

Une inégalité de Hilbert pour les diviseurs

G. Tenenbaum

Abstract. We prove in a strong form an old conjecture of Erdős to the effect that

$$\sum_{1 \leq i < j \leq \tau(n)} (d_j - d_i)^{-1} \ll \tau(n)$$

holds uniformly for all integers $n > 1$, where $1 = d_1 < \dots < d_{\tau(n)} = n$ denotes the increasing sequence of the divisors of n . In fact, we show that the above estimate is true with $\tau(n)^{1-c}$ in the right hand side, and $c > 5/83$. We evaluate, to within positive absolute constants, the maximal order of the norm of the bilinear form associated with the numbers $(d_j - d_i)^{-1}$ ($1 \leq i < j \leq \tau(n)$). We show, in particular, that it is logarithmically smaller than the maximal norm corresponding to arbitrary increasing sequences of $\tau(n)$ integers.

§ 1. Introduction.

Désignons par $d_1 = 1 < d_2 < \dots < d_{\tau(n)} = n$ la suite croissante des diviseurs d'un entier générique n . Erdős a souvent posé la question suivante, récemment reprise par Montgomery dans [11] : a-t-on pour tout $n \geq 2$

$$(1) \quad \mathcal{H}(n) := \sum_{1 \leq i < j \leq \tau(n)} (d_j - d_i)^{-1} \ll \tau(n) ?$$

Erdős et Nicolas conjecturent même dans [3] que l'on a $\mathcal{H}(n) < \tau(n)$ pour $n > 5040$.

La question structurelle sous-jacente dans ce problème est celle de la tendance à la lacunarité de la suite $\{d_j : 1 \leq j \leq \tau(n)\}$. Bien que l'on ait (cf. [7, 10])

$$\min_{1 \leq j < \tau(n)} \frac{d_{j+1}}{d_j} \rightarrow 1$$

pour une suite convenable d'entiers n de densité unité, la fonction $\mathcal{H}(n)$ est de valeur moyenne bornée — voir aussi l'argument de [6], pp. 307–8. Cela n'interdit pas l'émergence occasionnelle de grandes valeurs pour $\mathcal{H}(n)$: il découle en particulier du théorème 8 de [6] que

$$\max_{n \leq x} \mathcal{H}(n) > \exp \left\{ (\log x)^{\frac{1}{2} + o(1)} \right\} \quad (x \rightarrow \infty).$$

L'objet essentiel de cette note est d'établir la conjecture (1), sous une forme forte.

Théorème 1. Posons $c := 1/(2 + 36 \log \frac{3}{2}) > 5/83$. On a pour $n \geq 2$

$$(2) \quad \mathcal{H}(n) \ll \tau(n)^{1-c} \log \tau(n) \log_2(2\tau(n)).$$

Ici et dans toute la suite de cet article, nous désignons par \log_k la k -ième itérée de la fonction logarithme.

Nous n'avons pas cherché à déterminer la constante implicite dans (2), mais il serait aisé, si on le souhaite, de donner une valeur numérique très raisonnable.

Notre démonstration du théorème 1 repose sur une majoration universelle pour les fonctions arithmétiques d'une certaine classe, liée à la propriété $(d_i, d_j) = 1$. Nous dirons qu'une application g_n , définie sur l'ensemble des diviseurs de n et à valeurs entières, est *régulière* si g_n est injective et si l'on a pour tous diviseurs d, t de n

$$\left((d, g_n(d)) = 1, \quad (t, g_n(t)) = 1, \quad dg_n(d) = tg_n(t)|n \right) \Rightarrow d = t.$$

Nous introduisons alors la classe \mathcal{E} des fonctions arithmétiques $F(n)$ du type

$$F(n) := |\{d : d|n, g_n(d)|n, (d, g_n(d)) = 1\}|,$$

pour une injection régulière convenable g_n définie sur l'ensemble des diviseurs de n .

