The Ramanujan Journal **2,** 167-184 (1998)

Entiers lexicographiques

André Stef & Gérald Tenenbaum

À la mémoire de Paul Erdős, pour la grâce et la lumière

Received April 11, 1997 ; accepted January 14, 1998

Abstract. An integer n is called *lexicographic* if the increasing sequence of its divisors, regarded as words on the (finite) alphabet of the prime factors (arranged in increasing size), is ordered lexicographically. This concept easily yields to a new type of multiplicative structure for the exceptional set in the Maier-Tenenbaum theorem on the propinquity of divisors, which settled a well-known conjecture of Erdős. We provide asymptotic formulae for the number of lexicographic integers not exceeding a given limit, as well as for certain arithmetically weighted sums over the same set. These results are subsequently applied to establishing an Erdős-Kac theorem with remainder for the distribution of the number of prime factors over lexicographic integers. This provides quantitative estimates for lexicographical exceptions to Erdos' conjecture that also satisfy the Hardy-Ramanujan theorem.

Keywords : distribution of divisors, Erdős–Kac theorem, Erdős conjecture, distribution of prime factors, distribution of arithmetic functions, sieve.

1991 Mathematics Subject Classification : 11N25, 11N37, 11N64

1. Introduction

Désignons par $\{p_j(n)\}_{j=1}^{\omega(n)}$ la suite croissante des facteurs premiers d'un entier n, par $\nu_j(n)$ l'unique entier ν tel que $p_j(n)^\nu \| n$ $(1 \leqslant j \leqslant \omega(n))$ et posons

$$n_j := \prod_{i<j} p_i(n)^{\nu_i(n)} \qquad (1 \leqslant j \leqslant \omega(n)).$$

De nombreux problèmes de crible s'énoncent en termes de comparaison des tailles respectives de $p_j(n)$ et n_j. Un important résultat d'Erdős [3], précisé ultérieurement par Bovey [2], énonce que

$$\max_{1\leqslant j\leqslant\omega(n)} \frac{\log n_j}{\log p_j(n)} \sim \frac{\log_3 n}{\log_4 n}$$

lorsque n tend vers l'infini en restant dans une suite convenable de densité unité. Si $\{d_j(n)\}_{j=1}^{\tau(n)}$ désigne la suite croissante des diviseurs de n, Tenenbaum a montré dans [9] que l'on a pour tout n

$$\max_{1\leqslant j<\tau(n)} d_{j+1}(n)/d_j(n) = \max_{1\leqslant j\leqslant\omega(n)} p_j(n)/n_j. \tag{1·1}$$

L'étude de la fonction de répartition de cette fonction arithmétique est susceptible de surprenantes applications à des problèmes apparemment disjoints de théorie des nombres, cf. [9], [11].

Nous nous proposons ici d'entreprendre l'étude duale, c'est-à-dire celle de la répartition de la fonction

$$W(n) := \min_{1\leqslant j\leqslant\omega(n)} p_j(n)/n_j. \tag{1·2}$$

Nous convenons que $W(1) = +\infty$ et nous désignons par $\mathcal{L}(y)$ l'ensemble des entiers $n \geqslant 1$ tels que $W(n) > y$.

On sait que l'une des questions centrales dans l'étude de la structure fine des diviseurs d'un entier normal est le conflit entre les deux relations d'ordre naturelles dont on peut munir l'ensemble des $d_j(n)$ (voir en particulier [4], [5], [10]). La structure d'ordre additif est la trace de l'ordre de $\mathbb{Z}$. La structure d'ordre multiplicatif est induite par l'ordre lexicographique, obtenu en associant à chaque diviseur

$$d = \prod_{1\leqslant j\leqslant\omega(n)} p_j(n)^{\alpha_j} \qquad (0 \leqslant \alpha_j \leqslant \nu_j(n))$$

le mot $\alpha_{\omega(n)}\cdots\alpha_1$ de longueur $\omega(n)$.

Notons σ_n la permutation de $\{j : 1 \leqslant j \leqslant \tau(n)\}$ qui transforme l'ordre additif dans l'ordre lexicographique. Il est facile de constater qu'*une condition nécessaire et suffisante pour que σ_n coïncide avec l'identité est que $n \in \mathcal{L}(1)$*. En effet, si $n \notin \mathcal{L}(1)$, il existe un j tel que $p_j = p_j(n) \leqslant n_j$. Puisque $p_j \nmid n_j$, on a en fait $p_j < n_j$. On peut donc écrire $p_j = d_s(n)$, $n_j = d_t(n)$ avec $s < t$. Or $\sigma_n(s) > \sigma_n(t)$ par définition de n_j. Il s'ensuit que σ_n n'est pas l'identité. Réciproquement, pour $n \in \mathcal{L}(1)$, considérons $d_s(n)$ et $d_t(n)$, avec $s < t$. Désignant par j le plus grand indice tel que $d_s(n)$ et $d_t(n)$ aient des valuations $p_j(n)$-adiques distinctes. On peut alors décomposer $d_s(n) = a_s p_j(n)^\beta b$, et $d_t(n) = a_t p_j(n)^\gamma b$ avec $a_s|n_j$, $a_t|n_j$, et $b|n/n_{j+1}$. Comme $n_j < p_j$, on a nécessairement $\beta < \gamma$. Cela implique $\sigma_n(s) < \sigma_n(t)$. Comme s et t sont quelconques, on obtient bien que σ_n coïncide avec l'identité.

Ce critère nous a conduit à désigner $\mathcal{L}(1)$ comme l'*ensemble des entiers lexicographiques*. Une seconde propriété attrayante de cet ensemble d'entiers fait l'objet de l'énoncé suivant.

Théorème 1. *Soit n un nombre entier. On a*

$$W(n) = \min_{1\leqslant j\leqslant\tau(n)} d_{j+1}(n)/d_j(n) \tag{1·3}$$

si, et seulement si, $n \in \mathcal{L}(1)$.

Démonstration. La condition est clairement nécessaire puisque le membre de droite de (1·3) est au moins 1. Montrons qu'elle est suffisante. Soit $j = k$ un indice réalisant le minimum du membre de droite de (1·3). On a $d_{k+1}(n) = p_\ell^{\alpha_\ell}\cdots p_1^{\alpha_1}$ pour un certain indice ℓ, $1 \leqslant \ell \leqslant \omega(n)$, avec $\alpha_\ell \geqslant 1$ et $\alpha_j \geqslant 0$ pour $1 \leqslant j < \ell$. Alors $d_{k+1}(n)|n_{\ell+1}$ et puisque $p_{\ell+1} > n_{\ell+1}$, on a aussi $d_k(n)|n_{\ell+1}$, d'où, pour des exposants $\beta_j \geqslant 0$ convenables, $d_k(n) = p_\ell^{\beta_\ell}\cdots p_1^{\beta_1}$. Soit m le plus petit indice tel que $\alpha_j = \beta_j$ pour $m < j \leqslant \ell$. Comme $d_k(n) \neq d_{k+1}(n)$, on a $m \geqslant 1$. Si $\alpha_m < \beta_m$, alors

