Théorème de Jordan friable

R. de la Bretèche & G. Tenenbaum

[1] Régis de la Bretèche, Institut de Mathématiques de Jussieu, UMR 7586, Université Paris Diderot-Paris 7, case 7012, Bâtiment Sophie Germain, 75205 Paris Cedex 13, France, regis.de-la-breteche@imj-prg.fr
[2] Gérald Tenenbaum, Institut Élie Cartan, Université de Lorraine, BP 70239, 54506 Vandœuvre-lès-Nancy Cedex, France, gerald.tenenbaum@univ-lorraine.fr

Pour Helmut Maier,
qui compte par plaisir et partage sans compter.

Résumé. Extending a previous result, we show that, for the friable summation method, the Fourier series of any normalized function F with bounded variation on the unidimensional torus converges pointwise to F while avoiding the Gibbs phenomenon. We also prove that the convergence is uniform when F is continuous and provide an effective bound for the rate when F satisfies a uniform Lipschitz condition.
Key words : Friable integers, friable summation, summation methods, Fourier series, Gibbs phenomenon, functions of bounded variation, Jordan's theorem, integers free of large prime factors.
2010 Mathematics Subject Classification.
Primary : 11N25, 42A24, secondary : 42A20.

1 Introduction et énoncé des résultats

Soit $VB^*(\mathbb{T})$ la classe des fonctions F qui sont 1-périodiques, à variation bornée sur $\mathbb{T}=\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, et normalisées par $F(\vartheta)=\frac{1}{2}\{F(\vartheta+)+F(\vartheta-)\}$ aux points de discontinuité. Nous nous proposons ici de généraliser aux fonctions de $VB^*(\mathbb{T})$ le théorème 5.1 de [2] relatif à la convergence friable des séries de Fourier et à l'absence de phénomène de Gibbs (voir par exemple, [9], vol. I, § II.9, ou [6], chapitre 17) pour ce procédé de sommation.

Désignons par $P(n)$ le plus grand facteur premier d'un entier naturel $n\geqslant 1$, avec la convention que $P(1)=1$. Nous notons $a_n(F)$, $b_n(F)$ les coefficients de Fourier d'une fonction F de $L^1(\mathbb{T})$, et nous définissons la suite des sommes partielles friables de la série de Fourier de F par

$$F(\vartheta;y):=a_0(F)+\sum_{P(n)\leqslant y}\big\{a_n(F)\cos(2\pi n\vartheta)+b_n(F)\sin(2\pi n\vartheta)\big\}\qquad(y\geqslant 2)\tag{1.1}$$

pour toute valeur de ϑ où cela possède un sens. C'est en particulier le cas si $F\in VB^*(\mathbb{T})$ puisque $|a_n(F)|+|b_n(F)|\ll 1/n$, ce qui implique l'absolue convergence de la série (1.1) pour chaque $y\geqslant 2$.

L'étude de la convergence de $F(\vartheta;y)$ lorsque y tend vers l'infini s'inscrit dans le cadre plus général de celle de la convergence friable des séries. Formellement introduit dans [3] puis dans [4], ce procédé de sommation [3] consistant à définir la somme comme limite, lorsque le paramètre de friabilité tend vers l'infini, des sous-séries restreintes aux entiers friables, a été étudié dans [1] puis de manière systématique dans [2]. Au théorème 5.1 de [2], nous avons établi la convergence simple de $F(\vartheta;y)$ vers $F(\vartheta)$ pour toute fonction F de $VB^*(\mathbb{T})$ sous réserve que la dérivée presque partout de F soit dans $\cup_{\alpha>1}L^\alpha(\mathbb{T})$. Le but de la présente note consiste à relâcher cette dernière condition.

Il est relativement facile d'exhiber des exemples de fonctions discontinues F appartenant à $VB^*(\mathbb{T})\smallsetminus\cup_{\alpha>1}L^\alpha(\mathbb{T})$: si $f\in L^1(\mathbb{T})\smallsetminus\cup_{\alpha>1}L^\alpha(\mathbb{T})$, on peut choisir

$$F(\vartheta):=\int_0^\vartheta f(t)\,\mathrm{d}t+B(\vartheta).$$

Un exemple de fonction f admissible est fourni par

$$f(\vartheta)=\sum_{n\geqslant 2}\frac{\cos(2\pi n\vartheta)}{\log n}. \tag{1.2}$$

