LOIS DE RÉPARTITION DES DIVISEURS, 5

GÉRALD TENENBAUM

1. *Introduction*

Soit n un nombre entier et $d(n)$ le nombre de ses diviseurs; on désigne, pour tout couple (λ, t) de réels appartenant à $[0,1] \times [1, +\infty)$, par $d(\lambda, t, n)$ le nombre des diviseurs de n dans l'intervalle $[n^{\lambda/t}, n^{1/t})$. Nous avons montré dans [5] que la fonction arithmétique

$$n \mapsto \Delta(\lambda, t, n) := \frac{d(\lambda, t, n)}{d(n)}$$

possède une fonction de répartition H. La mesure dH est une combinaison linéaire infinie de mesures de Dirac aux points dyadiques $a2^{-b}$ (a et b entiers) de $[0,1]$. Cela suggère que la répartition des diviseurs de n est, pour presque tout n, concentrée au voisinage d'un nombre restreint de points n^{λ} de $[1, n]$ et donc possède des "trous" du type $[n^{\lambda_1}, n^{\lambda_2}]$. L'objet de cet article est l'étude de la taille maximale de la différence $(\lambda_2 - \lambda_1)$ pour un tel intervalle.

Dans cette optique, nous désignons par $\{d_1 = 1, d_2, \ldots, d_\tau = n\}$ la suite croissante des diviseurs de n et nous introduisons la quantité

$$\psi(n) := (\log n)^{-1} \max_{i=1}^{\tau-1} \log \frac{d_{i+1}}{d_i}$$

La valeur de $\psi(n)$ est donc un nombre réel de $[0,1]$ qui mesure la taille du plus grand rapport† de deux diviseurs consécutifs de n.

Nous montrons le résultat suivant:

THÉORÈME. *La fonction $n \mapsto \psi(n)$ possède une loi de distribution dont la fonction de répartition $\lambda \mapsto f(\lambda)$ est continue sur $[0,1]$ et vérifie:*

(i) *pour* $\frac{1}{2} \leqslant \lambda \leqslant 1$ $\qquad f(\lambda) = 1 - \log \dfrac{2}{1+\lambda}$

(ii) *pour* $0 \leqslant \lambda \leqslant \frac{1}{2}$ $\qquad \dfrac{c_1 \lambda}{\log(1/\lambda)} \leqslant f(\lambda) \leqslant c_2 \lambda \log(1/\lambda)$

où c_1 et c_2 sont deux constantes absolues positives.

Received 6 November, 1978.

Laboratoire associé au C. N. R. S. n° 226.

† L'étude des grands rapports de diviseurs consécutifs a déjà eu des applications dans d'autres branches de la théorie des nombres (voir en particulier C. L. Stewart "On divisors of Fermat, Fibonacci, Lucas and Lehmer numbers", *Proc. London Math. Soc.* vol. 35, 3e série (1977), p. 425–447).

[J. LONDON MATH. SOC. (2), 20 (1979), 165–176]

L'idée principale de la démonstration consiste à utiliser le fait que les entiers n pour lesquels $\psi(n) \leqslant \lambda$ sont "essentiellement" ceux qui vérifient

$$p|n \quad \text{et} \quad p > n^{\lambda} \Rightarrow p \leqslant \prod_{\substack{q<p \\ q^{\nu}\|n}} q^{\nu}$$

où p et q désignent des nombres premiers.

Observons dès maintenant que le cas $\lambda \geqslant \frac{1}{2}$ est à peu près trivial. Considérons en effet un entier n tel que $\psi(n) > \lambda \geqslant \frac{1}{2}$; alors n possède deux diviseurs consécutifs d et d' tels que:

$$\frac{d}{d'} > n^{\lambda} \geqslant \sqrt{n}\,.$$

Cela implique $d' < \sqrt{n} < d$, donc d est le plus petit diviseur de n supérieur à $\sqrt{n}$ et d' est égal à $\frac{n}{d}$. On a donc:

$$d > n^{(1+\lambda)/2} > n^{3/4}\,;$$

le diviseur d est donc premier (cf. [**2**; Lemme 2]) et la densité de la suite des entiers n tels que $\psi(n) > \lambda$ est égale à celle de la suite des entiers n dont le plus grand facteur premier est supérieur à $n^{(1+\lambda)/2}$, d'où le résultat.

2. *Notations*

Outre celles introduites au paragraphe précédent, nous utilisons les notations suivantes:

$\mathscr{A}, \mathscr{B}, \ldots$ désignent des suites d'entiers;

$A(x), B(x), \ldots$ désignent le nombre de leurs éléments qui sont inférieurs ou égaux à x;

$d(\mathscr{A}), d(\mathscr{B}), \ldots$ (respectivement $\bar{d}(\mathscr{A}), \bar{d}(\mathscr{B}), \ldots$) sont leurs densités asymptotiques (respectivement densités asymptotiques supérieures).

