

FACTEURS PREMIERS DE SOMMES D'ENTIERS

GÉRALD TENENBAUM

(Communicated by Williams Adams)

ABSTRACT. Let $\Omega(n)$ denote the total number of prime factors of the positive integer n , and set for real x , α , and integer $k \geq 1$,

$$\pi_k(x) = \sum_{\substack{n \leq x \\ \Omega(n)=k}} 1, \quad \pi_k(x, \alpha) = \sum_{\substack{n \leq x \\ \Omega(n)=k}} e(\alpha n),$$

$$E(x, \alpha) = x^{-1} \sum_{n \leq x} e(\alpha n),$$

where $e(t) := \exp(2\pi it)$. We establish a best possible “independence” result of the type

$$\pi_k(x, \alpha) / \pi_k(x) = E(x, \alpha) + O(\delta_k(x))$$

which is valid uniformly in x , k , α , and where the error $\delta_k(x)$ tends to 0 as $x \rightarrow +\infty$, if, and only if, $k \sim \log \log x$. As an application we prove a recent conjecture of Erdős, Maier, and Sárközy concerning the remainder in their Erdős-Kac theorem for sum-sets.

1. INTRODUCTION ET ÉNONCÉ DES RÉSULTATS

De nombreuses questions d'arithmétique se posent en termes d'indépendance entre les structures additive et multiplicative de l'ensemble des entiers. On peut, par exemple, interpréter la conjecture de Goldbach comme l'affirmation que la suite des nombres premiers (de nature éminemment multiplicative!) se comporte, vis à vis de l'addition, comme une suite “au hasard” de même ordre de croissance.

Une mesure efficace de cette indépendance est fournie par l'étude de la valeur moyenne du produit d'un “caractère additif”—c'est-à-dire une exponentielle $e(\alpha n) := \exp\{2i\pi\alpha n\}$ —par un “caractère multiplicatif”—c'est-à-dire une fonction multiplicative. Le théorème de Daboussi ([2]; voir aussi [8]) est à cet égard remarquable: pour tout irrationnel α et toute fonction multiplicative f de module n'excédant pas 1 (cf. [3,4] pour des extensions de cette condition) on a

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x^{-1} \sum_{n \leq x} f(n) e(\alpha n) = 0.$$

Received by the editors January 11, 1988.
 1980 *Mathematics Subject Classification* (1985 Revision). Primary 11N25, 11N60; Secondary 11P55.

Posons

$$E(x, \alpha) := x^{-1} \sum_{n \leq x} e(\alpha n),$$

$$M(x, f) = x^{-1} \sum_{n \leq x} f(n).$$

On peut encore écrire (1) sous la forme

$$(2) \quad M(x, f \cdot e(\alpha \cdot)) = M(x, f)E(x, \alpha) + o(1)$$

et il serait intéressant d'affiner le "terme d'erreur" de cette estimation. Quelles sont, par exemple, les fonctions multiplicatives f pour lesquelles on a

$$M(x, f \cdot e(\alpha \cdot)) = o(M(x, f))$$

pour tout α irrationnel?

Une approche légèrement différente, mais en fait équivalente, de ce type de problèmes consiste à remplacer f par la fonction caractéristique (au sens ensembliste) d'une suite d'entiers définie multiplicativement. Il en va ainsi du célèbre théorème de Vinogradov [14] selon lequel

$$(3) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \pi(x)^{-1} \sum_{p \leq x} e(\alpha p) = 0$$

pour tout α irrationnel, où p désigne un nombre premier générique.

Dans [5], Dupain, Hall et l'auteur donnent une généralisation de (3) aux nombres ayant exactement k facteurs premiers. Plus précisément, désignons par $\Omega(n)$ (resp. $\omega(n)$) le nombre des facteurs premiers de n comptés avec (resp. sans) leur ordre de multiplicité, et posons

$$\pi_k(x) := |\{n : n \leq x, \Omega(n) = k\}|, \quad \pi_k(x, \alpha) = \sum_{\substack{n \leq x \\ \Omega(n) = k}} e(\alpha n).$$

Alors le résultat suivant est une conséquence immédiate (et affaiblie) du Théorème 4 de [5].

