(1/6/2022, 12h37)

Sommes de Gál et applications*

Régis de la Bretèche & Gérald Tenenbaum

Abstract. We evaluate the asymptotic size of various sums of Gál type, in particular

$$S(\mathcal{M}) := \sum_{m,n\in\mathcal{M}} \sqrt{\frac{(m,n)}{[m,n]}},$$

where $\mathcal{M}$ is a finite set of integers. Elaborating on methods recently developed by Bondarenko and Seip, we obtain an asymptotic formula for

$$\log\bigg(\sup_{|\mathcal{M}|=N} S(\mathcal{M})/N\bigg)$$

and derive new lower bounds for localized extreme values of the Riemann zeta-function, for extremal values of some Dirichlet L-functions at $s=\frac{1}{2}$, and for large character sums.

Keywords : Gál's theorem, GCD sums, Dirichlet polynomials, the Riemann zeta function, Dirichlet L-functions, character sums, resonance method.

AMS 2010 Classification : 11A05, 11L40, 11M06, 11N25, 11N37.

1. Introduction et énoncé des résultats

1·1. Sommes de Gál

Soit $\mathcal{M}$ un ensemble fini de N entiers. Nous considérons les sommes de Gál

$$S_\alpha(\mathcal{M}) := \sum_{m,n\in\mathcal{M}} \frac{(m,n)^\alpha}{[m,n]^\alpha} \qquad (\alpha>0). \tag{1·1}$$

Ces expressions faisant apparaître des plus grands communs diviseurs ont été introduites par Erdős. Gál [12] a résolu la conjecture d'Erdős correspondante dans le cas $\alpha=1$. De nombreux articles récents [3], [5], [6], [7], [19] concernent le comportement asymptotique de la quantité

$$\Gamma_\alpha(N) := \sup_{|\mathcal{M}|=N} \frac{S_\alpha(\mathcal{M})}{|\mathcal{M}|},\,^{(1)} \tag{1·2}$$

elles-même liée aux majorations de certains polynômes de Dirichlet et à celles de maximums localisés de la fonction zêta de Riemann sur la droite verticale d'abscisse α.

Soit $\mathbb{N}_1$ l'ensemble des entiers sans facteur carré. Nous notons $\Gamma^*_\alpha(N)$ la quantité analogue à $\Gamma_\alpha(N)$ obtenue en imposant $\mathcal{M}\subset\mathbb{N}_1$.

Nous avons essentiellement restreint la présente étude au cas $\alpha=\frac{1}{2}$, qui se révèle être l'un des plus intéressants — voir le survol [21]. Nous posons en conséquence $S(\mathcal{M})=S_{1/2}(\mathcal{M})$, $\Gamma(N)=\Gamma_{1/2}(N)$ et $\Gamma^*(N)=\Gamma^*_{1/2}(N)$.

Soit

$$\mathscr{L}(x) := \exp\left\{\sqrt{\frac{\log x\log_3 x}{\log_2 x}}\right\} \qquad (x>16),$$

où, ici et dans la suite, nous notons $\log_k$ la k-ième itérée de la fonction logarithme. Dans [6], Bondarenko et Seip ont établi l'existence d'une constante $A>0$ telle que l'on ait

$$\Gamma(N) \leqslant \mathscr{L}(N)^A \qquad (N>N_0(A)). \tag{1·3}$$

Il est indiqué dans le même travail que la valeur $A=7$ est admissible. Il y est également établi que (1·3) n'est pas valable pour $A<1$ ([7], théorème 2).

Nous nous proposons ici de préciser ces résultats.

Théorème 1.1. *Lorsque N tend vers l'infini, nous avons*

$$\Gamma(N) = \mathscr{L}(N)^{2\sqrt{2}+o(1)}. \tag{1·4}$$

---

* Nous incluons ici certaines corrections mineures relativement à la version publiée.

1. En fait, dans les travaux cités, le supremum est pris sur $|\mathcal{M}|\leqslant N$. La définition adoptée ici permet un gain de précision.

Remarque. Notre approche fournit également l'estimation

$$\Gamma^*(N) = \mathscr{L}(N)^{2+o(1)}. \tag{1·5}$$

Notons $\|\boldsymbol{c}\|_2$ la norme quadratique d'une suite complexe $\boldsymbol{c} := \{c_n\}_{n=1}^\infty$. Posons

$$Q(\mathcal{M}) := \sup_{\substack{\boldsymbol{c}\in\mathbb{C}^N\\ \|\boldsymbol{c}\|_2=1}} \Bigg|\sum_{m,n\in\mathcal{M}} c_m\overline{c_n}\sqrt{\frac{(m,n)}{[m,n]}}\Bigg|. \tag{1·6}$$

En vertu du théorème 5 de [3], nous avons

$$\Gamma(N) \leqslant \sup_{|\mathcal{M}|=N} Q(\mathcal{M}) \leqslant (\mathrm{e}^2+1)(\log N+2)\Gamma^+(N), \tag{1·7}$$

où $\Gamma^+(N) := \max_{n\leqslant N}\Gamma(n)$. Alors que l'inégalité de gauche est triviale, celle de droite est remarquable : elle exprime que certains des vecteurs propres de la forme quadratique associée à une somme de Gál maximale sont proches de la droite vectorielle engendrée par le vecteur $(1,\dots,1)$.

Il est à noter que, quitte à remplacer $\Gamma(N)$ par $\Gamma^*(N)$, l'encadrement (1·7) persiste lorsque le supremum est restreint aux ensembles $\mathcal{M}\subset\mathbb{N}_1$.

L'estimation suivante découle immédiatement de (1·7).

Théorème 1.2. *Lorsque N tend vers l'infini, nous avons*

$$\sup_{|\mathcal{M}|=N} Q(\mathcal{M}) = \mathscr{L}(N)^{2\sqrt{2}+o(1)}.$$

La structure multiplicative des sommes de Gál est plus simple lorsque l'ensemble $\mathcal{M}$ est choisi comme l'ensemble $\mathcal{T}_D$ de tous les diviseurs d'un entier D. Ainsi que l'on peut s'y attendre, les analogues des maximums précédents subissent une réduction significative. Distinguons deux cas selon que D est ou non sans facteur carré :

$$\Gamma'(N) := \sup_{\tau(D)\leqslant N}\frac{S(\mathcal{T}_D)}{N}, \qquad \Gamma''(N) := \sup_{\tau(D)\leqslant N}\frac{\mu(D)^2S(\mathcal{T}_D)}{N}.$$

Soit B la constante définie par

$$B := 4\sqrt{\sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{k^2(1+k)^2\log(1+1/k)}}. \tag{1·8}$$

Théorème 1.3. *Lorsque N tend vers l'infini, nous avons*

$$\log\Gamma'(N) = B\sqrt{\frac{\log N}{\log_2 N}}\Big\{1+O\Big(\frac{\log_3 N}{\log_2 N}\Big)\Big\}, \tag{1·9}$$

$$\log\Gamma''(N) = \frac{2}{\sqrt{\log 2}}\sqrt{\frac{\log N}{\log_2 N}}\Big\{1+O\Big(\frac{\log_3 N}{\log_2 N}\Big)\Big\}. \tag{1·10}$$

Remarques. (i) On voit que $B > 2/\sqrt{\log 2}$ en considérant le premier terme de la série de (1·8). On a en fait $B\approx 2,78422$ alors que $2/\sqrt{\log 2}\approx 2,40224$

(ii) Une minoration du type $\log\Gamma''(N)\geqslant c\sqrt{(\log N)/\log_2 N}$ est établie dans [3].

1·2. Maximums localisés de la fonction zêta

Dans le prolongement des travaux de Montgomery [20] et Balasubramanian–Ramachandra [4], Bondarenko et Seip ont récemment obtenu — voir notamment [7], [8] — des bornes inférieures pour la quantité

$$Z_\beta(T) := \max_{T^\beta \leqslant \tau \leqslant T} \left|\zeta(\tfrac{1}{2} + i\tau)\right| \qquad (0 \leqslant \beta < 1,\, T \geqslant 1) \tag{1·11}$$

en minorant la norme de la forme quadratique associée à la sous-somme $\mathfrak{S}(\mathcal{M})$. Leur approche repose sur la méthode de résonance, développée indépendamment, dans ce cadre, par Soundararajan [23] et Hilberdink [14]. Elle est adaptable à l'étude des maximums d'autres séries de Dirichlet — voir la publication récente [8].

En adaptant la méthode de [7], nous déduisons de nos estimations le résultat suivant.