$\mathscr{A}_{\lambda}$ est la suite des entiers n pour lesquels $\psi(n) \leqslant \lambda$.

Les lettres a, d, h, i, j, k, m, n, s, z désignent des entiers non négatifs, alors que les lettres p et q sont utilisées exclusivement pour des nombres premiers.

On note $v_p(n)$ l'exposant de p dans la décomposition en facteurs premiers de n.

Pour tout λ de $[0, 1]$ et tout entier n, on pose:

$$\Omega_{\lambda}(n) = \sum_{p > n^{\lambda}} v_p(n)$$

et

$$n_{\lambda} = \prod_{p \leqslant n^{\lambda}} p^{v_p(n)}.$$

Le symbole $[a_1, \ldots, a_k]$ désigne le plus petit multiple commun aux nombres $a_1, a_2, \ldots, a_k$.

Les lettres $c, c_1, c_2, \ldots$ désignent des constantes absolues positives.
La fonction $t \mapsto \rho(t)$ est la fonction de Dickmann. Elle est définie pour $t \geqslant 0$ par

$$\begin{cases} \rho(t) = 1 \text{ pour } 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ \rho \text{ continue à droite en } t = 1 \\ t\rho'(t) + \rho(t-1) = 0 \text{ pour } t > 1. \end{cases}$$

On pose:

$$\delta := 1 - \frac{\log(e \log 2)}{\log 2} = 0{,}0860\ldots .$$

Enfin, étant données une condition numérotée (k) et une fonction $n \mapsto \alpha(n)$, on note $\sum_{n \leqslant x}^{(k)} \alpha(n)$ la somme des valeurs $\alpha(n)$ étendue aux valeurs de n inférieures ou égales à x qui vérifient (k).

3. *Existence et continuité*

Nous nous proposons dans ce paragraphe de montrer que pour tout λ de $[0, 1]$ la suite $\mathscr{A}_\lambda$ possède une densité $f(\lambda)$ qui est une fonction continue de λ.

Compte tenu de la majoration de $f(\lambda)$, que nous montrerons au paragraphe suivant, le lemme ci-dessous implique, sous réserve d'existence, que la limite $f(\lambda)$ est une fonction continue de λ sur $[0, 1]$.

LEMME 1. *Pour tout λ de* $(0, 1]$, *on a*:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \bar{d}(\mathscr{A}_{\lambda+\varepsilon} \setminus \mathscr{A}_\lambda) = 0.$$

Démonstration. Soit n un entier de $\mathscr{A}_{\lambda+\varepsilon} \setminus \mathscr{A}_\lambda$, et soit j un entier tel que

$$\frac{d_{j+1}}{d_j} = \max_{i=1}^{d(n)-1} \frac{d_{i+1}}{d_i} \in (n^\lambda, n^{\lambda+\varepsilon}].$$

On a alors:

$$(d_{j+1}, n_\lambda) = 1 \quad \text{et} \quad n_\lambda | d_j$$

car si l'une ou l'autre de ces deux conditions n'est pas remplie, il existe un facteur premier p de n_λ tel que

$$d_{j+1} \leqslant p d_j,$$

ce qui contredit l'hypothèse $n \notin \mathscr{A}_\lambda$.

Le produit $\frac{n}{d_j} d_{j+1}$ est donc composé exclusivement de facteurs premiers supérieurs à n^λ et n est multiple d'un entier de la forme $p_1 \ldots p_k$ (les facteurs premiers p_i n'étant pas nécessairement distincts) avec les conditions:

$$\forall i \quad (1 \leqslant i \leqslant k) \qquad p_i > n^\lambda$$

$$\exists s \quad (0 \leqslant s \leqslant k) \qquad n^{1+\lambda} < p_1^2 \ldots p_s^2 \, p_{s+1} \ldots p_k < n^{1+\lambda+\varepsilon}.$$

On pose $A(x) := A_{\lambda+\varepsilon}(x) - A_\lambda(x)$; quitte à modifier $A(x)$ d'une quantité $o(x)$ on peut supposer (voir le Lemme 7 de [3]) que $A(x)$ est majoré par le nombre des entiers $n \leqslant x$ qui sont multiples de $p_1 \dots p_k$ avec

$$\begin{cases} \forall i \quad (1 \leqslant i \leqslant k) & p_i > x^\lambda \\ \exists s \quad (0 \leqslant s \leqslant k) & x^{1+\lambda} < p_1^2 \dots p_s^2 \, p_{s+1} \dots p_k < x^{1+\lambda+\varepsilon}. \end{cases} \tag{1}$$

On a donc la majoration:

$$A(x) \leqslant \sum_{k=1}^{[\lambda^{-1}]} \sum_{p_1 \dots p_k \leqslant x}^{(1)} \frac{x}{p_1 \cdots p_k} + o(x).$$