En effet, un théorème classique concernant les séries trigonométriques $\sum_{n\in\mathbb{Z}}a_n\,\mathrm{e}^{2\pi i n\vartheta}$ dont la suite des coefficients est paire et vérifie identiquement $a_{n-1}+a_{n+1}\geqslant 2a_n$ (voir [5], théorème I.4.1, ou [9], vol. I, théorème V.1.5) implique [4] $f\in L^1(\mathbb{T})$ alors que, pour tout $\alpha>1$, posant $r:=\min(2,\alpha)$, $s:=r/(r-1)$, l'hypothèse $f\in L^\alpha(\mathbb{T})$ impliquerait $f\in L^r(\mathbb{T})$ et donc (cf., par exemple, [5], théorème I.4.7)

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}|\widehat{f}(n)|^s<\infty,$$

une condition manifestement en défaut pour la série (1.2).

Nous désignons par ρ la fonction de Dickman, [5] posons $\|v\|:=\min_{n\in\mathbb{Z}}|v-n|$ $(v\in\mathbb{R})$ et notons

$$B(\vartheta;y)=-\sum_{P(n)\leqslant y}\frac{\sin(2\pi n\vartheta)}{\pi n} \tag{1.3}$$

la somme partielle friable d'ordre y de la série de Fourier de la fonction de Bernoulli

$$B(\vartheta)=\sum_{m\geqslant 1}\frac{\sin(2\pi m\vartheta)}{\pi m}=\begin{cases}\langle\vartheta\rangle-\frac12 & \text{si } \vartheta\notin\mathbb{Z},\\ 0 & \text{si } \vartheta\in\mathbb{Z},\end{cases} \tag{1.4}$$

où $\langle\vartheta\rangle$ désigne la partie fractionnaire du nombre réel ϑ.

Théorème 1.1 *Soit $F\in VB^*(\mathbb{T})$. On a, uniformément pour $\vartheta\in\mathbb{R}$ et $y\geqslant 2$,*

3. Désigné dans ces travaux sous le nom de P-convergence ou P-sommabilité.

4. On peut aussi établir directement via la formule d'Euler–Maclaurin que, pour $0<|\vartheta|\leqslant\frac12$, on a $f(\vartheta)\ll 1/\{\vartheta(\log\vartheta)^2\}$.

5. Voir par exemple [7], chapitre III.5. Rappelons que ρ est la solution continue de l'équation différentielle aux différences $u\rho'(u)+\rho(u-1)=0$ avec la condition initiale $\rho(u)=1$ $(0\leqslant u\leqslant 1)$.

$$F(\vartheta;y)-F(\vartheta)=\int_{\mathbb{T}}\left\{\rho\left(\frac{\log(1/\|v\|)}{\log y}\right)-1\right\}B(v)\,\mathrm{d}F(\vartheta-v)+O\Big(\frac{1}{\log y}\Big). \tag{1.5}$$

En particulier, on a

$$\lim_{y\to\infty}F(\vartheta;y)\,=\,F(\vartheta)\qquad(\vartheta\in\mathbb{T}), \tag{1.6}$$

$$\lim_{y\to\infty}\sup_{\vartheta\in\mathbb{T}}F(\vartheta;y)\,=\,\sup_{\vartheta\in\mathbb{T}}F(\vartheta). \tag{1.7}$$

De plus, si F est continue, alors $F(\cdot;y)$ tend uniformément vers F.

Remarque. Bien que l'on ait (1.7), la convergence de $F(\vartheta;y)$ vers $F(\vartheta)$ n'est en général pas uniforme : il est facile de voir que la série $F(\vartheta;y)$ converge uniformément et donc que, pour chaque $y\geqslant 2$ fixé, $F(\vartheta;y)$ dépend continûment de ϑ. Il est cependant à noter que, contrairement à la situation classique, la convergence demeure exploitable au voisinage des discontinuités : alors que l'on sait, classiquement, que la somme partielle d'ordre y de la série (1.4) n'approche pas le membre de gauche pour, par exemple, $\vartheta=1/y$, on déduit de (1.5) que

$$B(1/y;y)-B(1/y)\ll 1/\log y\qquad(y\geqslant 2).$$

Sous une hypothèse supplémentaire de régularité pour F, nous pouvons préciser la vitesse de convergence de $F(\cdot;y)$ vers F.