Théorème 1.4. *Soit $\beta \in [0, 1[$ et c une constante vérifiant $0 < c < \sqrt{2(1-\beta)}$. Lorsque T est suffisamment grand, nous avons*

$$Z_\beta(T) \geqslant \mathscr{L}(T)^c.$$

Remarques. (i) Dans [7], il est montré que $c < \sqrt{\min\{\frac{1}{2}, 1-\beta\}}$ est une condition admissible. Dans [9], ce résultat est étendu à $c < \sqrt{1-\beta}$ ce qui représente une amélioration d'un facteur $\sqrt{2(1-\beta)}$ lorsque $\beta \leqslant \frac{1}{2}$. Le Théorème 1.4 améliore donc les exposants obtenus par Bondarenko et Seip d'un nouveau facteur $\sqrt{2}$ pour tout $\beta \in [0, 1[$.

(ii) Notre approche diffère sensiblement de celle de [9] : à l'instar des méthodes développées dans [14] et [1], nous relions le carré du maximum à la somme de Gál complète $S(\mathcal{M})$. L'introduction du carré explique que le gain obtenu n'est que la moitié de celui qui a été obtenu pour la somme de Gál soit $\frac{1}{2}2\sqrt{2} = \sqrt{2}$. Voir également la remarque à la fin du § 5.

1·3. Valeurs maximales de $|L(\frac{1}{2}, \chi)|$

Considérons les fonctions L associées aux caractères de Dirichlet χ, soit

$$L(s, \chi) := \sum_{n \geqslant 1} \frac{\chi(n)}{n^s} \qquad (\sigma := \Re e\,(s) > 1).$$

Notons

$$X_q^+ := \{\chi(\operatorname{mod} q) : \chi(-1) = 1\}, \qquad X_q^- := \{\chi(\operatorname{mod} q) : \chi(-1) = -1\}.$$

Le Théorème 1.1 peut être combiné à la méthode de résonance pour obtenir une minoration des quantités

$$L_q^+ := \max_{\substack{\chi \in X_q^+ \\ \chi \neq \chi_0}} \left|L(\tfrac{1}{2}, \chi)\right| \qquad (q \geqslant 3),$$

où χ_0 désigne le caractère principal modulo q. Nous nous limitons ici au cas où q est un nombre premier. La restriction aux caractères pairs provient ici de la forme particulière de la relation d'orthogonalité des caractères de parité donnée (cf. formule (6·3) *infra*) et de la nature des coefficients obtenus lors du développement des sommes pondérées de valeurs $|L(\frac{1}{2}, \chi)|^2$: cf. (6·6) *infra*.

Théorème 1.5. *Lorsque le nombre premier q tend vers l'infini, nous avons*

$$L_q^+ \geqslant \mathscr{L}(q)^{1+o(1)}.$$

Des estimations de même nature ont été abondamment considérée dans la littérature. Citons-en quelques unes.

Dans [23], Soundararajan a établi que

$$\max_{x < |d| \leqslant 2x} \log L(\tfrac{1}{2}, \chi_d) \geqslant (1 + o(1))\sqrt{\frac{\log x}{5 \log_2 x}} \qquad (x \to \infty),$$

où d parcourt la suite des discriminants fondamentaux et χ_d désigne le caractère réel associé à d (nous avons rectifié une faute de frappe apparaissant dans l'énoncé correspondant de [23]).

Dans [17], Hough montre que, pour tout nombre premier q suffisamment grand,

$$\max_{\substack{\chi \bmod q \\ \chi\neq\chi_0}} \log\left|L(\tfrac12,\chi)\right| \geqslant \frac14\sqrt{\frac{\log q}{2\log_2 q}}$$

avec la précision supplémentaire que l'argument de $L(\frac12,\chi)$ peut être choisi proche de tout $\vartheta\in[0,2\pi]$ fixé à l'avance. On se reportera à [17] pour un énoncé précis.

Des minorations de $|L(\sigma,\chi)|$ ont été établies récemment dans [2] pour $\sigma\in]\frac12,1[$. Dans ce travail, il est notamment prouvé que

$$\max_{\substack{\chi \bmod q \\ \chi\neq\chi_0}} \log|L(\sigma,\chi)| \gg_\sigma (\log q)^{1-\sigma}(\log_2 q)^\sigma \qquad (q\geqslant 3,\ \tfrac12<\sigma<1).$$

Cette minoration avait précédemment été établie dans [18] sous l'hypothèse de Riemann généralisée.

1·4. Grandes valeurs de sommes de caractères

Posons, pour tout caractère de Dirichlet χ,

$$S(x,\chi) := \sum_{n\leqslant x}\chi(n).$$

Dans [16], améliorant des estimations de [13], Hough établit une minoration de la quantité

$$\Delta(x,q) := \max_{\substack{\chi\neq\chi_0 \\ \chi \bmod q}} |S(x,\chi)|,$$

lorsque q est un nombre premier. Notant $x=q^\vartheta$, cette estimation est valide dans le domaine

$$4\sqrt{\frac{\log_2 q}{\log q}}\log_3 q \leqslant \vartheta \leqslant 1-4\sqrt{\frac{\log_2 q}{\log q}}\log_3 q. \tag{1·12}$$

Nous pouvons déduire rapidement du Théorème 1.1 le résultat suivant, valide sans restriction sur le module q. Ici et dans la suite, nous notons $\omega(q)$ le nombre des facteurs premiers distincts d'un entier q.

Théorème 1.6. *Soit $\varepsilon>0$. Sous la condition $\mathrm{e}^{(\log q)^{1/2+\varepsilon}}\leqslant x\leqslant q/\mathrm{e}^{(1+\varepsilon)\omega(q)}$, nous avons*

$$\Delta(x,q) \gg \sqrt{x}\mathscr{L}(q/x)^{\sqrt2+o(1)} \qquad (q\to\infty). \tag{1·13}$$

Remarque. On a en toute circonstance $q/\mathrm{e}^{(1+\varepsilon)\omega(q)}\geqslant q^{1-\{1+\varepsilon+o(1)\}/\log_2 q}$ lorsque $q\to\infty$.

Dans son domaine de validité, cette minoration améliore celle de Hough ([16], théorème 3.1) d'un facteur $\sqrt{2\log_3(q/x)}$ dans l'exposant. Cependant, lorsque q est premier, le domaine (1·12), plus grand que celui de (1·13), englobe celui du changement de phase observé autour de

$$\log x = \sqrt{\log q\log_2 q}.$$

Nous renvoyons le lecteur à [16] pour plus de détails. Lorsque $\vartheta>1-C/\log_3 q$, la minoration donnée dans [16] est meilleure que celle de (1·13). Dans [15], Hough considère également le cas de modules q composés, sous la condition $\vartheta\leqslant 1-\varepsilon$.

2. Preuve du Théorème 1.1 : minoration

2·1. Réduction du problème

Le résultat suivant permet de réduire la minoration contenue dans (1·3) et (1·5) aux cas de supremums pour $|\mathcal{M}| \leqslant N$.

Lemme 2.1. *Soient $N \in \mathbb{N}$ et $\mathcal{M}$ un ensemble d'entiers de cardinal $\leqslant N$. Alors, il existe un ensemble d'entiers $\mathcal{M}'$ de cardinal N tel que*

$$\frac{S(\mathcal{M}')}{|\mathcal{M}'|} \geqslant \frac{S(\mathcal{M})}{2|\mathcal{M}|}.$$

De plus, si $\mathcal{M} \subset \mathbb{N}_1$, on peut choisir $\mathcal{M}' \subset \mathbb{N}_1$.

Démonstration. La première étape consiste à montrer qu'il existe un ensemble $\mathcal{M}''$ de cardinal $N'' \in]\frac{1}{2}N, N]$ tel que

$$\frac{S(\mathcal{M}'')}{|\mathcal{M}''|} \geqslant \frac{S(\mathcal{M})}{|\mathcal{M}|}.$$

Si $N/2 < |\mathcal{M}| \leqslant N$, il n'y a rien à démontrer. Si $|\mathcal{M}| \leqslant N/2$, il existe un entier $k \geqslant 1$ tel que $N/2 \leqslant 2^k|\mathcal{M}| \leqslant N$. Considérons alors un ensemble $\mathcal{P}$ de k nombres premiers distincts ne divisant aucun élément de $\mathcal{M}$. Posant $D := \prod_{p\in\mathcal{P}} p$, nous définissons

$$\mathcal{M}'' := \big\{dm : d \mid D,\, m \in \mathcal{M}\big\}.$$

Nous avons d'une part $|\mathcal{M}''| = 2^k|\mathcal{M}| \in [N/2, N]$ et, d'autre part,

$$S(\mathcal{M}'') = \sum_{d,d'|D} \frac{(d,d')}{\sqrt{dd'}} S(\mathcal{M}') \geqslant 2^k S(\mathcal{M}) = |\mathcal{M}''|\frac{S(\mathcal{M})}{|\mathcal{M}|},$$

où l'inégalité est obtenue en restreignant la sommation à $d = d'$.