Le Lemme 9 de [3] permet de transformer la somme des $(p_1 \dots p_k)^{-1}$ en une intégrale, soit:

$$A(x) \leqslant x \sum_{k=1}^{[\lambda^{-1}]} \int_{\Delta_k} \frac{du_1}{u_1} \dots \frac{du_k}{u_k} + o(x)$$

où Δ_k est le domaine de $\mathbb{R}^k$ défini par les conditions:

$$(\Delta_k) \begin{cases} \forall i \quad (1 \leqslant i \leqslant k) & \lambda < u_i \leqslant 1 \\ u_1 + \dots + u_k \leqslant 1 & \\ \exists s \quad (0 \leqslant s \leqslant k) & 1 + \lambda \leqslant 2(u_1 + \dots + u_s) + u_{s+1} + \dots + u_k \leqslant 1 + \lambda + \varepsilon. \end{cases}$$

Comme pour k et λ fixés, on a

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Delta_k} \frac{du_1}{u_1} \dots \frac{du_k}{u_k} = 0,$$

cela achève la démonstration.

Il reste à montrer l'existence de la densité de $\mathscr{A}_\lambda$. Comme il arrive souvent dans ce type de problème, la démonstration d'existence utilisera la sorte de continuité potentielle démontrée au Lemme 1.

La propriété suivante caractérise les entiers n de $\mathscr{A}_\lambda$:

$$(\mathscr{P}) \qquad \forall \alpha \in [0, 1) \quad \exists d | n \quad n^\alpha < d \leqslant n^{\alpha + \lambda}.$$

Nous allons approcher la suite $\mathscr{A}_\lambda$ par la suite $\mathscr{A}_{\lambda,h}$, définie, pour tout entier positif h, comme la suite des entiers n satisfaisant à la condition:

$$(\mathscr{P}_h) \qquad \forall k \quad (0 \leqslant k \leqslant h-1) \quad \exists d | n \quad n^{k/h} < d \leqslant n^{(k/h)+\lambda}.$$

Pour tout h, on a $\mathscr{A}_\lambda \subseteq \mathscr{A}_{\lambda,h} \subseteq \mathscr{A}_{\lambda+h^{-1}}$; d'après le Lemme 1 il nous suffit donc de montrer que $\mathscr{A}_{\lambda,h}$ possède une densité pour tout h positif. Cela résulte du lemme suivant:

LEMME 2. *Soit h un entier positif et $\{(\alpha_i, \beta_i]; 1 \leqslant i \leqslant h\}$ une suite de h intervalles inclus dans $[0, 1]$.*

Alors la suite $\mathscr{B}$ des entiers n ayant au moins un diviseur dans chacun des intervalles $(n^{\alpha_i}, n^{\beta_i}]$ $(1 \leqslant i \leqslant h)$ possède une densité asymptotique.

La démonstration de ce lemme est semblable à celle du Lemme 3 de [4], aussi nous nous contenterons d'en indiquer les grandes lignes.

Si $\alpha_i = 0$, presque tous les entiers ont un diviseur dans $(n^{\alpha_i}, n^{\beta_i}]$. On peut donc se restreindre sans perte de généralité au cas où tous les α_i sont positifs.

En utilisant le fait que, pour α positif, la densité des entiers n ayant au moins un diviseur dans $(n^\alpha, n^{\alpha+\varepsilon}]$ est $O_\alpha(\varepsilon^\delta)$ (voir [3]) on montre alors que, pour tout ε positif, on a:

$$x^{-1} B(x) = x^{-1} \sum_{m=h}^{\infty} (-1)^{m-h} B_m(x) + O(\varepsilon^\delta) + o(1) \tag{2}$$

avec

$$B_m(x) = \sum_{\substack{i_1+\ldots+i_h=m \\ i_1, i_2, \ldots, i_h \geqslant 1}}^{*} \left[\frac{[x]}{[z_1^1, \ldots, z_1^{i_1}, z_2^1, \ldots, z_2^{i_2}, \ldots, z_h^1, \ldots, z_h^{i_h}]} \right]$$

où l'astérisque signifie d'une part que, pour tout j de $[1, h]$ et tout s de $[1, i_j]$, z_j^s parcourt l'ensemble des entiers de $(x^{\alpha_j}, x^{\beta_j}]$ dont tous les facteurs premiers sont supérieurs à x^ε, et, d'autre part, que les z_j^s vérifient

$$\forall j \quad (1 \leqslant j \leqslant h) \qquad z_j^1 < z_j^2 < \ldots < z_j^{i_j}.$$

On montre alors sans difficulté que, dans (2), le nombre de valeurs de m est borné indépendamment de x et que, pour tout m, $x^{-1} B_m(x)$ tend vers une limite lorsque x tend vers l'infini.

