolue $c_7 > 0$ telle que

$$\log\Big(\frac{g_m(\alpha_t)}{g_m(\alpha)}\Big) \leqslant \frac{c_7 t\sqrt{\overline{u}}}{u} \leqslant \frac{c_7 t^2\overline{u}}{Au^2} \leqslant c\overline{u}\log\Big(\frac{1}{1-t^2/(u^2+\overline{u}^2)}\Big)$$

quitte à choisir $A > 2c_7/c$. Nous avons donc établi (3·66) lorsque $t \leqslant u/2$.

Tournons ensuite notre attention vers le cas $y > \log x$, $t > u/2$. Le résultat est une conséquence triviale de (3·67) si u est borné. Si u est assez grand, il résulte de (3·67) et (3·71) que

$$\begin{aligned} \log\Big(\frac{g_m(\alpha_t)}{g_m(\alpha)}\Big) &= O\big(\sqrt{\overline{u}}\log u\big) \\ &\leqslant c\overline{u}\log\tfrac{8}{7} \leqslant c\overline{u}\log\Big(\frac{1}{1-t^2/(u^2+\overline{u}^2)}\Big). \end{aligned} \tag{3·72}$$

Nous avons donc prouvé la validité de (3·66) lorsque $y > \log x$ ou $t \leqslant u/2$.

Dans le cas restant, i.e. lorsque $y \leqslant \log x$ et $u/2 < t \leqslant u-1$, nous utilisons la majoration

$$\gamma_m'(\sigma) = \sum_{p|m}\frac{\log p}{p^\sigma - 1} \leqslant \frac{\omega(m)}{\sigma} \ll \frac{\sqrt{\overline{u}}}{\sigma}$$

où la dernière estimation découle du fait que, pour $y \leqslant \log x$, on a

$$\delta = \tfrac{1}{2} + O(1/\log y)$$

et donc, par (3·65), $\omega(m) \ll \sqrt{y}/(\log y)^\delta \asymp \sqrt{y/\log y} = \sqrt{\overline{u}}$. Il s'ensuit que

$$\log\Big(\frac{g_m(\alpha_t)}{g_m(\alpha)}\Big) \ll \sqrt{\overline{u}}\log\Big(\frac{\alpha_t}{\alpha}\Big). \tag{3·73}$$

D'après (3·2), on a

$$\alpha_t\log y \asymp \log\Big(1+\frac{\overline{u}}{u-t}\Big) \qquad (y \leqslant \log x,\ 0 \leqslant t \leqslant u-1),$$

donc

$$\frac{\alpha_t}{\alpha} \asymp \frac{u+\overline{u}-t}{u+\overline{u}} \asymp 1 - \frac{t^2}{u^2+\overline{u}^2} \qquad (y \leqslant \log x,\ 0 \leqslant t \leqslant u-\overline{u}).$$

En reportant dans (3·73), il suit

$$\log\Big(\frac{g_m(\alpha_t)}{g_m(\alpha)}\Big) \ll \sqrt{\overline{u}}\log\Big(\frac{1}{1-t^2/(u^2+\overline{u}^2)}\Big) \ (y \leqslant \log x,\ u/2 < t \leqslant u-\overline{u}). \tag{3·74}$$

Cette évaluation persiste en fait lorsque $t > \max(u/2, u-\overline{u})$. En effet, nous avons d'une part, par (3·74),

$$\log\Big(\frac{g_m(\alpha_{u-\overline{u}})}{g_m(\alpha)}\Big) \ll \sqrt{\overline{u}}\log\Big(\frac{u+\overline{u}}{\overline{u}}\Big) \ll \sqrt{\overline{u}}\log\Big(\frac{1}{1-t^2/(u^2+\overline{u}^2)}\Big) \tag{3·75}$$

et d'autre part, par (3·72), puisque u est grand,

$$\begin{aligned}\log\Big(\frac{g_m(\alpha_t)}{g_m(\alpha_{u-\overline{u}})}\Big) &\leqslant \log\Big(\frac{g_m(1)}{g_m(\alpha(\mathrm{e}^y,y))}\Big) \leqslant c\overline{u}\log\tfrac{8}{7}\\ &\leqslant c\overline{u}\log\Big(\frac{1}{1-t^2/(u^2+\overline{u}^2)}\Big).\end{aligned}\tag{3·76}$$

En sommant (3·75) et (3·76), et en tenant compte de (3·74), nous obtenons bien la validité de (3·66) pour $y\leqslant\log x$ et $u/2<t\leqslant u-1$. □

Le lemme suivant fournit une majoration de $|g_m(s)|$ en moyenne qui joue un rôle crucial dans notre méthode. Le gain relatif à une majoration ponctuelle comme (3·62) se révèle en effet considérable.

Lemme 3.18. *Il existe une constante u_0 telle que l'on ait uniformément pour $u_0\leqslant u\leqslant(\log_2 y)^{3/2}$, $m\geqslant 1$, $\omega(m)\ll\sqrt{y}$, $T\geqslant 1$,*

$$\int_{-T}^{T}|g_m(\beta+i\tau)|^2\,\mathrm{d}\tau\ll T^2.\tag{3·77}$$

Remarque. On pourrait, si nécessaire, remplacer la condition $u\leqslant(\log_2 y)^{3/2}$ par

$$u\leqslant(\log_2 y)^2/(\log_3 y)^c$$

où c est une constante positive convenable.

Démonstration. D'après le théorème 1 de Gallagher dans [11], l'intégrale considérée est

$$\ll T^2\int_0^\infty G_{m,T}(z;\beta)^2\,\frac{\mathrm{d}z}{z},\tag{3·78}$$

où l'on a posé

$$G_{m,T}(z;\beta):=\sum_{\substack{d\mid m\\ z<d\leqslant z\exp\{1/T\}}}\frac{\mu(d)}{d^\beta}.$$

Nous estimons $G_{m,T}(z;\beta)$ grâce au théorème 5 de Montgomery et Vaughan dans [21], qui fournit immédiatement, par sommation d'Abel,

$$G_{m,T}(z;\beta)\ll\frac{z^{1-\beta}}{(\log 2z)^{1-1/\pi}}\qquad(z\geqslant 1).$$

Nous utilisons cette estimation pour $z\leqslant Y$ avec

$$Y:=\exp\Big\{\frac{\log y}{6r(u)}\log\Big(\frac{\log y}{r(u)}\Big)\Big\}=\exp\Big\{\frac{1}{6(1-\beta)}\log\Big(\frac{1}{1-\beta}\Big)\Big\}.$$

Comme

$$\frac{z^{1-\beta}}{(\log 2z)^{1/6}}\ll 1\qquad(1\leqslant z\leqslant Y),$$

on a

$$\int_0^Y G_{m,T}(z;\beta)^2\,\frac{\mathrm{d}z}{z}\ll\int_0^Y\frac{\mathrm{d}z}{1+z(\log 2z)^{5/3-2/\pi}}\ll 1.$$

Pour estimer la contribution du domaine $z>Y$ à l'intégrale de (3·78), nous remarquons que

$$G_{m,T}(z;\beta)\ll z^{-\beta}\Psi(\mathrm{e}z,p_{\omega(m)})\ll z^{1-\beta}\mathrm{e}^{-v\log v}+z^{-1/2}\qquad(z=\mathrm{e}^{vW_m}),$$

où la seconde majoration résulte, par exemple, de l'exercice III.5.6 de [30], dont la solution est disponible dans [32]. Posons $V:=(\log Y)/W_m$. Nous déduisons de ce qui précède que

$$\int_Y^\infty G_{m,T}(z;\beta)^2\,\frac{\mathrm{d}z}{z}\ll W_m\int_V^\infty\mathrm{e}^{r(u)v-2v\log v}\,\mathrm{d}v+1.$$

Or, pour $u\leqslant(\log_2 y)^{3/2}$, on a

$$V\geqslant(\log_2 y)/r(u)+O(1)\geqslant u^{2/3}/r(u)+O(1)\geqslant\mathrm{e}^{r(u)/2}.$$

Cela implique que l'intégrale en v est

$$\ll\mathrm{e}^{-\frac12 V\log V}\ll 1/\log y.$$

Cela achève la preuve de (3·77). □

4. Entiers friables criblés : preuves du Théorème 2.1 et du Corollaire 2.2.

4·1. Estimation de $\Psi_m(x,y)$ pour les petites valeurs de u.

4·1·1. Première réduction du problème

Sous sa forme basique, la méthode du col fournit, pour l'évaluation de $\Psi_m(x,y)$, un terme d'erreur relatif de l'ordre de $1/\overline{u}$. Pour obtenir des résultats plus précis, il est nécessaire d'augmenter la taille du domaine d'intégration fournissant la contribution principale : c'est la version « indirecte » décrite dans [28]. Dans le cas de la présente application, nous obtenons ainsi, pour chaque $\varepsilon > 0$ et uniformément sous les conditions

$$x \geqslant 3, \quad \exp\big\{(\log_2 x)^{5/3+\varepsilon}\big\} \leqslant y \leqslant x, \quad P(m) \leqslant y, \qquad \omega(m) \ll \sqrt{y},$$

l'évaluation

$$\Psi_m(x,y) = \Lambda_m(x,y) + O\Big(\Psi(x,y)/\big\{L_\varepsilon(y)g_m(\beta)\big\}\Big), \tag{4·1}$$

où L_ε est définie en (3·1), β en (3·51), et où l'on a posé

$$\Lambda_m(x,y) := \begin{cases} x\displaystyle\int_{0-}^{\infty} \varrho(u-v)\,\mathrm{d}R_m(y^v) & (x \in \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Z}),\\ \Lambda(x+,y) & (x \in \mathbb{Z}).\end{cases}$$

Cela résulte, en effet, des formules (5·4) et (5·5) de [6], et, par exemple, de (3·52).

Lorsque $m = 1$, la mesure $\mathrm{d}R_1(t) = \mathrm{d}([t]/t)$ recèle peu de mystère arithmétique. Partant, le terme principal de de Bruijn $\Lambda(x,y) = \Lambda_1(x,y)$ remplit pleinement son rôle et la formule (4·1) peut être regardée comme un résultat final.

Lorsque $m > 1$, en revanche, les fluctuations de $R_m(t)$ reflètent des phénomènes subtils et un travail supplémentaire est nécessaire pour dégager le comportement asymptotique de $\Lambda_m(x,y)$.

C'est cette tâche que nous nous proposons d'accomplir dans le présent paragraphe, où le paramètre u sera donc borné supérieurement en fonction de y. Le cas complémentaire sera traité, par application directe de la méthode du col, au paragraphe 4.2.

Nous définissons la fonction

$$Z(s) := (s-1)\zeta(s)/s$$

où ζ désigne la fonction de Riemann. Il est à noter que $Z(s)$ est analytique dans le disque unité ouvert.

L'énoncé suivant renforce le théorème 5 de [7], dont la démonstration comporte une imprécision — rectifiée ici — dans le cas où u tend vers 1.

Lorsque $m \geqslant 1$, $x \geqslant y \geqslant 2$, nous définissons implicitement le terme $T_m(x,y)$ par la formule

$$\Psi_m(x,y) = x\varrho(u)Z(\beta)g_m(\beta)\big\{1 + T_m(x,y)\big\}, \tag{4·2}$$

où $\beta := 1 - r(u)/\log y$.

Les définitions présentes de Z et β ne correspondent exactement pas à celles de [7] mais sont plus maniables dans le cadre développé ici. Nous rappelons également la notation (2·4), soit $\vartheta_m := W_m/\log y$.

Proposition 4.1. *(i) La majoration*

$$T_m(x,y) \ll \frac{\vartheta_m^2}{u} + \vartheta_m \log(u+1)\Big(\frac{y}{x}\Big)^{1/(W_m+6)} \tag{4·3}$$

a lieu uniformément sous les conditions

$$x \geqslant 3, \quad \exp\big\{(\log_2 x)^{5/3+\varepsilon}\big\} \leqslant y \leqslant x, \quad P(m) \leqslant y, \quad \omega(m) \ll y^{1/\log(u+2)}. \tag{4·4}$$

(ii) On a

$$T_m(x,y) \ll \frac{E_m(1+E_m)}{u}, \tag{4·5}$$

uniformément sous les conditions

$$x \geqslant 3, \quad \exp\Big\{\frac{\log x}{(\log_2 x)^{3/2}}\Big\} \leqslant y \leqslant x, \quad P(m) \leqslant y, \quad \omega(m) \ll \sqrt{y}. \tag{4·6}$$

Remarques. (a) Le majorant de (4·3) est $\ll \vartheta_m^2/u + \vartheta_m \mathrm{e}^{-u}$ dans le domaine (4·4). Il est donc constamment d'un ordre au plus égal à celui de (4·5), qui, d'après (2·10), est $\gg \vartheta_m/u$.

(b) Il est à noter que, pour $m = 1$, la relation (4·3) fournit, dans le même domaine de validité, un renforcement de la formule asymptotique de Hildebrand

$$\Psi(x,y) = x\varrho(u)\Big\{1 + O\Big(\frac{\log(u+1)}{\log y}\Big)\Big\} \qquad \big(\mathrm{e}^{(\log_2 x)^{3/5-\varepsilon}} \leqslant y \leqslant x\big). \tag{4·7}$$

(c) Dans son domaine de validité, la Proposition 4.1 précise le théorème 1 de [34].