Théorème 1.2 *Soit $\alpha>0$. Si $F\in VB^*(\mathbb{T})$ est uniformément lipschitzienne d'exposant $\alpha>0$, on a*

$$\max_{\vartheta\in\mathbb{T}}|F(\vartheta;y)-F(\vartheta)|\ll\frac{1}{y^{\alpha/2}}\qquad(y\geqslant 2). \tag{1.8}$$

2 Preuve du Théorème 1.1

Pour toute fonction F de $VB^*(\mathbb{T})$ et tout entier $n\geqslant 1$, on a

$$\begin{aligned}a_n(F)\cos(2\pi n\vartheta)+b_n(F)\sin(2\pi n\vartheta)&=2\int_{\mathbb{T}}\cos(2\pi n(\vartheta-v))F(v)\,\mathrm{d}v\\&=-\int_{\mathbb{T}}\frac{\sin(2\pi n(\vartheta-v))}{\pi n}\,\mathrm{d}F(v)=-\int_{\mathbb{T}}\frac{\sin(2\pi nv)}{\pi n}\,\mathrm{d}F(\vartheta-v).\end{aligned}$$

Cette quantité étant trivialement $\ll 1/n$, on peut sommer pour $P(n)\leqslant y$. On en déduit que l'on a, pour tout $y\geqslant 2$,

$$F(\vartheta;y)=a_0(F)+\int_{\mathbb{T}}B(v;y)\,\mathrm{d}F(\vartheta-v). \tag{2.1}$$

Par ailleurs, une simple intégration par parties fournit, dès que $F\in VB^*(\mathbb{T})$,

$$F(\vartheta)=a_0(F)+\int_{\mathbb{T}}B(v)\,\mathrm{d}F(\vartheta-v). \tag{2.2}$$

En effectuant la différence de (2.1) et (2.2), nous obtenons

$$F(\vartheta;y)-F(\vartheta)=\int_{\mathbb{T}}\nabla_1(v;y)\,\mathrm{d}F(\vartheta-v), \tag{2.3}$$

où l'on a posé

$$\nabla_1(\vartheta;y):=B(\vartheta;y)-B(\vartheta). \tag{2.4}$$

Or, nous avons établi dans [2] que l'on a, uniformément pour $\vartheta \in \mathbb{R}$,

$$\nabla_1(\vartheta;y) = \{\rho(u^*_{\vartheta,y}) - 1\}B(\vartheta) + O\Big(\frac{1}{\log y}\Big), \tag{2.5}$$

où nous avons posé

$$u^*_{\vartheta,y} := \frac{\log(1/\|\vartheta\|)}{\log y} \qquad (\vartheta \in \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Z})$$

et convenu que $u^*_{\vartheta,y} = \infty$ si $\vartheta \in \mathbb{Z}$. Il s'ensuit que

$$F(\vartheta;y) - F(\vartheta) = \int_{\mathbb{T}} \{\rho(u^*_{v,y}) - 1\}B(v)\,\mathrm{d}F(\vartheta - v) + O_F(1/\log y). \tag{2.6}$$

Comme $\{\rho(u^*_{v,y}) - 1\}B(v)$ tend simplement vers 0 sur $\mathbb{T}$, la relation (2.5) implique clairement (2.6), en vertu du théorème de la convergence dominée.

Montrons maintenant (2.7). Il résulte immédiatement de (2.6) que

$$\limsup_{y\to\infty} \sup_{\vartheta} F(\vartheta;y) \geqslant \sup_{\vartheta} F(\vartheta).$$

Il suffit donc de prouver l'inégalité inverse. Nous pouvons supposer sans perte de généralité que $a_0(F) = 0$. Posons

$$F_y(\vartheta) := \int_{\mathbb{T}} \rho(u^*_{v,y})B(v)\,\mathrm{d}F(\vartheta - v),$$

de sorte que, par (2.2) et (2.6), on a

$$\sup_{\vartheta} |F(\vartheta;y) - F_y(\vartheta)| \ll 1/\log y \qquad (y \to \infty).$$

Comme l'application $v \mapsto \rho(u^*_{v,y})B(v)$ est continue sur $\mathbb{T}$, $F_y(\vartheta)$ est, pour chaque y, une fonction continue de ϑ. Elle atteint donc son maximum en un point ϑ_y. Quitte à extraire une sous-suite, nous pouvons supposer que

$$\limsup_{y\to\infty} \sup_{\vartheta} F(\vartheta;y) = \lim_{y\to\infty} F_y(\vartheta_y)$$

et que ϑ_y tend vers une limite $\vartheta_0 \in \mathbb{T}$. Quitte à changer $F(\vartheta)$ en $F(\vartheta - \vartheta_0)$, nous pouvons encore effectuer l'hypothèse que $\vartheta_0 = 0$.