Théorème A (Dupain, Hall et Tenenbaum). *Soient $x \geq 2$, $0 < \delta < 1$, et $Q := x/(\log x)^{10}$. Pour tout nombre réel α et tous entiers a, q, k tels que $(a, q) = 1$, $1 \leq q \leq Q$, $|\alpha - a/q| \leq 1/qQ$, $2 \leq k \leq (2 - \delta) \log_2 x$, on a*

$$(4) \quad \pi_k(x, \alpha) / \pi_k(x) \ll_{\delta} (\log_3 x / \log_2 x) + q^{-\delta/2}.$$

Ici et dans la suite \log_j désigne la j -ième itérée de la fonction logarithme. Ainsi qu'il est spécifié dans [5], le Théorème A reste valable lorsqu'on remplace, dans les définitions de $\pi_k(x)$ et $\pi_k(x, \alpha)$, $\Omega(n)$ par $\omega(n)$. De plus l'hypothèse concernant k peut alors être remplacée par $2 \leq k \leq C \log_2 x$, où C est une constante absolue arbitraire, et l'exposant de q dans (4) peut être choisi égal à $\delta - 1$.

Nous nous proposons de donner ici une version de type "indépendance", analogue à (2), de ce résultat, avec un terme reste explicite. Notre motivation

initiale est le Corollaire 2 qui fournit une amélioration optimale d'un théorème récent de Erdős, Maier et Sarközy [7]—cf. *infra*.

Nous énonçons nos résultats pour la fonction $\Omega(n)$, contrairement à ceux de [7] qui sont dévolus à la fonction $\omega(n)$. Notre choix s'explique par le fait que nous faisons appel pour la démonstration à certaines estimations (telle (4)) qui ne sont explicitement prouvées dans la littérature que pour $\Omega(n)$. Cependant ces estimations possèdent toutes des analogues immédiats relatifs à ω , dont les démonstrations n'introduisent aucune difficulté nouvelle. Partant, tous nos énoncés sont valables sans changement lorsqu'on y remplace Ω par ω .

Théorème. *On a uniformément pour $x \geq 1$, $k \geq 1$, $\alpha \in \mathbf{R}$,*

$$(5) \quad \pi_k(x, \alpha) = \pi_k(x) \{E(x, \alpha) + O(\delta_k(x))\}$$

avec

$$(6) \quad \delta_k(x) := 1/\sqrt{\log_2 x} + |k - \log_2 x|/(k + \log_2 x).$$

La relation d'indépendance (5) n'est non triviale que lorsque $k \sim \log_2 x$. Cette limitation du résultat est en fait nécessaire. Comme nous le montrerons plus loin, on a uniformément pour $x \geq 2$, $k \geq 1$, $2^k = o(x)$,

$$(7) \quad \left| \pi_k \left(x, \frac{1}{2} \right) - \pi_k(x) E \left(x, \frac{1}{2} \right) \right| \gg \pi_k(x) (|k - \log_2 x| + O(1)) / (k + \log_2 x).$$

On peut voir une explication heuristique de ce phénomène dans le fait que la probabilité de l'événement "conditionnant" $\{\Omega(n) = k\}$ est maximale au voisinage de $k = \log_2 x$.

Ces questions d'indépendance structurelle peuvent également être abordées sous l'angle des propriétés arithmétiques de sommes d'ensembles

$$\mathcal{A} + \mathcal{B} = \{a + b : a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B}\}.$$

Ce problème très général a suscité de nombreux travaux récents, dont les sujets spécifiques et les méthodes d'approche sont variés—cf. [7] pour des références bibliographiques.