La classe \mathcal{E} contient deux cas particuliers importants :

(a) La fonction d'Erdős

$$(3) \quad f(n) := |\{1 \leq i < \tau(n) : (d_i, d_{i+1}) = 1\}|,$$

liée à l'application $g_n(d_i) := d_{i+1}$ ($1 \leq i < \tau(n)$), $g_n(n) := n + 1$. La régularité de g_n découle ici de la croissance en i de la suite d_i : si $d_i d_{i+1} = d_j d_{j+1}$ alors $i = j$. Cette fonction "non conventionnelle" a été considérée dans [2, 4, 5, 6]. Elle n'est artificielle qu'en apparence ; sa définition reflète le conflit entre les deux structures d'ordre naturelles dont on peut munir la suite $\{d_j : 1 \leq j \leq \tau(n)\}$ — cf. l'avant-propos de [7]. Il est établi dans [6] que l'on a

$$(4) \quad f(n) \leq 3\tau(n) \frac{\log_2(2\tau(n))}{\sqrt{\log \tau(n)}} \quad (n \geq 2)$$

alors que

$$(5) \quad f(n) \gg \sqrt{\tau(n)}$$

a lieu pour une suite infinie de valeurs de n telle que $\tau(n) \rightarrow +\infty$. Le théorème 2 ci-dessous renforce considérablement (4).

(b) La fonction

$$\kappa(n) := |\{d : d(d+1)|n\}|,$$

associée à l'injection $g_n(d) := d + 1$. Introduite dans [2], cette fonction demeure passablement mystérieuse. Balog, Erdős et l'auteur montrent dans [1] que

$$\max_{n \leq x} \kappa(n) > (\log x)^{\log_3 x / 9 \log_4 x},$$

et les majorations disponibles sont très éloignées de cette minoration. Il est probable que

$$\kappa(n) \ll_{\varepsilon} \tau(n)^{\varepsilon}$$

mais on ne dispose d'aucun résultat essentiellement meilleur que l'inégalité triviale $\kappa(n) \leq f(n)$.

Théorème 2. *Pour toute fonction F de la classe \mathcal{E} , on a*

$$(6) \quad F(n) \leq 3\tau(n)^{1-c} \quad (n \geq 2).$$

Au vu de (5), ce résultat est optimal, mise à part la valeur numérique de c . Cette optimalité ne vaut pas pour (2), et il n'est pas exclu que l'on ait pour tout $\varepsilon > 0$

$$(7) \quad \mathcal{H}(n) \ll_{\varepsilon} \tau(n)^{\varepsilon} \quad (n \geq 2).$$

Dans la preuve du théorème 1, nous appliquons (6) aux fonctions

$$\kappa_s(n) := |\{d : d(d+s) | n, (d, s) = 1\}|.$$

L'uniformité en s fournie par le théorème 2 se révèle alors cruciale.

Les majorations (1) ou (2) peuvent être considérées dans le cadre plus général d'inégalités de Hilbert (cf. [8])

$$(8) \quad \left| \sum_{1 \leq i < j \leq T} \frac{\xi_i \xi_j}{\delta_j - \delta_i} \right| \leq M \sum_{i=1}^T \xi_i^2$$

où $\{\delta_j : 1 \leq j \leq T\}$ est une suite d'entiers strictement croissante, et $M = M(\delta_1, \dots, \delta_T)$ est l'infimum de l'ensemble des nombres réels M tels que (8) ait lieu pour toute suite réelle finie $\{\xi_j : 1 \leq j \leq T\}$. Posons

$$\mathcal{M}(T) := \sup_{\delta_1 < \dots < \delta_T} M(\delta_1, \dots, \delta_T).$$

On peut montrer facilement (cf. *infra*) que

$$(9) \quad \mathcal{M}(T) = \log T + O(1) \quad (T \rightarrow \infty),$$

et la relation (2) suggère que l'on a

$$(10) \quad \mathcal{L}(n) := M(d_1, \dots, d_{\tau(n)}) = o(\mathcal{M}(\tau(n))) \quad (\tau(n) \rightarrow \infty).$$

Nous pouvons effectivement établir cette estimation, sous une forme quantitative.

