

SUR LA PROBABILITÉ QU'UN ENTIER POSSÈDE UN DIVISEUR DANS UN INTERVALLE DONNÉ

G. Tenenbaum *

1. Introduction

L'estimation du nombre $H(x, y, z)$ des entiers $< x$ ayant au moins un diviseur d , $y \leq d < z$, intervient de manière naturelle dans plusieurs questions arithmétiques. Divers cas particuliers ont été abordés dans la littérature:

- (i) Le cas où $z = 2y$, avec y fixé et x tendant vers l'infini [1,3,5,17].
- (ii) Le cas où $z = 2y = \sqrt{x}$, [5,17].
- (iii) Le cas où y et z sont fixés de façon que $z = y^{1+u}$, avec $u = u(y) = o(1)$ et où x tend vers l'infini [4].
- (iv) Le cas où y et z sont des puissances fixes de x [18].

Des majorations de $H(x, y, z)$ ont été établies dans ces quatre situations mais seules les deux premières ont donné lieu à des minorations non triviales. Les résultats obtenus ont déjà reçu de nombreuses applications, dans des branches variées de la Théorie des Nombres: ensembles de multiples et suites primitives [1,12 (chap. 5)], représentation multiplicative des entiers [7,8], valeur moyenne [13] et mesure de répartition [18,19,20,21] de fonctions arithmétiques. Une forme affaiblie de la majoration établie dans le cas (iv) a été prouvée par Stewart dans [16]; il utilise ce résultat pour l'étude des propriétés arithmétiques de certains polynômes cyclotomiques. Le lecteur intéressé trouvera un exposé historique plus détaillé sur cette question dans [22].

Nous prouvons le théorème suivant, qui contient strictement tous les résultats antérieurs.

THÉORÈME 1: *Posons $\delta := 1 - [\log(e \log 2)]/(\log 2) = 0,08607\dots$. Sous l'hypothèse*

$$1 < 2y \leq z \leq \min(y^{3/2}, x^{1/2}) \quad (1)$$

* Equipe de Recherches Associée au C.N.R.S. n° 839.

et en définissant u par la relation $z = y^{1+u}$, on a

$$xu^\delta L_1(1/u) < H(x, y, z) < xu^\delta L_2(1/u) \quad (2)$$

où L_1 et L_2 sont des fonctions à variation lente tendant vers 0 à l'infini, et dont un choix possible est

$$L_1(v) = \exp(-c_1 \sqrt{\log v \log \log 2v}),$$

$$L_2(v) = c_2 (\log v)^{-1/2} \log \log 2v,$$

c_1 et c_2 désignant des constantes positives. De plus, lorsque $z = O(y)$, on peut omettre le facteur $\log \log 2v$ dans $L_2(v)$.

Dans la condition (1), on peut remplacer $2y$ par $(1 + \eta)y$, où η est un réel positif fixé; les constantes c_1 et c_2 doivent alors être considérées comme des fonctions de η .

Lorsque $z = (1 + \eta)y$, où $\eta = \eta(y, z)$ est $o(1)$ à l'infini, le comportement asymptotique de $H(x, y, z)$ est radicalement modifié. Une explication intuitive de ce phénomène réside dans le fait que l'indépendance des conditions de divisibilité impliquées augmente quand la taille de l'intervalle décroît. Ainsi, on peut montrer par un argument très simple, exposé au §4, que

$$H(x, y, z) = (1 + o(1))\eta x \quad (3)$$

lorsque x, y , et z tendent vers l'infini de façon que

$$z = o(x), \quad \eta \log y = o(1), \quad \eta y = z - y \rightarrow \infty.$$

Dans le cas où $\eta = o(1)$ mais où $\eta \log y$ ne tend pas vers 0, on constate que la méthode employée pour prouver le Théorème 1 s'applique si

$$(\log 1/\eta)(\log \log y)^{-1} < \log 4 - 1 + o(1);$$

dans le cas contraire, un argument direct permet de montrer que la formule (3) persiste. Le Théorème 2, énoncé et prouvé au §4, rassemble nos résultats concernant la situation où $\eta = o(1)$.

Lorsque $\log y = o(\log z)$, on a

$$H(x, y, z) = (1 + o(1))x.$$

Un résultat plus précis est établi au §5 (Théorème 3).

La condition $z \leq x^{1/2}$ dans (1) peut être relâchée en considérant la symétrie des diviseurs de chaque entier n autour de $n^{1/2}$. La valeur $3/2$ de l'exposant de y est contingente et pourrait être remplacée par une constante > 1 arbitraire, quitte à modifier de manière adéquate les

définitions de L_1 et L_2 pour les petites valeurs de la variable v .

A titre d'exemple, mentionnons trois applications du Théorème 1.

I. Dans [6], Erdős et Hall établissent une majoration de

$$\lim_x \frac{1}{x} H(x, y, y \exp\{(\log y)^\alpha\})$$

pour $0 \leq \alpha < 1 - \log 2$, afin de prouver que la densité naturelle de la suite des entiers n satisfaisant à

$$M(n, y) := \sum_{d|n, d < y} \mu(d) \neq 0$$

est $O((\log y)^{-\gamma_0})$ avec $\gamma_0 = 1 - (e/2) \log 2 = 0,0579\dots$. La fonction $M(n, y)$ intervient dans de nombreuses questions d'Arithmétique, notamment dans la méthode de Vaughan pour majorer les formes bilinéaires. L'emploi direct du Théorème 1 conduit à l'amélioration $\gamma_0 = \delta/(1 + \delta) = 0,0792\dots$. Une variante de la majoration de (2), prouvée par la même méthode, permet d'obtenir $\gamma_0 = \delta$.

II. Soit

$$1 = d_1 < d_2 < \dots < d_\tau = n$$

La suite croissante des diviseurs consécutifs d'un entier générique n . Posons, pour toute fonction θ définie sur $]0,1[$,

$$F(n; \theta) = \sum_{i=1}^{\tau(n)-1} \theta(d_i/d_{i+1}).$$

Dans [9], on montre que la valeur moyenne de $F(n; \theta)$ découle très simplement de (2) lorsque θ est prolongeable en une fonction de classe C^2 sur $[0,1]$. On a dans cette circonstance

$$\sum_{n \leq x} F(n; \theta) = x \log x \left\{ \theta(1) + O\left(\frac{\log \log \log x}{(\log x)^\delta \sqrt{\log \log x}} \right) \right\}$$

avec la précision supplémentaire que l'exposant de $\log x$ dans le terme d'erreur est optimal dès que $t\theta'(t)$ est monotone.