En faisant tendre, dans (2), x vers l'infini puis ε vers 0, on obtient donc le résultat annoncé.

4. *Majoration*

Donnons d'abord trois lemmes qui nous serons utiles plus loin.

LEMME 3. *Soient λ un réel de* $(0, 1]$ *et μ un réel positif. On désigne par D_k le domaine des $(u_1, \ldots, u_k)$ de $\mathbb{R}^k$ qui satisfont aux conditions*

$$(D_k) \begin{cases} \lambda < u_1 \leqslant u_2 \leqslant \ldots \leqslant u_k \leqslant 1 \\ \forall i \quad (1 \leqslant i \leqslant k) \qquad u_i \leqslant (\mu+1)\lambda + \sum_{s=1}^{i-1} u_s. \end{cases}$$

On a alors la majoration:

$$\int_{D_k} \frac{du_1}{u_1} \cdots \frac{du_k}{u_k} \leqslant \mu.$$

Démonstration. Posons pour i dans $[1, k]$

$$v_i := \sum_{s=1}^{i-1} u_s \qquad (v_1 \text{ est donc nul}).$$

L'intégrale en u_k est majorée par

$$\int_{u_{k-1}}^{v_k+(\mu+1)\lambda} \frac{du_k}{u_k} = \log\left(1 + \frac{v_{k-1}+(\mu+1)\lambda}{u_{k-1}}\right) \leqslant \frac{v_{k-1} \quad (\mu+1)\lambda}{u_{k-1}}.$$

On voit ainsi par récurrence sur j que pour tout j de $[0, k-2]$ l'intégrale en u_{k-j} est majorée par:

$$(v_{k-j}+(\mu+1)\lambda)\int_{u_{k-j-1}}^{v_{k-j}+(\mu+1)\lambda}\frac{du_{k-j}}{u_{k-j}^2}=\frac{v_{k-j-1}+(\mu+1)\lambda}{u_{k-j-1}}.$$

Finalement l'intégrale k-uple est majorée par:

$$(\mu+1)\lambda\int_{\lambda}^{(\mu+1)\lambda}\frac{du_1}{u_1^2}=\mu.$$

LEMME 4. *Pour tout réel positif u et tout λ de $(0,1]$, on a:*

$$\bar{d}\{n : n_\lambda > n^{\lambda u}\} \leqslant \int_u^\infty \rho(v)dv+\rho(\lambda^{-1}).$$

La démonstration de ce lemme a été donnée dans [5; Lemme 1] sous une forme légèrement différente.

LEMME 5. *Pour tout λ de $[0, \frac{1}{2}]$ et toutes constantes α et β vérifiant*

$$\alpha < (\log 2)^{-1} < e \leqslant \beta,$$

on a:

(i) $d(\mathscr{A}_\lambda \cap \{n : \Omega_\lambda(n) \leqslant \alpha \log(1/\lambda)\}) \leqslant c_3\rho(\log(1/\lambda))$

(ii) $\bar{d}(\mathscr{A}_\lambda \cap \{n : \Omega_\lambda(n) \geqslant \beta \log(1/\lambda)\}) \leqslant c_4\lambda^{1+\beta\log(\beta/e)}(\log(1/\lambda))^{-1/2}$.

Démonstration. Nous allons montrer que, pour λ assez petit, tout entier n de $\mathscr{A}_\lambda \cap \{n : \Omega_\lambda(n) < \alpha\log(1/\lambda)\}$ vérifie:

$$n_\lambda > n^{\lambda\log(1/\lambda)} \tag{3}$$

ce qui prouvera (i), compte tenu du Lemme 4 et de la majoration élémentaire

$$\forall u \quad (u \geqslant 1) : \quad \int_u^\infty \rho(v)dv \leqslant \rho(u).$$

Supposons, en effet, que n ne réalise pas (3). Si $(d_i)_{1\leqslant i\leqslant\tau}$ désigne la suite croissante des diviseurs de $\dfrac{n}{n_\lambda}$, il est clair que pour tout $i \leqslant \tau-1$ le plus grand diviseur de n inférieur à d_{i+1} est inférieur ou égal à $n_\lambda d_i$; comme n est dans $\mathscr{A}_\lambda$, cela implique:

$$\max_{i=1}^{\tau-1}\frac{d_{i+1}}{d_i}\leqslant n_\lambda n^\lambda \leqslant n^{\lambda\log(1/\lambda)+\lambda}\leqslant\left(\frac{n}{n_\lambda}\right)^{(\lambda\log(1/\lambda)+\lambda)/(1-\lambda\log(1/\lambda))}\leqslant\left(\frac{n}{n_\lambda}\right)^{c_5\lambda\log(1/\lambda)}$$

et donc:

$$d\left(\frac{n}{n_\lambda}\right) \geqslant \frac{1}{c_5 \lambda \log(1/\lambda)}.$$

Or, si $\Omega_\lambda(n) \leqslant \alpha \log(1/\lambda)$, on a aussi:

$$d\left(\frac{n}{n_\lambda}\right) \leqslant 2^{\Omega_\lambda(n)} \leqslant 2^{\alpha \log(1/\lambda)},$$

ce qui contredit (4) pour λ suffisamment petit.