Pour achever la preuve, il suffit de compléter l'ensemble $\mathcal{M}''$ en un ensemble $\mathcal{M}'$ de cardinal N et d'observer que $S(\mathcal{M}') \geqslant S(\mathcal{M}'')$. □

2·2. Construction d'un ensemble $\mathcal{M}$

Ce paragraphe est consacré à la construction d'ensembles $\mathcal{M}$ pour lesquels la somme $S(\mathcal{M})$ atteint de grandes valeurs. Dans [7] les ensembles construits étaient constitués d'entiers sans facteur carré. Notre amélioration est notamment due au fait que nous nous affranchissons de cette restriction. Par ailleurs, nous minorons directement $S(\mathcal{M})$ alors que la méthode employée dans [7] nécessite de considérer la forme quadratique associée.

Dans toute la suite, nous notons $\mathbb{P}$ l'ensemble de tous les nombres premiers et nous considérons un entier N arbitrairement grand. Soient $u \in]1, \mathrm{e}]$, $a \in]1, +\infty[$ et $\gamma \in]0, 1[$ trois paramètres bornés dont les valeurs seront choisies ultérieurement. Introduisons les intervalles

$$I_k := \Big]u^k \log N \log_2 N, u^{k+1} \log N \log_2 N\Big] \qquad \big(1 \leqslant k \leqslant (\log_2 N)^\gamma\big),$$

de sorte que

$$P_k := |I_k \cap \mathbb{P}| = \pi(u^{k+1} \log N \log_2 N) - \pi(u^k \log N \log_2 N) \leqslant u^{k+1} \log N. \tag{2·1}$$

De plus

$$P_k = u^k(u-1)\log N\Big\{1 + O\Big(\frac{k + \log_3 N}{\log_2 N}\Big)\Big\}.$$

Posons encore

$$J_k := 2\left\lfloor \frac{a \log N}{2k^2 \log_3 N}\right\rfloor \qquad \big(1 \leqslant k \leqslant (\log_2 N)^\gamma\big) \tag{2·2}$$

et choisissons $a > 1$ tel que $a\gamma < 1/\log u$.

Notant $N_k := \prod_{p\in I_k} p$, nous considérons les ensembles

$$\mathcal{M}_k := \Big\{m \,:\, m = \frac{\ell}{q}N_k,\, \omega(\ell) \leqslant \tfrac{1}{2}J_k,\, \omega(q) \leqslant \tfrac{1}{2}J_k,\, \ell q \mid N_k\Big\}$$

et nous choisissons

$$\mathcal{M} := \Big\{ m = \prod_{1\leqslant k\leqslant (\log_2 N)^\gamma} m_k : \quad m_k \in \mathcal{M}_k \quad \big(1 \leqslant k \leqslant (\log_2 N)^\gamma\big)\Big\}. \tag{2·3}$$

Lemme 2.2. *Sous la condition $a < 1/(\gamma \log u)$, nous avons $|\mathcal{M}| \leqslant N$.*

Démonstration. Nous avons

$$|\mathcal{M}| = \prod_{1\leqslant k\leqslant (\log_2 N)^\gamma} |\mathcal{M}_k|. \tag{2·4}$$

avec $|\mathcal{M}_k| = \displaystyle\sum_{\substack{0\leqslant j\leqslant J_k/2\\ 0\leqslant h\leqslant J_k/2}} \binom{P_k}{j}\binom{P_k-j}{h}$.

Les relations

$$\binom{P_k}{j-1} \leqslant \tfrac12 \binom{P_k}{j}, \quad \binom{P_k-j}{h-1} \leqslant \tfrac12 \binom{P_k-j}{h} \qquad (1 \leqslant j,h \leqslant \tfrac12 J_k \leqslant \tfrac14 P_k)$$

et

$$\binom{P_k}{j}\binom{P_k-j}{J_k/2} = \binom{P_k}{J_k/2}\binom{P_k-J_k/2}{j} \qquad (0 \leqslant j \leqslant J_k/2)$$

fournissent

$$\begin{aligned}\binom{P_k}{J_k/2}\binom{P_k-J_k}{J_k/2} \leqslant |\mathcal{M}_k| &\leqslant 2\sum_{0\leqslant j\leqslant J_k/2}\binom{P_k}{j}\binom{P_k-j}{J_k/2}\\ &\leqslant 4\binom{P_k}{J_k/2}\binom{P_k-J_k/2}{J_k/2}.\end{aligned} \tag{2·5}$$

Grâce à l'inégalité

$$\binom{m}{n} \leqslant \mathrm{e}^n\Big(\frac{m}{n}\Big)^n \qquad (1 \leqslant n \leqslant m)$$

qui découle par exemple de la formule d'Euler-Maclaurin, et à (2·1), nous obtenons, pour N assez grand,

$$|\mathcal{M}_k| \leqslant 4\Big(\frac{2\mathrm{e}P_k}{J_k}\Big)^{J_k} \leqslant \Big(\mathrm{e}k^2u^{k+1}\log_3 N\Big)^{J_k}.$$

En reportant dans (2·4), cela implique

$$|\mathcal{M}| \leqslant N^{a\gamma\log u + o(1)}.$$

□

2·3. Complétion de l'argument

Il reste à minorer le rapport $S(\mathcal{M})/|\mathcal{M}|$ lorsque $\mathcal{M}$ est défini par (2·3) et les paramètres a, u, γ sont choisis comme indiqué plus haut. Nous avons

$$S(\mathcal{M}) = \prod_{1\leqslant k\leqslant (\log_2 N)^\gamma} S(\mathcal{M}_k). \tag{2·6}$$

Lorsque les entiers

$$m := \frac{\ell}{q}N_k, \qquad m' := \frac{\ell'}{q'}N_k$$

sont dans $\mathcal{M}_k$, nous avons

$$(m,m') = \frac{N_k}{[q,q']}\Big(\frac{\ell q'}{(q,q')}, \frac{\ell' q}{(q,q')}\Big) = \frac{N_k(\ell,\ell')}{[q,q']},$$

et donc

$$\frac{m}{(m,m')} = \frac{\ell}{(\ell,\ell')}\frac{q'}{(q,q')}, \qquad \frac{m'}{(m,m')} = \frac{\ell'}{(\ell,\ell')}\frac{q}{(q,q')}.$$

Ainsi

$$S(\mathcal{M}_k) = \sum_{\substack{\ell,\ell'|N_k\\ \omega(\ell),\omega(\ell')\leqslant J_k/2}} \frac{(\ell,\ell')}{\sqrt{\ell\ell'}} \sum_{\substack{q,q'|N_k\\ (q,\ell)=(q',\ell')=1\\ \omega(q),\omega(q')\leqslant J_k/2}} \frac{(q,q')}{\sqrt{qq'}}.$$

Désignons par $S_k = S_k(\ell,\ell')$ la somme intérieure. L'identité $n = \sum_{d|n}\varphi(d)$ permet d'écrire

$$\begin{aligned} S_k &= \sum_{\substack{d_1|N_k\\ \omega(d_1)\leqslant J_k/2\\ (d_1,\ell\ell')=1}} \frac{\varphi(d_1)}{d_1} \sum_{\substack{n_1,n_1'|N_k\\ (n_1,\ell d_1)=(n_1',\ell' d_1)=1\\ \omega(n_1),\omega(n_1')\leqslant J_k/2-\omega(d_1)}} \frac{1}{\sqrt{n_1n_1'}} \\ &= \sum_{\substack{d_1|N_k\\ \omega(d_1)\leqslant J_k/2\\ (d_1,\ell\ell')=1}} \frac{\varphi(d_1)}{d_1}\sigma(\tfrac12 J_k-\omega(d_1),\ell d_1)\sigma(\tfrac12 J_k-\omega(d_1),\ell' d_1) \end{aligned}$$

où l'on a posé

$$\sigma(R,r) := \sum_{\substack{n|N_k\\ (n,r)=1\\ \omega(n)\leqslant R}} \frac{1}{\sqrt{n}} \qquad (r\geqslant 1,\ R\geqslant 1).$$

Comme

$$\frac{\varphi(d)}{d} \gg \exp\Big\{-\sum_{p\in I_k}\frac1p\Big\} \qquad (d \mid N_k),$$

il suit

$$S_k \gg \sum_{\substack{d_1|N_k\\ \omega(d_1)\leqslant J_k/2\\ (d_1,\ell\ell')=1}} \sigma(\tfrac12 J_k-\omega(d_1),\ell d_1)\sigma(\tfrac12 J_k-\omega(d_1),\ell' d_1). \tag{2·7}$$

En utilisant la même identité pour exprimer (ℓ,ℓ'), nous obtenons

$$S(\mathcal{M}_k) \gg \sum_{\substack{d_1,d_2|N_k\\ \omega(d_j)\leqslant J_k/2\\ (d_1,d_2)=1}} \sum_{\substack{n_2,n_2'|N_k\\ (n_2n_2',d_1d_2)=1\\ \omega(n_2),\omega(n_2')\leqslant J_k/2-\omega(d_2)}} \frac{\sigma(\frac12 J_k-\omega(d_1),n_2d_2d_1)\sigma(\frac12 J_k-\omega(d_1),n_2'd_2d_1)}{\sqrt{n_2n_2'}}.$$

Soit

$$j_k := \left\lfloor \frac{\alpha}{k}\sqrt{\frac{\log N}{\log_2 N\log_3 N}}\right\rfloor$$

où α est un paramètre borné à optimiser. Restreignons la somme extérieure aux couples (d_1,d_2) tels que $\omega(d_j)\leqslant \frac12 J_k - j_k$ et la somme intérieure aux entiers n_2, n_2' tels que $\omega(n_2)=\omega(n_2')=j_k$.