Lorsque \mathcal{A} et \mathcal{B} sont deux ensembles finis de nombres entiers, nous désignons par *somme directe* de \mathcal{A} et \mathcal{B} , et nous notons $\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$, la suite finie d'entiers dont les éléments sont ceux de $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ mais où chaque terme apparaît autant de fois qu'il est représentable sous la forme $a + b$, $a \in \mathcal{A}$, $b \in \mathcal{B}$. On a donc

$$|\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}| = |\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}|$$

où $|\mathcal{P}|$ désigne le cardinal de l'ensemble \mathcal{P} .

Le résultat suivant découle facilement de notre théorème.

Corollaire 1. *Soient \mathcal{A} et \mathcal{B} deux sous-ensembles finis non vides de $[1, x] \cap \mathbf{N}$. Alors on a uniformément pour $x \geq 3$, $k \geq 1$,*

$$(8) \quad (|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}|)^{-1} \sum_{\substack{n \in \mathcal{A} \oplus \mathcal{B} \\ \Omega(n)=k}} 1 = x^{-1} \pi_k(x) \left\{ 1 + O \left(\frac{x \delta_k(x)}{\sqrt{|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}|}} \right) \right\}.$$

Par sommation sur k , nous pouvons déduire l'énoncé "global" correspondant. Comme c'est l'usage, nous désignons par $\Phi(u) = (1/\sqrt{2\pi}) \int_{-\infty}^u e^{-t^2/2} dt$ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

Corollaire 2. *Sous les hypothèses précédentes, on a uniformément pour $x \geq 3$, $t \in \mathbf{R}^+$*

$$(9) \quad (|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}|)^{-1} \sum_{\substack{n \in \mathcal{A} \oplus \mathcal{B} \\ \Omega(n) \leq t}} 1 = \Phi\left(\frac{t - \log_2 x}{\sqrt{\log_2 x}}\right) + O\left(\frac{x}{\sqrt{|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}| \cdot \log_2 x}}\right).$$

Ce résultat généralise le théorème d'Erdős-Kac qui correspond au cas $\mathcal{A} = \mathcal{B} = \{n: n \leq x\}$. Le terme d'erreur est optimal, dans le sens où le facteur $(\log_2 x)^{-1/2}$ qui y apparaît ne peut être remplacé par aucune fonction tendant plus vite vers 0. La validité de (9) a été conjecturée par Erdős, Maier et Sarközy dans [7] où cette formule est établie avec un facteur $(\log_2 x)^{-1/4}$ au lieu de $(\log_2 x)^{-1/2}$ dans le terme reste.

La distribution des valeurs de $\Omega(n)$, $n \in \mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$, est donc approximativement gaussienne, de moyenne et de variance $\log_2 x$, tant que

$$(10) \quad \frac{|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}|}{x^2} \log_2 x \rightarrow \infty.$$

Erdős, Maier et Sarközy montrent dans [7] que le facteur $\log_2 x$ de cette condition ne peut être remplacé par $\exp\{\varepsilon \sqrt{\log_2 x \log_3 x}\}$, quel que soit $\varepsilon > 0$. Il serait intéressant de déterminer précisément dans quelle mesure on peut affaiblir (10)

La démonstration de [7] repose sur la méthode du cercle de Hardy et Littlewood. Ainsi que le mentionnent les auteurs eux-mêmes, cela conduit à des calculs analogues à ceux de Vinogradov dans la preuve du théorème des trois nombres premiers—ou de l'évaluation (3). Le point de vue adopté dans [7] est essentiellement global, au sens où le but recherché est l'extension du théorème d'Erdős-Kac, et non celui de Sathé-Selberg [11, 12] concernant les lois locales de la répartition de $\Omega(n)$ ou $\omega(n)$. Il nous a paru intéressant de poursuivre dans cette direction l'étude de [7]. Notre méthode, qui repose sur la considération des sommes

$$\sum_{n \leq x} e(\alpha n) z^{\Omega(n)} \quad (\alpha \in \mathbf{R}, z \in \mathbf{C})$$

est moins difficile techniquement. Elle repose essentiellement sur une évaluation de type "Siegel-Walfisz" pour les quantités

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv a \pmod{q}}} z^{\Omega(n)}$$

qui est prouvée dans [5] (Théorème 3).