$$d_{k+1}(n)/d_k(n) \leqslant n_m/p_m < 1,$$

ce qui est manifestement impossible. Donc $\alpha_m > \beta_m$, et il suit

$$d_{k+1}(n)/d_k(n) \geqslant p_m/n_m. \tag{1·4}$$

Comme $n_m < p_m$, on a en fait égalité dans (1·4). Par définition de k, cela implique

$$p_m/n_m = \min p_j/n_j,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Soit $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ l'ensemble des entiers n tels que

$$\min d_{j+1}(n)/d_j(n) \geqslant 2. \tag{1·5}$$

On a donc $\mathcal{L}(2) \subset \boldsymbol{\mathcal{E}}$, d'après le Théorème 1. Une célèbre conjecture d'Erdős, établie par Maier et Tenenbaum [6], affirme que $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ est de densité nulle, autrement dit

$$E(x) := |\boldsymbol{\mathcal{E}} \cap [1,x]| = o(x) \qquad (x \to \infty).$$

Hall et Tenenbaum ont donné dans [5] l'estimation effective

$$E(x) \ll x(\log_3 x)^{4\beta}/(\log_2 x)^{\beta},$$

avec $\beta = 1 - (1 + \log_2 3)/\log 3 \approx 0,00415$. Stef a amélioré considérablement cette majoration [7] et a obtenu une minoration (peut-être optimale) de $E(x)$. Il montre en fait que l'on a pour une constante positive convenable c

$$x(\log x)^{-\beta+o(1)} \ll E(x) \ll x\mathrm{e}^{-c\sqrt{\log_2 x}}. \tag{1·6}$$

Cet encadrement reflète bien l'état actuel de nos connaissances sur la structure multiplicative des entiers. La majoration est obtenue en montrant que les facteurs premiers satisfont statistiquement à certaines propriétés relatives d'équirépartition, et la valeur explicite de la fonction de x résultante indique le degré d'uniformité auquel les méthodes disponibles permettent de parvenir. La minoration découle d'un principe heuristique plus simple : si le nombre total des quantités distinctes de la forme $\log(d_j(n)/d_k(n))$, qui est normalement « voisin » de $3^{\omega(n)}$, est inférieur à $\log n$, on peut s'attendre à ce que le minimum ne soit pas trop proche de 0. Cette condition est statistiquement réalisée lorsque le nombre total $\omega(n)$ des facteurs premiers de n n'excède pas $(\log_2 n)/\log 3$, ce qui correspond à l'exposant β.

Le fait que ce principe puisse être rendu effectif nous donne un premier renseignement sur la structure de l'ensemble exceptionnel $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ pour la conjecture d'Erdős. Il contient en particulier, pour chaque $\varepsilon > 0$, presque tous les entiers n sans facteur premier $\leqslant \exp(\log x)^{\varepsilon}$ et tels que $\omega(n) < (1-\varepsilon)(\log_2 n)/\log 3$. Cela induit *ipso facto* la question d'exhiber d'autres structures multiplicatives représentatives des entiers de $\boldsymbol{\mathcal{E}}$. Quelle minoration peut-on donner, par exemple, pour le nombre des n de $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ n'excédant pas x et possédant le nombre « normal » de facteurs premiers, soit $\omega(n) \sim \log_2 n$? L'étude de la répartition de la fonction $\omega(n)$ sur les entiers lexicographiques fournit une première réponse.

Il est bien connu que la fonction arithmétique $n \mapsto t^{\omega(n)}$ permet souvent d'opérer un « recentrage exponentiel » (selon l'expression utilisée en théorie des probabilités) d'une somme arithmétique autour d'un ensemble d'entiers ayant une quantité prescrite de facteurs premiers. Nous allons montrer que cette technique fonctionne encore, quoique sous une forme plus sophistiquée, dans l'étude des nombres lexicographiques.

Posons $\mathcal{L}(x,y) := \mathcal{L}(y) \cap [1,x]$. Les motivations exposées plus haut nous conduisent à étudier le comportement asymptotique de la quantité

$$L(x,y;t) := \sum_{n\in\mathcal{L}(x,y)} t^{\omega(n)}. \tag{1·7}$$

Introduisons quelques notations pour énoncer plus commodément notre résultat. Nous posons pour $\delta \in]-\infty, 1[$

$$J(\delta) := \int_0^{1/2} v^{-\delta} \frac{\mathrm{d}v}{1-v}. \tag{1·8}$$

Il est clair que J définit une bijection strictement croissante de $]-\infty, 1[$ sur $]0, +\infty[$. Nous désignons, pour chaque $t > 0$, par $\delta(t)$ l'unique solution de l'équation

$$tJ(\delta) = 1. \tag{1·9}$$

On note que $\delta(t) \geqslant 0$ si, et seulement si, $t \leqslant 1/\log 2$. Enfin, nous définissons $\varrho(t) := 1 - \delta(t)$ et nous introduisons la fonction positive

$$\eta(t) := \min\big(\varrho(t), 1/\varrho(t)^2\big) \qquad (t > 0). \tag{1·10}$$

Théorème 2. *Pour chaque $y \geqslant 1$, il existe une fonction K_y $:]0,\infty[\to]0,\infty[$, de classe $\mathcal{C}^1$, telle que l'on ait*

$$L(x,y;t) = \Big\{K_y(t) + O_T\Big(\frac{(\log_2 x)^2}{(\log x)^{\eta(t)}}\Big)\Big\}\frac{x}{(\log x)^{\delta(t)}} \qquad (x \geqslant 3) \tag{1·11}$$

pour tout $T > 1$ et uniformément dans le domaine $1/T \leqslant t \leqslant T$, $1 \leqslant y \leqslant T$.

Lorsque $t = 1$, on obtient une formule asymptotique pour la fonction de comptage des entiers lexicographiques. On a $\delta(1) \approx 0,2228$.

Posons $L(x,y) := L(x,y;1)$ et

$$G_x(z) := L(x,y)^{-1} \sum_{\substack{n\leqslant x\\ \omega(n)\leqslant z\log_2 x}} 1.$$

Pour $t = \mathrm{e}^{-u/\log_2 x}$, la quantité $L(x,y;t)/L(x,y)$ est la valeur au point u de la transformée de Laplace bilatérale de $G_x(z)$, soit

$$L\big(x,y;\mathrm{e}^{-u/\log_2 x}\big)/L(x,y) = \widehat{G}_x(u) := \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-uz}\,\mathrm{d}G_x(z).$$

En reportant dans (1·11), on obtient que

$$\lim_{x\to\infty} \widehat{F}_x(u) = \mathrm{e}^{u^2/2} \qquad (u \in \mathbb{R}) \tag{1·12}$$

avec $F_x(z) := G_x\big(a + z\sqrt{b/\log_2 x}\big)$, $a := -\delta'(1)$, $b := -\delta'(1) - \delta''(1)$. Cela implique immédiatement une version du théorème d'Erdős-Kac pour les entiers lexicographiques.