Pour $n=n_2$ ou $n=n_2'$, nous avons

$$\sigma(\tfrac12 J_k-\omega(d_1),nd_2d_1) \geqslant \sigma(j_k,nd_2d_1) \gg \frac{1}{j_k!}\Bigg(\sum_{\substack{p\in I_k\\ p\nmid nd_2d_1}}\frac{1}{\sqrt p}\Bigg)^{j_k}. \tag{2·8}$$

Or

$$\sum_{p\in I_k}\frac{1}{\sqrt p} = 2u^{k/2}(\sqrt u-1)\sqrt{\frac{\log N}{\log_2 N}}\Big\{1+O\Big(\frac{k+\log_3 N}{\log_2 N}\Big)\Big\}$$

tandis que, lorsque $d_1d_2n \mid N_k$ et $\omega(d_1)+\omega(d_2n)\leqslant J_k$,

$$\sum_{p|d_1d_2n}\frac{1}{\sqrt p} \ll \frac{J_k}{u^{k/2}\sqrt{\log N\log_2 N}} \ll \frac{1}{k^2u^{k/2}\log_3 N}\sqrt{\frac{\log N}{\log_2 N}}.$$

Nous pouvons donc écrire

$$\sum_{\substack{p\in I_k\\ p\nmid d_1d_2n}}\frac{1}{\sqrt{p}}=2u^{k/2}(\sqrt{u}-1)\sqrt{\frac{\log N}{\log_2 N}}\Big\{1+O\Big(\frac{1}{\log_3 N}\Big)\Big\}. \tag{2·9}$$

En utilisant la formule de Stirling sous la forme $j_k!=\exp\big\{j_k\log j_k-j_k+O(\log j_k)\big\}$ et en reportant dans (2·8), nous obtenons donc

$$\sigma(j_k,nd_2d_1)\geqslant T^{j_k}\mathrm{e}^{o(j_k)} \tag{2·10}$$

avec

$$\begin{aligned}T&:=\frac{2\mathrm{e}(\sqrt{u}-1)u^{k/2}}{j_k}\sqrt{\frac{\log N}{\log_2 N}}\\ &=\frac{2k\mathrm{e}(\sqrt{u}-1)u^{k/2}}{\alpha}\sqrt{\log_3 N}\bigg\{1+O\bigg(\frac{\sqrt{\log_2 N\log_3 N}}{\sqrt{\log N}}\bigg)\bigg\},\end{aligned} \tag{2·11}$$

puis

$$S(\mathcal{M}_k)\gg T^{2j_k}\mathrm{e}^{o(j_k)}\sum_{\substack{d_1,d_2\mid N_k\\ \omega(d_j)\leqslant J_k/2-j_k\\ (d_1,d_2)=1}}\ \sum_{\substack{n_2,n_2'\mid N_k\\ (n_2n_2',d_1d_2)=1\\ \omega(n_2)=\omega(n_2')=j_k}}\frac{1}{\sqrt{n_2n_2'}}.$$

Par un calcul parallèle à celui qui fournit (2·10), l'estimation (2·9) permet de montrer que la somme intérieure vaut

$$\bigg(\sum_{\substack{n\mid N_k\\ (n,d_1d_2)=1\\ \omega(n)=j_k}}\frac{1}{\sqrt{n}}\bigg)^2\gg T^{2j_k}\mathrm{e}^{o(j_k)}.$$

Nous avons ainsi établi que

$$S(\mathcal{M}_k)\gg T^{4j_k}\mathrm{e}^{o(j_k)}V_k \tag{2·12}$$

avec

$$\begin{aligned}V_k&:=\sum_{\substack{d_1,d_2\mid N_k\\ \omega(d_j)\leqslant J_k/2-j_k\\ (d_1,d_2)=1}}1=\sum_{\substack{0\leqslant j\leqslant J_k/2-j_k\\ 0\leqslant h\leqslant J_k/2-j_k}}\binom{P_k}{j}\binom{P_k-j}{h}\geqslant\binom{P_k}{J_k/2-j_k}\binom{P_k-J_k/2+j_k}{J_k/2-j_k}\\ &=\binom{P_k}{J_k/2}\binom{P_k-J_k/2}{J_k/2}\frac{(J_k/2)!^2(P_k-J_k)!}{(J_k/2-j_k)!^2(P_k-J_k+2j_k)!}\\ &\geqslant\tfrac14|\mathcal{M}_k|\Big(\frac{J_k}{2P_k}\Big)^{2j_k}\geqslant|\mathcal{M}_k|\bigg(\frac{a+o(1)}{2k^2u^k(u-1)\log_3 N}\bigg)^{2j_k},\end{aligned} \tag{2·13}$$

en vertu de (2·5).

Grâce à (2·11), (2·12) et (2·13), nous pouvons écrire

$$\frac{S(\mathcal{M}_k)}{|\mathcal{M}_k|}\gg\Big(\frac{h}{\alpha^2}\Big)^{2j_k}\mathrm{e}^{o(j_k)}$$

où l'on a posé $h:=2\mathrm{e}^2a(\sqrt{u}-1)/(\sqrt{u}+1)$. En reportant (2·6), nous obtenons

$$\frac{S(\mathcal{M})}{|\mathcal{M}|}\geqslant\mathscr{L}(N)^{\beta+o(1)} \tag{2·14}$$

avec $\beta:=2\gamma\alpha\log(h/\alpha^2)$. Le choix optimal $\alpha:=\sqrt{h}/\mathrm{e}$ fournit

$$\beta=\frac{4\gamma\sqrt{h}}{\mathrm{e}}=4\gamma\sqrt{\frac{2a(\sqrt{u}-1)}{\sqrt{u}+1}}.$$

En choisissant $a\gamma\log u$ proche de 1 puis u proche de 1, nous constatons que β peut être pris arbitrairement proche de $2\sqrt{2}$.

Cela achève la démonstration de la minoration du Théorème 1.1.

3. Preuve du Théorème 1.1 : majoration

3·1. Majoration de sommes pondérées

Nous adaptons ici la méthode développée par Bondarenko et Seip dans [6], qui repose sur les résultats de [3]. Considérons les sommes de Gál pondérées

$$S(\mathcal{M};g) := \sum_{m,n\in\mathcal{M}} g\Big(\frac{[m,n]}{(m,n)}\Big) \tag{3·1}$$

où g est une fonction sous-multiplicative,[2] de sorte que

$$S(\mathcal{M};g) \leqslant S^+(\mathcal{M};g) := \sum_{m,n\in\mathcal{M}} g\Big(\frac{m}{(m,n)}\Big) g\Big(\frac{n}{(m,n)}\Big) = \sum_{\ell} \sum_{\substack{m,n\in\mathcal{M}\\ [m,n]=\ell}} g\Big(\frac{\ell}{m}\Big) g\Big(\frac{\ell}{n}\Big)\cdot \tag{3·2}$$

D'après [6], nous avons

$$\Gamma(N) \leqslant 4 \sup_{\substack{|\mathcal{M}|\leqslant N\\ \mathcal{M}\subset\mathbb{N}_1}} \frac{S\big(\mathcal{M};2^\omega g_0\big)}{|\mathcal{M}|}, \tag{3·3}$$

où, ici et dans la suite, ω désigne la fonction nombre de facteurs premiers, comptés sans multiplicité, et $g_0(n) := 1/\sqrt{n}$ $(n \geqslant 1)$.