Nous terminons cette section par la preuve de la relation (7) et des corollaires.

Rappelons d'abord la formule de Selberg [12]

$$(11) \quad \pi_k(x) = F \left(\frac{k-1}{\log_2 x} \right) \frac{x}{\log x} \frac{(\log_2 x)^{k-1}}{(k-1)!} \left(1 + O_\delta \left(\frac{1}{\log_2 x} \right) \right)$$

valable uniformément pour $x \geq 3$, $0 < \delta < 1$, $1 \leq k \leq (2 - \delta) \log_2 x$, avec

$$(12) \quad F(z) := \frac{1}{\Gamma(z+1)} \prod_p \left(1 - \frac{z}{p} \right)^{-1} \left(1 - \frac{1}{p} \right)^z \quad (|z| < 2).$$

Nicolas [9] a donné une formule asymptotique pour $\pi_k(x)$ lorsque $k \geq (2 + \delta) \log_2 x$, et Balazard [1] a unifié l'étude en fournissant une évaluation valable sans restriction sur k . Il découle en particulier de ses résultats que

$$(13) \quad \pi_{k-1}(x)/\pi_k(x) \sim \min(2, k/\log_2 x)$$

lorsque $(2 - \delta) \log_2 x \leq k$, $2^k = o(x)$.

Pour établir (7), on remarque que $E(x, 1/2) \ll 1/x$, et que

$$\pi_k \left(x, \frac{1}{2} \right) = 2\pi_{k-1}(x/2) - \pi_k(x).$$

Ainsi (7) découle immédiatement de (11) et (13).

Le corollaire 1 se déduit du théorème selon le procédé décrit dans [7]. On peut supposer $k \leq (3/2) \log_2 x$, puisque $\delta_k(x) \gg 1$ dans le cas contraire. Posons

$$A(\alpha) := \sum_{a \in \mathcal{A}} \mathbf{e}(\alpha a), \quad B(\alpha) := \sum_{b \in \mathcal{B}} \mathbf{e}(\alpha b).$$

Alors on a

$$(14) \quad 2x \int_0^1 A(\alpha) B(\alpha) E(2x, \alpha) d\alpha = |\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}|$$

et le membre de gauche de (8) vaut

$$\begin{aligned} & (|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}|)^{-1} \int_0^1 A(\alpha) B(\alpha) \pi_k(2x, \alpha) d\alpha \\ &= (2x)^{-1} \pi_k(2x) + O \left(|\mathcal{A}|^{-1} |\mathcal{B}|^{-1} \pi_k(2x) \delta_k(x) \int_0^1 |A(\alpha) B(\alpha)| d\alpha \right) \end{aligned}$$

d'après (5) et (14). Par (11), le terme principal vaut

$$x^{-1} \pi_k(x) (1 + O(1/\log_2 x)).$$

On majore l'intégrale en α dans le terme reste par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} \int_0^1 |A(\alpha) B(\alpha)| d\alpha &\leq \left(\int_0^1 |A(\alpha)|^2 d\alpha \cdot \int_0^1 |B(\alpha)|^2 d\alpha \right)^{1/2} \\ &= \sqrt{|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}|}. \end{aligned}$$

Cela implique bien l'estimation souhaitée (8).