(d) Seule l'assertion (ii) de la Proposition 4.1 est nécessaire pour établir le Théorème 2.1.

Avant d'entamer la démonstration de la Proposition 4.1, vérifions que cet énoncé implique le Théorème 2.1 dans la réunion des domaines (4·4) et (4·6).

Nous allons même, sous la condition (4·4), déduire de (4·3), la formule

$$\Psi_m(x,y) = g_m(\alpha)\Psi(x,y)\Big\{1 + O\Big(\frac{\vartheta_m}{u}\Big)\Big\} \tag{4·8}$$

qui est plus précise que (2·7) puisque $E_m \gg \vartheta_m$. À cette fin, nous observons d'abord que

$$\beta = \alpha + O\Big(\frac{1}{u\log y}\Big), \tag{4·9}$$

en vertu de (3·3) et de (3·32). Or, on déduit de (3·52) que l'on a, sous la condition (4·4),

$$\gamma_m'(\sigma) \ll \log z_m = W_m \tag{4·10}$$

lorsque $\min(\alpha,\beta) \leqslant \sigma \leqslant 1$. Il s'ensuit donc que

$$g_m(\alpha) - g_m(\beta) \ll g_m(\alpha)W_m/\log x = \vartheta_m g_m(\alpha)/u.$$

En reportant dans (4·2) et en tenant compte de (4·9), nous obtenons bien (4·8).

4·1·2. Preuve du Théorème 2.1 pour les petites valeurs de u

Nous consacrons ce court paragraphe à vérifier que la Proposition 4.1(ii) implique bien, dans son domaine de validité (4·6), l'estimation (2·7) du Théorème 2.1, soit

$$\Psi_m(x,y) = g_m(\alpha)\Psi(x,y)\big\{1 + O\big(E_m(1+E_m)/u\big)\big\}.$$

En comparant la formule générale (4·3) à son cas particulier obtenu pour $m = 1$, nous voyons qu'il suffit d'établir que, sous les conditions (4·6), on a

$$g_m(\beta) = g_m(\alpha)\big\{1 + O\big(E_m/u\big)\big\}.$$

Or, cette estimation résulte aisément des formules (4·9), (3·54) et (3·63). Nous omettons les détails calculatoires.

4·1·3. Seconde réduction.

Nous commençons par montrer que le terme d'erreur de (4·1) est acceptable : la contribution de $\Lambda_m(x,y)$ sera évaluée dans un second temps.

Il suffit de minorer $g_m(\beta)$. Sous les conditions (4·4), nous déduisons de (3·52) que

$$g_m(\beta) \asymp g_m(1) \gg 1/W_m. \tag{4·11}$$

Sous l'hypothèse (4·6), nous avons d'après (3·64)

$$1/g_m(\beta) \ll W_m \exp O\big(\sqrt{u}\big). \tag{4·12}$$

Ainsi, $g_m(\beta) \gg L_\varepsilon(y)^{-1/3}$ dans les deux cas. Comme $Z(\beta) \asymp 1$, nous en déduisons que le terme d'erreur de (4·1) est bien compatible avec celui de (4·5) et (4·3).

Nous devons ensuite évaluer $\Lambda_m(x,y)$. Nous observons d'abord que la formule (4·17) de [6] permet d'écrire

$$\int_{0-}^{\infty} \mathrm{e}^{r(u)v}\,\mathrm{d}R_m(y^v) = g_m(\beta)Z(\beta).$$

Il s'ensuit que

$$\Lambda_m(x,y) = x\varrho(u)g_m(\beta)Z(\beta) + xV_m(x,y) \tag{4·13}$$

avec

$$\begin{aligned} V_m(x,y) &:= \int_{0-}^{\infty} \big\{\varrho(u-v) - \varrho(u)\mathrm{e}^{r(u)v}\big\}\,\mathrm{d}R_m(y^v) \\ &= R_m(x) + \int_0^{\infty} \big\{\varrho'(u-v) - \varrho'(u)\mathrm{e}^{r(u)v}\big\}R_m(y^v)\,\mathrm{d}v. \end{aligned} \tag{4·14}$$

Nous avons ainsi réduit la démonstration de la Proposition 4.1 à une évaluation adéquate de $V_m(x,y)$.

4·1·4. Preuve de la Proposition 4.1(i).

Nous observons d'abord que le Lemme 3.9 permet de montrer que la contribution du terme $R_m(x)$ au membre de droite de (4·13) est compatible avec le terme reste de (4·3). En effet, comme y est grand, l'hypothèse $\omega(m) \ll y^{1/\log(u+2)}$ implique $x \geqslant \omega(m)+1$ et

$$6 + W_m \leqslant \frac{\log y}{\log(u+2)} + O(1) \leqslant \frac{3\log y}{2\log(u+2)}. \tag{4·15}$$

Nous déduisons donc de (3·38) et (4·11) que, lorsque $\omega(m) \ll y^{1/\log(u+2)}$,

$$\begin{aligned} R_m(x) &\ll \frac{\varphi(m)}{m}\mathrm{e}^{-\frac{4}{3}u(\log u+2)}y^{-2u/(6+W_m)} \\ &\ll \frac{g_m(\beta)\varrho(u)\vartheta_m^2}{u}. \end{aligned} \tag{4·16}$$

Il reste à évaluer l'intégrale de (4·14). À cette fin, nous estimons $R_m(y^v)$ à l'aide du Lemme 3.9. L'autre facteur de l'intégrande relève de la formule (6·3) de [7], que nous écrivons sous la forme

$$\varrho'(u-v) - \varrho'(u)\mathrm{e}^{r(u)v} \ll \frac{\varrho(u)v\mathrm{e}^{r(u)v}}{u}\big\{1 + v\log(u+1)\big\}\ (u \geqslant 1,\ 0 \leqslant v \leqslant u-1). \tag{4·17}$$

Dans [7], cette formule est donnée pour le domaine $u \geqslant 1$, $0 \leqslant v \leqslant u$. Cependant, la réduction indiquée du domaine de validité est nécessaire pour tenir compte de la discontinuité de $\varrho'(t)$ en $t=1$.

Dans un premier temps, montrons que

$$\int_{u-1}^{\infty} \varrho'(u)\mathrm{e}^{vr(u)}R_m(y^v)\,\mathrm{d}v \ll g_m(\beta)\vartheta_m\varrho(u)\log(u+1)\Big(\frac{y}{x}\Big)^{1/(W_m+6)}. \tag{4·18}$$

Si $u-1 > \vartheta_m$, nous avons grâce à (3·38)

$$\int_{u-1}^{\infty} \varrho'(u)\mathrm{e}^{vr(u)}R_m(y^v)\,\mathrm{d}v \ll \varrho'(u)\frac{\varphi(m)}{m}\int_{u-1}^{\infty} \mathrm{e}^{v\{r(u)-4\log y/(6+W_m)\}}\,\mathrm{d}v.$$

D'après (4·15) et l'inégalité $r(u) < 2\log(u+2)$ établie au lemme 6.2 de [7], on a

$$4\log y/(6+W_m) - r(u) \geqslant \log y/(6+W_m),$$

ce qui implique bien (4·18) dans ce cas. Si $u-1 \leqslant \vartheta_m$, alors $(x/y)^{1/(W_m+6)} \asymp 1$ et les calculs précédents montrent que la contribution à l'intégrale de (4·18) du domaine $v \geqslant \vartheta_m$ est bien majorée par le membre de droite. Nous évaluons la contribution complémentaire grâce à (3·48) : elle est

$$\ll \varrho'(u)\int_0^{\vartheta_m}|R_m(y^v)|\,\mathrm{d}v \ll \varrho(u)\log(u+1)\frac{\varphi(m)}{m}\vartheta_m \ll g_m(\beta)\varrho(u)\log(u+1)\vartheta_m.$$

Cela achève la preuve de (4·18).

Établissons ensuite l'estimation

$$\int_0^{u-1}\{\varrho'(u-v)-\varrho'(u)\mathrm{e}^{r(u)v}\}R_m(y^v)\,\mathrm{d}v \ll \frac{\vartheta_m^2 g_m(\beta)\varrho(u)}{u}. \tag{4·19}$$

D'après (4·17), le membre de gauche est

$$\ll \frac{\varrho(u)}{u}\int_0^{u-1} v\mathrm{e}^{r(u)v}|R_m(y^v)|\big\{1+v\log(u+1)\big\}\,\mathrm{d}v.$$

D'après (3·49), la contribution du segment $0 \leqslant v \leqslant \vartheta_m$ est

$$\ll \frac{\vartheta_m^2\varphi(m)\varrho(u)}{mu}\big\{1+\vartheta_m\log(u+1)\big\} \ll \frac{\vartheta_m^2\varphi(m)\varrho(u)}{mu}.$$

L'intégration de la première majoration (3·38) pour $R_m(y^v)$ fournit aisément que la contribution complémentaire n'excède pas le membre de gauche de (4·19). □

4·1·5. Preuve de la Proposition 4.1(ii) : lemme fondamental.

Nous introduisons les fonctions

$$\zeta_m(s) := g_m(s)\zeta(s), \quad Z_m(s) := g_m(s)Z(s) = g_m(s)(s-1)\zeta(s)/s.$$

La première étape de la démonstration est formalisée dans l'énoncé suivant.

Lemme 4.2. *Il existe des constantes* $u_0 \geqslant 1$ *et* $c > 0$ *telles que l'on ait, uniformément pour* (x, y) *satisfaisant* (4·6) *et* $u \geqslant u_0$,

$$\begin{aligned} V_m(x,y) &= \frac{\mathrm{e}^{-ur(u)}}{2\pi}\int_{-1}^{1}\mathrm{e}^{iu\tau}\widehat{\varrho}(-r(u)+i\tau)\{Z_m(\beta+i\tau_y)-Z_m(\beta)\}\,\mathrm{d}\tau \\ &\quad + O\Big(g_m(\beta)\vartheta_m\varrho(u)\mathrm{e}^{-cu/(\log u)^2}\Big), \end{aligned} \tag{4·20}$$

où l'on a posé $\beta := 1 - r(u)/\log y$ *et* $\tau_y := \tau/\log y$.

Démonstration. On a pour $t \neq 0$,

$$\varrho(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-r(u)+i\infty}^{-r(u)+i\infty}\widehat{\varrho}(s)\mathrm{e}^{ts}\,\mathrm{d}s.$$

Lorsque $t = 0$, le membre de droite vaut $\frac{1}{2}$. On peut donc appliquer cette formule avec $t = u$ puis $t = u - v$ et insérer les résultats correspondants dans l'expression (4·14) de $V_m(x, y)$. Comme on a, pour $s = r(u) + i\tau$, $|r(u)| < \log y$,

$$\int_{0-}^{\infty}\mathrm{e}^{i\tau v}\,\mathrm{d}F_m(y^v) = \int_{0-}^{\infty}\mathrm{e}^{sv}\,\mathrm{d}R_m(y^v) = Z_m(1-s_y) \tag{4·21}$$

où l'on a posé $s_y := s/\log y$, il suit

$$\begin{aligned} V_m(x,y) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{-r(u)+i\infty}^{-r(u)+i\infty}\widehat{\varrho}(s)\mathrm{e}^{us}\{Z_m(1+s_y)-Z_m(\beta)\}\,\mathrm{d}s \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-ur(u)}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{\varrho}\big(-r(u)+i\tau\big)\mathrm{e}^{i\tau u}\{Z_m(\beta+i\tau_y)-Z_m(\beta)\}\,\mathrm{d}\tau. \end{aligned} \tag{4·22}$$

Par ailleurs, nous déduisons de (4·21), grâce à une intégration par parties, que

$$\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{i\tau v}F_m(y^v)\,\mathrm{d}v = \frac{Z_m(1+s_y)-Z_m(\beta)}{i\tau}$$

d'où, d'après la formule d'inversion de Fourier,

$$F_m(y^v) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{Z_m(\beta+i\tau_y)-Z_m(\beta)}{i\tau}\mathrm{e}^{iu\tau}\,\mathrm{d}\tau, \tag{4·23}$$

l'intégrale étant semi-convergente.

Il découle de (4·22) et (4·23) que

$$V_m(x,y)=\frac{\mathrm{e}^{-ur(u)}}{2\pi}\Big\{F_m(x)+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{Z_m(\beta+i\tau_y)-Z_m(\beta)}{i\tau}\vartheta(\tau)\mathrm{e}^{iu\tau}\,\mathrm{d}\tau\Big\}. \tag{4·24}$$

avec

$$\vartheta(\tau):=i\tau\widehat{\varrho}\big(-r(u)+i\tau\big)-1.$$

La quantité $F_m(x)$ est majorée grâce au Lemme 3.12. Nous obtenons que sa contribution peut être englobée par le terme d'erreur de (4·20).