Comme dans [6], nous convenons qu'un ensemble d'entiers $\mathcal{M}$ est dit *divisoriellement clos* s'il contient tous les diviseurs de chacun de ses éléments, et qu'il est dit *complet* si, pour chaque élément $m = \prod_{j=1}^r p_j^{\nu_j}$ de $\mathcal{M}$ où les p_j sont distincts l'entier $n := \prod_{j=1}^r q_j^{\nu_j}$ est également dans $\mathcal{M}$ dès que les q_j sont distincts et satisfont $q_j \leqslant p_j$.

Nous dirons qu'un ensemble fini d'entiers est *strict* s'il est divisoriellement clos et complet. D'après les lemmes 1 et 2 de [6], pour chaque α de $]0,1[$, le supremum $\Gamma_\alpha^*(N)$ est atteint pour un ensemble strict $\mathcal{M}$.

Le lemme-clef de notre démonstration découle d'un argument de complétude, essentiellement identique au lemme 3 de [6].

Dans toute la suite, nous notons $\{p_j\}_{j\geqslant 1}$ la suite croissante des nombres premiers et posons $y := p_{\lfloor \log N/\log 2\rfloor}$.

Lemme 3.1. *Soient $\mathcal{M}$ un ensemble strict de N entiers distincts et $n \in \mathcal{M}$. Si*

$$y < p_{j_1} < p_{j_2} < \ldots < p_{j_\nu}$$

sont les facteurs premiers de n excédant y, alors

$$\sum_{1\leqslant h\leqslant\nu} \log(j_h/2h) \leqslant \log N. \tag{3·4}$$

De plus, $\nu = \nu_n \leqslant (\log N)/\log 2$.

Démonstration. Comme indiqué plus haut, il s'agit d'une variante du lemme 3 de [6]. Nous donnons les détails pour la commodité du lecteur.

Il existe au moins $R := \prod_{1\leqslant h\leqslant\nu}(j_h - h + 1)/\nu!$ entiers de la forme $\prod_{1\leqslant h\leqslant\nu} p_{s_h}$ avec $\nu < s_h \leqslant j_h$ et tels que la suite $\{s_h\}_{h=1}^{\nu}$ soit strictement croissante. Comme $\mathcal{M}$ est complet, nous avons $R \leqslant N$. Comme de plus $\mathcal{M}$ est divisoriellement clos, nous avons également $2^\nu \leqslant N$. En observant que $(h-1)/j_h \leqslant (h-1)/(\nu+h) \leqslant \frac12$ pour $1 \leqslant h \leqslant \nu$, il suit

$$\frac{1}{2^\nu \nu!} \prod_{1\leqslant h\leqslant\nu} j_h \leqslant R \leqslant N.$$

On obtient bien (3·4) en prenant les logarithmes. □

2. Autrement dit telle que $g(mn) \leqslant g(m)g(n)$ pour tous entiers m,n premiers entre eux.

Désignons par g_1 la fonction arithmétique multiplicative définie par

$$g_1(n) := \frac{\mu(n)^2}{\prod_{p|n}(\sqrt{p}-1)}.$$

Lemme 3.2. *Soient* $\mathcal{M}\subset\mathbb{N}_1$ *un ensemble de* N *entiers sans facteur carré et* $C\geqslant 1$. *Alors*

$$S(\mathcal{M};C^\omega g_1)\leqslant N\mathscr{L}(N)^{2C+o(1)}. \tag{3·5}$$

Remarques. (i) Dans [6] — cf. équation (12) —, cette majoration est énoncée avec un exposant $2\sqrt{6C}$ mais il semble que la démonstration contienne une erreur et ne fournisse que $2\sqrt{6}C$. Par conséquent, il faut modifier la majoration finale $\Gamma(N)\leqslant\mathscr{L}(N)^{A+o(1)}$ obtenue dans [6] en remplaçant $A=2\sqrt{12}<7$ par $A=4\sqrt{6}<10$.

(ii) Notre approche permet d'employer la majoration (3·5) avec $C=\sqrt{2}$ au lieu de $C=2$ comme dans [7], ce qui fournit un gain de précision.

(iii) La méthode du §2 *infra* fournit, pour chaque $N\geqslant 1$, l'existence d'un ensemble $\mathcal{M}_N\subset\mathbb{N}_1$ de cardinal N et tel que

$$S\big(\mathcal{M}_N;C^\omega g_1\big)\geqslant N\mathscr{L}(N)^{2C+o(1)}.$$

Nous omettons les détails.

Démonstration du Lemme 3.2. En vertu des résultats de [3] et [6] rappelés plus haut, nous pouvons supposer que $\mathcal{M}$ est strict. Nous déduisons deux propriétés de cette hypothèse.

Lorsque les p_{j_h} sont les ν facteurs premiers $>y$ d'un entier $m\in\mathcal{M}$, nous avons donc, d'après le Lemme 3.1,

$$\sum_{1\leqslant h\leqslant\nu}\big\{\log(j_h)-\log(2\log N/\log 2)\big\}\leqslant\log N,$$

et $\nu\leqslant(\log N)/\log 2$. Comme $\log j=\log(p_j/\log p_j)+O(1)$, il existe une constante $B>0$ telle que

$$\sum_{\substack{p|m\\ p>y}}\log\Big(\frac{p}{B\log N\log p}\Big)\leqslant\log N\qquad(m\in\mathcal{M}). \tag{3·6}$$

Par ailleurs, si $n\in\mathcal{M}$ possède un facteur premier plus grand que p_N, ce nombre premier est dans $\mathcal{M}$, car $\mathcal{M}$ est divisoriellement clos. Cela implique que tous les nombres premiers p_j avec $j\leqslant N+1$ sont dans $\mathcal{M}$, car $\mathcal{M}$ est complet, et contredit donc l'hypothèse $|\mathcal{M}|=N$. Ainsi, nous pouvons énoncer que

$$P^+(m)\leqslant p_N\qquad(m\in\mathcal{M}). \tag{3·7}$$

Ici et dans la suite, nous désignons par $P^+(m)$ (resp. $P^-(n)$) le plus grand (resp. le plus petit) facteur premier d'un entier naturel n avec la convention $P^+(1)=1$ (resp. $P^-(1)=\infty$).

Notons $\mathcal{M}^*:=\big\{[m,n]:m\in\mathcal{M},\,n\in\mathcal{M}\big\}$. La majoration (3·2) permet d'écrire

$$S\big(\mathcal{M};C^\omega g_1\big)\leqslant\sum_{\ell\in\mathcal{M}^*}\bigg(\sum_{\substack{m|\ell\\ m\in\mathcal{M}}}C^{\omega(\ell/m)}g_1\Big(\frac{\ell}{m}\Big)\bigg)^2. \tag{3·8}$$

Soit f la fonction multiplicative définie par

$$f(p)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{p}-1} & \text{si } p\leqslant 2By,\\[2ex] C\sqrt{\dfrac{\log_3 N}{\log N\log_2 N}}\log\Big(\dfrac{p}{B\pi(y)\log p}\Big) & \text{si } p>2By.\end{cases}$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz fournit

$$\bigg(\sum_{\substack{m|\ell\\ m\in\mathcal{M}}}C^{\omega(\ell/m)}g_1\Big(\frac{\ell}{m}\Big)\bigg)^2\leqslant\sum_{\substack{d|\ell\\ d\in\mathcal{M}}}f\Big(\frac{\ell}{d}\Big)\sum_{\substack{t|\ell\\ t\in\mathcal{M}}}\frac{C^{2\omega(\ell/t)}}{f(\ell/t)}g_1\Big(\frac{\ell}{t}\Big)^2. \tag{3·9}$$

Nous avons

$$\sum_{\substack{d|\ell \\ d\in\mathcal{M}}} f\Big(\frac{\ell}{d}\Big) \leqslant F(\ell) := \prod_{p|\ell}(1+f(p))$$

et

$$\sum_{p\leqslant 2By} f(p) \ll \frac{\sqrt{y}}{\log y} \ll \sqrt{\frac{\log N}{\log_2 N}}, \tag{3·10}$$

alors que, dès que $m \in \mathcal{M}$,

$$\sum_{\substack{p|m \\ p>2By}} f(p) \leqslant C\sqrt{\frac{\log_3 N}{\log N \log_2 N}} \sum_{\substack{p|m \\ p>y}} \log\left(\frac{p}{B\pi(y)\log p}\right) \leqslant C\sqrt{\frac{\log_3 N \log N}{\log_2 N}}.$$

Ainsi,

$$F(m) \leqslant \exp\Big(\sum_{p|m} f(p)\Big) \leqslant \mathscr{L}(N)^{C+o(1)} \qquad (m\in\mathcal{M}). \tag{3·11}$$