Soit $\delta_F := F(0+) - F(0-)$ le saut de F en 0. Posons

$$H(\vartheta) := 1 + \lfloor \vartheta \rfloor - \tfrac{1}{2}\mathbf{1}_{\mathbb{Z}}(\vartheta)$$

de sorte que $\widetilde{F} := F - \delta_F H$ est continue sur $\mathbb{Z}$. Pour $\vartheta \in \mathbb{T}$, nous avons

$$F_y(\vartheta) = \int_{\mathbb{T}} \rho(u^*_{v,y})B(v)\,\mathrm{d}\widetilde{F}(\vartheta - v) + \delta_F\,\rho(u^*_{\vartheta,y})B(\vartheta). \tag{2.7}$$

Comme $\rho(u^*_{v,y})B(v)$ tend simplement vers $B(v)$ sur $\mathbb{T}$ avec une convergence uniforme sur tout compact de $\mathbb{T}$ ne contenant pas 0, et comme $\widetilde{F}$ est continue en 0, on a

$$\lim_{y\to\infty} \int_{\mathbb{T}} \rho(u^*_{v,y})B(v)\,\mathrm{d}\widetilde{F}(\vartheta_y - v) = \int_{\mathbb{T}} B(v)\,\mathrm{d}\widetilde{F}(-v).$$

Il suit

$$F_y(\vartheta_y) \leqslant \int_{\mathbb{T}} B(v)\,\mathrm{d}\widetilde{F}(-v) + \tfrac{1}{2}|\delta_F| + o(1).$$

Or, en faisant tendre y vers l'infini dans (2.7), nous obtenons successivement

$$F(0\pm) = \int_{\mathbb{T}} B(v)\,\mathrm{d}\widetilde{F}(-v) \mp \tfrac{1}{2}\delta_F, \qquad \max\{F(0+),F(0-)\} = \int_{\mathbb{T}} B(v)\,\mathrm{d}\widetilde{F}(-v) + \tfrac{1}{2}|\delta_F|.$$

On en déduit que

$$F_y(\vartheta_y) \leqslant \max\{F(0+),F(0-)\} + o(1) \leqslant \sup_{\vartheta} F(\vartheta) + o(1).$$

Cela achève la preuve de (2.7).

Lorsque F est continue, et puisque $\rho(v) = 1$ pour $0 \leqslant v \leqslant 1$, la relation (2.5) implique

$$|F(\vartheta;y) - F(\vartheta)| \leqslant \int_{\vartheta-1/y}^{\vartheta+1/y} |\mathrm{d}F|(t) + O\Big(\frac{1}{\log y}\Big),$$

où la constante implicite ne dépend que de F. Comme F est continue, et donc uniformément continue en vertu de la compacité du tore, il en va de même de sa variation. La dernière intégrale tend donc vers 0 uniformément en ϑ.

3 Preuve du Théorème 1.2

Sous l'hypothèse que F est à variation bornée sur $\mathbb{T}$ et satisfait une condition de Lipschitz uniforme

$$F(\vartheta + h) - F(\vartheta) \ll |h|^{\alpha}, \tag{3.1}$$

où $\alpha > 0$ et la constante implicite est indépendante de $\vartheta \in \mathbb{T}$, un théorème de Zygmund ([9], vol. I, th. VI.3.6) implique que la série de Fourier de F, i.e.

$$F(\vartheta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(F)\,\mathrm{e}(n\vartheta), \tag{3.2}$$

avec la notation familière $\mathrm{e}(t) := \mathrm{e}^{2\pi i t}$ $(t \in \mathbb{R})$, est absolument convergente.

En fait, la démonstration de Zygmund fournit, sous la seule hypothèse que F est à variation bornée, la majoration

$$\sum_{2^{\nu-1}<|n|\leqslant 2^{\nu}} |c_n(F)| \leqslant \tfrac{1}{2}\sqrt{V_F\,\omega_F(1/2^{\nu+1})} \qquad (\nu \in \mathbb{N}^*), \tag{3.3}$$

où V_F désigne la variation totale de F sur $\mathbb{T}$ et $h \mapsto \omega_F(h)$ son module de continuité.