Il reste donc à évaluer l'intégrale de (4·24) et nous commençons par estimer la contribution des grandes valeurs de τ. À cette fin, nous employons la formule

$$s\widehat{\varrho}(s)=\exp\Big\{-\int_s^{s+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-v}}{v}\,\mathrm{d}v\Big\}=1-\frac{\mathrm{e}^{-s}}{s}+O\Big(\frac{1+ur(u)}{s^2}\Big) \tag{4·25}$$

valable pour $\Re e\, s=-r(u)$, $|\Im m\, s|>1+ur(u)$. Cela implique

$$\vartheta(\tau)=\frac{\mathrm{e}^{r(u)-i\tau}+r(u)}{-i\tau}+O\Big(\frac{1+ur(u)}{\tau^2}\Big)\ll\frac{1+ur(u)}{\tau}\qquad(|\tau|>1+ur(u)). \tag{4·26}$$

La contribution à l'intégrale du domaine $|\tau|>T:=(\log y)^2$ est donc

$$\ll g_m(\beta)W_m^2\mathrm{e}^{O(\sqrt{u})}\int_T^{\infty}\frac{|\zeta(\beta+i\tau)|}{\tau^2}\,\mathrm{d}\tau\ll g_m(\beta)\vartheta_m^2\varrho(u)\mathrm{e}^{ur(u)-u/2}, \tag{4·27}$$

où l'on a utilisé (3·34), le Lemme 3.16 et l'évaluation classique[10]

$$\int_U^{2U}|\zeta(\sigma+i\tau)|^j\,\mathrm{d}\tau\ll_{j,\sigma_0}U\qquad(U\geqslant 1,\ \max(\tfrac12,1-1/j)<\sigma_0\leqslant\sigma\leqslant 1) \tag{4·28}$$

avec $j=1$.

Examinons ensuite la contribution du domaine $\sqrt{T}:=\log y<|\tau|\leqslant T$. On a clairement

$$\int_{\sqrt{T}<|\tau|\leqslant T}\frac{|Z_m(\beta)\vartheta(\tau)|}{|\tau|}\,\mathrm{d}\tau\ll\frac{g_m(\beta)\{1+ur(u)\}}{\log y}\ll\frac{g_m(\beta)\varrho(u)\mathrm{e}^{ur(u)-u/2}}{\log y}. \tag{4·29}$$

De plus,

$$\begin{aligned}\int_{\sqrt{T}<|\tau|\leqslant T}&\frac{|Z_m(\beta+i\tau_y)\vartheta(\tau)|}{|\tau|}\,\mathrm{d}\tau\\ &\ll\frac{1}{\log y}\int_1^{\log y}\frac{|Z_m(\beta+it)|}{t^2}\,\mathrm{d}t\\ &\ll\frac{1}{\log y}\int_1^{\log y}\frac{|\zeta(\beta+it)g_m(\beta+it)|}{t^2}\,\mathrm{d}t\\ &\ll\frac{1}{\log y}\Big(\int_1^{\log y}\frac{|\zeta(\beta+it)|^2}{t^{3/2}}\,\mathrm{d}t\Big)^{1/2}\Big(\int_1^{\log y}\frac{|g_m(\beta+it)|^2}{t^{5/2}}\,\mathrm{d}t\Big)^{1/2}\\ &\ll\frac{1}{\log y}\Big(\int_1^{\log y}\frac{|g_m(\beta+it)|^2}{t^{5/2}}\,\mathrm{d}t\Big)^{1/2},\end{aligned} \tag{4·30}$$

où nous avons utilisé (4·28) avec $j=2$. D'après (3·77), on a de plus

$$\int_1^{\log y}\frac{|g_m(\beta+it)|^2}{t^{5/2}}\,\mathrm{d}t\leqslant\sum_{0\leqslant k\leqslant(\log_2 y)/\log 2}\frac{1}{2^{5k/2}}\int_{2^k}^{2^{k+1}}|g_m(\beta+it)|^2\,\mathrm{d}t\ll 1.$$

10. Voir, e.g., [33], théorèmes 7.2(A), 7.5, 7.7 et le théorème de Hardy–Ingham–Pólya p. 149.

Nous avons donc montré que

$$\int_{\sqrt{T}<|\tau|\leqslant T} \frac{|Z_m(\beta+i\tau_y)\vartheta(\tau)|}{|\tau|}\,\mathrm{d}\tau \ll \frac{1}{\log y} \ll g_m(\beta)\vartheta_m\varrho(u)\mathrm{e}^{ur(u)-u/2},$$

où la dernière estimation résulte de (4·12) et (3·34).

Considérons maintenant la contribution du domaine $1+ur(u)<|\tau|\leqslant\log y$ à l'intégrale de (4·24). On a

$$\begin{aligned}
&\int_{1+ur(u)}^{\log y} \frac{Z_m(\beta+i\tau_y)-Z_m(\beta)}{i\tau}\vartheta(\tau)\mathrm{e}^{iu\tau}\,\mathrm{d}\tau\\
&\quad=\int_{1+ur(u)}^{\log y}\frac{\vartheta(\tau)\mathrm{e}^{iu\tau}}{\tau}\,\mathrm{d}\tau\Big\{i\tau_y Z_m'(\beta)-\tau_y^2\int_0^1(1-t)Z_m''(\beta+it)\,\mathrm{d}t\Big\}\\
&\quad=\frac{Z_m'(\beta)}{\log y}\int_{1+ur(u)}^{\log y}\vartheta(\tau)\mathrm{e}^{iu\tau}\,\mathrm{d}\tau \qquad (4{\cdot}31)\\
&\qquad-\frac{1}{(\log y)^2}\int_0^1(1-t)Z_m''(\beta+it)\int_{\max(1+ur(u),t\log y)}^{\log y}\tau\vartheta(\tau)\mathrm{e}^{iu\tau}\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}t\\
&\quad\ll\frac{|Z_m'(\beta)|}{\log y}+\frac{u^2}{(\log y)^2}\int_0^1\frac{|Z_m''(\beta+it)|}{1+t\log y}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

où l'on a estimé les intégrales en τ par la seconde formule de la moyenne après insertion de (4·26).

On a pour $s=r(u)+i\tau$, $r(u)<\log y$

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{sv}R_m(y^v)\,\mathrm{d}v=\frac{g_m(1)-Z_m(1-s_y)}{s}. \tag{4·32}$$

D'après le Lemme 3.11, il suit donc

$$\frac{g_m(1)-Z_m(\beta+it)}{r(u)-it\log y}\ll g_m(1)\vartheta_m\mathrm{e}^{u^{2/3}}\ll g_m(\beta)\vartheta_m\mathrm{e}^{2u^{2/3}}. \tag{4·33}$$

Afin de références ultérieures, notons que cela implique la majoration suivante, valable lorsque $r(u)<\log y$, $|t|\leqslant\{1+ur(u)\}/\log y$,

$$|Z_m(\beta+it)|\ll g_m(\beta)\mathrm{e}^{3u^{2/3}}. \tag{4·34}$$

Comme

$$Z_m^{(j)}(\beta+it)\ll(\vartheta_m u\log y)^j|Z_m(\beta+it)|$$

pour $|t|\leqslant 1$ et $j=1$, 2, nous en déduisons que

$$\begin{aligned}
&\frac{|Z_m'(\beta)|}{\log y}+\frac{u^2}{(\log y)^2}\int_0^1\frac{|Z_m''(\beta+it)|}{1+t\log y}\,\mathrm{d}t\\
&\qquad\ll g_m(\beta)\vartheta_m u\,\mathrm{e}^{3u^{2/3}}+g_m(\beta)\vartheta_m^3\mathrm{e}^{3u^{2/3}}\int_0^1\frac{r(u)+t\log y}{1+t\log y}\,\mathrm{d}t\\
&\qquad\ll g_m(\beta)\vartheta_m\mathrm{e}^{4u^{2/3}}.
\end{aligned}$$

En reportant dans (4·31) et en utilisant (3·34), nous obtenons donc

$$\int_{1+ur(u)}^{\log y}\frac{Z_m(\beta+i\tau_y)-Z_m(\beta)}{i\tau}\vartheta(\tau)\mathrm{e}^{iu\tau}\,\mathrm{d}\tau\ll g_m(\beta)\vartheta_m\varrho(u)\mathrm{e}^{ur(u)-u/2}.$$

Il reste à évaluer la contribution du domaine $1<|\tau|\leqslant 1+ur(u)$ à l'intégrale de (4·24). En utilisant la majoration

$$\widehat{\varrho}(-r(u)+i\tau)\ll\widehat{\varrho}(-r(u))\mathrm{e}^{-cu/(\log u)^2}\qquad(u\geqslant 2)$$

établie par exemple au lemme III.5.8.2 de [30], nous obtenons

$$\begin{aligned}\int_1^{1+ur(u)} &\frac{Z_m(\beta+i\tau_y)-Z_m(\beta)}{i\tau}\vartheta(\tau)\mathrm{e}^{iu\tau}\,\mathrm{d}\tau\\ &= \int_1^{1+ur(u)}\frac{\vartheta(\tau)\mathrm{e}^{iu\tau}}{\tau}\,\mathrm{d}\tau\int_0^{\tau_y}Z_m'(\beta+it)\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^{\{1+ur(u)\}/\log y}Z_m'(\beta+it)\int_{\max(1,t\log y)}^{1+ur(u)}\frac{\vartheta(\tau)\mathrm{e}^{iu\tau}}{\tau}\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}t\\ &\ll g_m(\beta)\vartheta_m^2\widehat{\varrho}(-r(u))\mathrm{e}^{-cu/(\log u)^2}.\end{aligned}$$

Enfin, nous déduisons de (4·34) et de (4·33) que

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{Z_m(\beta+i\tau_y)-Z_m(\beta)}{i\tau}\mathrm{e}^{iu\tau}\,\mathrm{d}\tau &= \int_0^1\frac{\mathrm{e}^{iu\tau}}{i\tau}\int_0^{\tau_y}Z_m'(\beta+it)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\tau\\ &\ll \vartheta_m g_m(\beta)u\mathrm{e}^{3u^{2/3}}\\ &\ll \vartheta_m g_m(\beta)\mathrm{e}^{ur(u)-u/2}\varrho(u).\end{aligned}$$

Cela achève la démonstration du Lemme 4.2. □

4·1·6. Preuve de la Proposition 4.1(ii) : complétion de l'argument

Soit u_0 la constante apparaissant au Lemme 4.2. Nous pouvons aisément disposer du cas

$$u\leqslant u_0,\quad \omega(m)\ll\sqrt{y}. \tag{4·35}$$

En effet, sous cette hypothèse, on a $E_m\asymp\vartheta_m$, donc (4·5) équivaut à

$$\Psi_m(x,y)=x\varrho(u)Z(\beta)g_m(\beta)\big\{1+O(\vartheta_m)\big\}.$$

Or, le théorème de [29] fournit précisément cette estimation puisque l'on a dans ces circonstances $\beta=1+O(1/\log y)$, et donc $g_m(\beta)=\big\{1+O(\vartheta_m)\big\}\varphi(m)/m$.

Compte tenu de (4·13) et (4·20), nous pouvons donc nous restreindre à estimer l'intégrale de (4·20) sous les hypothèses (4·6) et $u>u_0$.

La première étape consiste à majorer la contribution du domaine $u^{-1/3}<|\tau|\leqslant 1$ à l'intégrale de (4·20). Nous pouvons, par symétrie, nous limiter au cas $\tau>0$. La quantité considérée vaut alors

$$\begin{aligned}\int_{u^{-1/3}}^1 &\mathrm{e}^{iu\tau}\widehat{\varrho}(-r(u)+i\tau)\big\{Z_m(\beta+i\tau_y)-Z_m(\beta)\big\}\,\mathrm{d}\tau\\ &= \int_0^{1/\log y}Z_m'(\beta+it)\int_{t_0}^1\widehat{\varrho}\big(-r(u)+i\tau\big)\mathrm{e}^{iu\tau}\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}t\end{aligned}\tag{4·36}$$

où l'on a posé $t_0:=\max(u^{-1/3},t\log y)$. On a pour $|t|\leqslant 1/\log y$ et sous les conditions (4·6)

$$Z_m'(\beta+it)\ll Z_m(\beta+it)\{1+\gamma_m'(\beta)\}\ll g_m(\beta)\mathrm{e}^{C_0\sqrt{u}(tW_m)^2}E_m\log y,$$

d'après (3·62) et (3·54). On a trivialement $E_m\log y\ll W_mu$. En faisant appel à l'estimation (3·35) pour $\widehat{\varrho}(s)$, nous obtenons donc lorsque $|t|\leqslant 1/\log y$, $\tau\in[t_0,1]$,

$$\begin{aligned}\sup_{\tau\in[t_0,1]}\big|Z_m'(\beta+it)\widehat{\varrho}(-r(u)+i\tau)\big| &\ll g_m(\beta)W_mu\widehat{\varrho}(-r(u))\mathrm{e}^{C_0\sqrt{u}\,(tW_m)^2-cut_0^2}\\ &\ll g_m(\beta)W_mu\widehat{\varrho}(-r(u))\mathrm{e}^{-\frac12cu^{1/3}}\mathrm{e}^{(C_0\sqrt{u}W_m^2-\frac12cu(\log y)^2)t^2}\\ &\ll g_m(\beta)W_m\widehat{\varrho}(-r(u))\mathrm{e}^{-\frac12cu^{1/3}}.\end{aligned}$$

En reportant dans (4·36), nous obtenons une estimation largement suffisante.