III. Nous avons établi dans [18] que la suite des entiers n ayant au moins un diviseur d , $n^{\lambda/t} \leq d < n^{1/t}$, possède, pour tout couple (λ, t) de $[0,1] \times [1, +\infty[$, une densité naturelle $h(\lambda, t)$ satisfaisant à la majoration

$$h(1-u, t) \ll_\epsilon u^\delta (\log 1/u)^{-1/2+\epsilon}$$

pour $0 \leq u \leq \frac{1}{2}$ et $t \geq 2$, et nous avons conjecturé l'optimalité de l'ex-

posant δ dans cette majoration. En 1979, nous avons obtenu en commun avec Erdős une minoration de $h(1-u, t)$ avec un exposant de u sensiblement inférieur à 2δ (travail non publié). L'inégalité (2) implique, pour $0 \leq u \leq \frac{1}{2}$ et $t \geq 2$, l'encadrement

$$u^\delta L_1(1/u) < h(1-u, t) < u^\delta L_2(1/u),$$

qui constitue le motivation initiale de ce travail.

Nous concluons cette introduction par l'énoncé d'un problème ouvert dû à Erdős. Désignons par $\epsilon(y)$ (resp. $\epsilon'(y)$) la densité naturelle de la suite des entiers ayant au moins un (resp. exactement un) diviseur dans l'intervalle $[y, 2y[$. A-t-on pour y infini $\epsilon'(y)/\epsilon(y) = o(1)$?

2. Notations

La lettre p désigne exclusivement un nombre premier. On note $\Omega(n)$ le nombre des facteurs premiers comptés avec leur ordre de multiplicité d'un entier n . Le réel u étant défini par l'égalité $z = y^{1+u}$, on pose pour $\theta \geq 1$,

$$\Omega(n, \theta) = \sum \{ \nu : p^\nu \parallel n, y^u \leq p < y^{\theta u} \}.$$

$P^+(n)$ (resp. $P^-(n)$) désigne le plus grand (resp. le plus petit) des facteurs premiers de n . Par convention, $P^+(1) = 1$, $P^-(1) = +\infty$. Nous notons $\Psi(x, y)$ (resp. $\Phi(x, y)$) le nombre des entiers $n < x$ pour lesquels on a $P^+(n) \leq y$ (resp. $P^-(n) > y$). Toutes les constantes, explicites du type c , c_1, c_2, \dots , ou implicites dans l'utilisation des symboles \ll de Vinogradov ou O de Landau, sont absolues; une éventuelle dépendance en fonction de paramètres est indiquée en indice.

3. Lemmes

Nous énonçons dans cette section une suite de lemmes qui nous seront utiles dans la démonstration des Théorèmes. Le résultat formulé ci-dessous est une forme affaiblie d'un théorème d'Halberstam et Richert [11] généralisant un théorème de Hall.

LEMME 1: *Soit f une fonction arithmétique multiplicative réelle satisfaisant pour tout p à*

$$0 \leq f(p^j) \leq \lambda_1 \lambda_2^j, \quad (j = 0, 1, 2, \dots),$$

avec $0 \leq \lambda_2 < 2$. On a pour $x \geq 1$

$$\sum_{n < x} f(n) \ll_{\lambda_1, \lambda_2} x \prod_{p < x} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{j=0}^{\infty} f(p^j) p^{-j}$$

Le lemme suivant peut être prouvé facilement à partir du Théorème des nombres premiers par sommation d'Abel. Nous en omettons la démonstration.

LEMME 2: Pour $0 \leq \alpha \leq 1$ et $y \geq 2$, on a

$$\sum_{p \leq y} p^{\alpha-1} \leq \log \log y + \int_0^{\alpha \log y} (e^v - 1) \frac{dv}{v} + c_3 y^\alpha e^{-c_4 \sqrt{\alpha \log y}}$$

LEMME 3: Pour chaque entier n , posons

$$n(y) := \prod_{p^j \parallel n, p \leq y} p^j$$

et désignons par $\Theta(x, y, z)$ le nombre des entiers $n < x$ pour lesquels $n(y) \geq z$. Alors si $2 \leq y \leq z$, et pour tout ξ , $0 \leq \xi < \frac{1}{2} \log y$, on a

$$\begin{aligned} \Theta(x, y, z) \leq x \exp \left\{ -\xi \frac{\log z}{\log y} + \int_0^\xi (e^v - 1) \frac{dv}{v} + c_5 e^{\xi - c_4 \sqrt{\xi}} \right. \\ \left. + c_6 \left| \log \left(1 - \frac{2\xi}{\log y} \right) \right| \right\} + \Psi(x, y) \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION: Décomposons chaque $n < x$ sous la forme $n = ab$ avec

$$P^+(a) \leq y < P^-(b).$$

On a

$$\Theta(x, y, z) = \sum_{\substack{ab < x \\ a \geq z}} 1 = \sum_{z \leq a < x/y} \sum_{1 < b < x/a} 1 + \Psi(x, y).$$

En appliquant le Lemme 1 à la fonction caractéristique de la suite des entiers b , on obtient pour $s \geq y$

$$\Phi(s, y) = \sum_{b < s} 1 \ll s (\log y)^{-1}$$

d'où

$$\Theta(x, y, z) \leq c_7 \frac{x}{\log y} \sum_{a \geq z} \frac{1}{a} + \Psi(x, y).$$

La somme en a est estimée par la méthode de Rankin: pour chaque α de

$[0, \frac{1}{2}[$ on a

$$\begin{aligned} \sum_{a \geq z} \frac{1}{a} &\leq z^{-\alpha} \sum_{a=1}^{\infty} a^{\alpha-1} = z^{-\alpha} \prod_{p \leq y} (1 - p^{\alpha-1})^{-1} \\ &\leq z^{-\alpha} \exp \left\{ \sum_{p \leq y} p^{\alpha-1} + c_6 |\log(1 - 2\alpha)| + O(1) \right\}. \end{aligned}$$

La conclusion en découle par application du Lemme 2, en posant $\xi = \alpha \log y$.

Le premier des trois lemmes suivants est dû à de Bruijn [2], le second est un résultat classique de la Théorie du crible dont on trouvera la démonstration par exemple dans [12], Théorème 1 page 201.