La propriété (ii) est une conséquence du Théorème C de [3].

Si n est dans $\mathscr{A}_\lambda$ avec $\lambda \leqslant \frac{1}{2}$, le plus grand facteur premier de n est nécessairement inférieur à $n^{(1+\lambda)/2} \leqslant n^{3/4}$. On a donc:

$$\mathscr{A}_\lambda \cap \{n : \Omega_\lambda(n) \geqslant \beta \log(1/\lambda)\} \subseteq \left\{n : \sum_{n^\lambda < p < n^{3/4}} v_p(n) \geqslant \beta \log(1/\lambda)\right\} =: \mathscr{B}_\lambda.$$

D'après le Théorème C et le Lemme 10 de [3] on a alors:

$$d(\mathscr{B}_\lambda) \leqslant c_6 \lambda \sum_{m \geqslant \beta \log(1/\lambda)} \frac{1}{m!} \log^m(3/\lambda) \leqslant c_4 \lambda^{1+\beta \log \beta/e} (\log(1/\lambda))^{-1/2},$$

ce qui achève la démonstration.

Nous pouvons maintenant aborder la preuve de la majoration de notre théorème. Décomposons tout entier n de $\mathscr{A}_\lambda$ sous la forme:

$$n = n_\lambda p_1 \ldots p_k$$

avec $n^\lambda < p_1 \leqslant p_2 \leqslant \ldots \leqslant p_k$. Comme $\rho\left(\log \frac{1}{\lambda}\right)$ est $O(\lambda^A)$ pour toute constante A, le Lemme 5 nous permet de supposer, quitte à négliger une sous-suite de densité supérieure $O(\lambda)$, que l'on a:

$$k_1 := [\alpha \log(1/\lambda)] < k \leqslant k_2 := [\beta \log(1/\lambda)]$$

où α et β sont choisis comme dans l'énoncé du Lemme 5. Remarquons de plus que, si nous notons

$$\pi_i = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = 1 \\ p_1 \ldots p_{i-1} & \text{si} \quad i \geqslant 2, \end{cases}$$

on a nécessairement pour tout i de $[1, k]$

$$p_i \leqslant n_\lambda n^\lambda \pi_i. \tag{5}$$

En effet, si la condition (5) n'est pas remplie, le diviseur $d_s := n_\lambda \pi_i$ de n vérifie

$$d_s n^\lambda < p_i = d_{s+1}$$

ce qui contredit l'hypothèse $n \in \mathscr{A}_\lambda$. Enfin, comme nous avons montré que $\mathscr{A}_\lambda$ possède une densité, nous pouvons nous contenter de majorer la quantité

$$\bar{A}_\lambda(x) := (\log x)^{-1} \sum_{\substack{n \leqslant x \\ n \in \mathscr{A}_\lambda}} n^{-1}$$

qui est techniquement plus maniable que $A_\lambda(x)$. Compte tenu des lemmes et des remarques précédentes, nous obtenons la majoration:

$$\bar{A}_\lambda(x) \leqslant (\log x)^{-1} \sum_{k_1 < k \leqslant k_2} \sum_{n \leqslant x}{}^{(7)(8)} n^{-1} + O(\lambda) + o(1) \tag{6}$$

où la sommation intérieure porte sur les entiers $n \leqslant x$ qui s'écrivent $n = ap_1 \dots p_k$ avec les conditions:

$$p|a \Rightarrow p \leqslant x^\lambda \tag{7}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \forall i \quad (1 \leqslant i \leqslant k) & p_i \leqslant x^\lambda a\pi_i \\ x^\lambda < p_1 \leqslant p_2 \leqslant \dots \leqslant p_k. & \end{array}\right\} \tag{8}$$

Le terme $o(1)$ dans (6) provient du remplacement de n^λ par x^λ dans les conditions sur n.