Nous évaluons la contribution du domaine $|\tau| \leqslant u^{-1/3}$ à l'intégrale de (4·20) en effectuant un développement limité de l'intégrande. Le Lemme 3.14 implique en effet, sous l'hypothèse effectuée,

$$\begin{aligned} &Z_m(\beta+i\tau_y)-Z_m(\beta)\\ &\qquad=\{g_m(\beta+i\tau_y)-g_m(\beta)\}Z(\beta)+g_m(\beta+i\tau_y)\{Z(\beta+i\tau_y)-Z(\beta)\}\\ &\qquad=g_m(\beta)\big\{i\tau_y\gamma_m'(\beta)+O\big(\tau^2E_m^2+|\tau_y|\big)\big\}.\end{aligned}$$

Or, le Lemme 3.8 fournit, dans les mêmes conditions,

$$\mathrm{e}^{iu\tau}\widehat{\varrho}(-r(u)+i\tau)=\big\{1+O\big(\tau(1+\tau^2u)\big)\big\}\widehat{\varrho}\big(-r(u)\big)\mathrm{e}^{-w\tau^2/2},$$

où l'on a posé $w:=u-u/\xi(u)$. En rassemblant nos estimations, et en faisant appel à (3·34) et (3·54), nous obtenons

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{-ur(u)}&\int_{-u^{-1/3}}^{u^{-1/3}}\mathrm{e}^{iu\tau}\widehat{\varrho}(-r(u)+i\tau)\big\{Z_m(\beta+i\tau_y)-Z_m(\beta)\big\}\,\mathrm{d}\tau\\ &=g_m(\beta)\varrho(u)\sqrt{u}\int_{-u^{-1/3}}^{u^{-1/3}}\mathrm{e}^{-w\tau^2/2}\big\{i\tau_y\gamma_m'(\beta)+O(\mathcal{R})\big\}\,\mathrm{d}u,\end{aligned}\tag{4·37}$$

où l'on a posé

$$\mathcal{R}:=|\tau_y|+\tau^2E_m(1+E_m)+u\tau^4E_m.$$

La contribution du terme en $\tau_y\gamma_m'(\alpha)$ étant nulle par symétrie, nous déduisons que le membre de gauche de (4·37) est

$$\ll\frac{\varrho(u)g_m(\beta)}{u}\Big\{\frac{\sqrt{u}}{\log y}+E_m(1+E_m)\Big\},$$

ce qui termine la démonstration de la Proposition 4.1. □

4·2. Estimation de $\Psi_m(x,y)$ pour les grandes valeurs de u.

Nous nous proposons ici de compléter la démonstration du Théorème 2.1 en établissant la formule (2·7) dans le domaine non couvert par la Proposition 4.1.

Nous avons établi au § 4.1.2 que la Proposition 4.1(ii) permet de disposer du cas

$$1\leqslant u\leqslant(\log_2 2y)^{3/2},\quad \omega(m)\ll\sqrt{y}.\tag{4·38}$$

De plus, ainsi qu'il a été observé dans la remarque (a) qui en suit l'énoncé, la Proposition 4.1(i) prend en compte le cas

$$u\leqslant L_\varepsilon(y),\qquad \omega(m)\ll y^{1/\log(u+2)}.\tag{4·39}$$

Nous pourrions donc, en toute rigueur, nous limiter à la situation où ni (4·38), ni (4·39), ne sont réalisées. Cependant, la méthode analytique que nous employons fonctionne sous les conditions moins restrictives

$$u>(\log_2 2y)^{3/2},\qquad \omega(m)\ll\sqrt{y}.\tag{4·40}$$

Comme il pourra être utile, dans d'autres contextes, de disposer d'une description précise de la technique dans son champ naturel de validité, nous considérons dans ce qui suit l'ensemble du domaine (4·40).

Nous pouvons clairement supposer, sans perte de généralité, que l'entier m est sans facteur carré. Nous observons également que, lorsque y est borné, le Théorème 2.1 découle trivialement de l'estimation

$$\Psi_m(x,y)\asymp(\log x)^{\pi(y)-\omega(m)}\qquad(2\leqslant y\leqslant y_0,\ P(m)\leqslant y)\tag{4·41}$$

et de l'évaluation (3·2). Cela nous permet donc, dans ce qui suit, de supposer que y est arbitrairement grand.

Nous employons, pour la série de Dirichlet $\zeta_m(s,y) = g_m(s)\zeta(s,y)$, la méthode du col telle qu'elle est développée dans [16] pour le cas $m = 1$, en choisissant l'abscisse d'intégration égale à $\alpha(x,y)$. Cela représente un certain décalage par rapport au choix optimal, dépendant de m, mais facilite la comparaison avec $\Psi(x,y)$. Comme la démarche est identique à celle de [16], nous renvoyons librement à ce travail pour certains détails calculatoires et focalisons notre attention sur les difficultés nouvelles induites par la présence du paramètre m.

L'étape initiale consiste en une majoration adéquate du rapport $\zeta_m(s,y)/\zeta_m(\alpha,y)$ dans un large domaine en $\tau = \Im m\, s$. Nous obtenons que l'on a, pour chaque $\varepsilon > 0$ fixé,

$$\frac{\zeta_m(s,y)}{\zeta_m(\alpha,y)} \ll \begin{cases} \exp\left\{\dfrac{-c_0 y}{\log y}\log\left(1+\dfrac{\tau^2\sigma_2}{y/\log y}\right)\right\} & \big(|\tau| \leqslant 1/\log y\big) \\ \exp\left\{\dfrac{-c_0\tau^2\overline{u}}{(1-\alpha)^2+\tau^2}\right\} & \big(1/\log y < |\tau| \leqslant Y_\varepsilon\big) \end{cases} \tag{4·42}$$

uniformément dans le domaine (2·6) où σ_2 est la quantité définie en (3·8), et où nous avons posé

$$Y_\varepsilon := \exp\big\{(\log y)^{3/2-\varepsilon}\big\}. \tag{4·43}$$

Pour établir (4·42), nous utilisons d'abord l'estimation

$$\left|\frac{1-p^{-\alpha}}{1-p^{-s}}\right| \leqslant \exp\Big\{-c_1\log\Big(1+\frac{\tau^2\sigma_2}{y/\log y}\Big)\Big\} \qquad \Big(|\tau| \leqslant \frac{1}{\log y},\, p \leqslant y \leqslant \log x\Big)$$

établie, pour une constante positive convenable c_1, dans [16], p. 275. Cela implique clairement (4·42) dans le même sous-domaine en x, y, τ. Ensuite, nous observons que les calculs des pp. 275–6 de [16] fournissent, pour une constante positive convenable c_2,

$$\frac{\zeta_m(s,y)}{\zeta_m(\alpha,y)} \ll \begin{cases} \exp\Big\{-c_2\tau^2\sigma_2 + O\big(\tau^2\gamma_m''(\alpha)\big)\Big\} & \Big(|\tau| \leqslant \dfrac{1}{\log y},\, y > \log x\Big), \\ \exp\Big\{\dfrac{-c_2\tau^2\overline{u}}{(1-\alpha)^2+\tau^2} + O\big(\gamma_m^*(\alpha)\big)\Big\} & \Big(\dfrac{1}{\log y} < |\tau| \leqslant Y_\varepsilon\Big), \end{cases} \tag{4·44}$$

avec $\gamma_m^*(\alpha) := \sum_{p|m} 1/p^\alpha$. Nous notons immédiatement que (3·6) implique

$$\frac{\tau^2\overline{u}}{(1-\alpha)^2+\tau^2} \gg \frac{\overline{u}}{(1+\log\overline{u})^2} \qquad \big(|\tau| > 1/\log y\big). \tag{4·45}$$

Lorsque $|\tau| \leqslant 1/\log y$, $y > (\log x)^{6/5}$, on a, d'après (3·3),

$$\alpha \gg 1, \qquad (1-\alpha) \asymp \xi(u)/\log y.$$

Comme $\vartheta_m \leqslant \frac{2}{3}$ dès que y est assez grand, la majoration (3·54) fournit donc

$$\gamma_m''(\alpha) \ll W_m^2 u^{2/3} \ll \frac{\sigma_2}{u^{1/3}}, \tag{4·46}$$

en vertu de (3·9). Nous obtenons bien (4·42) dans ce cas.

Lorsque $1/\log y < |\tau| \leqslant Y_\varepsilon$, $y > (\log x)^{6/5}$, nous pouvons écrire grâce à (3·27)

$$\gamma_m^*(\alpha) \ll \log_2 z_m + \frac{z_m^{1-\alpha}-1}{(1-\alpha)\log z_m} \ll \log_2 y + u^{2/3} \ll u^{2/3}.$$

Compte tenu de (4·45), nous obtenons encore (4·42).

Reste à traiter le cas $y \leqslant (\log x)^{6/5}$. Nous avons alors $y \ll \overline{u}^{4/3}$. Par (3·52) et (3·4), il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \gamma_m''(\alpha) &\ll \frac{z_m^{1-\alpha}-1}{\alpha^2(1-\alpha)\log z_m} \ll \frac{\omega(m)}{\alpha^2} \\ &\ll \frac{(u\log y)^2}{\overline{u}^2}\sqrt{y} \ll \frac{\sigma_2}{\overline{u}^{1/3}}, \end{aligned} \tag{4·47}$$

et

$$\gamma_m^*(\alpha) \leqslant \omega(m) \ll \overline{u}^{2/3}.$$

Grâce à (4·45), nous voyons que ces estimations sont suffisantes pour déduire (4·42) de (4·44).

Ensuite, nous déduisons de (4·42) une majoration du nombre des entiers friables localisés dans un petit intervalle et premiers avec m : il existe une constante absolue $c_3 > 0$ telle que, uniformément pour

$$x \geqslant y \geqslant 2, \quad u > (\log_2 2y)^{3/2}, \quad \omega(m) \ll \sqrt{y}, \tag{4·48}$$

et $1 \leqslant z \leqslant Y_\varepsilon$, on ait

$$\Psi_m(x + x/z, y) - \Psi_m(x, y) \ll x^\alpha \zeta_m(\alpha, y)\big\{1/z + \mathrm{e}^{-c_3\overline{u}}\big\}. \tag{4·49}$$

Cette estimation découle aisément de (4·42) et de la majoration standard

$$\Psi_m(x + x/z, y) - \Psi_m(x, y) \ll \frac{1}{z}\int_{\alpha-iz}^{\alpha+iz} \big(1 - |\tau|/z\big)x^s\zeta_m(s, y)\,\mathrm{d}s.$$

En effet, nous obtenons (4·49) en majorant trivialement $|\zeta_m(s, y)|$ par $\zeta_m(\alpha, y)$ pour $|\tau| \leqslant 1$ et par $\ll \zeta_m(\alpha, y)\mathrm{e}^{-c_0\overline{u}/2}$ pour $1 < |\tau| \leqslant Y_\varepsilon$.

La troisième étape de la démonstration consiste à établir la formule d'approximation

$$\Psi_m(x, y) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i/\log y}^{\alpha+i/\log y} \zeta_m(s, y)x^s\,\frac{\mathrm{d}s}{s} + O\big(x^\alpha\zeta_m(\alpha, y)R\big) \tag{4·50}$$

avec $R := \mathrm{e}^{-c_4u/(\log 2u)^2} + 1/Y_\varepsilon$, où c_4 est une constante absolue positive convenable. La relation (4·50) est prouvée en deux temps : on fait d'abord appel à la formule de Perron effective avec une troncature de l'intégrale à $|\tau| = T := 1/R^2$ — le terme d'erreur est alors estimé grâce à (4·49) — et l'on majore ensuite la contribution du domaine $1/\log y < |\tau| \leqslant T$ en faisant appel à (4·42). Nous omettons les détails, qui sont identiques à ceux de la preuve du lemme 10 de [16].

Nous observons à présent que, puisque $\alpha\sqrt{\sigma_2} \ll \sqrt{\overline{u}}\log y$ d'après (3·4) et (3·9), nous avons dans le domaine (4·48)

$$R \ll \frac{1}{\overline{u}^{3/2}(\log y)^2} \ll \frac{1}{\alpha\sqrt{\sigma_2}\,\overline{u}\log y}. \tag{4·51}$$

Cela montre, compte tenu de (3·10) et (2·10), que le terme d'erreur de (4·50) est

$$\ll \frac{g_m(\alpha)x^\alpha\zeta(\alpha, y)}{\alpha\sqrt{\sigma_2}\overline{u}\log y} \ll \frac{g_m(\alpha)\Psi(x, y)}{\overline{u}\log y} \ll g_m(\alpha)\Psi(x, y)E_m^*(x, y).$$

Il est donc englobé par le terme reste de (2·7).