En reportant (3·9) dans le membre de droite de (3·8), nous obtenons donc

$$\begin{aligned} S\big(\mathcal{M}; C^\omega g_1\big) &\leqslant \sum_{\ell\in\mathcal{M}^*} \sum_{\substack{m|\ell \\ m\in\mathcal{M}}} \frac{C^{2\omega(\ell/m)}}{f(\ell/m)} g_1\Big(\frac{\ell}{m}\Big)^2 F(\ell) \leqslant \sum_{m\in\mathcal{M}} F(m) \sum_{P^+(d)\leqslant p_N} \frac{C^{2\omega(d)}g_1(d)^2F(d)}{f(d)} \\ &\leqslant |\mathcal{M}|\mathscr{L}(N)^{C+o(1)} \sum_{P^+(d)\leqslant p_N} \frac{C^{2\omega(d)}g_1(d)^2F(d)}{f(d)} \\ &= |\mathcal{M}|\mathscr{L}(N)^{C+o(1)} \prod_{p\leqslant p_N}\Big(1+\frac{C^2(1+f(p))}{(\sqrt{p}-1)^2f(p)}\Big) \\ &\leqslant |\mathcal{M}|\mathscr{L}(N)^{C+o(1)} \exp\Big(\sum_{p\leqslant p_N}\frac{C^2(1+f(p))}{(\sqrt{p}-1)^2f(p)}\Big). \end{aligned}$$

Comme

$$\sum_{p\leqslant p_N} \frac{1}{(\sqrt{p}-1)^2} \ll \log_2 N$$

et

$$\begin{aligned} \sum_{p>2By} \frac{C^2}{(\sqrt{p}-1)^2 f(p)} &\leqslant \sqrt{\frac{\log N\log_2 N}{\log_3 N}} \sum_{p>2By} \frac{C}{(\sqrt{p}-1)^2\log(p/B\pi(y)\log p)} \\ &= \{C+o(1)\}\sqrt{\frac{\log N\log_3 N}{\log_2 N}} \end{aligned}$$

nous obtenons bien (3·5). □

3·2. Complétion de la preuve du Théorème 1.1

Nous adaptons la méthode de Bondarenko et Seip dans [6]. La première étape consiste à réduire la majoration de $S(\mathcal{M})$ au cas d'un ensemble divisoriellement clos de même cardinal — voir [3]. À cette fin, nous modifions les éléments de $\mathcal{M}$ en altérant successivement, pour chaque nombre premier p, les puissances de p qui les divisent.

Considérons donc un nombre premier p. Notant $\mathcal{M}_p^* := \{m/p^{v_p(m)} : m \in \mathcal{M}\}$, nous pouvons écrire

$$\mathcal{M} = \bigcup_{t\in\mathcal{M}_p^*} \{tp^{\nu_\alpha(t)} : 0 \leqslant \alpha \leqslant r(t)\}, \tag{3·12}$$

où $\nu(t) := \{\nu_\alpha(t)\}_{\alpha=0}^{r(t)}$ désigne la suite strictement croissante des valuations p-adiques des éléments de $\mathcal{M}$ dont t est la partie première à p. Il suit

$$S(\mathcal{M};g_0)=\sum_{m,n\in\mathcal{M}_p^*} g_0\Big(\frac{[m,n]}{(m,n)}\Big)\sigma_p(m,n), \tag{3·13}$$

avec

$$\sigma_p(m,n):=\sum_{\substack{0\leqslant\alpha\leqslant r(m)\\ 0\leqslant\beta\leqslant r(n)}}\frac{1}{p^{|\nu_\alpha(m)-\nu_\beta(n)|/2}}\cdot$$

Commençons par établir la majoration

$$\max_{\substack{r(m)=r\\ r(n)=s}}\sigma_p(m,n)\leqslant\sigma_p^*(r,s) \tag{3·14}$$

où l'on a posé

$$\sigma_p^*(r,s):=\begin{cases} r+1+\dfrac{2r}{\sqrt{p}-1} & \text{si } r=s\geqslant 0,\\ r+1+\dfrac{2r+1}{\sqrt{p}-1} & \text{si } r\geqslant 0,\ s=r+1,\\ r+1+\dfrac{2r+2}{\sqrt{p}-1} & \text{si } r\geqslant 0,\ s\geqslant r+2.\end{cases} \tag{3·15}$$

À cette fin, nous notons que, dans les deux premiers cas, l'optimum est atteint lorsque les ensembles $\nu(m)$ et $\nu(n)$ sont constitués des plus petits entiers possibles, autrement dit $\nu(m)=\{0,1,\dots,r\}$ et $\nu(n)=\{0,1,\dots,s\}$. Dans le troisième cas, la situation est plus compliquée. La configuration $\nu(m)=\{0,1,\dots,r\}$, $\nu(n)=\{j,j+1,\dots,j+s\}$ avec $j=\lfloor(s-r)/2\rfloor$ est un exemple fournissant l'optimum. Nous distinguons les cas $s=r$, $s=r+1$, et $s\geqslant r+2$.

Si $s=r$, nous avons

$$\sigma_p(m,n)\leqslant r+1+\sum_{1\leqslant k\leqslant r}\frac{2(r+1-k)}{p^{k/2}}\leqslant r+1+\frac{2r}{\sqrt{p}-1}=\sigma_p^*(r,r),$$

alors que, si $s=r+1$,

$$\sigma_p(m,n)\leqslant r+1+\frac{2r+1}{\sqrt{p}}+\sum_{1\leqslant k\leqslant r}\frac{2r+1-2k}{p^{(s-r+k)/2}}\leqslant r+1+\frac{2r+1}{\sqrt{p}-1}=\sigma_p^*(r,r+1).$$

Lorsque $s\geqslant r+2$, nous observons que, pour chaque $k\geqslant 1$, le nombre de couples (α,β) tels que $|\alpha-\beta|=k$ n'excède pas $2(r+1)$. Il s'ensuit que

$$\sigma_p(m,n)\leqslant r+1+\sum_{k\geqslant 1}\frac{2r+2}{p^{k/2}}=r+1+\frac{2r+2}{\sqrt{p}-1}=\sigma_p^*(r,s).$$

Cela complète la preuve de (3·14).

Posons

$$h(p^\alpha,p^\beta):=\begin{cases} 1 & \text{si } \alpha=\beta,\\ g_1(p) & \text{si } |\alpha-\beta|=1,\\ 0 & \text{si } |\alpha-\beta|=2 \text{ et } \min(\alpha,\beta)\geqslant 1,\\ g_1(p) & \text{si } |\alpha-\beta|=2 \text{ et } \min(\alpha,\beta)=0,\\ 0 & \text{si } |\alpha-\beta|\geqslant 3,\end{cases} \tag{3·16}$$

de sorte que

$$h(p^\alpha,p^\beta)=\frac{1}{(\sqrt{p}-1)^{\min(|\alpha-\beta|,1)}}\qquad\big(|\alpha-\beta|\leqslant 2-\min\{1,\alpha\beta\}\big).$$

Définissons alors les quantités

$$\sigma_p^+(r,s) := \sum_{\substack{0\leqslant\alpha\leqslant r\\ 0\leqslant\beta\leqslant s}} h(p^\alpha,p^\beta), \tag{3·17}$$

Dans l'optique d'itérer une majoration issue de (3·13), nous allons à présent montrer que

$$\sigma_p^*(r,s)\leqslant \sigma_p^+\big(r,s\big)\qquad (r\geqslant 0, s\geqslant 0). \tag{3·18}$$

Par symétrie, nous pouvons supposer $s\geqslant r$.

Nous avons

$$\sigma_p^+(r,s) = u+\frac{v+w}{\sqrt{p}-1},$$

avec

$$u := \sum_{0\leqslant\alpha\leqslant r} 1 = r+1,\quad v := \sum_{\substack{0\leqslant\alpha\leqslant r\\ 0\leqslant\beta\leqslant s\\ |\alpha-\beta|=1}} 1,\quad w := \sum_{\substack{0\leqslant\alpha\leqslant r\\ 0\leqslant\beta\leqslant s\\ |\alpha-\beta|=2,\,\alpha\beta=0}} 1.$$

Si $r=s$, alors $v=2r$, et

$$w=\begin{cases}0 & (r=s\leqslant 1),\\ 2 & (r=s\geqslant 2).\end{cases}$$

Ainsi $2r/(\sqrt{p}-1)\leqslant \sigma_p^+(r,r)-r-1\leqslant (2r+2)/(\sqrt{p}-1)$ et l'inégalité (3·18) est bien satisfaite.

Si $s=r+1$, alors $v=2r+1$, et

$$w=\begin{cases}0 & (r=0,\ s=1),\\ 1 & (r=1, s=2),\\ 2 & (r\geqslant 2,\ s=r+1).\end{cases}$$

D'où $(2r+1)/(\sqrt{p}-1)\leqslant \sigma_p^+(r,r+1)-r-1\leqslant (2r+3)/(\sqrt{p}-1)$, et nous obtenons encore (3·18).