On peut encore écrire (6) sous la forme:

$$\bar{A}_\lambda(x) \leqslant (\log x)^{-1} \sum_{k_1 < k \leqslant k_2} \sum_{j=1}^{[\lambda^{-1}]+1} \sum_{\substack{x^{(j-1)\lambda} \leqslant a \\ < x^{j\lambda}}}{}^{(7)} a^{-1} \sum_{p_1 \dots p_k \leqslant x}{}^{(8)} (p_1 \dots p_k)^{-1} + O(\lambda) + o(1). \tag{9}$$

Le Lemme 9 de [3] et le Lemme 3, appliqué avec $\mu = j$, permettent l'évaluation de la somme intérieure:

$$\sum_{p_1 \dots p_k \leqslant x}{}^{(8)} (p_1 \dots p_k)^{-1} \leqslant \int_{D_k} \frac{du_1}{u_1} \dots \frac{du_k}{u_k} + o(1) \leqslant j + o(1) \leqslant 1 + \frac{\log a}{\lambda \log x} + o(1).$$

Nous sommes donc conduits à évaluer:

$$S(x) := (\log x)^{-1} \sum_{a \leqslant x}{}^{(7)} \left(1 + \frac{\log a}{\lambda \log x}\right) a^{-1}.$$

Une intégration par parties mène au résultat, moyennant l'estimation asymptotique classique (voir par exemple [1])

$$\left| \sum_{a \leqslant y}{}^{(7)} 1 - y\rho\left(\frac{\log y}{\lambda \log x}\right) \right| \leqslant c_7 \frac{y}{\lambda \log x}.$$

On obtient:

$$\begin{aligned} S(x) &= (\log x)^{-1} \int_1^x \left(1 + \frac{\log y}{\lambda \log x}\right) \rho\left(\frac{\log y}{\lambda \log x}\right) \frac{dy}{y} + O_\lambda((\log x)^{-1}) \\ &\leqslant \lambda \int_0^\infty (u+1)\rho(u)du + O_\lambda((\log x)^{-1}) \\ &\leqslant c_8 \lambda + o(1). \end{aligned}$$

En raportant dans (9) on a finalement

$$\begin{aligned}\bar{A}_\lambda(x) &\leqslant \sum_{k_1<k\leqslant k_2} S(x)+O(\lambda)+o(1)\\ &\leqslant c_8\lambda(k_2-k_1)+O(\lambda)+o(1)\\ &\leqslant c_2\lambda\log\frac{1}{\lambda}+o(1)\end{aligned}$$

d'où la majoration annoncée en faisant tendre x vers l'infini.

5. *Minoration*

Bien qu'elle exploite la même idée de base sur la structure des entiers composant $\mathscr{A}_\lambda$, la démonstration de minoration de $f(\lambda)$ se présente sous une forme différente de celle de la majoration. Au lieu de classer les entiers n selon la valeur de $\Omega_\lambda(n)$, nous introduisons une densité $f(\lambda, t)$, fonction de deux variables, qui minore $f(\lambda)$ pour toute valeur de t et qui vérifie une équation fonctionnelle permettant d'en déduire la minoration souhaitée.

LEMME 6. *Pour tout couple (λ, t) de réels appartenant à $[0, 1]\times[1, +\infty)$ on pose*:

$$\mathscr{L}_{\lambda,t} := \left\{n : p|n \Rightarrow p \leqslant n^{1/t};\ p|n \quad et \quad p > n^\lambda \Rightarrow p < \prod_{q<p} q^{v_q(n)}\right\}.$$

Alors la suite $\mathscr{L}_{\lambda,t}$ possède une densité $f(\lambda, t)$, qui est déterminée par les relations suivantes:

(i) $\lambda \geqslant \frac{1}{2},\ t\leqslant 2 \Rightarrow f(\lambda, t) = \rho(\max(t, \lambda^{-1}))$

(ii) $\lambda\leqslant\frac{1}{2},\ t\leqslant 2\Rightarrow f(\lambda, t) = f(\lambda, 2)$

(iii) $\lambda t\geqslant 1\Rightarrow f(\lambda, t) = \rho(t)$

(iv) $$t\geqslant 2\Rightarrow f(\lambda, t) = \int_t^\infty f\left(\frac{\lambda u}{u-1},\ u-1\right)\frac{du}{u}.$$

Démonstration. Les relations (i), (ii) et (iii) sont triviales.
En utilisant le fait que, pour tout α positif, le nombre des entiers $n\leqslant x$ qui ont au moins un facteur premier p dans $[x^\alpha, x^{\alpha+o(1)})$ est $o(x)$ on voit que l'on a, pour λ positif:

$$L_{\lambda,t}(x) = \operatorname{card}\left\{n\leqslant x : p|n\Rightarrow p\leqslant x^{1/t};\ p|n \quad \text{et} \quad p > x^\lambda\Rightarrow p < \prod_{q<p} q^{v_q(n)}\right\} + o(x).$$

Pour $\lambda t < 1$ et $t\geqslant 2$ on a donc:

$$L_{\lambda,t}(x) =$$

$$\sum_{x^\lambda<p\leqslant x^{1/t}} \operatorname{card}\left\{n : p < n\leqslant\frac{x}{p};\ q|n\Rightarrow q\leqslant p;\ p'|n \quad \text{et} \quad p' > x^\lambda\Rightarrow p' < \prod_{q<p'} q^{v_q(n)}\right\}$$
$$+\operatorname{card}\{n\leqslant x : p|n\Rightarrow p < x^\lambda\} + o(x).$$