En appliquant la formule (4·50) pour une valeur générique de m et pour $m = 1$, nous déduisons donc de ce qui précède que

$$\begin{aligned}\Psi_m(x, y) = g_m(\alpha)\Psi(x, y)&\Big\{1 + O\Big(E_m^*(x, y)\Big)\Big\}\\ &+ \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i/\log y}^{\alpha+i/\log y} \big\{g_m(s) - g_m(\alpha)\big\}\zeta(s, y)x^s\,\frac{\mathrm{d}s}{s}.\end{aligned} \tag{4·52}$$

Posons $T_0 := \overline{u}^{2/3}/(u\log y)$ et désignons par $J_1(T_0)$ la contribution à l'intégrale de (4·52) du domaine $T_0 < |\tau| \leqslant 1/\log y$. La majoration (4·42) fournit une première estimation de cette quantité : nous obtenons, avec les mêmes calculs que dans [16] p. 281, que

$$J_1(T_0) \ll \frac{x^\alpha\zeta_m(\alpha, y)\mathrm{e}^{-c_5\overline{u}^{1/3}}}{\alpha\sqrt{\sigma_2}} \ll g_m(\alpha)\Psi(x, y)\mathrm{e}^{-c_5\overline{u}^{1/3}}. \tag{4·53}$$

Ce terme d'erreur est certainement satisfaisant si, disons, $u > (2/c_5)^3(\log_2 2y)^3$ ou $\vartheta_m > 1/\log(\overline{u} + 1)$. En effet, on a, en vertu de (2·10),

$$\mathrm{e}^{-c_5\overline{u}^{1/3}} \leqslant \frac{1}{\overline{u}\,\log y} \ll E_m^*(x, y)$$

dans le premier cas et

$$\mathrm{e}^{-c_5\overline{u}^{1/3}} \ll \frac{\vartheta_m}{\overline{u}} \ll E_m^*(x,y)$$

dans le second. Nous pouvons donc nous limiter à estimer $J_1(T_0)$ sous les conditions supplémentaires

$$u \ll (\log_2 2y)^3 \quad \text{et} \quad \vartheta_m \leqslant 1/\log(\overline{u}+1) = 1/\log(u+1).$$

Nous déduisons alors du Lemme 3.13 que l'on a $\gamma_m'(\alpha) \ll W_m$, d'où

$$g_m(\alpha+i\tau) - g_m(\alpha) \ll \vartheta_m g_m(\alpha) \qquad (|\tau| \leqslant 1/\log y).$$

En reportant dans la définition de $J_1(T_0)$ et en faisant appel, comme précédemment, à (4·42), nous obtenons, grâce à (2·10),

$$\begin{aligned} J_1(T_0) &\ll \vartheta_m g_m(\alpha)\Psi(x,y)\mathrm{e}^{-c_5\overline{u}^{1/3}} \\ &\ll \vartheta_m g_m(\alpha)\frac{\Psi(x,y)}{\overline{u}} \ll g_m(\alpha)\Psi(x,y)E_m^*(x,y). \end{aligned}$$

Il reste à estimer la contribution du domaine $|\tau| \leqslant T_0$ à l'intégrale de (4·52), soit

$$J_2(T_0) := \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-iT_0}^{\alpha+iT_0} \big\{g_m(s) - g_m(\alpha)\big\}\zeta(s,y)x^s\frac{\mathrm{d}s}{s}.$$

Nous effectuons pour cela un développement limité de l'intégrande au voisinage de $\tau = 0$. Nous avons $\log x + \sigma_1 = 0$ par définition de α et, d'après (3·9), $T_0^3\sigma_3 \ll 1$. Nous pouvons donc écrire, pour $|\tau| \leqslant T_0$,

$$\begin{aligned} \frac{\zeta(s,y)x^s}{s} &= \frac{\zeta(\alpha,y)x^\alpha}{s}\exp\{i\tau(\log x+\sigma_1) - \tfrac{1}{2}\tau^2\sigma_2 + O(\tau^3\sigma_3)\} \\ &= \frac{\zeta(\alpha,y)x^\alpha}{\alpha}\mathrm{e}^{-\tau^2\sigma_2/2}\big\{1 + O(\tau^3\sigma_3 + \tau/\alpha)\big\}. \end{aligned} \tag{4·54}$$

D'après (4·46) et (4·47), nous avons $T_0^2\gamma_m''(\alpha) \ll 1$, et donc, pour $|\tau| \leqslant T_0$,

$$\begin{aligned} g_m(s) - g_m(\alpha) &= g_m(\alpha)\big\{\exp\big\{i\tau\gamma_m'(\alpha) + O(\tau^2\gamma_m''(\alpha))\big\} - 1\big\} \\ &= g_m(\alpha)\big\{i\tau\gamma_m'(\alpha) + O\big(\tau^2(|\gamma_m''(\alpha)| + \gamma_m'(\alpha)^2)\big)\big\}. \end{aligned} \tag{4·55}$$

Comme on a également

$$\int_{-T_0}^{T_0} \tau\mathrm{e}^{-\sigma_2\tau^2/2}\,\mathrm{d}\tau = 0, \quad \int_{-T_0}^{T_0} |\tau|^k\mathrm{e}^{-\sigma_2\tau^2/2}\,\mathrm{d}\tau \ll_k \sigma_2^{-(k+1)/2} \quad (k \geqslant 1), \tag{4·56}$$

il vient, compte tenu de (3·10),

$$\begin{aligned} J_2(T_0) &\ll g_m(\alpha)\Psi(x,y)\bigg\{\gamma_m'(\alpha)\Big(\frac{\sigma_3}{\sigma_2^2} + \frac{1}{\sigma_2\alpha}\Big) + \frac{|\gamma_m''(\alpha)| + \gamma_m'(\alpha)^2}{\sigma_2}\bigg\} \\ &\ll g_m(\alpha)\Psi(x,y)\bigg\{\frac{\gamma_m'(\alpha)}{u\log y} + (|\gamma_m''(\alpha)| + \gamma_m'(\alpha)^2)\frac{\overline{u}}{u^2(\log y)^2}\bigg\}. \end{aligned} \tag{4·57}$$

Les majorations (3·59) permettent aisément d'établir que la dernière expression entre accolades dans (4·57) est $\ll E_m^*(x,y)$.

5. Comportement local

5·1. Preuve du Théorème 2.3

Dans ce paragraphe, nous supposons les conditions (2·15) réalisées et nous établissons (2·16).

Lorsque $1 \leqslant d \leqslant x/y$, nous déduisons du Théorème 2.1 que

$$\Psi_m\Big(\frac{x}{d}, y\Big) = g_m(\alpha_t)\Psi\Big(\frac{x}{d}, y\Big)\Big\{1 + O\Big(\frac{1}{(u-t)\log y}\Big)\Big\} \tag{5·1}$$

où l'on a posé

$$\alpha_t := \alpha(x/d, y) = \alpha\big(y^{u-t}, y\big). \tag{5·2}$$

Utilisons l'estimation

$$\alpha'(u) := \frac{\mathrm{d}\alpha(u)}{\mathrm{d}u} \asymp \frac{-\overline{u}}{u^2 \log y}, \tag{5·3}$$

établie dans [16], formule (6·6). Il vient

$$\alpha - \alpha_t \ll \frac{1}{\log y} \log\Big(\frac{u}{u-t}\Big).$$

Il résulte donc de (3·54) que l'erreur relative commise en remplaçant α_t par α dans (5·1) est compatible avec celle de (2·16). Cela établit (2·16) lorsque $d \leqslant x/y$.

Lorsque $x/y < d \leqslant x$, et donc $x/d < y$, l'évaluation de $\Psi_m(x/d, y) = N_m(x/y)$ relève de la théorie classique du crible. La majoration (3·38) fournit ainsi

$$\Psi_m\Big(\frac{x}{d}, y\Big) = g_m(1)\Psi\Big(\frac{x}{d}, y\Big)\Big\{1 + O\Big(\Big(\frac{d}{x}\Big)^C\Big)\Big\}$$

où C est une constante positive ne dépendant que de K. Comme nous avons dans ce cas

$$1 - \alpha \ll \frac{\log(u+1)}{\log y}, \quad g_m(1) = g_m(\alpha)\Big\{1 + O\Big(\frac{\log(u+1)}{\log y}\Big)\Big\},$$

l'estimation (2·16) reste valable. □

5·2. Preuve du Théorème 2.4 : cas $m = 1$

Nous commençons par établir un résultat intermédiaire, dont la démonstration est une variante de celle du théorème 3 de [16] — voir aussi les théorèmes III.5.10 et III.5.11 de [30].

Lemme 5.1. *On a uniformément pour $x \geqslant y \geqslant 2$, $1 \leqslant c \leqslant x$, $t := \log c/\log y$,*

$$\Psi(cx, y) = \Psi(x, y)c^{\alpha(x,y)}\Big\{1 + O\Big(\frac{1}{\overline{u}} + \frac{t}{u}\Big)\Big\}.$$

Démonstration. Posons $\alpha = \alpha(u) = \alpha(y^u, y)$ et

$$f(u) := \log\left(\frac{y^{u\alpha}\zeta(\alpha, y)}{\alpha\sqrt{2\pi\varphi_2(\alpha, y)}}\right).$$

D'après le Lemme 3.3, il nous suffit donc de montrer que

$$f'(u) = \alpha(u)\log y + O(1/u). \tag{5·4}$$

Or, cette évaluation découle des relations (3·9), qui impliquent

$$f'(u) - \alpha(u)\log y = -\frac{\alpha'(u)}{\alpha(u)} - \frac{\varphi_3(\alpha, y)}{2\varphi_2(\alpha, y)}\alpha'(u) \ll \frac{1}{u}$$

compte tenu de l'estimation (5·3) . □

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer la formule (2·22) du Théorème 2.4 dans le cas $m = 1$ — autrement dit de prouver que l'estimation

$$\Psi\Big(\frac{x}{d}, y\Big) = \Big\{1 + O\Big(\frac{1}{u_y} + \frac{t}{u}\Big)\Big\}\Big(1 - \frac{t^2}{u^2 + \overline{u}^2}\Big)^{b\overline{u}} \frac{\Psi(x, y)}{d^\alpha} \tag{5·5}$$

est valable uniformément pour $x \geqslant y \geqslant 2$, $1 \leqslant d \leqslant x$.

Observons d'abord que nous pouvons supposer u et y assez grands. En effet, lorsque u est borné, la formule (5·5) est une conséquence immédiate de celle de Hildebrand (4·7), de (3·3) et du fait que $\varrho(u - t) = \varrho(u)\{1 + O(t)\}$. Lorsque y est borné, nous avons par ailleurs

$$\overline{u} \ll 1, \quad 1 - \frac{t^2}{u^2 + \overline{u}^2} \asymp \frac{\log(x/d) + O(1)}{\log x}, \quad \alpha \asymp \frac{1}{\log x},$$

donc (5·5) peut être réécrit sous la forme

$$\Psi(x/d, y) \ll \Big(\frac{\log(x/d) + O(1)}{\log x}\Big)^{O(1)} \Psi(x, y).$$

Or, cette dernière relation est bien satisfaite puisque $\Psi(w, y) \asymp (\log 2w)^{\pi(y)}$ pour $w \geqslant 1$, $y \ll 1$.

Nous supposons donc dans toute la suite que u et y sont suffisamment grands.

Nous pouvons encore réduire la preuve de (5·5) au cas $t \leqslant u - 1$, i.e. $d \leqslant x/y$. En effet, supposant le résultat acquis dans ce sous-domaine, nous avons, lorsque $\sqrt{x} \leqslant x/y < d \leqslant x$,

$$\begin{aligned}\Psi\Big(\frac{x}{d}, y\Big) \asymp \frac{x}{d} = \frac{x}{dy} y &\ll \frac{x}{dy} \frac{\Psi(x, y)}{(x/y)^\alpha} \Big(1 - \frac{(u-1)^2}{u^2 + \overline{u}^2}\Big)^{b\overline{u}} \\ &\ll \frac{\Psi(x, y)}{d^\alpha} \Big(1 - \frac{t^2}{u^2 + \overline{u}^2}\Big)^{b\overline{u}},\end{aligned}$$

puisque $\alpha < 1$ d'après (3·5). Cela établit bien (2·22) lorsque $u - 1 < t \leqslant u$.