En fait, le Théorème 2 fournit une forme effective de (1·12). Pour exploiter ce renseignement supplémentaire, il est nécessaire de disposer d'un théorème d'inversion de Laplace quantitative, par exemple analogue au théorème de Berry-Esseen pour la transformée de Fourier. Le seul résultat de ce type disponible dans la littérature est, à notre connaissance, celui de Alladi [1]. Le théorème suivant, qui affine l'estimation de Alladi, est un cas particulier d'un résultat récent, obtenu par les auteurs [8], d'inversion quantitative pour la transformation de Laplace réelle. Ici et dans tout l'article nous posons

$$\Phi(z) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z} \mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u.$$

Théorème A. *Soit F une fonction de répartition satisfaisant, pour $\varepsilon \in]0,1[$, $\kappa > 0$ et $R > 1$, à*

$$\text{(i)} \qquad \widehat{F}(u) := \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-uz}\,\mathrm{d}F(z) = \mathrm{e}^{u^2/2}\{1 + O(\varepsilon)\} \quad (0 \leqslant u \leqslant \kappa),$$

$$\text{(ii)} \qquad \widehat{F}(u) \ll \mathrm{e}^{u^2/2} \qquad (-R \leqslant u \leqslant R).$$

Alors on a

$$\sup_{z\in\mathbb{R}} |F(z) - \Phi(z)| \ll_\kappa \frac{\log R}{R} + \frac{\log_2(1/\varepsilon)}{\sqrt{\log(1/\varepsilon)}}. \tag{1·13}$$

Le résultat de Alladi, prouvé par une méthode différente, fournissait la borne sensiblement moins précise $\ll_\kappa 1/\sqrt{R} + \big(\log|\log\varepsilon|/|\log\varepsilon|\big)^{1/8}$. Il est à noter, ainsi qu'il est établi dans [8], que la dépendance en ε de (1·13) est optimale, au facteur $\log_2(1/\varepsilon)$ près, dans les conditions de généralité indiquées. La conjonction des Théorèmes 2 et A fournit immédiatement le résultat suivant de type Erdős–Kac effectif, autrement dit de convergence vers la loi de Gauss avec estimation de l'erreur.

Théorème 3. *Soit $T > 1$. On a uniformément pour $1/T \leqslant t \leqslant T$, $1 \leqslant y \leqslant T$, $z \in \mathbb{R}$,*

$$\frac{1}{L(x,y;t)} \sum_{\substack{n\in\mathcal{L}(x,y)\\ \omega(n)\leqslant a(t)\log_2 x + z\sqrt{b(t)\log_2 x}}} t^{\omega(n)} = \Phi(z) + O\Big(\frac{\log_4 x}{\sqrt{\log_3 x}}\Big), \tag{1·14}$$

avec $a(t) = -t\delta'(t)$, $b(t) = -t\delta'(t) - t^2\delta''(t) > 0$.

Compte tenu des restrictions, signalées plus haut, inhérentes à une estimation de type (1·13), le terme d'erreur de (1·14) peut être considéré, au facteur $\log_4 x$ près, comme la limite naturelle d'une méthode fondée sur l'estimation des sommes $L(x; y, t)$ avec t réel.

Il est facile de voir que pour tout n de $\mathcal{L}(1)$, on a $\omega(n) \leqslant \{1/\log 2 + o(1)\} \log_2 n$. En choisissant $t = 1$, on obtient un théorème de Hardy–Ramanujan pour les entiers lexicographiques.

Corollaire 1. *L'ordre normal de la fonction $\omega(n)$ dans la suite $\mathcal{L}(y)$ est $a \log_2 n$ avec $a = -\delta'(1) \approx 0,5624$. Plus précisément, pour tout $y \geqslant 1$ et pour toute fonction $\xi(n) \to \infty$, on a*

$$\sum_{\substack{n\in\mathcal{L}(x,y)\\ |\omega(n)-a\log_2 n|\leqslant\xi(n)\sqrt{\log_2 n}}} 1 \sim L(x,y) \qquad (x\to\infty).$$

Le Théorème 3 permet également d'estimer, pour tout α de $]0, 1/\log 2[$ et à un facteur $(\log x)^{o(1)}$ près, le nombre des entiers de $\mathcal{L}(x, y)$ tels que $\omega(n)$ soit « proche » de $\alpha \log_2 x$.

Théorème 4. *Pour tout α de $]0, 1/\log 2[$, l'équation $t\delta'(t) + \alpha = 0$ possède une unique solution $t = t_\alpha > 0$. Soient $T > 1$, $z > 0$, et (α_0, α_1) tel que $0 < \alpha_0 < \alpha_1 < 1/\log 2$. On a uniformément pour $\alpha_0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_1$, $1 \leqslant y \leqslant T$, $x \geqslant 16$,*

$$\sum_{\substack{n\in\mathcal{L}(x,y)\\ |\omega(n)-\alpha\log_2 x|\leqslant z\sqrt{\log_2 x}}} 1 = \frac{x}{(\log x)^{\mu(\alpha)}}\mathrm{e}^{O(\sqrt{\log_2 x})} \tag{1·15}$$

avec $\mu(\alpha) := \delta(t_\alpha) + \alpha \log t_\alpha$.

Lorsque $\alpha = -\delta'(1)$, la formule (1·14) fournit un résultat plus précis, et en fait une formule asymptotique, pour le membre de gauche de (1·15).

La valeur $\alpha = 1$ est la plus intéressante. On a $\mu(1) \approx 0,687$. Cela fournit une réponse quantitative à la question soulevée plus haut concernant la taille de l'intersection de $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ et de l'ensemble des entiers satisfaisant au théorème de Hardy–Ramanujan : le nombre de ces exceptions atypiques vaut

$$x/(\log x)^{\mu(1)+o(1)}.$$

Nous donnons *infra* une table de valeurs pour les fonctions $\delta(t)$ et $\mu(\alpha)$.

t	$\delta(t)$
0	1
$0,1$	$0,90071$
$0,2$	$0,80495$
$0,3$	$0,71443$
$0,4$	$0,62961$
$0,5$	$0,55037$
$0,6$	$0,47633$
$0,7$	$0,40700$
$0,8$	$0,34192$
$0,9$	$0,28066$
$1,0$	$0,22282$
$1,1$	$0,16807$
$1,2$	$0,11610$
$1,3$	$0,06665$
$1,4$	$0,01949$
$1/\log 2$	0
$1,5$	$-0,02558$
$1,6$	$-0,06874$
$1,7$	$-0,11015$
$1,8$	$-0,14994$
$1,9$	$-0,18824$

t	$\delta(t)$
2	$-0,22515$
3	$-0,53570$
4	$-0,77444$
5	$-0,96893$
6	$-1,13333$
7	$-1,27591$
8	$-1,40189$
9	$-1,51482$
10	$-1,61722$
11	$-1,71091$
12	$-1,79730$
13	$-1,87746$
14	$-1,95226$
15	$-2,02237$
16	$-2,08837$
17	$-2,15072$
18	$-2,20981$
19	$-2,26597$
20	$-2,31948$
$+\infty$	$-\infty$

α	$\mu(\alpha)$	t_α
0	1	$0+$
$0,1$	$0,67048$	$0,10216$
$0,2$	$0,48360$	$0,21641$
$0,3$	$0,35638$	$0,35491$
$0,4$	$0,27370$	$0,53488$
$0,5$	$0,23039$	$0,75538$
$0,56241$	$0,22282$	1
$0,6$	$0,22562$	$1,16154$
$0,7$	$0,26152$	$1,78014$
$0,8$	$0,34325$	$2,92351$
$0,9$	$0,48001$	$5,40823$
$1,0$	$0,68764$	$12,30583$
$1,1$	$0,99475$	$41,34470$
$1,2$	$1,45971$	$328,17996$
$1,3$	$2,23407$	≈ 35185
$1,4$	$4,05733$	$\approx 2.10^{15}$
$1,44$	$8,13613$	
$1/\log 2$	$+\infty$	$+\infty$

Tables.— Valeurs approchées de $\delta(t)$ et $\mu(\alpha)$ à 5.10^{-6} près.