LEMME 4: Pour $x \geq 1$ et $y \geq 2$, on a

$$\Psi(x, y) \ll x \exp \left\{ -c_8 \frac{\log x}{\log y} \right\}.$$

LEMME 5: Pour $2 \leq y < c_9 x$, on a

$$c_{10} \frac{x}{\log y} \leq \Phi(x, y) \leq c_{11} \frac{x}{\log y}.$$

LEMME 6: Désignons par $\Phi_1(x, y, z)$ le nombre des entiers $< x$ ayant au plus un facteur premier p , $y \leq p < z$. Pour $2 \leq y \leq z$ et $x \geq 1$, on a

$$\Phi_1(x, y, z) \geq c_{12} x \frac{\log y}{\log z}.$$

DÉMONSTRATION: Une constante arbitrairement grande y_0 étant fixée, on peut supposer, sans restreindre la généralité, que $y_0 \leq y < \sqrt{x}$. Comme tout entier de la forme ab avec $P^+(a) < y \leq z < P^-(b)$ est compté dans $\Phi_1(x, y, z)$, on obtient grâce au Lemme 5

$$\Phi_1(x, y, z) \geq \sum_{a < y} \sum_{b < x/a} 1 \geq c_{10} \frac{x}{\log z} \sum \left\{ \frac{1}{a} : a < \min \left(y, c_9 \frac{x}{z} \right) \right\}.$$

Si $(\sqrt{y})z < c_9 x$, le résultat souhaité découle aisément de cette inégalité; dans le cas contraire, on minore $\Phi_1(x, y, z)$ par le nombre des entiers de la forme ap avec $\sqrt{y}/c_9 \leq a < y$, et, $y \leq p < x/a < c_9 x/\sqrt{y} \leq z$. Il vient alors

$$\Phi_1(x, y, z) \geq \sum_{\sqrt{y}/c_9 \leq a < y} \sum_{y \leq p < x/a} 1$$

$$\begin{aligned} &\geq \sum_{\sqrt{y}/c_9 \leq a < y} \left(c_{13} \frac{x}{a \log x} - c_{14} \frac{y}{\log y} \right) \\ &\geq c_{15} x \frac{\log y}{\log x} - c_{14} \frac{y^2}{\log y}. \end{aligned}$$

Le résultat s'en déduit en remarquant que pour y_0 assez grand on a

$$\log x \leq 2 \log z, \quad \text{et} \quad y^2 / \log y \leq 2x / \log x.$$

Le résultat que nous énonçons maintenant est dû à Halász [10].

LEMME 7. Soit E un ensemble arbitraire de nombres premiers. On pose, pour $x \geq 2$,

$$E(x) := \sum \left\{ \frac{1}{p} : p < x, \quad p \in E \right\}.$$

Pour tout réel positif ϵ , et tout entier m , $0 \leq m \leq (2 - \epsilon)E(x)$, on a

$$\text{card} \left\{ n < x : \sum_{p' || n, p \in E} j = m \right\} \ll_{\epsilon} x e^{-E(x)} \frac{E(x)^m}{m!}.$$

Le lemme suivant a été prouvé par Norton dans [14], Lemma (4.5), (4.7). Des estimations plus précises (dont nous n'aurons pas besoin ici) ont été établies par le même auteur dans [15].

LEMME 8: Pour $0 < \alpha < 1 < \beta$ et $x > 0$, on a

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \sum_{m \leq \alpha x} e^{-x} \frac{x^m}{m!} &< \frac{1}{(1 - \alpha)\sqrt{\alpha x}} \exp\{-x(\alpha \log \alpha - \alpha + 1)\}. \\ \text{(ii)} \quad \sum_{m \geq \beta x} e^{-x} \frac{x^m}{m!} &< \frac{\sqrt{\beta}}{(\beta - 1)\sqrt{2\pi x}} \exp\{-x(\beta \log \beta - \beta + 1)\}. \end{aligned}$$

Enfin, nous utiliserons le lemme combinatoire suivant, dont on trouvera une démonstration par exemple dans [12], Lemma 13, page 147.

LEMME 9: Si x_1, x_2, \dots, x_n sont des réels non négatifs et, si l'on note

$$S_h := \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_h \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_h}, \quad (1 \leq h \leq n),$$

alors on a

$$\frac{1}{h!} S_1^h \left\{ 1 - \binom{h}{2} S_1^{-2} \sum_{i=1}^n x_i^2 \right\} \leq S_h \leq \frac{1}{h!} S_1^h.$$

4. Le cas z petit: $z < 2y$

Définissons le réel positif η par l'égalité $z = (1 + \eta)y$, et désignons par A la fonction définie sur R_+ par

$$A(v) = v \log v - v + 1.$$

Nous prouvons le résultat suivant.

THÉORÈME 2: *Supposons que x, y et z tendent vers l'infini de façon que*

$$0 < \eta \leq 1, \quad \eta y \rightarrow \infty, \quad \text{et} \quad z \leq \sqrt{x}.$$

Alors

(i) *S'il existe une fonction $\xi(y) \rightarrow \infty$ telle que*

$$\eta(\log y)^{\log 4 - 1} \exp\{\xi(y)\sqrt{\log \log y}\} = o(1) \quad (*)$$

on a

$$H(x, y, z) = (1 + o(1))\eta x.$$

(ii) *Si $\gamma := (\log 1/\eta)(\log \log y)^{-1} \leq \log 4 - 1 + o(1)$,*

on a

$$H(x, y, z) = x(\log y)^{-A((1+\gamma)/\log 2) + o(1)}.$$

REMARQUE: On a $A(1/\log 2) = \delta$; le point (ii) constitue donc, lorsque $\gamma = 0$, une version légèrement affaiblie du Théorème 1 dans le cas $z = 2y$.

DÉMONSTRATION: Notons $\rho(n)$ le nombre des diviseurs de n appartenant à l'intervalle $[y, z[$. Une interversion de sommation montre que l'hypothèse (*) implique

$$\sum_{n < x} \rho(n) = (1 + o(1))\eta x.$$

Cela fournit la majoration de $H(x, y, z)$ annoncée au point (i).