Considérons à présent la situation générique $u \geqslant u_0$, $y \geqslant y_0$, $0 \leqslant t \leqslant u - 1$ et désignons par H le terme d'erreur de (5·5). Nous procédons en deux étapes. La première consiste à établir que

$$H \ll 1/\overline{u} + t/u. \tag{5·6}$$

Nous avons, par (3·10),

$$\begin{aligned}\Psi\Big(\frac{x}{d}, y\Big) &= \mathrm{e}^{f(u-t)} \Big\{1 + O\Big(\frac{1}{u - t} + \frac{\log y}{y}\Big)\Big\} \\ &= \mathrm{e}^{f(u-t)} \Big\{1 + O\Big(\frac{1}{\overline{u}} + \frac{t}{u}\Big)\Big\}.\end{aligned}$$

De plus, il résulte de (5·3) et (5·4) que

$$f(u - t) = f(u) - \alpha(u) t \log y - I + O\Big(\log \frac{u}{u - t}\Big), \tag{5·7}$$

avec

$$\begin{aligned}I &:= (\log y) \int_{u-t}^{u} \{\alpha(v) - \alpha(u)\} \,\mathrm{d}v \\ &\asymp \int_{u-t}^{u} \int_{v}^{u} \frac{\overline{w}}{w^2} \,\mathrm{d}w \,\mathrm{d}v = \int_{u-t}^{u} \frac{\overline{w}(w - u + t)}{w^2} \,\mathrm{d}w,\end{aligned}$$

où nous avons posé $\overline{w} := \min(w, y/\log y)$. Comme $\overline{w}/w \asymp \overline{u}/(w + \overline{u})$, il suit

$$I \asymp \overline{u} J, \quad \text{avec} \quad J := \int_{u-t}^{u} \frac{w - u + t}{w(w + \overline{u})} \,\mathrm{d}w = \int_0^t \frac{s \,\mathrm{d}s}{(s + u - t)(s + \overline{u} + u - t)}. \tag{5·8}$$

Nous allons montrer que

$$J \asymp \begin{cases} t^2/u^2 & \text{si } t \leqslant \frac{1}{3}(u + \overline{u}), \\ \log\Big(\dfrac{u + \overline{u}}{u + \overline{u} - t}\Big) & \text{si } \frac{1}{3}(u + \overline{u}) < t \leqslant u. \end{cases} \tag{5·9}$$

Comme $\overline{u}$ est arbitrairement grand, cela impliquera bien (5·6), en reportant dans (5·7).

Lorsque $t \leqslant \frac{1}{3}(u+\overline{u}) \leqslant \frac{2}{3}u$, nous avons

$$J \asymp \int_0^t \frac{s\,\mathrm{d}s}{u^2} \asymp \frac{t^2}{u^2}.$$

Lorsque $\frac{1}{3}(u+\overline{u}) < t \leqslant \frac{2}{3}(u+\overline{u})$, nous pouvons écrire

$$J \asymp \frac{1}{u+\overline{u}} \int_0^t \frac{s\,\mathrm{d}s}{(s+u-t)}$$

d'où

$$1 \ll \frac{t^2}{u^2} \ll J \ll \frac{t}{u} \ll 1.$$

La relation (5·9) est donc encore satisfaite dans ce cas.

Le cas $\frac{2}{3}(u+\overline{u}) < t \leqslant u$ ne peut advenir que si $u > 2\overline{u}$. Nous avons alors $u-t < u+\overline{u}-t < t$, donc

$$\begin{aligned} J &\asymp \int_0^{u-t} \frac{s\,\mathrm{d}s}{(u-t)(u+\overline{u}-t)} + \int_{u-t}^{u+\overline{u}-t} \frac{s\,\mathrm{d}s}{s(\overline{u}+u-t)} + \int_{u+\overline{u}-t}^{t} \frac{s\,\mathrm{d}s}{s(s+\overline{u}+u-t)} \\ &= \frac{u-t}{2(u+\overline{u}-t)} + \frac{\overline{u}}{u+\overline{u}-t} + \log\left(\frac{u+\overline{u}}{2(u+\overline{u}-t)}\right) \\ &\asymp \log\left(\frac{u+\overline{u}}{u+\overline{u}-t}\right). \end{aligned}$$

Cela établit bien (5·9) et achève ainsi la preuve de (5·6).

La seconde étape de la démonstration consiste à montrer que

$$H \ll \frac{\log(u+1)}{\log y} + \frac{t}{u}. \tag{5·10}$$

Compte tenu de (5·6), nous pouvons certainement nous limiter au cas où $u \leqslant \log y$ et $t \leqslant u/2$. Le lemme 1 de [19] permet alors d'écrire

$$\Psi\Big(\frac{x}{d}, y\Big) = \frac{\Psi(x,y)}{d} \exp\bigg\{ \int_{u-t}^{u} \xi(v)\,\mathrm{d}v + O\Big(\frac{\log(u+1)}{\log y} + \frac{t}{u}\Big)\bigg\}.$$

En reportant dans cette formule les estimations

$$\xi(v) - \xi(u) \asymp -(u-v)/u \quad (u/2 \leqslant v \leqslant u), \qquad 1-\alpha = \xi(u)/\log y + O\big(1/u(\log y)^2\big)$$

qui résultent respectivement de (2·37) et (3·3), nous obtenons bien (5·10).

La formule (5·5) découle aisément de la conjonction de (5·6) et (5·10) : on a en effet

$$\min\Big\{\frac{1}{\overline{u}} + \frac{t}{u}, \frac{\log(u+1)}{\log y} + \frac{t}{u}\Big\} \asymp \min\Big\{\frac{1}{\overline{u}}, \frac{\log(u+1)}{\log y}\Big\} + \frac{t}{u} \asymp \frac{1}{u_y} + \frac{t}{u}.$$

5·3. Preuve du Théorème 2.4(i) : cas général

D'après (4·41), nous pouvons considérer dans toute la suite que y est arbitrairement grand. Nous observons de plus que, lorsque u est borné, le théorème de [29] permet de conclure : on a alors $g_m(\alpha) \gg g_m(1)$. Nous supposons donc dorénavant, sans perte de généralité, que

$$\overline{u} > v_0 \tag{5·11}$$

où v_0 est une constante arbitraire.

Établissons d'abord (2·19) lorsque $1 \leqslant d \leqslant x/y$. Conservons les notations

$$t := (\log d)/\log y, \quad \alpha_t := \alpha(u-t) = \alpha(x/d, y).$$

Comme $\delta(x, y)$ est, à y fixé, une fonction croissante de x, nous pouvons déduire du Corollaire 2.2 que, sous les conditions (2·20) et $1 \leqslant d \leqslant x/y$,

$$\Psi_m\Big(\frac{x}{d}, y\Big) \ll g_m(\alpha_t)\Psi\Big(\frac{x}{d}, y\Big). \tag{5·12}$$

En appliquant alors (5·5), nous obtenons

$$\Psi_m\Big(\frac{x}{d}, y\Big) \ll Bg_m(\alpha)\frac{\Psi(x,y)}{d^\alpha}$$

avec

$$B := \frac{g_m(\alpha_t)}{g_m(\alpha)}\Big(1 - \frac{t^2}{u^2+\overline{u}^2}\Big)^{b_1\overline{u}}.$$

Nous devons donc prouver que B est borné sous les hypothèses (2·20) et $0 \leqslant t \leqslant u-1$. Or, il résulte de (3·66) et de (3·71) que l'on a, pour toute constante $c > 0$,

$$B \leqslant \Big(1 - \frac{t^2}{u^2+\overline{u}^2}\Big)^{(b_1-c)\overline{u}-b_3\sqrt{\overline{u}}}\Big\{1 + O\Big(\frac{t\sqrt{\overline{u}}}{u}\Big)\Big\}.$$

Choisissons, par exemple, $c = b_1/2$. Cela fournit immédiatement l'estimation souhaitée $B \ll 1$.

Lorsque $x/y < d \leqslant x$ et $\omega(m) \ll 1$, nous avons

$$\Psi_m\Big(\frac{x}{d}, y\Big) \ll \frac{x}{d} = \frac{x}{yd}y \ll \frac{x}{yd}\frac{g_m(\alpha)\Psi(x,y)}{(x/y)^\alpha} \ll \frac{g_m(\alpha)\Psi(x,y)}{d^\alpha}$$

où, puisque $\Psi_m(y, y) \asymp y$, la seconde estimation résulte du cas précédemment traité $d = x/y$, et la troisième est une conséquence banale du fait que $\alpha < 1$ — cf. (3·5).

5·4. Preuve du Théorème 2.4(ii) : cas général

Considérons en premier lieu le cas $d \leqslant x/y$. Évaluons $\Psi_m(x/d, y)$ par le Théorème 2.1 puis $\Psi(x/d, y)$ par (5·5) : nous obtenons

$$\Psi_m\Big(\frac{x}{d}, y\Big) = T\big\{1 + O(H_m)\big\}\Big(1 - \frac{t^2}{u^2+\overline{u}^2}\Big)^{b\overline{u}} g_m(\alpha)\frac{\Psi(x,y)}{d^\alpha} \tag{5·13}$$

avec

$$T := \frac{g_m(\alpha_t)}{g_m(\alpha)}, \quad H_m := E_m^*(x/d, y) + \frac{1}{u_y} + \frac{t}{u}.$$

On a clairement, avec les notations introduites dans l'énoncé,

$$H_m \asymp E_m^*(x,y) + h_1 \ll h_m$$

lorsque $t \leqslant u/2$. Lorsque $u/2 < t \leqslant u-1$, nous déduisons de (3·71) que $H_m \ll 1 \ll h_m$. Ainsi

$$H_m \ll h_m$$

uniformément sous les conditions (2·21) et $1 \leqslant d \leqslant x/y$. Comme $T \geqslant 1$, on voit que la première partie de l'énoncé résulte, par exemple, de l'inégalité

$$T \leqslant \big\{1 + O(h_m)\big\}\Big(1 - \frac{t^2}{u^2+\overline{u}^2}\Big)^{b\overline{u}/2}. \tag{5·14}$$

Or, cette relation découle immédiatement de (3·66) avec $c := b_1/2$.

Examinons ensuite le cas où $x/y < d \leqslant x$ et $\omega(m) \ll 1$. Il est alors nécessaire de distinguer deux sous-cas, selon la place de u relativement à 2.

Lorsque $u > 2$, donc $t \geqslant u - 1 > u/2$, on a $h_m \gg 1$, et l'estimation (2·22) se réduit à une majoration de l'ordre de grandeur de $\Psi_m(x/d, y)$. Or, nous pouvons déduire du cas précédemment traité $1 \leqslant d \leqslant x/y$ que l'on a dans ces circonstances

$$\begin{aligned}\Psi_m\Big(\frac{x}{d}, y\Big) &\ll \frac{x}{d} = \frac{x}{yd}y \ll \frac{x}{yd}\Psi_m(y,y)\\ &\ll \frac{x}{yd}\Big(1 - \frac{(u-1)^2}{u^2+\overline{u}^2}\Big)^{b\overline{u}}\frac{g_m(\alpha)\Psi(x,y)}{(x/y)^\alpha}\\ &\ll \Big(1 - \frac{t^2}{u^2+\overline{u}^2}\Big)^{b\overline{u}/2}\frac{g_m(\alpha)\Psi(x,y)}{d^\alpha}\end{aligned}$$

où nous avons utilisé la majoration $h_m(x, y; x/y) \ll 1$, qui résulte de (2·9) et (3·11). Cela implique bien (2·22).

Lorsque $1 \leqslant u \leqslant 2$, $u - 1 < t \leqslant u$, l'estimation requise équivaut, avec la notation (3·36), à

$$N_m\Big(\frac{x}{d}\Big) = \Big\{1 + O\Big(\frac{1}{\log y} + t\Big)\Big\}g_m(\alpha)\frac{\Psi(x,y)}{d^\alpha}. \tag{5·15}$$

Comme $\alpha = 1 + O(1/(\log x^2))$ sous les hypothèses effectuées et comme

$$\varrho(u) = 1 - \log u = 1 + O(u-1) = 1 + O(t) \qquad (u - 1 \leqslant \min(1,t)),$$

il résulte de (4·7) que le membre de droite de (5·15) vaut

$$\Big\{1 + O\Big(\frac{1}{\log y} + t\Big)\Big\}\frac{\varphi(m)}{m}\frac{x}{d}.$$

Le résultat souhaité découle donc de (3·37). Cela achève la démonstration de (2·22).

Il reste à établir que

$$h_m \asymp h_1 \asymp 1/u_y + t/u$$

lorsque $\omega(m) \ll 1$. Il suffit pleinement, pour cela, de montrer que

$$E_m \ll \overline{u}/u_y. \tag{5·16}$$

Or, (5·16) résulte de l'estimation triviale $E_m \ll 1/\log y \ll \overline{u}/u_y$ si $y > (\log x)^2$, et, si $y \leqslant (\log x)^2$, de la première majoration de (3·11) sous la forme $E_m \ll 1 \ll \overline{u}/u_y$.