2. Équations fonctionnelles

Dans tout ce qui suit, nous nous donnons un paramètre $T > 1$ et nous supposons

$$1/T \leqslant t \leqslant T, \qquad 1 \leqslant y \leqslant T, \qquad x \geqslant 2. \tag{2·1}$$

Toutes les constantes, implicites ou explicites, peuvent dépendre de T.

Lemme 2.1. *Sous l'hypothèse* (2·1), *on a*

$$L(x,y;t) = 1 + t\sum_{\nu\geqslant 1}\sum_{p^\nu\leqslant x} L\big(\min(x/p^\nu, p/y), y; t\big). \tag{2·2}$$

Démonstration. Un entier $n > 1$ compté dans $\mathcal{L}(x,y)$ s'écrit de manière unique $n = p^\nu m$ avec $p > ym$, $p^\nu m \leqslant x$, $\nu \geqslant 1$, et $m \in \mathcal{L}(y)$. En remarquant que $t^{\omega(n)} = t^{\omega(m)+1}$, on obtient immédiatement (2·2).

Lemme 2.2. *Sous l'hypothèse* (2·1), *on a*

$$L(x,y;t) = t\sum_{\sqrt{xy}<p\leqslant x} L(x/p,y;t) + t\sum_{(xy)^{1/3}<p\leqslant\sqrt{xy}} L(p/y,y;t) + O\big(x^{2/3}(\log x)^{T-1}\big). \tag{2·3}$$

Démonstration. La contribution des nombres premiers $p \leqslant (xy)^{1/3}$ au membre de droite de (2·2) n'excède pas

$$t \sum_{p \leqslant (xy)^{1/3}} \Big[\frac{\log x}{\log p}\Big] L(p/y, y; t).$$

Au vu de l'estimation triviale

$$L(w, y; t) \leqslant \sum_{n \leqslant w} t^{\omega(n)} \ll_T w(\log w)^{t-1} \qquad (w \geqslant 2), \tag{2·4}$$

on obtient que cette contribution est englobée par le terme d'erreur de (2·3).

Lorsque $(xy)^{1/3} < p \leqslant x$, les seules valeurs admissibles de ν dans (2·2) sont $\nu = 1$ et $\nu = 2$. Le terme principal de (2·3) prend en compte le cas $\nu = 1$. La contribution correspondant à $\nu = 2$ n'excède pas

$$\begin{aligned}\sum_{(xy)^{1/3} < p \leqslant \sqrt{xy}} L(x/p^2, y; t) &\ll \sum_{p > (xy)^{1/3}} \frac{x}{p^2} (\log x)^{T-1} \\ &\ll x^{2/3} (\log x)^{T-1},\end{aligned}$$

où nous avons de nouveau fait appel à (2·4).

Lemme 2.3. *Il existe des constantes positives K_1 et K_2, ne dépendant que de T, telles que l'on ait sous l'hypothèse* (2·1)

$$K_1 \frac{x}{(\log x)^{\delta(t)}} \leqslant L(x, y; t) \leqslant K_2 \frac{x}{(\log x)^{\delta(t)}}. \tag{2·5}$$

Démonstration. Soit $r = r(T) = 2^{(1-\delta(1/T))/2} > 1$. Nous établissons par récurrence sur $k \geqslant 1$ qu'il existe des constantes positives A_0^- et A_0^+, ne dépendant que de T, telles que l'on ait, pour $2 \leqslant x \leqslant \exp 2^k$,

$$A_k^- \frac{x}{(\log x)^{\delta(t)}} \leqslant L(x, y; t) \leqslant A_k^+ \frac{x}{(\log x)^{\delta(t)}} \tag{2·6}$$

avec $A_k^\pm := A_0^\pm \exp\big\{ \pm \sum_{\ell=1}^k r^{-\ell} \big\}$. Au vu de l'estimation triviale

$$\frac{x}{\log x} \ll t(\pi(x) - \pi(y))^+ + 1 \leqslant L(x, y; t) \leqslant \sum_{n \leqslant x} t^{\omega(n)} \ll x(\log x)^{T-1},$$

nous pouvons supposer k arbitrairement grand.

Lorsque $\exp 2^k < x \leqslant \exp 2^{k+1}$, l'hypothèse de récurrence permet d'estimer les termes $L(x/p, y; t)$ et $L(p/y, y; t)$ dans (2·3). En notant que $L(x/p, y; t) = 1$ pour

$x/2 < p \leqslant x$, nous obtenons ainsi l'existence d'une constante A, dépendant au plus de T, telle que

$$\begin{aligned} L(x,y;t) \leqslant & \sum_{\sqrt{xy}<p\leqslant x/2} \frac{tA_k^+ x}{p(\log(x/p))^{\delta(t)}} \\ & + \sum_{(xy)^{1/3}<p\leqslant\sqrt{xy}} \frac{tA_k^+ p}{y(\log(p/y))^{\delta(t)}} + A\frac{x}{\log x} \end{aligned} \tag{2·7}$$

et

$$L(x,y;t) \geqslant tA_k^- \sum_{\sqrt{xy}<p\leqslant x/2} \frac{x}{p(\log(x/p))^{\delta(t)}} - Ax^{3/4} \tag{2·8}$$

Le théorème des nombres premiers permet d'estimer les sommes en p de (2·7) et (2·8) par sommation d'Abel. On obtient

$$\sum_{\sqrt{xy}<p\leqslant x/2} \frac{x}{p(\log(x/p))^{\delta(t)}} = \frac{xJ(\delta(t))}{(\log x)^{\delta(t)}} + O\Big(\frac{x}{\log x}\Big) \tag{2·9}$$

et

$$\sum_{(xy)^{1/3}<p\leqslant\sqrt{xy}} \frac{p}{y(\log(p/y))^{\delta(t)}} \ll \frac{x}{(\log x)^{1+\delta(t)}}. \tag{2·10}$$

En reportant dans (2·7) et (2·8) et en notant que $\delta(t) \leqslant \delta(1/T) < 1$, on obtient, avec des constantes convenables $B_1(T)$, $B_2(T)$ et pour $k \geqslant k_0(T)$,

$$L(x,y;t) \leqslant \frac{A_k^+ x}{(\log x)^{\delta(t)}}\big\{tJ(\delta(t)) + B_2(T)2^{-k(1-\delta(1/T))}\big\} \leqslant \frac{A_{k+1}^+ x}{(\log x)^{\delta(t)}},$$

et

$$L(x,y;t) \geqslant \frac{A_k^- x}{(\log x)^{\delta(t)}}\big\{tJ(\delta(t)) - B_1(T)2^{-k(1-\delta(1/T))}\big) \geqslant \frac{A_{k+1}^- x}{(\log x)^{\delta(t)}}$$

puisque $tJ(\delta(t)) = 1$. Cela achève la démonstration du Lemme 2.3.