On obtient le corollaire 2 en sommant (8) pour $k \leq t$. La contribution des termes principaux est égale à

$$\Phi \left(\frac{t - \log_2 x}{\sqrt{\log_2 x}} \right) + O \left(\frac{1}{\sqrt{\log_2 x}} \right)$$

d'après le théorème d'Erdős-Kac avec reste—cf. Rényi et Turán [10]. La contribution des termes d'erreur est

$$\ll (|\mathcal{A}| \cdot |\mathcal{B}|)^{-1/2} S$$

avec

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \pi_k(x) \delta_k(x) \leq \frac{x}{\sqrt{\log_2 x}} + \frac{1}{\log_2 x} \sum_{n \leq x} |\Omega(n) - \log_2 x|.$$

D'après l'inégalité de Turán-Kubilius, la dernière somme n'excède pas

$$\left(x \cdot \sum_{n \leq x} (\Omega(n) - \log_2 x)^2 \right)^{1/2} \ll x (\log_2 x)^{1/2}.$$

Cela achève la démonstration du corollaire 2.

2. PREUVE DU THÉORÈME

Considérons le polynôme en z

$$T(x; z, \alpha) := \sum_{n \leq x} e(\alpha n) z^{\Omega(n)}$$

dont le coefficient de z^k est précisément $\pi_k(x, \alpha)$. Le résultat suivant est un cas particulier du Lemme 4 de [5].

Lemme 1. Soient $0 < \delta < 1$, $|z| \leq 2 - \delta$, $x \geq 2$, $b > 0$, et a, q, t des entiers tels que $(a, q) = 1$, $1 \leq q \leq (\log x)^b$, $t \geq 1$. On a

$$(15) \quad T(x; z, a/q) = x \sum_{j=1}^t \tau_j(z, q) (\log x)^{z-j} + O_{\delta, t, b}(x (\log x)^{z-t-1} (\log_2 2q)^{t+4})$$

où $\tau_j(z, q)$ est, pour chaque j , une fonction holomorphe de z dans le disque $|z| < 2$ et satisfait

$$(16) \quad \tau_j(z, q) \ll_{\delta, j} (\log_2 q)^{j+3} \quad (|z| \leq 2 - \delta).$$

De plus, on a

$$(17) \quad \tau_1(z, q) = F(z) z^{\Omega(q) - \omega(q) + 1} (z - 1)^{\omega(q)} \varphi(q)^{-1}.$$

Lemme 2. Soit δ , $0 < \delta < 1$. Pour $|z| \leq 2 - \delta$, $x \geq 2$, $\alpha \in \mathbf{R}$, on a

$$(18) \quad \left| \frac{T(x; z, \alpha)}{T(x; z, 0)} - \frac{T(x; 1, \alpha)}{x} \right| \ll_{\delta} \frac{1 + x \|\alpha\|}{\log x}$$

où $\|\alpha\|$ désigne la distance de α à l'ensemble des entiers.

Démonstration. Comme le membre de gauche de (18) est invariant lorsque l'on change α en $\pm(\alpha - m)$, $m \in \mathbf{Z}$, nous pouvons supposer que $\alpha = \|\alpha\|$.

Appliquée avec $a = 0$, $q = 1$, $t = 1$, la formule (15) fournit le résultat classique de Selberg [12]

$$(19) \quad T(x; z, 0) = x(\log x)^{z-1} \{zF(z) + O_\delta(1/\log x)\}.$$

On a

$$T(x; z, \alpha) = \int_{1^-}^x \mathbf{e}(\alpha u) dT(u; z, 0), \quad T(x; 1, \alpha) = \int_{1^-}^x \mathbf{e}(\alpha u) d[u]$$

où $[u]$ désigne la partie entière de u . Nous pouvons donc écrire

$$(20) \quad \begin{aligned} & T(x; z, \alpha) - x^{-1}T(x; 1, \alpha)T(x; z, 0) \\ &= \int_{1^-}^x \mathbf{e}(\alpha u) d \left\{ T(u; z, 0) - \frac{[u]}{x} T(x; z, 0) \right\} \\ &= zF(z) \int_{1^-}^x \mathbf{e}(\alpha u) dH(u) + \int_{1^-}^x \mathbf{e}(\alpha u) dJ(u) \end{aligned}$$