6. Valeurs moyennes de fonctions arithmétiques

6·1. Preuve du Corollaire 2.6

Commençons par une estimation technique. En accord avec la notation Θ_y de l'énoncé du Corollaire 2.6, nous posons pour $x \geqslant y \geqslant z \geqslant 2$

$$\Theta_z := \prod_{p \leqslant z}(1 + p^{-2\alpha}),$$

où $\alpha = \alpha(x, y)$ est donc indépendant de z. Nous notons encore h_z la fonction multiplicative définie par

$$h_z(p^\nu) := \begin{cases}\mu(m) & \text{si } n = m^2 \text{ et } P(m) \leqslant z,\\ 0 & \text{dans les autres cas,}\end{cases}$$

et nous posons, pour $j \in \mathbb{N}$, $x \geqslant y \geqslant z \geqslant 2$,

$$D_j = D_j(\alpha, z) := \sum_{P(m)\leqslant z}\frac{\mu(m)^2(\log m)^j}{m^{2\alpha}}.$$

Lemme 6.1. *On a uniformément pour $x \geqslant y \geqslant z \geqslant 2$, $1 \leqslant j \leqslant 3$,*

$$D_j(\alpha, z) \ll \Theta_z \{\log \Theta_z\}^j (\log z)^j. \tag{6·1}$$

Démonstration. Le résultat est évident pour $j = 0$ puisque

$$D_0(\alpha, z) = \Theta_z. \tag{6·2}$$

Lorsque $j = 1$, un calcul de dérivée logarithmique fournit

$$D_1(\alpha, z) = \Theta_z \sum_{p \leqslant z} \frac{\log p}{p^{2\alpha} + 1}.$$

En majorant, dans la dernière somme, $\log p$ par $\log z$ et $1/(p^{2\alpha}+1)$ par $\log(1+p^{-2\alpha})$, nous obtenons

$$\sum_{p \leqslant z} \frac{\log p}{p^{2\alpha} + 1} \leqslant (\log \Theta_z)(\log z), \tag{6·3}$$

ce qui implique bien l'estimation annoncée.

Un second calcul de dérivée nous permet d'écrire

$$D_2(\alpha, z) = \Theta_z \bigg\{ \sum_{p \leqslant z} \frac{p^{2\alpha}(\log p)^2}{(p^{2\alpha} + 1)^2} + \Big(\sum_{p \leqslant z} \frac{\log p}{p^{2\alpha} + 1} \Big)^2 \bigg\}.$$

En raisonnant comme précédemment, nous voyons que la première somme en p est

$$\ll (\log \Theta_z)(\log z)^2.$$

La majoration annoncée résulte alors de (6·3). □

Nous sommes maintenant en mesure de prouver le Corollaire 2.6.

Soit $h := \mu^2 * \mu$. On vérifie sans peine que h et h_y coïncident sur $S(x, y)$. Lorsque, par exemple, $\alpha > \frac{2}{3}$, nous avons donc trivialement $\Theta_y \ll 1$ et, avec la notation (2·26),

$$M_2 = M_2(x, y; \mu^2) = \sum_{m \in S(\sqrt{x}, y)} \frac{\mu(m)^2 (\log m)^2}{m^{2\alpha}} \ll 1.$$

En observant que

$$\sum_{\substack{d \leqslant \sqrt{x} \\ P(d) \leqslant y}} \frac{\mu(m)}{m^{2\alpha}} = \frac{1}{\zeta(2\alpha, y)} + O\bigg(\sum_{P(m) \leqslant y} \frac{\mu^2(m) \log m}{m^{2\alpha} \log x} \bigg) = \frac{1}{\zeta(2\alpha, y)} + O\Big(\frac{1}{\log x} \Big),$$

et en gardant en mémoire le fait que l'on a $\overline{u} = u < u_y$ dans le cas considéré, nous constatons donc que l'estimation requise (2·28) découle de la seconde assertion du Théorème 2.5.

Seul reste donc à considérer le cas $\alpha \leqslant \frac{2}{3}$, où l'on a certainement

$$y \leqslant (\log x)^{O(1)} \tag{6·4}$$

et donc $u_y = \overline{u} + O(1)$. Nous observons d'emblée que cette dernière relation implique, via l'inégalité de Cauchy–Schwarz $M_1^2 \leqslant M_0 M_2$,

$$\frac{M_1}{\log x} \ll \frac{M_0}{\overline{u}} + \frac{M_2 \overline{u}}{(\log x)^2} \asymp \frac{M_0}{u_y} + \frac{M_2 \overline{u}}{(\log x)^2},$$

de sorte que le terme central du terme d'erreur de (2·27) peut être omis. Nous traitons le terme principal en étendant la somme en d jusqu'à l'infini et en majorant la contribution des entiers $d = m^2 > x$ à l'aide de l'estimation triviale

$$\sum_{\substack{m>\sqrt{x}\\ P(m)\leqslant y}} \frac{\mu(m)^2}{m^{2\alpha}} \leqslant 4D_2(\alpha, y)\,(\log x)^2\cdot$$

Nous pouvons alors réécrire (2·27) sous la forme

$$\begin{aligned}\Psi(x,y;\mu^2) &= \Psi(x,y)\Big\{\frac{1}{\zeta(2\alpha,y)} + O\Big(\frac{M_0}{\overline{u}} + \frac{D_2(\alpha,y)\overline{u}}{(\log x)^2}\Big)\Big\}\\ &= \Psi(x,y)\Big\{\frac{1}{\zeta(2\alpha,y)} + O\Big(\frac{\Theta_y(\log\Theta_y)^2}{\overline{u}}\Big)\Big\},\end{aligned}$$

en vertu de (6·2) et (6·1) avec $j = 0$ et $j = 2$. Cela établit bien (2·28) sous la condition supplémentaire

$$\Theta_y \leqslant \sqrt{\overline{u}}/\log(\overline{u}+1).$$

Tournons à présent notre attention sur le cas résiduel

$$\alpha \leqslant 2/3, \quad \Theta_y > \sqrt{\overline{u}}/\log(\overline{u}+1). \tag{6·5}$$

Introduisant un paramètre $z \in [2, y]$, et posant

$$n_z := \prod_{\substack{p^\nu \| n\\ p\leqslant z}} p^\nu,$$

nous observons que l'on a

$$\mu^2(n) \leqslant \mu^2(n_z) = \sum_{d|n} h_z(d) \qquad (n \geqslant 1).^{(11)}$$

En appliquant le Théorème 2.5 à la fonction $\mathbf{1} * h_z$ et en faisant appel aux estimations (6·1), nous obtenons

$$\Psi(x,y;\mu^2) \leqslant \Psi(x,y)\Big\{\sum_{m\in S(x,z)} \frac{\mu(m)}{m^{2\alpha}} + O\Big(\frac{\Theta_z}{\overline{u}} + \frac{\Theta_z(\log\Theta_z)^2\overline{u}}{u^2}\Big)\Big\}.$$

Complétons la somme en m en majorant l'erreur introduite par la méthode de Rankin. Nous obtenons

$$\sum_{m\in S(x,z)} \frac{\mu(m)}{m^{2\alpha}} = \frac{1}{\zeta(2\alpha,z)} + O\Big(\frac{D_2(\alpha,z)}{(\log x)^2}\Big),$$

d'où

$$\Psi(x,y;\mu^2) \leqslant \Psi(x,y)\Big\{\frac{1}{\zeta(2\alpha,z)} + O\Big(\frac{\Theta_z(\log\Theta_z)^2}{\overline{u}}\Big)\Big\}.$$

Nous obtenons la validité de (2·28) dans le cas (6·5) en choisissant le paramètre z de sorte que $\Theta_z \asymp \sqrt{\overline{u}}/\log(\overline{u}+1)$. C'est toujours possible puisque $z \mapsto \Theta_z$ est une fonction croissante de z dont les rapports de valeurs en des entiers consécutifs n'excède pas 2 et dont, d'après (6·5), le maximum excède $\sqrt{\overline{u}}/\log(\overline{u}+1)$. Comme $1/\zeta(2\alpha,z) \leqslant 1/\Theta_z$, nous obtenons bien la formule asymptotique requise — où d'ailleurs le terme d'erreur englobe le terme principal.

---

11. Cette inégalité est également le point de départ de la majoration d'Ivić et Tenenbaum pour $\Psi(x,y;\mu^2)$ lorsque y est « petit » — voir la formule (4·3) de [19].

6·2. Preuve du Théorème 2.7

Une intégration par parties fournit

$$\Psi(x,y;f)-\Psi(x,y)f(x)=-\int_1^x\Psi(t,y)f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Nous obtenons immédiatement l'évaluation annoncée (2·29) en reportant dans cette formule l'estimation

$$\Psi(t,y)=\Big\{1+O\Big(\frac{1}{u_y}+\frac{\log(x/t)}{\log x}+\frac{\overline{u}(\log(x/t))^2}{(\log x)^2}\Big)\Big\}\frac{\Psi(x,y)}{(x/t)^\alpha}\qquad(1\leqslant t\leqslant x),$$

qui résulte de (2·22).

6·3. Preuve du Corollaire 2.8

Nous appliquons le Théorème 2.7, ce qui nécessite d'estimer les intégrales M_j^*. Nous avons

$$M_0^*=\frac{1-x^{-\alpha}}{\alpha}=\frac{1+O(1/u_y)}{\alpha},$$
$$M_j^*=\int_1^x\frac{(\log t)^j\,\mathrm{d}t}{t^{1+\alpha}}\ll\frac{1}{\alpha^{j+1}}\ll\frac{(\log x)^j}{\alpha u_y^j}\quad(j\in\mathbb{N}),$$

d'après (3·4). En reportant ces estimations dans (2·29), nous obtenons

$$\begin{aligned}\Psi(x,y;\log)-\Psi(x,y)\log x&=\Psi(x,y)\Big\{-M_0^*+O\Big(\frac{M_0^*}{u_y}+\frac{M_1^*}{\log x}+\frac{M_2^*\overline{u}}{(\log x)^2}\Big)\Big\}\\&=\frac{\Psi(x,y)}{\alpha}\Big\{-1+O\Big(\frac{1}{u_y}\Big)\Big\}.\end{aligned}$$

6·4. Preuve du Corollaire 2.10

La seconde égalité de (2·32) découle de la première grâce à la formule (3·24) du Lemme 3.5.

Démontrons maintenant la première égalité de (2·32). Nous pouvons supposer y assez grand car le résultat est trivialement valable dans le cas contraire.

Considérons d'abord le cas $u>\log y$. Le Théorème 2.9 implique

$$\Psi(x,y;\kappa)=\Psi(x,y)\bigg\{m_0+O\bigg(\frac{m_0}{\overline{u}}+\frac{m_2\overline{u}}{(u\log y)^2}\bigg)\bigg\},\tag{6·6}$$

où l'on a posé

$$m_j:=\sum_{\substack{p^\nu\leqslant x\\ p\leqslant y}}g_p(\alpha)\frac{(\log p^\nu)^j\log p}{p^{\nu\alpha}}\qquad(j\geqslant 0).$$

D'après (3·4), il existe une constante c telle que $\alpha\geqslant c\overline{u}/(u\log y)$ et donc, avec les notations de (3·18),

$$m_j\ll\sum_{p\leqslant y}\frac{\log p}{p^\alpha}\Big(\frac{\log p}{1-p^{-c\overline{u}/u\log y}}\Big)^j\ll H_1(\alpha,y)\Big(\frac{u\log y}{\overline{u}}\Big)^j.\tag{6·7}$$

Comme $\overline{u}\gg\log y$ dans le domaine considéré, cela montre que le terme d'erreur de (6·6) est de taille acceptable.

Estimons à présent m_0. La majoration issue de (3·4)

$$(y/x)^\alpha\ll 1/(\overline{u}\log y)^2\qquad(u\geqslant 2)\tag{6·8}$$

nous sera utile. Désignons par $\nu_p=\nu_p(x)$ le plus petit entier $>(\log x)/\log p$. Nous avons

$$m_0=H_1(\alpha,y)-\sum_{p\leqslant y}\frac{\log p}{p^{\alpha\nu_p}}.$$

Comme $p^{-\nu_p+1} \ll y/x$ pour $p \leqslant y$, il s'ensuit, grâce à (6·8), que

$$m_0 - H_1(\alpha, y) \ll \Big(\frac{y}{x}\Big)^\alpha \sum_{p\leqslant y} \frac{\log p}{p^\alpha} \ll \frac{H_1(\alpha, y)}{\overline{u}\log y}. \tag{6·9}$$

En reportant (6·7) et (6·9) dans (6·6), nous obtenons donc que la première formule de (2·32) est valable lorsque $u > \log y$.

Lorsque $u \leqslant \log y$, et donc, pour y assez grand, $\alpha > 2/3$, nous approchons $\Psi(x, y; \kappa)$ par $\Psi(x, y; \log)$ et nous faisons appel à l'évaluation (2·30) de cette dernière quantité.[12] La décomposition (2·25), la majoration (2·19), et la première formule (2·30) fournissent

$$\begin{aligned}\Psi(x, y; \kappa) &= \Psi(x, y; \log) - \sum_{\substack{p\leqslant y\\ p^\nu\leqslant x}} (\nu-1)(\log p)\Psi_p\Big(\frac{x}{p^\nu}, y\Big)\\ &= \Psi(x, y; \log) + O\big(\Psi(x, y)\big) = \Psi(x, y)\big\{\log x + O(1)\big\}.\end{aligned}$$

Comme (3·24) permet de remplacer, dans la dernière expression, $\log x$ par $H_1(\alpha, y)$ sans altérer le terme d'erreur, nous obtenons bien (2·32) lorsque $u \leqslant \log y$.