Théorème 3. *On a*

$$(11) \quad \mathcal{L}(n) \ll \log_2 \tau(n) \quad (\tau(n) \rightarrow \infty).$$

De plus, la minoration

$$(12) \quad \mathcal{L}(n) \gg \log_2 \tau(n)$$

a lieu pour une infinité d'entiers n .

La majoration (11) du théorème 3 est obtenue grâce à une évaluation générale du nombre des diviseurs d'un entier n dans de petits intervalles. Ce résultat est susceptible de servir dans d'autres contextes, et nous l'énonçons séparément ci-dessous. Nous désignons par $\omega(n)$ le nombre des facteurs premiers distincts de l'entier n , et nous posons pour $n \geq 1$, $x > 0$, $y > 0$,

$$\tau(n; x) := \sum_{\substack{d|n \\ d \leq x}} 1, \quad \tau(n; x, y) := \sum_{\substack{d|n \\ x < d \leq x+y}} 1.$$

Théorème 4. *On a pour $n > 1$, $x \geq y \geq 2$,*

$$(13) \quad \tau(n; x, y) \ll \frac{y \log(2\omega(n))}{\log x} + \omega(n)$$

Nous achevons cette introduction par la preuve de (9). La majoration est immédiate : on a

$$(14) \quad \begin{aligned} \left| \sum_{1 \leq i < j \leq T} \frac{\xi_i \xi_j}{\delta_j - \delta_i} \right| &\leq \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i < j \leq T} \frac{\xi_i^2 + \xi_j^2}{\delta_j - \delta_i} \\ &\leq \frac{1}{2} \left(\max_{1 \leq i < T} \sum_{i < j \leq T} \frac{1}{\delta_j - \delta_i} + \max_{1 < j \leq T} \sum_{1 \leq i < j} \frac{1}{\delta_j - \delta_i} \right) \sum_{i=1}^T \xi_i^2 \\ &\leq \sum_{1 \leq m \leq T} \frac{1}{m} \cdot \sum_{i=1}^T \xi_i^2 \end{aligned}$$

Pour établir la minoration, nous considérons le cas

$$\delta_i = i, \quad \xi_i = 1 \quad (1 \leq i \leq T).$$

Puisque $\sum_{i=1}^T \xi_i^2 = T$, on peut écrire

$$MT \geq \sum_{1 \leq i < j \leq T} \frac{1}{j-i} = \sum_{h=1}^{T-1} \left(\frac{T-h}{h} \right) = T \log T + O(T).$$

§ 2. Preuve des théorèmes 1 et 2.

Dans un premier temps, nous montrons comment le théorème 1 découle du théorème 2. Nous établissons plus précisément le résultat suivant, qui est probablement le maillon faible dans la chaîne des majorations de $\mathcal{H}(n)$.

Lemme 1. Soit $E(n) := \sup_{F \in \mathcal{E}} F(n)$. On a pour $n \geq 2$

$$(15) \quad \mathcal{H}(n) \leq (1 + 2 \log \tau(n)) \sum_{m|n} \frac{1}{m} E\left(\frac{n}{m}\right).$$

Démonstration. Réordonnons la sommation (1) selon les valeurs de $h := d_j - d_i$. Nous obtenons

$$\mathcal{H}(n) = \sum_{1 \leq h < n} \frac{1}{h} \sum_{d|n, (d+h)|n} 1.$$

Dans la somme intérieure, posons $m = (d, h)$, $h = sm$, $d = tm$. Il suit

$$\mathcal{H}(n) = \sum_{m|n} \sum_{1 \leq s < n/m} \frac{1}{ms} \kappa_s\left(\frac{n}{m}\right)$$

Il est clair que $\kappa_s \in \mathcal{E}$, donc $\kappa_s(\ell) \leq E(\ell)$ pour tout $\ell \geq 1$. De plus, $\kappa_s(\ell)$ n'est non nul, à ℓ fixé, que pour au plus $\tau(\ell)^2$ valeurs de s . Donc

$$\mathcal{H}(n) \leq \sum_{m|n} \frac{1}{m} E\left(\frac{n}{m}\right) \sum_{1 \leq s \leq \tau(n/m)^2} \frac{1}{s},$$

d'où (15).