Lemme 2.4. *On a sous l'hypothèse* (2·1)

$$L(x,y;t) = t\int_{\sqrt{x}}^{x} L(x/u,y;t)\frac{\mathrm{d}u}{\log u} + O\Big(\frac{x}{(\log x)^{1+\delta(t)}}\Big). \tag{2·11}$$

Démonstration. Les relations (2·3) et (2·5) impliquent immédiatement

$$\begin{aligned} L(x,y;t) &= t\sum_{\sqrt{xy}<p\leqslant x} L(x/p,y;t) + O\Big(\frac{x}{(\log x)^{1+\delta(t)}}\Big) \\ &= t\sum_{\sqrt{x}<p\leqslant x} L(x/p,y;t) + O\Big(\frac{x}{(\log x)^{1+\delta(t)}}\Big). \end{aligned}$$

La dernière somme en p vaut

$$\int_{\sqrt{x}}^{x} L(x/u,y;t)\frac{\mathrm{d}u}{\log u}+\int_{\sqrt{x}}^{x} L(x/u,y;t)\,\mathrm{d}R(u),$$

avec $R(u):=\mathrm{li}(u)-\pi(u)\ll u\mathrm{e}^{-2\sqrt{\log u}}$. La seconde intégrale ci-dessus vaut

$$\begin{aligned}\int_{\sqrt{x}}^{x}\int_{1^-}^{x/u}\mathrm{d}L(v,y;t)\,\mathrm{d}R(u)&=\int_{1^-}^{\sqrt{x}}\big\{R(x/v)-R(\sqrt{x})\big\}\,\mathrm{d}L(v,y;t)\\&\ll\int_{1^-}^{\sqrt{x}}\frac{x}{v}\mathrm{e}^{-2\sqrt{\log(x/v)}}|\,\mathrm{d}L(v,y;t)|\\&\ll\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}t^{\omega(n)}\frac{x}{n}\mathrm{e}^{-2\sqrt{\log(x/n)}}\ll x\mathrm{e}^{-\sqrt{\log x}}.\end{aligned}$$

Cela implique bien (2·11).

3. Preuve du Théorème 2

Soit $T>1$ un paramètre fixé une fois pour toutes. Étant donnés y et t satisfaisant (2·1), nous posons

$$\delta:=\delta(t)\quad\text{et}\quad\alpha:=\alpha(t)=\min(1,1-\delta(t)),$$

et nous définissons $\lambda(x)$ par la relation

$$L(x,y;t)=\frac{\lambda(x)\,x}{(\log x)^{\delta}}\qquad(x>1).\tag{3·1}$$

Comme au paragraphe précédent, nous convenons que toutes les constantes, implicites ou explicites, peuvent dépendre de T.

En opérant le changement de variables $u=x^{1-w}$ dans (2·11), il vient

$$\lambda(x)=t\int_0^{1/2}\lambda(x^w)w^{-\delta}\frac{\mathrm{d}w}{1-w}+O\big((\log x)^{-1}\big)\tag{3·2}$$

Le Théorème 2 équivaut à la relation asymptotique

$$\lambda(x)=K_y(t)+O\big((\log x)^{-\eta(t)}\big)\qquad(x\to+\infty),\tag{3·3}$$

où $K_y(t)$ est une fonction continûment dérivable de t. Il est en effet inutile de vérifier la positivité de $K_y(t)$, qui résulte trivialement de la minoration du Lemme 2.3.

Nous allons établir (3·3) en interprétant (3·2) comme une relation de convolution. Cela nécessite un nouveau changement de variable. Posons à cet effet

$$\varphi(z):=\begin{cases}\lambda(\exp\exp z)&(z>0)\\0&(z\leqslant 0)\end{cases}$$

En tenant compte de l'encadrement trivial

$$0 \leqslant \lambda(x) \leqslant (\log x)^{\delta}(1+t) \qquad (1 < x < 3)$$

pour évaluer la contribution à l'intégrale de (3·2) de l'intervalle $0 \leqslant w \leqslant 1/\log x$, on peut réécrire (3·2) sous la forme

$$\varphi(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(z-v)g(v)\,\mathrm{d}v + h(z) \qquad (z \in \mathbb{R}) \tag{3·4}$$

où l'on a posé, notant $\varrho = \varrho(t) := 1 - \delta(t) > 0$,

$$g(v) := \begin{cases} t\mathrm{e}^{-\varrho v}(1-\mathrm{e}^{-v})^{-1} & (v \geqslant \log 2) \\ 0 & (v < \log 2) \end{cases} \tag{3·5}$$

et où $h(z)$ satisfait à

$$h(z) = 0 \quad (z \leqslant 0), \qquad h(z) \ll \mathrm{e}^{-\alpha z} \quad (z > 0). \tag{3·6}$$

Il est à noter que, pour chaque z, $h(z)$ est une fonction polynomiale de t, et que $\partial h(z)/\partial t$ satisfait également la majoration de (3·6).

La solution générale de l'équation de Volterra (3·4) est

$$\varphi(z) = h(z) + \int_0^{+\infty} G(v)h(z-v)\,\mathrm{d}v \tag{3·7}$$

avec

$$G(v) := \sum_{k=1}^{\infty} g^{*k}(v), \tag{3·8}$$

où g^{*k} désigne la k-ème puissance de convolution de g. La série (3·8) ne comporte, pour chaque $v > 0$, qu'un nombre fini de termes puisque

$$g^{*k}(v) = \int_{\mathbb{R}^{k-1}} \prod_{i=1}^{k-1} g(v_i)\, g\big(v - \textstyle\sum_{i=1}^{k-1} v_i\big)\,\mathrm{d}v_1 \cdots \mathrm{d}v_{k-1} \tag{3·9}$$

est nul dès que $k \geqslant v/\log 2$. En particulier, comme $\int_{-\infty}^{+\infty} g(v)\,\mathrm{d}v = 1$ par définition de δ, on voit que

$$G(v) = 0 \quad (v < \log 2), \qquad 0 \leqslant G(v) \leqslant 2tv/\log 2 \quad (v \geqslant \log 2). \tag{3·10}$$

Nous allons étudier $G(v)$ par l'intermédiaire de sa transformée de Laplace

$$\widehat{G}(s) = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-sv} G(v)\,\mathrm{d}v = \frac{\widehat{g}(s)}{1-\widehat{g}(s)}, \tag{3·11}$$

convergente pour $\Re e\, s > 0$, ainsi que l'atteste (3·10). On peut incidemment remarquer que ce dernier renseignement découle aussi de l'inégalité

$$|\widehat{g}(s)| \leqslant \widehat{g}(\sigma) < \widehat{g}(0) = 1 \qquad (s = \sigma + i\tau,\ \sigma > 0)$$

et du théorème de Phragmén-Landau qui stipule que la transformée de Laplace d'une fonction positive ou nulle possède une singularité en son abscisse de convergence.