Soit, en posant $u := \log x/\log p$:

$$L_{\lambda,t}(x) = \sum_{x^\lambda < p \leqslant x^{1/t}} L_{u\lambda/(u-1),u-1}(x^{(u-1)/u}) + O\left(\frac{x^{2/t}}{\log x}\right) + x\rho(\lambda^{-1}) + O\left(\frac{x}{\log x}\right) + o(x).$$

Par un argument classique (voir par exemple la démonstration du Lemme 1 de [**3**]) on montre que:

$$\sum_{x^\lambda < p \leqslant x^{1/t}} L_{u\lambda/(u-1),u-1}(x^{(u-1)/u}) = \int_t^{\lambda^{-1}} x^{1/u} L_{u\lambda/(u-1),u-1}(x^{(u-1)/u}) \frac{du}{u} + o(x)$$

d'où:

$$x^{-1} L_{\lambda,t}(x) = \int_t^{\lambda^{-1}} x^{-(u-1)/u} L_{u\lambda/(u-1),u-1}(x^{(u-1)/u}) \frac{du}{u} + \rho(\lambda^{-1}) + o(1). \tag{10}$$

Cela permet de montrer l'existence de la densité de $\mathscr{L}_{\lambda,t}$ par récurrence à partir du cas trivial $\lambda \geqslant 1$ puisque pour $u \leqslant \lambda^{-1}$, on a:

$$\frac{u}{u-1}\lambda \geqslant \frac{\lambda}{1-\lambda}.$$

De plus, en utilisant (iii) il vient:

$$\rho(\lambda^{-1}) = \int_{\lambda^{-1}}^{\infty} \frac{\rho(u-1)}{u} du = \int_{\lambda^{-1}}^{\infty} x^{-(u-1)/u} L_{u\lambda/(u-1),u-1}(x^{(u-1)/u}) \frac{du}{u} + o(1)$$

ce qui permet de réécrire (10) sous la forme:

$$x^{-1} L_{\lambda,t}(x) = \int_t^{\infty} x^{-(u-1)/u} L_{u\lambda/(u-1),u-1}(x^{(u-1)/u}) \frac{du}{u} + o(1) \tag{11}$$

et (11) est valable même dans le cas $\lambda t \geqslant 1$. En faisant tendre x vers l'infini dans (11) on obtient (iv).

Montrons que les relations (i) à (iv) déterminent $f(\lambda, t)$. Si l'on note $f_n(\lambda, t)$ la restriction de $f(\lambda, t)$ à $\left[\frac{1}{n}, 1\right] \times [1, n]$, alors f_2 est déterminée par (i); en tenant compte de (iii'), la formule (iv) s'écrit alors, pour $t \geqslant 2$,

$$f_n(\lambda, t) = \rho(n) + \int_t^n f_{n-1}\left(\lambda\frac{u}{u-1}, u-1\right)\frac{du}{u}$$

ce qui détermine f_n pour $t \geqslant 2$ mais aussi pour $t \geqslant 1$ à cause de (i) et (ii).

LEMME 7. *Pour tout couple* (λ, t) *de* $[0, 1] \times [1, +\infty)$, *on a:*

$$f(\lambda, t) \leqslant f(\lambda).$$

Démonstration. Nous allons montrer que $\mathscr{L}_{\lambda,t} \subseteq \mathscr{A}_\lambda$.

Soit n dans $\mathscr{L}_{\lambda,t}$; on pose:

$$n = n_\lambda p_1 \dots p_k$$

avec:

$$n^\lambda < p_1 \leqslant p_2 \leqslant \dots \leqslant p_k.$$

Nous allons montrer par récurrence sur i que, si d divise $n_\lambda p_1 \dots p_i$ et $d \neq 1$, il existe un diviseur d' de $n_\lambda p_1 \dots p_i$ tel que:

$$1 < \frac{d}{d'} \leqslant n^\lambda.$$

C'est vrai pour $i = 0$ puisque tous les facteurs premiers de n_λ sont inférieurs ou égaux à n^λ.

Si d divise $n_\lambda p_1 \dots p_{i+1}$ ou bien d divise $n_\lambda p_1 \dots p_i$ et la conclusion découle de l'hypothèse de récurrence ou bien p_{i+1} divise d. Deux cas se présentent alors:

(a) $d = p_{i+1}$; comme n est dans $\mathscr{L}_{\lambda,t}$, on a $d < n_\lambda p_1 \dots p_i$; si d' et d'' sont les diviseurs consécutifs de $n_\lambda p_1 \dots p_i$ qui encadrent d, on a $d' < d < d''$ et, comme d'' n'est pas égal à 1, l'hypothèse de récurrence permet d'affirmer que l'on a:

$$1 < \frac{d''}{d'} \leqslant n^\lambda,$$

d' est donc le diviseur cherché.