Il est aisé de déduire (2) de la conjonction de (6) et (15). En majorant $E(n/m)$ par $3\tau(n)^{1-c}$ dans (15), on obtient en effet

$$(16) \quad \mathcal{H}(n) \ll \tau(n)^{1-c} \log \tau(n) \sum_{m|n} \frac{1}{m}.$$

Soit q le $\omega(n)$ -ième nombre premier. La somme en m de (16) n'excède pas

$$(17) \quad \prod_{p \leq q} (1 - p^{-1})^{-1} \ll \exp \sum_{p \leq q} p^{-1} \\ \ll \log q \ll \log(2\omega(n)) \ll \log_2(2\tau(n)).$$

Cela établit bien (2).

Nous entreprenons maintenant la démonstration du théorème 2. L'idée essentielle consiste à exploiter la concentration des valeurs $\omega(d)$, lorsque d parcourt l'ensemble des diviseurs de n , autour de la moyenne

$$(18) \quad A(n) := \frac{1}{\tau(n)} \sum_{d|n} \omega(d) = \sum_{p^\nu || n} \frac{\nu}{\nu + 1}.$$

Pour $\alpha > 0$, désignons par $S^+(n, \alpha)$ (resp. $S^-(n, \alpha)$) le nombre des diviseurs d de n tels que

$$\omega(d) \geq (1 + \alpha)A(n) \quad (\text{resp. } \omega(d) \leq (1 - \alpha)A(n)).$$

Lemme 2. *Pour $n \geq 1$, $\alpha \geq 0$, on a*

$$(19) \quad S^\pm(n, \alpha) \leq \tau(n) \exp\{-\alpha^2 A(n)\}.$$

Démonstration. Considérons par exemple le cas de $S^+(n, \alpha)$. Pour chaque valeur du paramètre $t \geq 0$, on a

$$\begin{aligned} S^+(n, \alpha) &\leq F_n(t) := \sum_{d|n} \exp\{t\omega(d) - t(1 + \alpha)A(n)\} \\ &= \prod_{p^\nu || n} (1 + \nu e^t) \cdot e^{-t(1 + \alpha)A(n)}. \end{aligned}$$

Maintenant

$$\begin{aligned} G_n(t) &:= \frac{F'_n(t)}{F_n(t)} = \sum_{p^\nu || n} \frac{\nu e^t}{1 + \nu e^t} - (1 + \alpha)A(n), \\ G'_n(t) &= \sum_{p^\nu || n} \frac{\nu e^t}{(1 + \nu e^t)^2} \leq \sum_{p^\nu || n} \frac{\nu}{(1 + \nu)^2} \leq \frac{1}{2}A(n). \end{aligned}$$

Puisque $G_n(0) = -\alpha A(n)$, il suit

$$G_n(t) = G_n(0) + \int_0^t G'_n(s) ds \leq \left(\frac{1}{2}t - \alpha\right)A(n)$$

et donc

$$\log \left(\frac{F_n(t)}{\tau(n)} \right) = \log \left(\frac{F_n(t)}{F_n(0)} \right) = \int_0^t G_n(s) ds \leq \left(\frac{1}{4}t^2 - \alpha t\right)A(n).$$

La majoration annoncée en découle, pour le choix optimal $t = 2\alpha$. Le cas de $S^-(n, \alpha)$ est semblable ; nous omettons les détails.