On a

$$\widehat{g}(s) = t \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^{-s-\varrho-j}}{s+\varrho+j}, \tag{3·12}$$

ce qui fournit un prolongement méromorphe de $\widehat{g}(s)$ au plan complexe tout entier. Le lemme suivant, dont nous différons la démonstration, permet de prolonger holomorphiquement $\widehat{G}(s)$ au demi-plan $\sigma \geqslant -\eta(t)$.

Lemme 3.1. *La quantité $\eta = \eta(t)$ étant définie par* (1·10), *on a $\widehat{g}(s) \neq 1$ pour $\sigma \geqslant -\eta$, $s \neq 0$. De plus, pour chaque $T > 1$, on a*

$$\inf_{\substack{\sigma=-\eta \\ 1/T \leqslant t \leqslant T}} |1 - \widehat{g}(s)| \gg_T 1. \tag{3·13}$$

Admettant momentanément ce résultat, nous sommes en mesure d'établir (3·3). Par la formule d'inversion de Laplace, on peut écrire pour tout $\sigma > 0$

$$G(v) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \widehat{G}(s) \mathrm{e}^{vs}\, \mathrm{d}s. \tag{3·14}$$

Pour $\sigma \geqslant -\varrho$, $s \neq -\varrho$, on déduit de (3·12) que

$$\widehat{g}(s) = ts^{-1} 2^{-\varrho-s} + O\big(t|s|^{-2} 2^{-\varrho-\sigma}\big). \tag{3·15}$$

Cela implique, pour $|\tau|$ assez grand et $\sigma \geqslant -\varrho$, la formule

$$\widehat{G}(s) = \frac{t\, 2^{-s-\varrho}}{i\tau} + O(\tau^{-2}). \tag{3·16}$$

Reportons cette évaluation dans (3·14) et estimons la contribution à l'infini du terme principal par la seconde formule de la moyenne. Nous obtenons, pour le choix $\sigma = 1/v$, et pour toute valeur du paramètre $X > 1$,

$$G(v) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(1/v)-iX}^{(1/v)+iX} \widehat{G}(s) \mathrm{e}^{vs}\, \mathrm{d}s + O\Big(\frac{1}{X}\Big). \tag{3·17}$$

Déplaçons alors le segment d'intégration jusqu'à $\sigma = -\eta$. Le Lemme 3.1 garantit que $s = 0$ est la seule singularité traversée par le segment d'intégration — le pôle de $\widehat{g}(s)$ en $s=-\varrho$ n'étant pas une singularité de $\widehat{G}(s)=\widehat{g}(s)/(1-\widehat{g}(s))$. Comme $\widehat{g}\,'(0)=-\log 2-t\sum_{j=0}^{\infty}2^{-\varrho-j}/(\varrho+j)^2<0$, le résidu de l'intégrande en $s=0$ vaut

$$B:=-1/\widehat{g}\,'(0),$$

et il suit

$$G(v)=B+\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{Z}}\widehat{G}(s)\mathrm{e}^{vs}\,\mathrm{d}s+O\Big(\frac{1}{X}\Big) \tag{3·18}$$

où $\mathcal{Z}$ est la ligne brisée joignant dans cet ordre les points $(1/v)-iX$, $-\eta-iX$, $-\eta+iX$, $(1/v)+iX$. La relation (3·16) permet immédiatement d'estimer la contribution à l'intégrale de (3·18) des segments horizontaux de $\mathcal{Z}$ par $O(1/X)$. Par (3·13) et (3·15), on peut majorer la contribution du segment vertical par

$$\ll\int_{-\eta-iX}^{-\eta+iX}\frac{\mathrm{e}^{-\eta v}}{|s|}|\,\mathrm{d}s|\ll\mathrm{e}^{-\eta v}\log X.$$

En choisissant $X=v_0(T)+v$ avec $v_0(T)$ assez grand, il vient

$$G(v)=B+O(v\mathrm{e}^{-\eta v})\qquad(v\geqslant\log 2). \tag{3·19}$$

Il est maintenant facile de compléter la démonstration de (3·3). En reportant (3·19) dans (3·7), on obtient

$$\begin{aligned}\varphi(z)&=\int_{\log 2}^{z}\big\{B+O(v\mathrm{e}^{-\eta v})\big\}h(z-v)\ \mathrm{d}v+O(\mathrm{e}^{-\alpha z})\\&=B\int_{-\infty}^{+\infty}h(w)\ \mathrm{d}w+O\bigg(\int_{z-\log 2}^{+\infty}|h(w)|\ \mathrm{d}w+\int_{\log 2}^{z}\frac{v\,\mathrm{d}v}{\mathrm{e}^{\eta v}\mathrm{e}^{\alpha(z-v)}}+\mathrm{e}^{-\alpha z}\bigg)\\&=B\int_{-\infty}^{+\infty}h(w)\ \mathrm{d}w+O(z^2\mathrm{e}^{-\eta z}),\end{aligned}$$

où nous avons utilisé le fait que $\eta\leqslant\alpha$. On obtient donc (3·3) avec

$$K_y(t)=B\int_{-\infty}^{+\infty}h(w)\,\mathrm{d}w=-\widehat{h}(0)/\widehat{g}'(0). \tag{3·20}$$

La convergence uniforme de cette intégrale et de sa dérivée par rapport à t implique que $K_y(t)$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de t, dont la dérivée est donc bornée sur $[1/T,T]$.

Il reste à établir le Lemme 3.1. Nous consacrons à cette tâche toute la fin de ce paragraphe.

Nous considérons $\widehat{g}(s)$ avec $s = \sigma + i\tau$, $\sigma \geqslant -\eta$, $1/T \leqslant t \leqslant T$, et nous utilisons des arguments différents selon la taille de τ. Cela nous conduit à considérer les trois domaines suivants, où nous avons posé $\vartheta_0 = \pi/\log 4$, $\vartheta_1 = \pi/\log 2$.

$$
\begin{array}{ll}
(\mathcal{D}_1) & |\tau| \leqslant \vartheta_0, \\
(\mathcal{D}_2) & \vartheta_0 < |\tau| \leqslant \vartheta_1, \\
(\mathcal{D}_3) & |\tau| > \vartheta_1.
\end{array}
$$

Nous allons montrer que l'on a pour $1 \leqslant j \leqslant 3$

$$\widehat{g}(s) \neq 1 \qquad \big(\tau \in \mathcal{D}_j,\ s \neq 0\big) \tag{3·21}$$

et

$$\inf_{\substack{\sigma=-\eta \\ \tau\in\mathcal{D}_j}} |1 - \widehat{g}(s)| \gg_T 1. \tag{3·22}$$

Notre argument est fondé sur la minoration de $|\Im m\,\widehat{g}(s)|$ lorsque $j = 1$, sur la majoration de $\Re e\,\widehat{g}(s)$ lorsque $j = 2$, et sur celle de $|\widehat{g}(s)|$ lorsque $j = 3$. Nous pouvons supposer sans perte de généralité que $\tau \geqslant 0$ car $\widehat{g}(\bar{s}) = \overline{\widehat{g}(s)}$. Nous notons systématiquement

$$\tau_1 := \tau \log 2.$$

La relation (3·12) permet d'écrire

$$\Im m\,\widehat{g}(s) = -t\sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^{-\sigma-\varrho-j}}{|\varrho + s + j|^2}\{\tau\cos\tau_1 + (\varrho + \sigma + j)\sin\tau_1\}. \tag{3·23}$$