Nous établissons la minoration en deux étapes. Dans un premier temps, supposons que $\eta \log y = o(1)$. On peut écrire

$$\begin{aligned} \sum_{n < x} \rho(n)^2 &\leq \sum_{y \leq d, d' < z} \frac{x}{[d, d']} \\ &= \sum_{y \leq d < z} \frac{x}{d} + 2x \sum_{m < \eta y} \frac{1}{m} \sum_{\substack{y/m \leq t < t' < z/m \\ (t, t')=1}} \frac{1}{tt'} \end{aligned}$$

où l'on a utilisé le fait que, si mt et mt' sont dans $[y, z[$ et si $(t, t') = 1$, $t < t'$, alors $(1 + \eta) \geq t'/t \geq t'/(t' - 1)$ d'où $t' \geq (1 + 1/\eta)$ et finalement $m < z/t' \leq \eta y$. L'estimation classique

$$\left| \sum_{a \leq t < b} \frac{1}{t} - \log \frac{b}{a} \right| \leq \frac{1}{a}, \quad (0 < a \leq b),$$

conduit alors à la majoration

$$\sum_{n < x} \rho(n)^2 \leq x \{ \log(1 + \eta) + (1/y) + 4\eta^2 \log(ey) \} = (1 + o(1)) \eta x,$$

d'où l'on déduit la conclusion souhaitée en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\left(\sum_{n < x} \rho(n) \right)^2 \leq H(x, y, z) \sum_{n < x} \rho(n)^2.$$

Nous pouvons donc maintenant nous placer dans le cas où $\gamma \leq 1 + o(1)$. Introduisons la fonction arithmétique Ω_y , définie par la relation

$$\Omega_y(n) := \sum_{p^j \parallel n, p < y} j,$$

et désignons par χ la fonction caractéristique de l'ensemble des entiers n satisfaisant à

$$\Omega_y(n) \leq L(y) := 2 \log \log y + \xi(y) \sqrt{\log \log y}.$$

De plus, supposons, sans altérer la généralité, que $\xi(y) = o(\sqrt{\log \log y})$. Pour $1 \leq v \leq 3/2$, on a

$$\sum_{n < x} (1 - \chi(n)) \rho(n) \leq \sum_{n < x} v^{\Omega_y(n) - L(y)} \rho(n)$$

$$\ll x(\log y)^{v-1} v^{-L(y)} \sum_{y \leq d < z} \frac{v^{\Omega(d)}}{d},$$

grâce au Lemme 1.

En employant, avec $a = y$ et $b = \eta y$, la majoration

$$\sum_{a \leq d < a+b} v^{\Omega(d)} \ll b(\log 2b)^{v-1} + a \exp\{-c\sqrt{\log a}\}, \quad (1 \leq b \leq a), \quad (4)$$

que l'on peut prouver par la méthode usuelle d'intégration complexe, on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{n < x} (1 - \chi(n))\rho(n) &\ll \eta x (\log y)^{2v-2} v^{-L(y)} \\ &\ll \eta x \exp\{-\xi(y)^2/8\} = o(\eta x) \end{aligned}$$

quitte à choisir $v = 1 + \xi(y)/(2\sqrt{\log \log y})$. Nous pouvons donc écrire

$$\begin{aligned} H(x, y, z) &\geq \sum_{n < x} \chi(n)\rho(n) - \sum_{n < x, \rho(n) \geq 2} \chi(n)\rho(n) \\ &= (1 + o(1))\eta x - S, \end{aligned}$$

disons, avec

$$S \leq \sum_{n < x} \chi(n)\rho(n)(\rho(n) - 1) \leq 2 \sum_{n < x} v^{\Omega_y(n) - L(y)} \sum_{y \leq d < d' < z} 1$$

pour tout v , $0 \leq v \leq 1$.

Introduisons dans la somme intérieure le pgcd $m = (d, d')$ et remarquons comme précédemment que l'on a nécessairement $m < \eta y$. Il vient grâce au Lemme 1

$$S \ll x(\log y)^{v-1} v^{-L(y)} \sum_{m < \eta y} \frac{v^{\Omega(m)}}{m} \left(\sum_{y/m \leq t < z/m} \frac{v^{\Omega(t)}}{t} \right)^2.$$

La somme intérieure est $O(\eta(\log 1/\eta)^{2-2v} (\log 2\eta y/m)^{v-1})$: cela découle de (4) si $(\log 1/\eta)^2 \leq c^2 \log y/m$, et de la majoration triviale obtenue en remplaçant v par 1 dans le cas contraire. On obtient ainsi

$$S \ll x(\log y)^{v-1} v^{-L(y)} \eta^2 (\log 1/\eta)^{4-4v}$$

$$\times \sum_{m < \eta y} \frac{v^{\Omega(m)}}{m} (\log 2\eta y/m)^{2v-2}.$$

Grâce à une sommation d'Abel le Lemme 1 permet d'estimer la somme intérieure. La valeur optimale $v = \frac{1}{2}$ étant choisie, il suit finalement

$$\begin{aligned} S &\ll x \eta^2 (\log 1/\eta)^2 \exp\{-(\log 2)\xi(y) \sqrt{\log \log y}\} \\ &\times (\log y)^{\log 4 - 1} \log \log y = o(\eta x). \end{aligned}$$

Cela achève la preuve du point (i).

La méthode de démonstration du point (ii) est celle qui est exposée aux §§6 et 7, la seule différence étant la simplification due au fait que $y^u < 2$ pour $\eta \neq 1$. Nous omettons les détails.

5. Le cas z grand: $\log y = o(\log z)$

Nous prouvons le théorème suivant.

THÉORÈME 3: Pour $1 < y \leq z \leq x$, on a

$$H(x, y, z) = x \left(1 + O\left(\frac{\log y}{\log z}\right) \right).$$

De plus, pour tout ϵ , $0 < \epsilon < 1$, et sous les conditions $y^\epsilon z < x$, $y \geq y_0(\epsilon)$, on a aussi

$$x - H(x, y, z) \gg \epsilon x \frac{\log y}{\log z}.$$

La première assertion découle du Lemme 7; on a

$$\begin{aligned} 0 \leq [x] - H(x, y, z) &\leq \text{card} \left\{ n \leq x : \left(n, \prod_{y \leq p < z} p \right) = 1 \right\} \\ &\ll x \exp \left\{ - \sum_{y \leq p < z} \frac{1}{p} \right\} \ll x \frac{\log y}{\log z} \end{aligned}$$

La seconde, du Lemme 5:

$$x - H(x, y, z) \geq \sum_{m < c_9 y^\epsilon} \sum_{\substack{n < x/m \\ P^-(n) \geq z}} 1 \geq c_{10} \frac{x}{\log z} \sum_{m < c_9 y^\epsilon} \frac{1}{m} \gg \epsilon x \frac{\log y}{\log z}.$$

6. La borne supérieure

Supposons la condition (1) réalisée. Le principe de la démonstration peut être exposé comme suit. On décompose chaque entier compté dans $H(x, y, z)$ sous la forme ab avec $P^+(a) \leq y^u < P^-(b)$. D'après le Lemme 3, on peut supposer, quitte à négliger un nombre acceptable d'exceptions, que a ne dépasse pas une faible puissance de y . Cela implique que b lui-même possède un diviseur dans un "petit" intervalle, disons J . On partitionne alors l'ensemble des entiers correspondants selon que le nombre des diviseurs premiers $< y$ de b est grand ou petit. Le cardinal de la première classe est estimé grâce au Lemme 7. On majore celui de la seconde en affectant à chaque entier un poids égal au nombre de ses représentations sous la forme md , avec $d|b$, $d \in J$.