Pour la commodité du lecteur, nous reproduisons ici la courte preuve de [9]. Soient $\nu \geqslant 1$, $N := 2^{\nu+1}$. Pour tout $\vartheta \in \mathbb{T}$, nous avons

$$\sum_{1\leqslant k\leqslant N} \Big|F\Big(\vartheta + \frac{k}{N}\Big) - F\Big(\vartheta + \frac{k-1}{N}\Big)\Big|^2 \leqslant V_F\,\omega_F\Big(\frac{1}{N}\Big).$$

En intégrant sur $\mathbb{T}$, nous obtenons

$$4N \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(F)|^2 \sin^2\Big(\frac{\pi n}{N}\Big) \leqslant V_F\,\omega_F\Big(\frac{1}{N}\Big).$$

Nous en déduisons (3.3) en observant que, pour $N/4 < |n| \leqslant N/2$, nous avons

$$\sqrt{2}/2 \leqslant |\sin(\pi n/N)| \leqslant 1$$

et en appliquant l'inégalité de Cauchy–Schwarz.

Sous la condition (3.1), nous déduisons immédiatement de (3.3) que

$$\sum_{|n|>y} |c_n(F)| \ll_F \frac{1}{y^{\alpha/2}} \qquad (y \geqslant 1). \tag{3.4}$$

Posons

$$\left.\begin{aligned} F_N(\vartheta) &:= \sum_{|n|\leqslant N} c_n(F)\,\mathrm{e}(n\vartheta),\\ F_N(\vartheta;y) &:= \sum_{\substack{|n|\leqslant N\\ P(|n|)\leqslant y}} c_n(F)\,\mathrm{e}(n\vartheta)\end{aligned}\right\} \qquad (N\geqslant 1,\ \vartheta\in\mathbb{T},\ y\geqslant 2).$$

Pour tous $\vartheta \in \mathbb{T}$, $N \geqslant 1$, nous avons, par (3.3),

$$F_N(\vartheta;y) - F_N(\vartheta) = -\sum_{\substack{|n|\leqslant N\\ P(|n|)>y}} c_n(F)\,\mathrm{e}(n\vartheta) \ll \frac{1}{y^{\alpha/2}} \tag{3.5}$$

où la majoration découle de (3.4), la constante implicite étant donc indépendante de N.

Comme $F \in VB^*(\mathbb{T})$, on a $c_n(F) \ll 1/n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$, donc $F_N(\vartheta;y)$ tend simplement vers $F(\vartheta;y)$ lorsque N tend vers l'infini. D'après le théorème de Jordan, il en va de même de la convergence de $F_N(\vartheta)$ vers $F(\vartheta)$. Nous obtenons donc (3.8) en faisant tendre N vers l'infini dans (3.5).

Littérature

1. R. de la Bretèche, *P*-régularité de sommes d'exponentielles, *Mathematika* **45** (1998), 145–175.
2. R. de la Bretèche & G. Tenenbaum, Séries trigonométriques à coefficients arithmétiques, *J. Anal. Math.* **92** (2004), 1–79.
3. R.J. Duffin, Representation of Fourier integrals as sums, III, *Proc. Amer.Math. Soc.* **8** (1957), 272–277.
4. E. Fouvry & G. Tenenbaum, Entiers sans grand facteur premier en progressions arithmétiques, *Proc. London Math. Soc.* (3) **63** (1991), 449–494.
5. Y. Katznelson, *An introduction to harmonic analysis*, Dover, New York, 2ème édition, 1976.
6. T.W. Körner, *Fourier analysis*, Second edition, Cambridge University Press, Cambridge, 1989, xii+591 pp.
7. G. Tenenbaum, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, 4ème édition, coll. Échelles, Belin, 2015, 592.
8. G. Tenenbaum & J. Wu, *Théorie analytique et probabiliste des nombres : 307 exercices corrigs*, coll. Échelles, Belin, 2014.
9. A. Zygmund, *Trigonometric series,* Vol. I, II, 3ème édition, Cambridge Mathematical Library, Cambridge University Press, Cambridge, 2002 ; vol.I : xiv+383 pp. ; vol. II : viii+364 pp.