6·5. Preuve du Corollaire 2.11

D'après le Théorème 2.9, nous avons

$$\Psi(x, y; \Omega - \omega) = \Psi(x, y)\Big\{m_0 + O\Big(\frac{m_0}{u_y} + \frac{m_1}{\log x} + \frac{m_2\overline{u}}{(\log x)^2}\Big)\Big\} \tag{6·10}$$

avec maintenant

$$m_j = \sum_{\substack{p^\nu\leqslant x\\ p\leqslant y}} \frac{(\nu-1)(\log p^\nu)^j}{p^{\nu\alpha}} g_p(\alpha) \qquad (0 \leqslant j \leqslant 2).$$

Commençons par évaluer m_0. Posons

$$H(\sigma, y) := \sum_{p\leqslant y} \frac{1}{p^\sigma(p^\sigma - 1)} \qquad (\sigma > 0). \tag{6·11}$$

En étendant la somme en ν jusqu'à l'infini et en majorant l'erreur introduite, nous obtenons

$$m_0 - H(\alpha, y) \ll \sum_{p\leqslant y} \frac{1}{p^{\nu_p\alpha}}\Big\{\nu_p + \frac{1}{p^\alpha - 1}\Big\} \tag{6·12}$$

où nous avons noté $\nu_p = \nu_p(x)$ le plus petit entier $> (\log x)/\log p$.

Pour évaluer le membre de droite de (6·12), nous observons que la contribution des nombres premiers p tels que $\sqrt{x} < p \leqslant x$ est

$$\ll \sum_{\sqrt{x}<p\leqslant x} \frac{1}{p^{2\alpha}} \ll \frac{1}{\sqrt{x}} \ll \frac{H(\alpha, y)}{\sqrt{x}},$$

puisque, d'après (3·3), nous avons $\alpha = 1 + O(1/\log x)$ lorsque $y > \sqrt{x}$. Ensuite, nous distinguons deux cas selon la taille de y. Si $y > (\ln x)^2$, nous avons $\alpha \gg 1$, et la majoration

$$(1 + \nu_p)/p^{(\nu_p-2)\alpha} \ll x^{-\alpha/4} \qquad (p \leqslant \min(y, \sqrt{x}))$$

implique, compte tenu de ce qui précède,

$$m_0 - H(\alpha, y) \ll x^{-\alpha/4}H(\alpha, y) \ll H(\alpha, y)/\ln x.$$

Si $y \leqslant (\ln x)^2$, nous déduisons de l'estimation $\nu_p + 1/\alpha \ll \ln x$ que

$$m_0 - H(\alpha, y) \ll \frac{1}{x^\alpha} \sum_{p\leqslant y} \frac{\alpha \ln x}{\alpha} \ll \frac{\pi(y)\alpha \ln x}{x^\alpha} H(\alpha, y) \ll \frac{H(\alpha, y)}{\overline{u}},$$

où nous avons fait appel à (3·4) sous la forme $\alpha u \ln y \gg \overline{u}$ et utilisé la minoration $\overline{u} \gg \sqrt{y}/\ln y$.

12. Il est à noter qu'une application du Théorème 2.9 n'aurait fourni qu'un terme d'erreur de l'ordre de $1/\overline{u}$.

Nous avons donc établi que l'on a en toute circonstance

$$m_0 = H(\alpha, y)\Big\{1 + O\Big(\frac{1}{u_y}\Big)\Big\}.$$

Il reste à montrer que le terme d'erreur de (6·10) est $\ll H(\alpha, y)/u_y$. On a

$$m_j \ll \sum_{p\leqslant y} \frac{1}{p^\alpha(p^\alpha - 1)}\Big(\frac{\log p}{1 - p^{-\alpha}}\Big)^j \qquad (0 \leqslant j \leqslant 2). \tag{6·13}$$

Si $\alpha > 2/3$, il s'ensuit que $m_j \ll 1$ et le résultat est acquis. Si $\alpha \leqslant 2/3$, on a d'après (3·4)

$$m_j \ll \Big(\log y + \frac{1}{\alpha}\Big)^j H(\alpha, y) \ll \Big(\frac{u \log y}{\overline{u}}\Big)^j H(\alpha, y).$$

Comme $\overline{u} \asymp u_y$ dans le domaine considéré, cela implique encore la majoration souhaitée en reportant dans (6·10).

6·6. Preuve de la Proposition 2.12

La formule annoncée est une conséquence immédiate du résultat général suivant, qui possède un intérêt intrinsèque. Nous rappelons la définition (6·11) de $H(\sigma, y)$ et celle de la fonction F, analytique sur $]\frac{1}{3}, \infty[$, donnée en (2·41).

Lemme 6.2. *Pour $\sigma > 0$, $y \geqslant 2$, on a*

$$H(\sigma, y) = \log(w_{2\sigma} \log y) + F(\sigma_*) + \frac{\Xi(w_{2\sigma})}{1 - y^{-\sigma}}\Big\{1 + O\Big(\frac{1}{\log y}\Big)\Big\} \tag{6·14}$$

où l'on a posé $\sigma_* := \max\{\sigma, \frac{2}{5}\}$, et utilisé la notation (3·26).

Compte tenu de (3·7), il est clair, en effet, que la formule (2·42) de la Proposition 2.12 est obtenue en spécialisant $\sigma = \alpha$ dans (6·14).

Démonstration du Lemme 6.2. Lorsque $\sigma > 2/5$, nous avons, avec la notation $H_0(\sigma, y)$ de (3·18),

$$\begin{aligned} H(\sigma, y) - H_0(2\sigma, y) &= F(2\sigma) - F_0(\sigma) + \sum_{p>y}\Big(\frac{1}{p^\sigma(p^\sigma - 1)} - \frac{1}{p^{2\sigma}}\Big) \\ &= F(2\sigma) - F_0(\sigma) + O\Big(\frac{y^{1-3\sigma}}{\log y}\Big). \end{aligned}$$

Compte tenu de l'estimation (2·40) pour $\Xi(w)$, le Lemme 3.6 fournit alors (6·14).

Lorsque $\sigma \leqslant 2/5$, nous évaluons $H(\sigma, y)$ par sommation d'Abel en faisant appel à une forme forte du théorème des nombres premiers. Nous obtenons

$$H(\sigma, y) = \Big\{1 + O\Big(\frac{1}{\log y}\Big)\Big\} \int_2^y \frac{\mathrm{d}t}{t^{2\sigma}(1 - t^{-\sigma})(\log t)}.$$

Des manipulations très voisines de celles de la solution de l'exercice III.5.1 de [32], et que nous ne détaillons pas, permettent alors d'établir que la dernière intégrale vaut

$$\Big\{1 + O\Big(\frac{1}{\log y}\Big)\Big\}\frac{w_{2\sigma}}{1 - y^{-\sigma}} = \Big\{1 + O\Big(\frac{1}{\log y}\Big)\Big\}\frac{\Xi(w_{2\sigma})}{1 - y^{-\sigma}}.$$

Cela implique immédiatement (6·14). □

Bibliographie

[1] K. Alladi, The Turán-Kubilius inequality for integers without large prime factors, *J. reine angew. Math.* **335** (1982), 180–196.

[2] R. de la Bretèche & G. Tenenbaum, Sur les lois locales de la répartition du k-ième diviseur d'un entier, *Proc. London Math. Soc.*, (3) **84** (2002), 289–323.

[3] R. de la Bretèche & G. Tenenbaum, Entiers friables : inégalité de Turán–Kubilius et applications, *Invent. Math.* **159** (2005), 531–588.

[4] N.G. de Bruijn, On the number of positive integers $\leqslant x$ and free of prime factors $> y$, I, II, *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A* **54** (1951), 50–60 ; **69** (1966), 239–247.

[5] H.G. Diamond & H. Halberstam, The combinatorial sieve, in : *Number Theory*, Proc. 4th Matsci. Conf. Ootacamund/India 1984, *Lect. Notes Math.* **1122** (1985), 63–73.

[6] E. Fouvry & G. Tenenbaum, Entiers sans grand facteur premier en progressions arithmétiques, *Proc. London Math. Soc.* (3) **63** (1991), 449–494.

[7] E. Fouvry & G. Tenenbaum, Répartition statistique des entiers sans grand facteur premier dans les progressions arithmétiques, *Proc. London Math. Soc.* (3) **72** (1996), 481-514.

[8] J.B. Friedlander, Integers free from large and small primes, *Proc. London Math. Soc. (3)* **33** (1976), n° 3, 565–576.

[9] J.B. Friedlander & A. Granville, Smoothing « smooth » numbers, in : R. C. Vaughan (éd.), *Theory and applications of numbers without large prime factors, Phil. Trans. R. Soc. London* A **345** (1993), n° 1676, 339–347.

[10] A. Granville, Integers, without large prime factors, in arithmetic progressions. II, in : R. C. Vaughan (éd.), *Theory and applications of numbers without large prime factors, Phil. Trans. R. Soc. London* A **345** (1993), n° 1676, 349–362.

[11] P.X. Gallagher, A large sieve density estimate near $\sigma = 1$, *Inventiones math.* **11** (1970), 329–339.

[12] D. Hensley, A property of the counting function of integers with no large prime factors, *J. Number Theory* **22** (1986), n° 1, 46–74.

[13] A. Hildebrand, Integers free of large prime factors in short intervals, *Quart. J. Math. Oxford* (2) **36** (1985), 57–69.

[14] A. Hildebrand, On the number of positive integers $\leqslant x$ and free of prime factors $> y$, *J. Number Theory* **22** (1986), 265–290.

[15] A. Hildebrand, On the local behaviour of $\Psi(x, y)$, *Trans. Amer. Math. Soc.* **295** (1986), 729–751.

[16] A. Hildebrand & G. Tenenbaum, On integers free of large prime factors, *Trans. Amer. Math. Soc.* **296** (1986), 265–290.

[17] A. Hildebrand & G. Tenenbaum, On a class of differential–difference equations arising in number theory, *Journal d'analyse mathématique*, Vol. 61 (1993), 145–179.

[18] A. Ivić, On some estimates involving the number of prime divisor of an integers, *Acta Arith.* **29**, (1987), 21–33.

[19] A. Ivić & G. Tenenbaum, Local densities over integers free of large prime factors, *Quart. J. Math. (Oxford),* (2) **37** (1986), 401–417.

[20] H.L. Montgomery, *Ten lectures on the interface between analytic number theory and harmonic analysis*, Conference board of the mathematical sciences 84, American Mathematical Society, 1994.

[21] H.L. Montgomery & R.C. Vaughan, Mean values of multiplicative functions, *Period. Math. Hungar.* **43** (2001), n° 1-2, 199–214.

[22] A. Rényi, A new proof of a theorem of Delange, *Publ. Math. Debrecen* **12** (1965), 323–329.

[23] É. Saias, Entiers sans grand ni petit facteur premier. III, *Acta Arith.* **71** (1995), n° 4, 351–379.

[24] E. Scourfield, On some sums involving the largest prime divisor of n, *Acta Arith.* **59** (1991), n° 4, 339–363.

[25] E. Scourfield, Comparison of two dissimilar sums involving the largest prime factor of an integer, in : B.C. Berndt *et al.* éds., *Analytic number theory*, Proceedings of a conference held in honor of Heini Halberstam (Allerton Park, IL, 1995), Vol. 2, *Prog. Math.* 139 (1996), 723–735, Birkhäuser Boston, Boston, MA.

[26] E. Scourfield, On some sums involving the largest prime divisor of n, II, *Acta Arith.* **98** (2001), n° 4, 313–343.

[27] H. Smida, Sur les puissances de convolution de la fonction de Dickman, *Acta Arith.* **59**, *n° 2* (1991), 123–143.

[28] G. Tenenbaum, La méthode du col en Théorie Analytique des Nombres, *Séminaire de Théorie des nombres, Paris 1985-86, Prog. Math.* 75 (1988), 411–441.

[29] G. Tenenbaum, Cribler les entiers sans grand facteur premier, in : R. C. Vaughan (éd.), *Theory and applications of numbers without large prime factors, Phil. Trans. R. Soc. London* A **345** (1993), 377–384.

[30] G. Tenenbaum, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, Cours spécialisés, n° 1, Société Mathématique de France (1995), xv + 457 pp.

[31] G. Tenenbaum, Crible d'Ératosthène et modèle de Kubilius, in : K. Győry, H. Iwaniec, J. Urbanowicz (éds.), *Number Theory in Progress*, Proceedings of the conference in honor of Andrzej Schinzel, Zakopane, Poland 1997, 1099–1129, Walter de Gruyter, Berlin, New York, 1999.

[32] G. Tenenbaum & J. Wu, *Exercices corrigés de théorie analytique et probabiliste des nombres*, Cours spécialisés, n° 2, Société Mathématique de France 1996.

[33] E.C. Titchmarsh, *The theory of the Riemann zeta-function*, seconde édition, révisée par D. R. Heath-Brown, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1986.

[34] T.Z. Xuan, Integers free with no large prime factors, *Acta Arith.* **69**, n° 4 (1995), 303–327.

Régis de la Bretèche
École Normale Supérieure
Département de Mathématiques et Applications
45, rue d'Ulm
75230 Paris cedex 05
France

Gérald Tenenbaum
Institut Élie Cartan
Université de Nancy 1
BP 239
54506 Vandœuvre Cedex
France