Abordons la démonstration. Après avoir remarqué que nous pouvons, sans restreindre la généralité de l'argument, supposer que $u < u_0$, où u_0 est arbitrairement petit mais fixé, nous posons $t := \log 1/u$ et nous nous donnons un paramètre s , $1 \leq s \leq t$, dont la valeur sera choisie ultérieurement. Nous répartissons alors les entiers n comptés dans $H(x, y, z)$ en quatre classes non nécessairement disjointes définies par les conditions suivantes:

$$\text{(Classe 1)} \quad n(y^u) \geq y^{tu}$$

$$\text{(Classe 2)} \quad \Omega\left(n, \frac{1}{u}\right) > \frac{t}{\log 2}$$

$$\text{(Classe 3)} \quad n(y^u) < y^{su} \quad \text{et} \quad \Omega\left(n, \frac{1}{u}\right) \leq \frac{t}{\log 2}$$

$$\text{(Classe 4)} \quad y^{su} \leq n(y^u) < y^{tu} \quad \text{et} \quad \Omega\left(n, \frac{1}{u}\right) \leq \frac{t}{\log 2}.$$

Désignant par H_i le nombre des entiers de la classe i ayant au moins un diviseur dans $[y, z]$, on a

$$H(x, y, z) \leq \sum_{i=1}^4 H_i.$$

Pour majorer H_1 il suffit d'appliquer les Lemmes 3 et 4. Il vient

$$H_1 \ll_{\xi_0} x(e^{-\xi t} + e^{-c_8/u})$$

pour tout ξ , $0 \leq \xi \leq \xi_0 < (1/2) \log 2 \leq (1/2) \log(y^u)$. En choisissant, par exemple, $\xi = 1/3$ on obtient donc

$$H_1 \ll xu^{1/3}. \tag{5}$$

D'après le Lemme 7, avec $E = \{p : y^u \leq p < y\}$, $\epsilon = 1/10$, et, en remarquant que $E(x) = t + O(1)$ pour $x \geq y$, on peut écrire

$$H_2 \ll xu \sum_{m > t/\log 2} \frac{(t + c_{16})^m}{m!} + \text{card} \left\{ n < x : \Omega \left(n, \frac{1}{u} \right) \geq \frac{3t}{2} \right\}. \tag{6}$$

Le Lemme 8 permet d'estimer la série en m , elle est $O(u^{\delta-1}t^{-1/2})$. Le second terme de la majoration ne dépasse pas

$$\sum_{n < x} v^{\Omega(n, 1/u) - 3t/2} \ll_{v_0} xu^{(3/2) \log v - v + 1}$$

pour $1 \leq v \leq v_0 < 2$, d'après le Lemme 1. En choisissant $v = \frac{3}{2}$, on constate que l'exposant de u est $> \delta$. Reportant dans (6) on obtient donc

$$H_2 \ll xu^\delta t^{-1/2}. \tag{7}$$

Décomposons chaque entier compté dans H_3 sous la forme d'un produit ab , avec $P^+(a) \leq y^u < P^-(b)$. Comme $a < y^{su}$, le fait que ab possède un diviseur dans $[y, y^{1+u}[$ implique que b possède un diviseur dans $[y^{1-su}, y^{1+u}[$. Notant b_h un entier b satisfaisant à $\Omega(b, 1/u) = h$, on peut donc écrire

$$\begin{aligned} H_3 &\leq \sum_{\substack{ab < x \\ \Omega(b, 1/u) \leq t/\log 2}} \sum_{\substack{d|b \\ y^{1-su} \leq d < y^{1+u}}} 1 = \sum_{h+k \leq t/\log 2} \sum_{\substack{ab_h b_k < x \\ y^{1-su} \leq b_h < y^{1+u}}} 1 \\ &\ll xu \sum_{h+k \leq t/\log 2} \sum_{y^{1-su} \leq b_h < y^{1+u}} \frac{1}{b_h} \frac{t^k}{k!} \end{aligned}$$

grâce au Lemme 7, en remarquant que l'on a toujours $x/b_h \geq y$. Maintenant le Lemme 7 implique encore, pour tout $v > \sqrt{y}$ et tout $h \leq t/\log 2$,

$$\sum_{vy^{-u} \leq b_h < v} \left[\frac{v}{b_h} \right] \leq \sum_{ab_h < v} 1 \ll vu \frac{t^h}{h!}$$

d'où

$$\sum_{vy^{-u} \leq b_h < v} \frac{1}{b_h} \ll u \frac{t^h}{h!} \tag{8}$$

En reportant cette estimation dans la dernière majoration de H_3 , il vient

$$H_3 \ll xu^2 s \sum_{h+k \leq t/\log 2} \frac{t^{h+k}}{h!k!} = xu^2 s \sum_{m \leq 2t/\log 4} \frac{(2t)^m}{m!}.$$

On estime alors la somme en m par le Lemme 8. On obtient

$$H_3 \ll xu^{\delta} st^{-1/2}. \tag{9}$$

Conservons les notations précédentes. On a

$$\begin{aligned} H_4 &\leq \sum_{h+k \leq t/\log 2} \sum_{\substack{b_h b_k < xy^{-u} \\ y^{1-tu} \leq b_h < y^{1+u}}} \sum_{y^{su} \leq a < x/b_h b_k} 1 \\ &\leq \sum_{h+k \leq t/\log 2} \sum_{y^{1-tu} \leq b_h < y^{1+u}} \left(\sum_{s-1 \leq j \leq 1/2u} A_j + B \right) \end{aligned}$$

où l'on a posé

$$A_j := \sum \left\{ \Psi \left(\frac{x}{b_h b_k}, y^u \right) : xy^{-(j+1)u} b_h^{-1} \leq b_k < xy^{-ju} b_h^{-1} \right\}$$

et

$$B := \sum \left\{ \Psi \left(\frac{x}{b_h b_k}, y^u \right) : b_k < xy^{-1/2} b_h^{-1} \right\}.$$

Le Lemme 3, la majoration (8) et l'estimation triviale

$$\sum \frac{1}{b_k} \leq \sum \frac{1}{b} \ll u^{-1}$$

conduisent à l'inégalité

$$\sum_{s-1 \leq j \leq 1/2u} A_j + B \ll \frac{x}{b_h} u e^{-c_8 s} \frac{t^k}{k!}$$

Par une nouvelle utilisation de (8) et l'emploi du Lemme 8, on obtient finalement

$$H_4 \ll xu^{\delta} t^{1/2} e^{-c_8 s}. \tag{10}$$

On choisit alors $s = (1/c_8) \log t$; la majoration annoncée découle de la conjonction des inégalités (5), (7), (9), et (10).