Si enfin $s\geqslant r+2$, alors $v=2r+1$, et

$$w=\begin{cases}1 & (r\leqslant 1,\ s\geqslant r+2),\\ 2 & (r\geqslant 2,\ s\geqslant r+2).\end{cases}$$

Il suit $(2r+2)/(\sqrt{p}-1)\leqslant \sigma_p^+(r,s)-r-1\leqslant (2r+3)/(\sqrt{p}-1)$, ce qui confirme bien (3·18).

Posons à présent

$$\mathcal{M}_p = \bigcup_{n\in\mathcal{M}_p^*}\{np^\alpha : 0\leqslant\alpha\leqslant r(n)\}, \tag{3·19}$$

de sorte que $|\mathcal{M}|=|\mathcal{M}_p|$. Il résulte de (3·13), (3·14), (3·17) et (3·18) que

$$S(\mathcal{M};g_0)\ \leqslant \sum_{m,n\in\mathcal{M}_p^*} g_0\Big(\frac{[m,n]}{(m,n)}\Big)\sigma_p^+\big(r(m),r(n)\big).$$

Par itération, nous obtenons un ensemble $\mathcal{M}'$ divisoriellement clos tel que $|\mathcal{M}'|=|\mathcal{M}|$ et

$$S(\mathcal{M};g)\leqslant S^*(\mathcal{M}';h) \tag{3·20}$$

avec

$$S^*(\mathcal{M}';h) := \sum_{m,n\in\mathcal{M}'} h(m,n)$$

et h est la fonction multiplicative de deux variables définies par (3·16).

La deuxième étape, également présente dans [6], consiste à montrer que l'on peut essentiellement se ramener au cas où les éléments de $\mathcal{M}'$ sont sans facteur carré.

Pour simplifier les notations, nous considérons dans la suite un ensemble $\mathcal{M}$ divisoriellement clos et entreprenons de majorer $S^*(\mathcal{M};h)$ tel que défini plus haut. Il résulte en particulier de notre hypothèse que $\max_{m\in\mathcal{M}}\omega(m)\leqslant(\log N)/\log 2$.

Désignons par $k(m)$ le noyau sans facteur carré d'un entier m. Notant $\mathcal{M}_0$ l'ensemble des éléments sans facteur carré de $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}_k := \{m \in \mathcal{M} : k(m) = k\}$ $(k \in \mathcal{M}_0)$, nous avons la partition

$$\mathcal{M} = \bigcup_{k\in\mathcal{M}_0} \mathcal{M}_k.$$

et donc $|\mathcal{M}| = N = \sum_{k\in\mathcal{M}_0} |\mathcal{M}_k|$. Semblablement,

$$S^*(\mathcal{M}; h) = \sum_{j,k\in\mathcal{M}_0} S_{j,k} \tag{3·21}$$

avec

$$S_{j,k} := \sum_{m\in\mathcal{M}_j,\, n\in\mathcal{M}_k} h(m, n) \qquad (j, k \in \mathcal{M}_0).$$

Dans la somme intérieure, effectuons la décomposition $m = jm_1m_2$, $n = kn_1n_2$, avec, pour $d := (j, k)$, $h(m, n) \neq 0$,

$$m_2n_2 \mid d^\infty, \quad m_1 \mid j/d, \quad n_1 \mid k/d.$$

puisque $h(m, n)$ est nul si $[m, n]/(m, n)$ a des facteurs cubiques. Nous avons

$$(m_1, m_2) = (n_1, n_2) = (m_1, n_1) = 1, \qquad \ell := \frac{[m, n]}{(m, n)} = \frac{[j, k]}{(j, k)}\frac{[m_2, n_2]}{(m_2, n_2)} m_1n_1.$$

Cela implique

$$h(m, n) = g_1\Big(\frac{[j, k]}{(j, k)}\Big) g_1\Big(\frac{[m_2, n_2]}{(m_2, n_2)}\Big).$$

On vérifie cette formule par multiplicativité en se restreignant au cas $(m, n) = (p^\alpha, p^\beta)$. Ainsi, par exemple, si $(\alpha, \beta) = (2, 0)$, nous avons $j = p$, $m_1 = p$, $k = n_1 = m_2 = n_2 = 1$, et donc $h(p^2, 1) = g_1(p)$.

Notons respectivement $\mathcal{M}(j, k; m_2)$ et $\mathcal{M}(k, j; n_2)$ les ensembles constitués de toutes les valeurs admissibles de m_1 et n_1. Nous retrouvons l'inégalité utilisée par Bondarenko et Seip au lemme 5 de [6] en observant que

$$\sum_{\substack{m_1\in\mathcal{M}(j,k;m_2)\\ n_1\in\mathcal{M}(k,j;n_2)}} 1 \leqslant \sum_{\substack{m_1\mid j/d\\ n_1\mid k/d}} 1 \leqslant 2^{\omega([j,k]/d)}.$$

Posons

$$s(j, k; m_2) = \sum_{m_1\in\mathcal{M}(j,k;m_2)} \mu(m_1)^2. \tag{3·22}$$

Nous avons

$$\sum_{\substack{m_1\in\mathcal{M}(j,k;m_2)\\ n_1\in\mathcal{M}(k,j;n_2)}} \mu(m_1n_1)^2 = s(j, k; m_2)s(k, j; n_2).$$

De plus, l'inégalité de Cauchy–Schwarz fournit

$$s(j, k; m_2)^2 \leqslant |\mathcal{M}(j, k; m_2)| \sum_{m_1\mid j/d} 1 \leqslant |\mathcal{M}(j, k; m_2)| 2^{\omega(j/d)}. \tag{3·23}$$

Il s'ensuit que

$$S_{j,k} \leqslant \sqrt{2}^{\omega([j,k]/d)} g_1\bigg(\frac{[j, k]}{(j, k)}\bigg) S'_{j,k},$$

avec

$$S'_{j,k} := \sum_{\substack{\mathcal{M}(j,k;m_2)\neq\varnothing\\ \mathcal{M}(k,j;n_2)\neq\varnothing}} g_1\Big(\frac{[m_2, n_2]}{(m_2, n_2)}\Big) \sqrt{|\mathcal{M}(j, k; m_2)| \cdot |\mathcal{M}(k, j; n_2)|}.$$

Une nouvelle application de l'inégalité de Cauchy–Schwarz permet alors d'écrire

$$(S'_{j,k})^2 \leqslant \sum_{\substack{\mathcal{M}(j,k;m_2)\neq\varnothing\\ \mathcal{M}(k,j;n_2)\neq\varnothing}} g_1\Big(\frac{[m_2, n_2]}{(m_2, n_2)}\Big)|\mathcal{M}(j, k; m_2)| \sum_{\substack{\mathcal{M}(j,k;m_2)\neq\varnothing\\ \mathcal{M}(k,j;n_2)\neq\varnothing}} g_1\Big(\frac{[m_2, n_2]}{(m_2, n_2)}\Big)|\mathcal{M}(k, j; n_2)|.$$

Comme $\max\{\omega(j),\omega(k)\} \leqslant (\log N)/\log 2$, toutes les valeurs considérées de j et k satisfont

$$G := \prod_{p|(j,k)} \big(1 + 2g_1(p)\big) \ll G_N := \mathrm{e}^{5\sqrt{(\log N)/\log_2 N}}. \tag{3·24}$$

Pour chaque m_2 fixé tel que $\mathcal{M}(j,k;m_2) \neq \varnothing$, nous avons

$$\sum_{\mathcal{M}(k,j;n_2)\neq\varnothing} g_1\Big(\frac{[m_2,n_2]}{(m_2,n_2)}\Big) \leqslant \prod_{p|(j,k)} \big(1 + 2g_1(p)\big) = G \ll G_N.$$

Puisque

$$\sum_{\mathcal{M}(j,k;m_2)\neq\varnothing} |\mathcal{M}(j,k;m_2)| = |\mathcal{M}_j|, \qquad \sum_{\mathcal{M}(k,j;n_2)\neq\varnothing} |\mathcal{M}(k,j;n_2)| = |\mathcal{M}_k|,$$

nous obtenons

$$S'_{j,k} \ll G_N\sqrt{|\mathcal{M}_j|\cdot|\mathcal{M}_k|}$$

et donc, en vertu de (3·23),

$$S_{j,k} \leqslant G_N\sqrt{2}^{\omega([j,k]/(j,k))} g_1\Big(\frac{[j,k]}{(j,k)}\Big)\sqrt{|\mathcal{M}_j|\cdot|\mathcal{M}_k|}.$$