où l'on a posé

$$H(u) := u(\log 2u)^{z-1} - [u](\log 2u)^{z-1}$$

et où $J(u)$ est une fonction à variation bornée telle que

$$J(u) \ll u(\log 2u)^{z-2}.$$

Une intégration par parties suffit à évaluer l'intégrale relative à H . Il vient

$$\begin{aligned} \int_{1^-}^x \mathbf{e}(\alpha u) dH(u) &= \mathbf{e}(\alpha x)H(x) - \mathbf{e}(\alpha)H(1^-) - 2i\pi\|\alpha\| \int_1^x H(u)\mathbf{e}(\alpha u) du \\ &\ll 1 + |H(x)| + \|\alpha\| \int_1^x |H(u)| du. \end{aligned}$$

Or on a

$$H(x) \ll (\log x)^{z-1}$$

et

$$H(u) = (z-1)u \int_u^x (\log 2v)^{z-2} \frac{dv}{v} + O((\log x)^{z-1}),$$

d'où

$$\begin{aligned} \int_1^x |H(u)| du &\ll \int_1^x (\log 2v)^{\operatorname{Re} z-2} \left(\int_1^v u du \right) \frac{dv}{v} + x(\log x)^{\operatorname{Re} z-1} \\ &\ll x^2 (\log x)^{z-2}. \end{aligned}$$

Le premier terme du membre de gauche de (20) est donc

$$\ll_\delta \|\alpha\| x^2 (\log x)^{z-2}.$$

Le second vaut

$$\begin{aligned}
 & [e(\alpha u)J(u)]_1^x - 2i\pi\alpha \int_1^x e(\alpha u)J(u) du \\
 & \ll x(\log x)^{\operatorname{Re} z-2} + \|\alpha\| \int_1^x u(\log 2u)^{\operatorname{Re} z-2} du \\
 & \ll (1 + \|\alpha\|x)x(\log x)^{z-2}.
 \end{aligned}$$

Compte tenu de l'estimation

$$T(x; z, 0) \gg_\delta x(\log x)^{z-1},$$

qui découle de (19), cela achève la démonstration du Lemme 2.

Nous sommes maintenant en mesure d'entreprendre la phase finale de la démonstration de notre théorème.

Nous pouvons supposer $|k - \log_2 x| \leq (1/2)\log_2 x$ puisque le résultat est trivial dans le cas contraire.

Lorsque α satisfait à l'inégalité

$$(21) \quad \|\alpha\|x < \sqrt{\log x},$$

on obtient grâce à (18) et (19), puisque $E(x, \alpha) = x^{-1}T(x; 1, \alpha)$,

$$\begin{aligned}
 \pi_k(x, \alpha) - E(x, \alpha)\pi_k(x) &= \frac{1}{2i\pi} \oint (T(x; z, \alpha) - E(x, \alpha)T(x; z, 0)) \frac{dz}{z^{k+1}} \\
 &\ll \frac{xr^{1-k}}{(\log x)^{3/2}} \int_{-\pi}^{\pi} (\log x)^{r \cos \theta} d\theta
 \end{aligned}$$

où l'intégrale de Cauchy est prise sur le cercle $|z| = r < 2$. Nous choisissons $r = (k - 1)/\log_2 x$. La dernière expression est alors

$$\ll \frac{x}{(\log x)^{3/2}} \frac{(\log_2 x)^{k-1}}{(k-1)!} \ll \frac{\pi_k(x)}{\sqrt{\log x}}$$

où la seconde majoration découle de (11). Cela établit l'estimation souhaitée (5) (avec beaucoup de marge !) sous l'hypothèse supplémentaire (21).

Supposons désormais que (21) n'est pas réalisée. Alors $E(x, \alpha) \ll 1/\|\alpha\|x \ll 1/\sqrt{\log x}$, et nous pouvons nous contenter d'établir

$$(22) \quad \pi_k(x, \alpha)/\pi_k(x) \ll \delta_k(x).$$

Soit $Q := x/(\log x)^{10}$. D'après le théorème de Dirichlet, il existe un entier q , $1 \leq q \leq Q$, tel que $\|q\alpha\| \leq 1/Q$. Nous distinguons deux cas selon que l'on peut ou non choisir $q > 1$.