Lorsque $0 \leqslant \tau \leqslant \vartheta_0$, on a $0 \leqslant \tau_1 \leqslant \pi/2$ et l'expression entre accolades dans (3·23) est positive ou nulle pour tout j puisque $\sigma + \varrho \geqslant \sigma + \eta \geqslant 0$. Elle est en fait strictement positive si $j \geqslant 1$ et $\tau \neq 0$. De plus, pour $-\eta \leqslant \sigma < 0$, on a

$$\widehat{g}(\sigma) = t\int_{\log 2}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\varrho v - \sigma v}}{1 - \mathrm{e}^{-v}}\,\mathrm{d}v \geqslant 2^{-\sigma}\widehat{g}(0) > 1, \tag{3·24}$$

avec la convention que le membre de gauche doit être interprété comme $+\infty$ lorsque $\sigma = -\varrho$. Cela établit (3·21) pour $j = 1$. De plus, un argument de continuité standard permet de déduire de (3·24) que $|1 - \widehat{g}(s)| \gg_T 1$ pour $\sigma = -\eta$ et $\tau \leqslant \tau_0(T)$, où $\tau_0(T)$ est une constante suffisamment petite. Compte tenu de (3·23), on obtient donc (3·22) dans le cas $j = 1$.

Considérons ensuite le cas $\vartheta_0 < \tau \leqslant \vartheta_1$. Nous observons dans un premier temps que, par (3·12),

$$\Re e\,\widehat{g}(i\tau) = t\sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^{-\varrho-j}}{|\varrho + j + i\tau|}\cos\psi_j$$

avec $\psi_j := \tau_1 + \arctan\{\tau/(\varrho + j)\} \in]\pi/2, 3\pi/2[$. On peut donc écrire

$$\begin{aligned}1 - \Re e\,\widehat{g}(i\tau) \geqslant 1 = \widehat{g}(0) &= t\sum_{j=0}^{\infty}\frac{2^{-\varrho-j}}{\varrho+j}\\ &\geqslant \frac{t2^{-\varrho}}{\max(1,\varrho)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{2^{-j}}{1+j} = \frac{t2^{-\varrho}\log 4}{\max(1,\varrho)}.\end{aligned}\tag{3·25}$$

Maintenant, (3·12) fournit par dérivation

$$|\widehat{g}\,'(s)| \leqslant t2^{-\varrho-\sigma}\sum_{j=0}^{\infty}\Big(\frac{2^{-j}\log 2}{|\varrho+j+s|} + \frac{2^{-j}}{|\varrho+j+s|^2}\Big).\tag{3·26}$$

Comme $\sigma + \varrho \geqslant 0$, on déduit de (3·26) que $|\widehat{g}\,'(s)| \leqslant c_1 t2^{-\varrho-\sigma}$ avec

$$c_1 = \sum_{j=0}^{\infty}\Big(\frac{2^{-j}\log 2}{|j+i\vartheta_0|} + \frac{2^{-j}}{|j+i\vartheta_0|^2}\Big) < \tfrac{9}{10}.$$

Il suit, grâce à (3·25),

$$1 - \Re e\,\widehat{g}(s) \geqslant \frac{t2^{-\varrho}}{\max(1,\varrho)}\Big\{\log 4 - c_1\max(1,\varrho)\int_0^{\eta} 2^u\,\mathrm{d}u\Big\} > \frac{t2^{-\varrho}}{12\max(1,\varrho)},$$

où la dernière inégalité est obtenue en observant que la quantité $\max(1,\varrho)\int_0^{\eta} 2^u\,\mathrm{d}u$ atteint son maximum $1/\log 2$ en $\varrho = 1$. Cela établit (3·21) et (3·22) dans le cas $j = 2$.

Il reste à examiner le cas $\tau > \vartheta_1 = \pi/\log 2$, que nous scindons en deux sous-cas, selon la place de ϱ par rapport à 1.

Lorsque $\varrho \leqslant 1$, et donc $t \leqslant 1/\log 2$, nous posons $\beta := \sigma + \varrho \geqslant 0$. Nous pouvons écrire, d'après (3·12),

$$\begin{aligned}|\widehat{g}(s)| &\leqslant \frac{1}{\log 2}\Big\{\Big|\frac{2^{-\beta}}{\beta+i\tau} + \frac{2^{-\beta-2}}{\beta+2+i\tau}\Big| + \Big|\frac{2^{-\beta-1}}{\beta+1+i\tau}\Big| + \sum_{j=3}^{\infty}\frac{2^{-\beta-j}}{|\beta+j+i\tau|}\Big\}\\ &\leqslant \frac{1}{\log 2}\Big\{\sqrt{4^{-\beta}H(\beta)} + \frac{1}{2\sqrt{1+\vartheta_1^2}} + \frac{1}{4\sqrt{9+\vartheta_1^2}}\Big\}\end{aligned}$$

avec

$$H(\beta) := \tfrac{1}{16}\Big|\frac{4}{\beta+i\tau} + \frac{1}{\beta+2+i\tau}\Big|^2 = \frac{(5\beta+8)^2 + 25\tau^2}{16(\beta^2+\tau^2)\{(\beta+2)^2+\tau^2\}}.$$

La dérivée logarithmique de $4^{-\beta}H(\beta)$ n'excède pas

$$-\log 4 + \frac{10(5\beta+8)}{(5\beta+8)^2 + 25\tau^2} \leqslant -\log 4 + \frac{130}{64 + 25\vartheta_1^2} < 0.$$

Il suit

$$|\widehat{g}(s)| \leqslant \frac{1}{\log 2}\Big\{\sqrt{H(0)}+\frac{1}{2\sqrt{1+\vartheta_1^2}}+\frac{1}{4\sqrt{9+\vartheta_1^2}}\Big\}. \tag{3·27}$$

Or

$$H(0)=\frac{4}{\tau^2(4+\tau^2)}+\frac{25}{16(4+\tau^2)}\leqslant\frac{4}{\vartheta_1^2(4+\vartheta_1^2)}+\frac{25}{16(4+\vartheta_1^2)}.$$

En reportant cette majoration dans (3·27), on obtient

$$|\widehat{g}(s)|<\tfrac{2}{3}\qquad(\tau>\vartheta_1,\ \varrho\leqslant 1). \tag{3·28}$$

Lorsque $\varrho\geqslant 1$, on a $\eta=1/\varrho^2$ et l'on peut écrire, par (3·12),

$$|\widehat{g}(s)|\leqslant t2^{\eta-\varrho}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{2^{-j}}{|\varrho-\eta+j+i\vartheta_1|} \tag{3·29}$$

Maintenant, nous observons que

$$(\varrho-\eta)^2+\vartheta_1^2\geqslant\varrho^2+\vartheta_1^2-3/2^{4/3}\geqslant\varrho^2(1+\tfrac{7}{2}\eta)^2.$$

Cela permet de majorer le terme correspondant à $j=0$ dans la somme de (3·29) par $2/\varrho(2+7\eta)$. Semblablement, on vérifie sans peine que

$$(\varrho-\eta+j)^2+\vartheta_1^2\geqslant(\varrho+j)^2\qquad(1\leqslant j\leqslant 9).$$