Lemme 3. Soit F une fonction de la classe \mathcal{E} . On a pour tout entier $n \geq 1$

$$(20) \quad F(n) \leq 3\tau(n) \exp\left\{-\frac{1}{9}A(n)\right\}.$$

Démonstration. Soit g_n une application régulière associée à F . Pour tout diviseur d de n compté dans $F(n)$, le nombre $t := dg_n(d)$ est un diviseur de n et l'une des trois éventualités suivantes se produit nécessairement :

$$(a) \quad \omega(d) \leq \frac{2}{3}A(n); \quad (b) \quad \omega(g_n(d)) \leq \frac{2}{3}A(n); \quad (c) \quad \omega(t) > \frac{4}{3}A(n).$$

Puisque g_n est injective et que la décomposition $t = dg_n(d)$ est unique, nous obtenons

$$F(n) \leq 2S^-(n, \frac{1}{3}) + S^+(n, \frac{1}{3}) \leq 3\tau(n) \exp\left\{-\frac{1}{9}A(n)\right\},$$

comme annoncé, en utilisant le lemme 2 avec $\alpha = \frac{1}{3}$.

La majoration (20) fournit une borne de qualité comparable à (6) lorsque $A(n)$ est de l'ordre de $\log \tau(n)$. Un argument complémentaire est nécessaire pour disposer de l'éventualité où $A(n)$ est "petit". C'est l'objet du lemme suivant.

Lemme 4. Soit $\delta := 2 \log \frac{3}{2}$. Pour toute fonction F de la classe \mathcal{E} et tout entier $n \geq 1$, on a

$$(21) \quad F(n) \leq 2\sqrt{\tau(n)} \exp\{\delta A(n)\}.$$

Démonstration. Posons

$$T(d) = T_n(d) := \prod_{p|d, p^\nu || n} \frac{1}{\nu + 1}.$$

Si $(d, g_n(d)) = 1$, on a clairement

$$T(d)T(g_n(d)) \geq \frac{1}{\tau(n)},$$

donc $T(m)\sqrt{\tau(n)} \geq 1$ a lieu soit pour $m = d$, soit pour $m = g_n(d)$. Il suit

$$F(n) \leq 2\sqrt{\tau(n)} \sum_{m|n} T(m) = 2\sqrt{\tau(n)} \prod_{p^\nu || n} \left(1 + \frac{\nu}{\nu + 1}\right).$$

En vertu de l'inégalité

$$1 + \frac{\nu}{\nu + 1} \leq \exp\left\{\frac{\delta\nu}{\nu + 1}\right\} \quad (\nu \geq 1),$$

on obtient bien (21).

Fin de la démonstration du théorème 2.

Les majorations (20) et (21) impliquent

$$F(n) \leq 3 \max_{z \geq 1} \min \left(\tau(n)z^{-1/9}, \tau(n)^{1/2}z^\delta \right).$$

Le maximum est obtenu pour $z = \tau(n)^{9c}$, où c est la constante définie au théorème 1. Cela fournit bien la conclusion annoncée.

§ 3. Preuve des théorèmes 3 et 4 .

Nous commençons par établir le théorème 4, qui nous servira dans la démonstration du théorème 3. Le point de départ est une identité pour la fonction $\tau(n; x)$ analogue à celle de Hildebrand pour les entiers sans grand facteur premier — cf. par exemple [9]. On a pour $n \geq 1, x > 0$,

$$(22) \quad \tau(n; x) \log x - \int_1^x \tau(n; u) \frac{du}{u} = \sum_{\substack{d|n \\ d \leq x}} \Lambda(d) \tau\left(\frac{n}{d}; \frac{x}{d}\right).$$

On prouve (22) en remarquant que les deux membres sont égaux à $\sum_{m|n, m \leq x} \log m$. L'expression de gauche est obtenue par sommation d'Abel, celle de droite par insertion de l'identité de convolution $\log m = \sum_{d|m} \Lambda(d)$.