Plaçons-nous d'abord dans l'hypothèse où $q \geq 2$. Si $q \geq \log x$, le Théorème A, appliqué avec $\delta = 1/2$, fournit l'estimation requise. Si $2 \leq q \leq \log x$, nous pouvons faire appel au Lemme 1 pour évaluer $T(x; z, a/q)$ où a est tel que $\|q\alpha\| = |q\alpha - a|$. Nous en déduisons une majoration de $|T(x; z, \alpha)|$ par sommation d'Abel, puis de $\pi_k(x, \alpha)$ par la formule de Cauchy.

D'après (15), nous avons pour chaque $t \geq 1$

$$\begin{aligned} T(x; z, \alpha) &= \int_{1^-}^x e\left(\left(\alpha - \frac{a}{q}\right)u\right) dT\left(u; z, \frac{a}{q}\right) \\ (23) \quad &= \sum_{j=1}^t \tau_j(z, q) \int_2^x e\left(\left(\alpha - \frac{a}{q}\right)u\right) d\{u(\log u)^{z-j}\} \\ &\quad + \int_{1^-}^x e\left(\left(\alpha - \frac{a}{q}\right)u\right) dR(u) \end{aligned}$$

où R est une fonction à variation bornée telle que

$$R(u) \ll_t x(\log 2x)^{z-t-1} (\log_3 16x)^{t+4}.$$

L'intégrale relative à R possède un module n'excédant pas

$$\begin{aligned} (24) \quad &|R(x)| + 2\pi q^{-1} \|q\alpha\| \int_1^x |R(u)| du \\ &\ll_t (1 + x/Q \log x) x(\log x)^{z-t+1} \\ &\ll x(\log x)^{z-2} \end{aligned}$$

pour le choix $t = 12$. Comme on a pour $w \in \mathbf{C}$

$$|d\{u(\log u)^w\}| \ll_w (\log u)^{\operatorname{Re} w} du \quad (u \geq 2)$$

on déduit donc ce qui précède

$$\begin{aligned} T(x; z, \alpha) &\ll x(\log x)^{z-1} \left\{ |\tau_1(z, q)| + \sum_{j=2}^{12} (1 + |\tau_j(z, q)|) (\log x)^{1-j} \right\} \\ &\ll x(\log x)^{z-1} \{ |z-1|^{\omega(q)} + (\log x)^{-1/2} \}, \end{aligned}$$

d'après (16) et (17). C'est ici que nous utilisons l'hypothèse $q \geq 2$, qui implique $\omega(q) \geq 1$. En évaluant l'intégrale de Cauchy sur le cercle $|z| = r = (k-1)/\log_2 x$, la majoration précédente permet d'écrire

$$\pi_k(x, \alpha) \ll \frac{xr^{1-k}}{\log x} \int_{-\pi}^{\pi} \{|re^{i\theta} - 1| + (\log x)^{-1/2}\} e^{k \cos \theta} d\theta.$$

En utilisant les inégalités $|re^{i\theta} - 1| \leq |r-1| + 2|\theta|$ et $\cos \theta \geq 1 - 2\theta^2/\pi^2$, on obtient bien (22).