Le cas où $z = O(y)$ se ramène à celui où $z \leq cy$, avec $c < 2$, grâce à l'inégalité

$$H(x, y, z) \leq \sum_{j=1}^J H(x, c^{j-1}y, c^j y)$$

où l'on a posé $J = [(\log z/y)/(\log c)] + 1$.

Lorsque $z < 2y$, les classes 1 et 4 sont vides pour chaque valeur du paramètre s dans $[1, t]$. Les relations (7) et (9) impliquent donc la dernière assertion du Théorème 1.

7. La borne inférieure

Soit S une suite d'entiers et χ sa fonction caractéristique. D'autre part, désignons par $\rho(n)$ le nombre des représentations de n sous la forme $n = md$ avec $y \leq d < z$, et introduisons une fonction arithmétique r satisfaisant à $0 \leq r(n) \leq \rho(n)$ pour tout n . On a

$$\left(\sum_{n < x} \chi(n)r(n) \right)^2 \leq H(x, y, z) \sum_{n < x} \chi(n)r(n)^2 \tag{11}$$

Cette inégalité est la base de notre méthode de minoration. Nous choisissons pour S la suite des entiers n satisfaisant à

$$\Omega(n, \theta) \leq \frac{\log \theta}{\log 2} + 3\sqrt{(\log 1/u)(\log \log 1/u)}, \quad (1 \leq \theta \leq 1/u), \tag{12}$$

et nous définissons $r(n)$ comme le nombre de diviseurs d de n satisfaisant à

$$y \leq d < z, \quad \text{et} \quad P^-(d) \geq y^u.$$

Ce choix peut être heuristiquement justifié par les deux remarques suivantes:

(i) Quitte à négliger un ensemble d'entiers $< x$ de cardinal $\ll u^\alpha x$, avec $\alpha > \delta$, on peut supposer que, si n est compté dans $H(x, y, z)$, alors n possède au moins un diviseur $d, y \leq d < z$, tel que $P^-(d) \geq y^v$, où $v^\delta = u^\alpha$. En effet si $d_1 := \min\{d: d|n, y \leq d < z\}$ est tel que $P^-(d_1) \leq y^v$, alors $y \leq d_1 < yP^-(d_1) \leq y^{1+v}$ et l'on peut appliquer le résultat prouvé à la section précédente.

(ii) On peut montrer grâce au lemme 1 que $r(n)2^{-\Omega(n,1/u)}u^{-1}$ est en moyenne inférieur à une constante. Compte tenu de (12), cela suggère que, pour n dans S , $r(n)$ est usuellement majoré par une fonction à croissance lente de $1/u$ et, partant, se comporte à ce facteur multiplicatif près comme la fonction caractéristique des entiers n pour lesquels $r(n) \neq 0$.

Nous effectuerons la démonstration en deux étapes: minoration de $\sum_{n < x} \chi(n)r(n)$ (Lemme 10) et majoration de $\sum_{n < x} \chi(n)r(n)^2$ (Lemme 11); la conclusion découle ensuite de (11).

Afin d'alléger la présentation de certains calculs, nous introduisons ici quelques notations supplémentaires.

Nous désignons par $\lambda(n)$ la fonction caractéristique de l'ensemble des

entiers n tels que $P^-(n) \geq y^u$. Nous posons

$$\sigma := \sqrt{\log \frac{1}{u} \cdot \log \log \frac{1}{u}}, \quad h := \lceil \sigma / (2 \log 2) \rceil, \quad k := \left\lceil \sigma^{-1} \log \frac{1}{u} \right\rceil,$$

$\theta_j := e^{\sigma j}$, ($0 \leq j \leq k$), et nous notons $I(j)$ l'intervalle $[y^{u\theta_j}, y^{u\theta_{j+1}}[$, ($0 \leq j \leq k-1$).

LEMME 10: *Sous l'hypothèse (1), on a*

$$\sum_{n < x} \chi(n) r(n) \gg xu^\delta e^{-c_{17}\sigma}$$

DÉMONSTRATION: Nous pouvons supposer $u < u_0$, où u_0 est un réel positif arbitrairement petit mais fixé. Notons M la somme à minorer. On a

$$M = \sum_{\substack{md < x \\ y \leq d < z}} \lambda(d) \chi(md).$$

Décomposons chaque entier m intervenant dans cette expression sous la forme $m = qd'$, avec $\lambda(d') = 1$, et $\Omega(q, 1/u) \leq 1$. Comme il existe au moins un $d, y \leq d < z$, tel que md soit dans S , le nombre des représentations possibles de m en produit qd' ne dépasse pas

$$\Omega\left(m, \frac{1}{u}\right) + 1 \leq (\log 1/u) / (\log 2) + 3\sigma + 1 \leq 2 \log \frac{1}{u}$$

pour $u < u_0$. Cela implique

$$M \geq \left(2 \log \frac{1}{u}\right)^{-1} \sum_{\substack{qdd' < x \\ y \leq d < z}} \lambda(dd') \chi(qdd') \quad (13)$$

Comme $\Omega(q, 1/u) \leq 1$, la condition $\chi(qdd') = 1$ sera certainement réalisée si nous imposons

$$\Omega(d, \theta), \quad \Omega(d', \theta) \leq \frac{\log \theta}{2 \log 2} + \sigma, \quad \left(1 \leq \theta \leq \frac{1}{u}\right). \quad (14)$$

Notons a_j un entier générique égal au produit de h nombres premiers distincts de $I(j)$. Nous minorons le membre de droite de (13) en ne retenant que les entiers d' qui peuvent se décomposer en un produit du type $\prod_{j=1}^{k-2} a_j$ et les entiers d qui sont de la forme pd' . On vérifie qu'alors la condition (14) est bien réalisée. De plus, pour tous les d, d' choisis, on

a $\lambda(dd') = 1$, et,

$$dd' < z \prod_{j=1}^{k-2} y^{uh\theta_{j+1}} < zy^{2he^{-\sigma}} < x.$$

En employant le lemme 6 pour mimorer la somme en q dans le membre de droite de (13), il vient

$$M \gg xu \left(\log \frac{1}{u} \right)^{-1} \sum \frac{1}{d'} \sum \frac{1}{d}. \tag{15}$$