En utilisant l'inégalité

$$\tau(n; x, y) \log x \leq \tau(n; x+y) \log(x+y) - \tau(n; x) \log x - \int_x^{x+y} \tau(n; u) \frac{du}{u},$$

on déduit immédiatement de (22) que l'on a, dans les conditions du théorème,

$$\begin{aligned} \tau(n; x, y) \log x &\leq \sum_{d|n, d \leq x+y} \Lambda(d) \tau\left(\frac{n}{d}; \frac{x}{d}, \frac{y}{d}\right) \\ &\leq \sum_{d|n, d \leq x+y} \Lambda(d) \left(\frac{y}{d} + 1\right) = \sum_{p|n} \log p \sum_{\nu: p^\nu | n, p^\nu \leq x+y} \left(\frac{y}{p^\nu} + 1\right) \\ &\leq \sum_{p|n} \log p \left(\frac{y}{p-1} + \frac{\log(x+y)}{\log p}\right) \\ &\leq y \sum_{p|n} \frac{\log p}{p-1} + \omega(n) \log(2x). \end{aligned}$$

Soit q le $\omega(n)$ -ième nombre premier. La somme en p est

$$\ll \sum_{p \leq q} \frac{\log p}{p-1} \ll \log q \ll \log(2\omega(n)).$$

Cela implique bien le résultat annoncé.

Pour obtenir la minoration (12) du théorème 3, il suffit de considérer le cas $n = m!$. Lorsque $\xi_j = 1$ ($1 \leq d_j \leq m$), $\xi_j = 0$ ($d_j > m$), on a

$$\sum_{1 \leq j \leq \tau(n)} \xi_j^2 = m, \quad \text{et} \quad \sum_{1 \leq i < j \leq \tau(n)} \frac{\xi_i \xi_j}{d_j - d_i} = \sum_{1 \leq t < m} \frac{m-t}{t} = m \log m + O(m).$$

On en déduit immédiatement

$$\mathcal{L}(n) \geq \log m + O(1) \sim \log_2 \tau(n).$$

Nous tournons ensuite notre attention vers la majoration (11) pour $\mathcal{L}(n)$. En vertu de la seconde des inégalités (14), nous avons

$$\mathcal{L}(n) \leq \frac{1}{2}(L_1(n) + L_2(n)),$$

avec

$$L_1(n) := \max_{m|n} \sum_{\substack{d|n \\ d > m}} \frac{1}{d-m}, \quad L_2(n) := \max_{m|n} \sum_{\substack{d|n \\ d < m}} \frac{1}{m-d}.$$

Majorons par exemple $L_1(n)$. L'autre cas est semblable. Etant donné un paramètre $R \geq 2$, qui sera choisi optimalement plus loin, nous pouvons écrire, pour un diviseur de n convenable m ,

$$\begin{aligned} L_1(n) &\leq \sum_{\substack{d|n \\ m < d \leq m+R}} \frac{1}{d-m} + \sum_{1 \leq j \leq m/R} \sum_{\substack{d|n \\ m+jR < d \leq m+(j+1)R}} \frac{1}{d-m} + \sum_{\substack{d|n \\ d > 2m}} \frac{1}{d-m} \\ &\leq 1 + \log R + \sum_{1 \leq j \leq m/R} \frac{\tau(n; m+jR, R)}{jR} + \sum_{d|n} \frac{2}{d}. \end{aligned}$$

Ainsi que nous l'avons établi au § 2, la somme en d est $\ll \log_2(2\tau(n))$. En utilisant (13) et la majoration $\omega(n) \ll \log \tau(n)$, on peut estimer la somme en j par

$$\ll \sum_{1 \leq j \leq m/R} \frac{\alpha_j}{j} \left(\frac{\log_2(2\tau(n))}{\log(2m)} + \frac{\log \tau(n)}{R} \right),$$

où α_j vaut 1 ou 0 selon que $\tau(n; m+jR, R)$ est ou non strictement positif. Puisque $\sum_j \alpha_j \leq \tau(n)$, l'expression précédente est certainement

$$\begin{aligned} &\ll \frac{\log_2(2\tau(n))}{\log(2m)} \sum_{1 \leq j \leq m/R} \frac{1}{j} + \frac{\log \tau(n)}{R} \sum_{1 \leq j \leq \tau(n)} \frac{1}{j} \\ &\ll \log_2(2\tau(n)) + \frac{1}{R} (\log \tau(n))^2. \end{aligned}$$