Il reste à examiner le cas $q = 1$. Nous pouvons supposer que $\alpha = \|\alpha\|$. Nous utilisons encore la formule (23) (avec $a = 0$, $q = 1$) mais nous évaluons les termes principaux par la seconde formule de la moyenne. Posons $y := x/\log x$. On a, lorsque $|z| = r < 2$,

$$|T(y; z, \alpha)| \leq T(y; r, 0) \ll x(\log x)^{r-2}$$

et, par (23) et (24),

$$T(x; z, \alpha) - T(y; z, \alpha) = \sum_{j=1}^{12} \tau_j^*(z) \int_y^x e(\alpha u) (\log u)^{z-j} du + O(x(\log x)^{z-2})$$

où l'on a posé

$$\tau_j^*(z) = \tau_j(z, 1) + (z - j + 1)\tau_{j-1}(z, 1) \quad (1 \leq j \leq 12)$$

avec la convention $\tau_0(z, 1) = 0$. Or, on a

$$\int_y^x e(\alpha u)(\log u)^{z-j} du = \int_y^x e(\alpha u + \frac{1}{2\pi} \operatorname{Im} z \cdot \log u) \cdot (\log u)^{\operatorname{Re}(z-j)} du .$$

Lorsque $\|\alpha\|x > \sqrt{\log x}$, la dérivée de l'argument de l'exponentielle complexe est équivalente à $\|\alpha\|$, et l'intégrale relève du *Lemma 4.3* de Titchmarsh [13]. Elle est donc

$$\ll \|\alpha\|^{-1} (\log x)^{z-j} \ll x(\log x)^{z-j-1/2} .$$

En rassemblant les estimations précédentes, nous obtenons

$$T(x; z, \alpha) \ll x(\log x)^{r-3/2} \quad (|z| = r < 2) .$$

La formule de Cauchy pour le cercle $|z| = r = (k - 1)/\log_2 x$ fournit alors

$$\pi_k(x, \alpha) \ll r^{-k} x(\log x)^{r-3/2} \ll \pi_k(x)(\log x)^{-1/3} .$$

Cela établit (22) lorsque $q = 1$ et achève la démonstration.

BIBLIOGRAPHIE

1. M. Balazard, *Sur la répartition des valeurs de certaines fonctions arithmétiques additives*, Thèse, Université de Limoges (1987).
2. H. Daboussi and H. Delange, *Quelques propriétés des fonctions multiplicatives de module au plus égal à 1*, C.R. Acad. Sci. Paris Sér. A, **278** (1974), 657–660.
3. —, *On multiplicative arithmetical functions whose modulus does not exceed one*, J. London Math. Soc. (2) **26** (1982), 245–264.
4. —, *On a class of multiplicative functions*, Acta Sci. Math. **49** (1985), 143–149.
5. Y. Dupain, R. R. Hall et G. Tenenbaum, *Sur l'équirépartition modulo 1 de certaines fonctions de diviseurs*, J. London Math. Soc. (2) **26** (1982), 397–411.
6. P. Erdős et M. Kac, *The Gaussian law of errors in the theory of additive number-theoretic functions*, Amer. J. Math. **62** (1940), 738–742.
7. P. Erdős, H. Maier and A. Sarközy, *On the distribution of the number of prime factors of sums $a + b$* , Trans. Amer. Math. Soc. **302** (1987), 269–280.
8. H. L. Montgomery and R. C. Vaughan, *Exponential sums with multiplicative coefficients*, Invent. Math. **43** (1977), 69–82.
9. J.-L. Nicolas, *Sur la distribution des nombres entiers ayant une quantité fixée de facteurs premiers*, Acta Arith. **44** (1984), 191–200.
10. A. Rényi and P. Turán, *On a theorem of Erdős-Kac*, Acta Arith. **4** (1958), 71–84.
11. L. G. Sathe, *On a problem of Hardy and Ramanujan on the distribution of integers having a given number of prime factors*, J. Indian Math. Soc. **17** (1953), 63–141; **18** (1954), 27–81.
12. A. Selberg, *Note on a paper by L. G. Sathe*, J. Indian Math. Soc. **18** (1954), 83–87.
13. E. C. Titchmarsh, *The theory of the Riemann zeta function*, Oxford (1951).
14. I. M. Vinogradov, *The method of trigonometrical sums in theory of numbers*, Interscience, New York (1954).

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES, UNIVERSITÉ DE NANCY I, B. P. 239, 54506 VANDŒUVRE CEDEX, FRANCE