Posons

$$a:=t\,2^{-\varrho}/\varrho,\quad b:=t\sum_{j=1}^{9}2^{-\varrho-j}/(\varrho+j),\quad c:=t\sum_{j=10}^{\infty}2^{-\varrho-j}/(\varrho+j),$$

de sorte que $a+b+c=1$, et majorons 2^η par $1+\eta$. Nous obtenons, en reportant les estimations précédentes dans (3·29),

$$|\widehat{g}(s)|\leqslant a\frac{2+2\eta}{2+7\eta}+b(1+\eta)+c\frac{1+\eta}{1-\eta/11}\,.$$

Il suit $|\widehat{g}(s)|\leqslant 1-a\eta h$ avec

$$h:=\frac{5}{2+7\eta}-\frac{b}{a}-\frac{6c}{5a}.$$

Or on a clairement

$$b<t\sum_{j=1}^{\infty}\frac{2^{-\varrho-j}}{\varrho+1}=\frac{t\,2^{-\varrho}}{\varrho+1}<\frac{a}{1+\eta},\qquad c<t\sum_{j=10}^{\infty}\frac{2^{-\varrho-j}}{\varrho}=\frac{a}{512}.$$

D'où

$$h>\frac{5}{2+7\eta}-\frac{1}{1+\eta}-\tfrac{3}{1280}=\frac{3-2\eta}{(2+7\eta)(1+\eta)}-\tfrac{3}{1280}>\tfrac{1}{20}.$$

Cela implique (3·21) et (3·22) pour $j=3$, et achève ainsi la démonstration du Lemme 3.1.

4. Preuve des Théorèmes 3 et 4

Preuve du Théorème 3. Soit $F_{x,t}(z)$ le membre de gauche de (1·14). Posant

$$M = M(x;t) := a(t)\log_2 x\,, \quad V = V(x;t) := b(t)\log_2 x, \tag{4·1}$$

on a

$$\widehat{F_{x,t}}(u) = L(x,y;t)^{-1}\sum_{n\in\mathcal{L}(x,y)}\exp\Big\{-u\frac{\omega(n)-M}{\sqrt{V}}\Big\}t^{\omega(n)}. \tag{4·2}$$

Soit $R := (\log_2 x)^{\eta(t)/8}$. Nous allons établir, comme une conséquence presque immédiate de (1·11), que l'on a uniformément pour $|u| \leqslant R$, $1/T \leqslant t \leqslant T$, $1 \leqslant y \leqslant T$,

$$\widehat{F_{x,t}}(u) = \Big\{1 + O\Big(\frac{1}{(\log_2 x)^{1/8}}\Big)\Big\}\mathrm{e}^{u^2/2}. \tag{4·3}$$

En effet, on obtient (4·3) en reportant dans (1·11) les évaluations élémentaires suivantes, où l'on a posé $s = t\exp\{-u/\sqrt{V}\}$,

$$K_y(s) = K_y(t) + O\big((\log_2 x)^{-1/8}\big),$$

$$\begin{aligned}\delta(s)\log_2 x &= \Big\{\delta(t) + \Big(\frac{-u}{\sqrt{V}} + \frac{u^2}{2V}\Big)t\delta'(t) + \frac{u^2}{2V}t^2\delta''(t) + O\Big(\frac{u^3}{(\log_2 x)^{3/2}}\Big)\Big\}\log_2 x\\ &= \delta(t)\log_2 x + \frac{uM}{\sqrt{V}} - \frac{u^2}{2} + O\Big(\frac{1}{(\log_2 x)^{1/8}}\Big).\end{aligned}$$

Ainsi les conditions (i) et (ii) du Théorème A sont réalisées avec $R = (\log_2 x)^{\eta(t)/8}$, $\kappa = 1$ et $\varepsilon = (\log_2 x)^{-1/8}$. Cela fournit le résultat annoncé.

Preuve du Théorème 4. Nous pouvons nous borner à établir l'assertion relative à la solubilité de l'équation $t\delta'(t) + \alpha = 0$. La relation (1·15) résulte immédiatement de (1·14) et (1·11) pour le choix $t = t_\alpha$.

L'inégalité de Cauchy–Schwarz

$$\begin{aligned}J'(\delta)^2 &= \left(\int_0^{1/2}\log(1/v)v^{-\delta}\frac{\mathrm{d}v}{1-v}\right)^2\\ &< \int_0^{1/2}v^{-\delta}\frac{\mathrm{d}v}{1-v}\int_0^{1/2}\log^2(1/v)v^{-\delta}\frac{\mathrm{d}v}{1-v} = J(\delta)J''(\delta)\end{aligned},$$

valable pour tout δ de $]-\infty,1[$, implique que J'/J est une fonction strictement croissante sur cet intervalle. Comme il résulte d'un calcul standard que

$$\frac{J'}{J}(-\infty) = \log 2, \qquad \frac{J'}{J}(1-) = +\infty,$$

on voit que J/J' est une bijection de $]-\infty,1[$ sur $]0,1/\log 2[$. L'assertion requise concernant t_α en résulte puisque l'on a par dérivation de (1·8)

$$-t\delta'(t) = J\big(\delta(t)\big)/J'\big(\delta(t)\big) \qquad (t > 0).$$

Bibliographie

[1] K. Alladi, An Erdős-Kac theorem for integers free of large prime factors, *Acta Arithmetica* **49** (1987), 81–105.
[2] J.D. Bovey, On the size of prime factors of integers, *Acta Arithmetica* **33** (1977), 65–80.
[3] P. Erdős, On some properties of prime factors of integers, *Nagoya Math J.* **27** (1966), 617–623.
[4] P. Erdős & G.Tenenbaum, Sur les fonctions arithmétiques liées aux diviseurs consécutifs, *J. Number Theory* **31** (1989), 285–311.
[5] R.R. Hall & G. Tenenbaum, *Divisors*, Cambridge Tracts in Mathematics no. 90, Cambridge (1988).
[6] H. Maier & G. Tenenbaum, On the set of divisors of an integer, *Invent. Math.* **76** (1984), 121–128.
[7] A. Stef, *L'ensemble exceptionnel dans la conjecture d'Erdős concernant la proximité des diviseurs*, Doctorat d'université, Département de mathématiques de l'Université Henri–Poincaré Nancy 1 (1992).
[8] A. Stef & G. Tenenbaum, Inversion de Laplace quantitative, prépublication.
[9] G. Tenenbaum, Sur un problème de crible et ses applications, *Ann. Sci. Éc. Norm. Sup.* (4) **19** (1986), 1–30.
[10] G. Tenenbaum, Une inégalité de Hilbert pour les diviseurs, *Indag. Mathem.*, N.S., **2** (1), 105–114.
[11] G. Tenenbaum, Sur un problème de crible et ses applications, 2. Corrigendum et étude du graphe divisoriel, *Ann. Sci. Éc. Norm. Sup.* (4) **28** (1995), 115–127.

A. Stef & G. Tenenbaum
Institut Élie Cartan
Université Henri Poincaré–Nancy 1
BP 239
54506 Vandœuvre Cedex
France