Il suit

$$L_1(n) \ll \log R + \log_2(2\tau(n)) + \frac{1}{R}(\log \tau(n))^2.$$

Pour le choix $R := 1 + (\log \tau(n))^2$, on obtient la majoration requise. Cela complète la démonstration du théorème 3.

Remarques finales.

(i) La majoration

$$(23) \quad L_1(n) + L_2(n) \ll \log_2(2\tau(n))$$

est intéressante en elle-même et avait été conjecturée par Erdős sous la forme plus faible où le membre de droite vaut $\log_2 n$.

(ii) En adjoignant à la majoration (20), écrite sous la forme

$$F(n) \leq 3\tau(n) \exp\left\{-\frac{1}{18}\omega(n)\right\},$$

l'estimation

$$f(n) \leq 2\tau(n) \frac{\omega(n)}{\Omega(n)}$$

établie dans [5] (formule 2.14) pour la fonction f définie par (3), on obtient

$$(24) \quad f(n) \ll \tau(n) \frac{\log(2\Omega(n))}{\Omega(n)} \quad (n > 1).$$

Cette estimation est presque optimale : d'après le théorème 2 de [5], on a en effet $f(n) \geq \tau(n)/2\Omega(n)$ pour une suite infinie d'entiers n telle $\tau(n) \rightarrow +\infty$.

Bibliographie.

- [1] A. Balog, P. Erdős, et G. Tenenbaum, "On arithmetic functions involving consecutive divisors", in : B. Berndt, H. Diamond, H. Halberstam, A. Hildebrand (eds.) *Analytic Number Theory* (Urbana, 1989), *Prog. Math.* **85**, 77–90 (Birkhäuser, 1990).
- [2] P. Erdős et R.R. Hall, "On some unconventional problems on the divisors of integers" *J. Austral. Math. Soc. Ser. A*, **25** (1978), 479–485.
- [3] P. Erdős et J.L. Nicolas, "On functions connected with prime divisors of an integer", in : R.A. Mollin (ed.), *Number Theory and Applications* (Banff 1988), Kluwer Academic Publishers (1989), 381–391.
- [4] P. Erdős et G. Tenenbaum, "Sur la structure de la suite des diviseurs d' un entier", *Ann. Inst. Fourier* **31** (1) (1981), 17–37.
- [5] P. Erdős et G. Tenenbaum, "Sur les diviseurs consécutifs d' un entier", *Bull. Soc. Math. de France* **111** (1983), 125–145.

- [6] P. Erdős et G. Tenenbaum, “Sur les fonctions arithmétiques liées aux diviseurs consécutifs”, *J. Number Theory* **31** (1989), 285–311.
- [7] R.R. Hall et G. Tenenbaum, *Divisors*, Cambridge University Press (1988).
- [8] G.H. Hardy, J.E. Littlewood, et G. Polya, *Inequalities*, Cambridge University Press (1952).
- [9] A. Hildebrand, “Integers free of large prime divisors in short intervals”, *Quart. J. Math. Oxford* (2) **36** (1985), 57–69.
- [10] H. Maier et G. Tenenbaum, “On the set of divisors of an integer”, *Inventiones Math.* **76** (1984), 121–128.
- [11] H.L. Montgomery, *Questions related to number theory and analysis*, Liste de problèmes distribuée au colloque de Manhattan (Kansas), Mai 1990.

Département de Mathématiques
Université de Nancy I
BP 239
54506 Vandœuvre Cedex
France