(b) $p_{i+1} < d$; dans ce cas $\dfrac{d}{p_{i+1}}$ est un diviseur de $n_\lambda p_1 \dots p_i$ différent de 1; il existe donc un diviseur d^* de $n_\lambda p_1 \dots p_i$ tel que:

$$1 < \frac{(d/p_{i+1})}{d^*} \leqslant n^\lambda$$

et l'on peut choisir $d' = p_{i+1} d^*$, ce qui achève la démonstration.

Compte tenu du Lemme 7, la minoration de $f(\lambda)$ est une conséquence du résultat suivant:

LEMME 8. *Il existe une constante absolue positive c telle que l'on ait pour tout* (λ, t) *de* $[0, \frac{1}{2}] \times [1, +\infty)$ *vérifiant* $\lambda t \leqslant 1$:

$$f(\lambda, t) \geqslant c\lambda \log^{-A}\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)\rho(t-1).$$

Démonstration. Désignons par f_n la restriction de $f(\lambda, t)$ à l'ensemble des (λ, t) vérifiant $\left(\frac{1}{n} \leqslant \lambda \leqslant 1\right)$ et $(\lambda t \leqslant 1)$.

Pour $t \geqslant 2$, le Lemme 6 permet d'écrire:

$$f_n(\lambda, t) = \rho(\lambda^{-1}) + \int_t^{\lambda^{-1}} f_{n-1}\left(\frac{\lambda u}{u-1}, u-1\right)\frac{du}{u}. \tag{12}$$

De Bruijn a montré dans [1] que l'expression $\dfrac{\rho(t-1)}{t\rho(t)\log(1+t)}$ est bornée lorsque t parcourt $[1,+\infty)$. En adjoignant à ce résultat la propriété (i) du Lemme 6, on voit qu'il existe une constante c — que l'on choisira inférieure à 1 — telle que

$$\begin{cases} \tilde{f}_2(\lambda,t) \geqslant c\lambda\log^{-1}\left(1+\dfrac{1}{\lambda}\right) \\ \forall t \quad (t \geqslant 1) \quad t\rho(t) \geqslant c\log^{-1}(1+t)\rho(t-1). \end{cases}$$

La formule (12) permet alors de montrer par récurrence sur n que pour tout entier $n \geqslant 2$ et tout réel λ $\left(\dfrac{1}{n} \leqslant \lambda \leqslant \max\left(\dfrac{1}{n-1}, \dfrac{1}{2}\right)\right)$ on a:

$$\tilde{f}_n(\lambda,t) \geqslant c\lambda\log^{-1}\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)\rho(t-1).$$

En effet, la propriété est vérifiée pour $n = 2$ d'après le choix de c; supposons la vérifiée pour $n-1$, il vient pour $t \geqslant 2$:

$$\begin{aligned} \tilde{f}_n(\lambda,t) &\geqslant \rho(\lambda^{-1}) + c\lambda\int_t^{\lambda^{-1}} \frac{\rho(u-2)}{\log\left(1+\dfrac{u-1}{u\lambda}\right)}\frac{du}{u-1} \\ &\geqslant \rho(\lambda^{-1}) + c\lambda\log^{-1}\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)\{\rho(t-1)-\rho(\lambda^{-1}-1)\} \\ &= c\lambda\log^{-1}\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)\rho(t-1) + \left\{\rho(\lambda^{-1}) - c\lambda\log^{-1}\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)\rho(\lambda^{-1}-1)\right\} \\ &\geqslant c\lambda\log^{-1}\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)\rho(t-1). \end{aligned}$$

Comme $t \mapsto \rho(t-1)$ est constante sur l'intervalle $[1,2]$, la formule (ii) du Lemme 6 permet d'affirmer que la minoration de $\tilde{f}_n$ est en fait valable pour $t \geqslant 1$, ce qui achève la démonstration.

Bibliographie

1. N. G. de Bruijn, "On the number of positive integers $\leqq x$ and free of prime factors $> y$", *Indag. Math.*, 13 (1951), 50–60.
2. G. Tenenbaum, "Sur deux fonctions de diviseurs", *J. London Math. Soc.* (2) 14 (1976), 521–526 et *J. London Math. Soc.* (2) 17 (1978), 212.
3. G. Tenenbaum, "Lois de répartition des diviseurs, 2", à paraitre dans *Acta Arithmetica* 38, n° 1 (1979).
4. G. Tenenbaum, "Lois de répartition des diviseurs, 3", à paraitre dans *Acta Arithmetica* 39, n° 1.
5. G. Tenenbaum, "Lois de répartition des diviseurs, 4", à paraitre dans *Ann. Inst. Fourier* (3) 29 (1979).

U.E.R. de Mathématiques et d'Informatique
de l'Université de Bordeaux I,
351, Cours de la Libération,
33405 Talence Cedex,
France.