D'une part, on a

$$\sum \frac{1}{d'} = \prod_{j=1}^{k-2} \sum \frac{1}{a_j};$$

d'autre part, comme $d' < y^{2he^{-\sigma}} < \sqrt{y} < \sqrt{d}$ pour u_0 assez petit, la décomposition de chaque d sous la forme pd' est unique, donc

$$\sum \frac{1}{d} = \sum \frac{1}{d'} \sum_{y/d' \leq p < z/d'} \frac{1}{p}. \tag{16}$$

On montre à l'aide du théorème des nombres premiers que la somme intérieure du membre de droite de (16) est $\gg u$ pour $u < u_0$. La vérification de ce point est laissée au lecteur. On obtient

$$M \gg xu^2 \left(\log \frac{1}{u} \right)^{-1} \prod_{j=1}^{k-2} \left(\sum \frac{1}{a_j} \right)^2 \tag{17}$$

D'après le Lemme 9, on a pour u_0 assez petit et $j \geq 1$,

$$\sum \frac{1}{a_j} \geq \frac{1}{2} \frac{1}{h!} \left(\sum_{p \in I(j)} \frac{1}{p} \right)^h \geq \frac{1}{6\sqrt{h}} \left(\frac{e\sigma}{h} \right)^h,$$

la seconde inégalité découlant de la formule de Stirling et de l'estimation

$$\sum_{p \in I(j)} \frac{1}{p} = \sigma + O(1).$$

Cela implique finalement

$$\prod_{j=1}^{k-2} \left(\sum \frac{1}{a_j} \right)^2 \geq \left(\frac{e\sigma}{h} \right)^{2(k-2)h} (36h)^{2-k} \geq u^{\delta-2} e^{-c_{18}\sigma}.$$

On en déduit la conclusion annoncée en reportant cette minoration dans (17).

LEMME 11: *Sous l'hypothèse (1), on a*

$$\sum_{n < x} \chi(n)r(n)^2 \ll xu^\delta e^{c_{19}\sigma}$$

DÉMONSTRATION: On a

$$r(n)^2 = \sum_{\substack{d, d'|n \\ y \leq d, d' < z}} \lambda(dd') \leq \sum_{m|n} \sum_{\substack{tt'|n \\ y \leq mt, mt' < z}} \lambda(mtt'). \tag{18}$$

D'autre part, si n est dans S , si $1 \leq \theta \leq 1/u$ et si $0 < v \leq 1$, il découle de (12) que

$$\chi(n) = 1 \leq v^{\Omega(n, \theta)} \theta^{-\log v / \log 2} e^{3\sigma |\log v|}. \tag{19}$$

Fixons alors un réel α dans $]0, 1[$ et donnons-nous six paramètres $v_0, v_1, v_2, v_3, w_1, w_2$ dans $[\alpha, 1]$; notant, pour $y^u \leq m < y$,

$$\psi = \psi(m) := \frac{\log m}{u \log y}, \quad \text{et} \quad \xi = \xi(m) := \frac{\log z/m}{u \log y},$$

on déduit de (18) et (19) que l'on peut écrire pour tout n

$$\chi(n)r(n)^2 \leq e^{3\sigma |\log \alpha|} \sum_{i=0}^3 r_i(n) \tag{20}$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned} r_0(n) &:= u^{\log v_0 / \log 2} v_0^{\Omega(n, 1/u)} \sum_{\substack{tt'|n \\ y \leq t, t' < z}} \lambda(tt') \\ r_1(n) &:= \sum_{y^u \leq m < \sqrt{y}} \psi^{-\log v_1 / \log 2} \xi^{-\log w_1 / \log 2} \\ &\quad \times \sum_{\substack{tt'|n \\ y/m \leq t, t' < z/m}} \lambda(mtt') v_1^{\Omega(n, \psi)} w_1^{\Omega(n, \xi)}, \\ r_2(n) &:= \sum_{\sqrt{y} \leq m < y} \psi^{-\log v_2 / \log 2} \xi^{-\log w_2 / \log 2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \sum_{\substack{u' | \frac{n}{m} \\ y/m \leq t, t' < z/m}} \lambda(mtt') v_2^{\Omega(n, \psi)} w_2^{\Omega(n, \xi)} \\ r_3(n) & := u^{\log v_3 / \log 2} v_3^{\Omega(n, 1/u)} \sum_{\substack{m|n \\ y \leq m < z}} \lambda(m). \end{aligned}$$

Les sommes $R_i := \sum_{n < x} r_i(n)$, $0 \leq i \leq 3$, peuvent être majorées en utilisant le Lemme 1. Les valeurs des paramètres v_i , w_j , sont ensuite choisies pour optimiser le résultat. Nous nous contenterons ici d'effectuer les calculs concernant R_2 ; les trois autres majorations sont similaires (et plus simples dans le cas de R_0 et R_3); elles conduisent au choix optimal $v_0 = w_1 = v_3 = 1/(2 \log 2)$, $v_1 = \frac{1}{2}$. Nous allons maintenant établir que

$$\inf_{0 < v_2, w_2 < 1} R_2 \ll xu^\delta \log \frac{1}{u}. \quad (21)$$

Afin d'alléger la présentation, nous omettons dans la suite les suffixes de v_2 et w_2 .

En remarquant que, pour $\sqrt{y} \leq m < y$, on a $\psi \geq 1/2u$ et donc $\Omega(m, \psi) \geq \Omega(m) - 1$, il vient

$$\begin{aligned} R_2 & \leq u^{\log v / \log 2} \sum_{\sqrt{y} \leq m < y} \lambda(m) v^{\Omega(m)-1} w^{\Omega(m, \xi)} \xi^{-\log w / \log 2} \\ & \times \sum_{y/m \leq t, t' < z/m} \lambda(tt')(vw)^{\Omega(tt')} \sum_{d < x/mtt'} v^{\Omega(d, \psi)} w^{\Omega(d, \xi)} \end{aligned}$$

comme $x/mtt' \geq xm/z^2 \geq m > \sqrt{y}$, le Lemme 1 implique que la somme intérieure est $O((x/mtt') \psi^{v-1} \xi^{vw-v})$; on en déduit

$$\begin{aligned} R_2 & \ll \alpha^{-1} u^{1-v+\log v / \log 2} \\ & \times \sum_{\sqrt{y} \leq m < y} \frac{\lambda(m) v^{\Omega(m)} w^{\Omega(m, \xi)}}{m} \xi^{vw-v-\log w / \log 2} \\ & \times \left\{ \sum_{y/m \leq t < z/m} \frac{\lambda(t)(vw)^{\Omega(t)}}{t} \right\}^2. \end{aligned}$$

Posons $F(s) := \sum_{t < s} \lambda(t)(vw)^{\Omega(t)}$. Alors $F(s) = 1$ pour $s < y^u$ et, d'après le Lemme 1,

$$F(s) \ll s(u \log y)^{-vw} (\log s)^{vw-1}$$

pour $s \geq y^u$. Une intégration par parties effectuée en considérant séparément les cas $y/m < y^u$ et $y/m \geq y^u$ permet alors d'établir que

$$\sum_{y/m \leq t < z/m} \frac{\lambda(t)(vw)^{\Omega(t)}}{t} = \int_{y/m}^{z/m} \frac{dF(s)}{s} \ll \xi^{vw-1};$$

on obtient ainsi que

$$R_2 \ll \alpha^{-1} u^{1-v+\log v/\log 2} T \quad (22)$$

avec

$$T := \sum_{\sqrt{y} \leq m < y} \frac{\lambda(m) v^{\Omega(m)} w^{\Omega(m, \xi)}}{m} \xi^{3vw-v-2-\log w/\log 2}.$$

Le Lemme 1 implique encore, pour $s \geq \sqrt{y}$,

$$G(s) := \sum_{m < s} \lambda(m) v^{\Omega(m)} w^{\Omega(m, \xi)} \ll su^{-v} (\log y)^{-1} \xi(s)^{vw-v}$$

d'où

$$\begin{aligned} T &= \int_{\sqrt{y}}^y \xi(s)^{3vw-v-2-\log w/\log 2} dG(s) \\ &\ll u^{-v} (\log y)^{-1} \left[\xi(y)^\beta + \int_{\sqrt{y}}^y \xi(s)^\beta \{1 + (\xi(s)u \log y)^{-1}\} \frac{ds}{s} \right] \end{aligned}$$

où l'on a posé

$$\beta = \beta(v, w) := 4vw - 2v - 2 - \frac{\log w}{\log 2}.$$

Maintenant, si v et w sont choisis de manière que $\beta = -1$, on obtient que

$$\begin{aligned} T &\ll u^{-v} (\log y)^{-1} \left[1 + u \log y \int_{\sqrt{y}}^y (\log z/s)^{-1} \frac{ds}{s} \right] \\ &\ll u^{1-v} \left[\frac{1}{\log 2} + \log \left(1 + \frac{1}{2u} \right) \right] \ll u^{1-v} \log \frac{1}{u}. \end{aligned}$$

En reportant dans (22), on constate que l'exposant de u est égal à $2 - 2v + \log v/\log 2$; sa valeur minimale est δ , atteinte pour $v = 1/(2 \log 2) < 1$. Il s'ensuit que (21) est réalisée si l'équation

$\beta(1/(2 \log 2, w) = -1$ possède au moins une solution dans $]0,1[$. Le choix $w = \frac{1}{2}$ montre que c'est effectivement le cas, et cela achève la démonstration.

Bibliographie

- [1] A.S. BESICOVITCH: On the density of certain sequences. *Math. Annalen* 110 (1934) 336–341.
- [2] N.G. de BRUIJN: On the number of positive integers $\leq x$ and free of prime factors $> y$. *Indag. Math.* 13 (1951) 50–60.
- [3] P. ERDŐS: Note on the sequences of integers none of which are divisible by any other. *J. London Math. Soc.* 10 (1935) 126–128.
- [4] P. ERDŐS: A generalization of a theorem of Besicovitch. *J. London Math. Soc.* 11 (1936) 92–98.
- [5] P. ERDŐS: Sur une inégalité asymptotique en théorie des nombres. *Vestnik Leningrad Univ., Serija Mat. Mekh. i Astr.* 13 (1960) 41–49 (en russe).
- [6] P. ERDŐS et R.R. HALL: On the Möbius fonction. *J. reine angew. Math.* 375 (1980) 121–126.
- [7] P. ERDŐS et C. POMERANCE: Matching the natural numbers up to n with distinct multiples in another interval. *Proc. Nederl. Akad. Wetensch.* A83 (2) (1980) 147–161.
- [8] P. ERDŐS et A. SZEMERÉDI: On multiplicative representations of integers. *J. Austral. Math. Soc.* 21 (Series A) (1976) 418–427.
- [9] P. ERDŐS et G. TENENBAUM: Sur les diviseurs consécutifs d'un entier, *Bull. Soc. Math. de France* 111, fasc. 2, (1983) à paraître.
- [10] G. HALÁSZ: Remarks to my paper "On the distribution of additive and the mean value of multiplicative arithmetic functions". *Acta Math. Acad. Scient. Hung.* 23 (3–4) (1972) 425–432.
- [11] H. HALBERSTAM et H.-E. RICHERT: On a result of R.R. Hall. *J. Number Theory* (1) 11 (1979) 76–89.
- [12] H. HALBERSTAM et K.F. ROTH: *Sequences*, Oxford at the Clarendon Press (1966).
- [13] C. HOOLEY: On a new technique and its applications to the theory of numbers. *Proc. London Math. Soc.* (3) 38 (1979) 115–151.
- [14] K.K. NORTON: On the number of restricted prime factors of an integer, I. *Illinois J. Math.* 20 (1976) 681–705.
- [15] K.K. NORTON: Estimates for partial sums of the exponential series. *J. of Math. Analysis and Applications* 63 (1) 265–296.
- [16] C.L. STEWART: On divisors of Fermat, Fibonacci, Lucas and Lehmer numbers. *Proc. of the London Math. Soc.* (3) 35 (1977) 425–447.
- [17] G. TENENBAUM: Sur la répartition des diviseurs. *Sém. Delange Pisot Poitou* 17 (1975/76) no. G14, 5 p.p.
- [18] G. TENENBAUM: Lois de répartition des diviseurs, 2. *Acta Arithm.* (1) 38 (1980) 1–36.
- [19] G. TENENBAUM: Lois de répartition des diviseurs, 3. *Acta Arithm.* (1) 39 (1981) 19–31.
- [20] G. TENENBAUM: Lois de répartition des diviseurs, 4. *Ann. Inst. Fourier* (3) 29 (1979) 1–15.
- [21] G. TENENBAUM: Lois de répartition des diviseurs, 5. *J. London Math. Soc.* (2) 20 (1979) 165–176.
- [22] G. TENENBAUM: Sur la probabilité qu'un entier possède un diviseur dans un intervalle donné. *Sém. Théorie des Nombres*, Bordeaux (1981/82).

(Oblatum 2-II-1982)

G. Tenenbaum
 Université de Nancy I
 VER Sciences Mathématiques
 Boîte Postale 239
 54506 Vandoeuvre les Nancy Cedex
 France