En reportant dans (3·21) et en appliquant le théorème 5 de [3], nous obtenons

$$\begin{aligned} S(\mathcal{M}) &\ll G_N \sum_{j,k\in\mathcal{M}} \mu(j)^2\mu(k)^2\sqrt{2}^{\omega([j,k]/(j,k))} g_1\Big(\frac{[j,k]}{(j,k)}\Big)\sqrt{|\mathcal{M}_j|\cdot|\mathcal{M}_k|} \\ &\ll (\log N)G_N \sup_{\substack{|\mathcal{M}|\leqslant N\\ \mathcal{M}\subset\mathbb{N}_1}} S(\mathcal{M},\sqrt{2}^{\omega}g_1). \end{aligned}$$

Le Lemme 3.2 fournit alors la majoration du Théorème 1.1. □

Remarque. Cette dernière étape de la démonstration vaut pour tout exposant $\alpha \in]0,1[$: pour chaque ensemble $\mathcal{M}$ de cardinal N, nous avons

$$S_\alpha(\mathcal{M}) \ll G_N(\alpha)^{O(1)} \sup_{\substack{|\mathcal{M}'|=N\\ \mathcal{M}'\subset\mathbb{N}_1}} S\big(\mathcal{M}',\sqrt{2}^{\omega}g_{2\alpha}\big). \tag{3·25}$$

avec

$$g_\alpha(n) := \frac{\mu(n)^2}{\prod_{p|n}(p^{\alpha/2}-1)}, \qquad G_N(\alpha) := \exp\big\{(\log N)^{1-\alpha}(\log_2 N)^{-\alpha}\big\}.$$

Cela permet donc de majorer efficacement $S_\alpha(\mathcal{M})$ lorsque $\frac12 < \alpha \leqslant \frac12 + o(1)$.

4. Cas d'un ensemble de diviseurs : preuve du Théorème 1.3

Un calcul standard, effectué dans [19] lorsque $\alpha = 1$, fournit

$$S_\alpha(\mathcal{T}_D) = \tau(D)\prod_{p^{\mu_p}\|D}\Big(1 + \frac{2\mu_p}{(1+\mu_p)p^\alpha}\sum_{0\leqslant k<\mu_p}\frac{1-k/\mu_p}{p^{k\alpha}}\Big). \tag{4·1}$$

Il suit, pour $\alpha := 1/2$,

$$S(\mathcal{T}_D) \leqslant \tau(D)\exp\Big\{\sum_{p^{\mu_p}\|D}\frac{2\mu_p}{(1+\mu_p)(\sqrt{p}-1)}\Big\}. \tag{4·2}$$

Commençons par traiter le cas des estimations de $\Gamma''(N)$.

Lorsque D est sans facteur carré, nous déduisons de (4·1) que

$$\exp\Big\{\sum_{p|D}\frac{1}{\sqrt{p}}\Big\}\prod_{p|D}\Big(1+\frac{1}{2p}\Big)^{-1} \leqslant \frac{S(\mathcal{T}_D)}{\tau(D)} \leqslant \exp\Big\{\sum_{p|D}\frac{1}{\sqrt{p}}\Big\}. \tag{4·3}$$

Nous observons également que la contribution à $S(\mathcal{T}_D)$ de chaque entier $m \in \mathcal{T}_D$ est alors une fonction de D seul : en effet, pour $m \mid D$, $\mu(D)^2 = 1$ et $\alpha > 0$, nous avons

$$\sum_{d|D} \frac{(d,m)^\alpha}{[d,m]^\alpha} = \sum_{t|m} \frac{t^\alpha}{m^\alpha} \sum_{s|D/m} \frac{1}{s^\alpha} = \prod_{p|D} \Big(1 + \frac{1}{p^\alpha}\Big).$$

La valeur maximale du membre de droite de (4·3) lorsque $\omega(D) = k$ est atteinte lorsque $D = D_y := \prod_{p\leqslant y} p$ avec $\pi(y) = k = \lfloor (\log N)/\log 2 \rfloor$. Grâce à l'estimation

$$\sum_{p\leqslant y} \frac{1}{\sqrt{p}} = \frac{2\sqrt{y}}{\log y}\Big\{1 + O\Big(\frac{1}{\log y}\Big)\Big\} = \frac{2}{\sqrt{\log 2}}\sqrt{\frac{\log N}{\log_2 N}}\Big\{1 + O\Big(\frac{\log_3 N}{\log_2 N}\Big)\Big\}, \tag{4·4}$$

nous obtenons

$$\log \Gamma''_{1/2}(N) \leqslant \frac{2}{\sqrt{\log 2}}\sqrt{\frac{\log N}{\log_2 N}}\Big\{1 + O\Big(\frac{\log_3 N}{\log_2 N}\Big)\Big\}.$$

La minoration correspondante peut être obtenue de manière analogue. Nous omettons les détails.

Considérons à présent le cas de $\Gamma'(N)$.

Pour optimiser la somme, disons $s(D)$, apparaissant au membre de droite de (4·2) sous la contrainte $\log \tau(D) \leqslant \log N$, nous écrivons la décomposition canonique de D sous la forme $D := D_y = \prod_{p\leqslant y} p^{\mu_p}$. La suite μ_p doit être décroissante au sens large. En effet, comme la fonction $t \mapsto 2t/(t+1)$ est croissante, si l'on avait $\mu_p > \mu_q$ avec $p < q$, en intervertissant les valeurs de μ_p et μ_q, nous ne changerions pas la valeur de $\tau(D)$ tout en accroissant $s(D)$.

Définissons alors une suite croissante au sens large $\{r_k\}_{k=1}^\infty \in [1,\infty[^{\mathbb{N}}$ et un entier $K \geqslant 1$ par les conditions

$$\mu_p = k \Leftrightarrow p \in I_k :=]y/r_{k+1}, y/r_k] \qquad \big(k \geqslant 1\big), \qquad K := \inf\{k \geqslant 1 : r_k > (\log y)^2\}.$$

Les intervalles I_k peuvent être vides : si la valeur k n'est pas atteinte par les μ_p, nous choisissons $r_{k+1} = r_k$. L'inégalité (4·2) implique

$$\begin{aligned}\log\Big(\frac{S(\mathcal{M}_D)}{\tau(D)}\Big) &\leqslant \sum_{1\leqslant k\leqslant K} \frac{2k}{1+k} \sum_{y/r_{k+1}<p\leqslant y/r_k} \frac{1}{\sqrt{p}-1} + \sum_{p\leqslant y/(\log y)^2} \frac{2}{\sqrt{p}-1}\\ &\leqslant \frac{4C_1\sqrt{y}}{\log y}\Big\{1 + O\Big(\frac{1}{\log y}\Big)\Big\},\end{aligned}$$

où la série

$$C_1 := \sum_{k\geqslant 1} \frac{k}{(1+k)}\bigg(\frac{1}{\sqrt{r_k}} - \frac{1}{\sqrt{r_{k+1}}}\bigg) = \sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k(1+k)\sqrt{r_k}}$$

est convergente. La condition $\tau(D) \leqslant N$ implique

$$\frac{y}{\log y}\Big\{C_2(K) + O\Big(\frac{1}{\log y}\Big)\Big\} \leqslant \log N \tag{4·5}$$

où l'on a posé

$$C_2(K) := \sum_{1\leqslant k\leqslant K} \log(k+1)\bigg(\frac{1}{r_k} - \frac{1}{r_{k+1}}\bigg) = \sum_{1\leqslant k\leqslant K} \frac{\log(1+1/k)}{r_k} - \frac{\log(K+1)}{r_K}\cdot \tag{4·6}$$

Pour évaluer le maximum de C_1 sous la contrainte (4·5), nous utilisons la méthode des multiplicateurs de Lagrange en considérant $\boldsymbol{r} := \{r_k\}_{k=1}^K$ comme variable et en négligeant initialement les termes d'erreur ainsi que le deuxième terme du membre de droite de (4·6), qui est négatif ou nul. Posons

$$s(\boldsymbol{r}) := \sum_{1\leqslant k\leqslant K} \frac{1}{k(1+k)\sqrt{r_k}}, \qquad \psi(\boldsymbol{r}) := \sum_{1\leqslant k\leqslant K} \frac{\log(1+1/k)}{r_k} - \frac{\log N \log y}{y},$$

de sorte que nous cherchons le maximum de $s(\boldsymbol{r})$ sous la contrainte $\psi(\boldsymbol{r}) \leqslant 0$. Le multiplicateur de Lagrange λ est donc défini par les équations

$$\frac{\partial}{\partial \lambda}\big(s(\boldsymbol{r}) - \lambda\Psi(\boldsymbol{r})\big) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial r_k}\big(s(\boldsymbol{r}) - \lambda\Psi(\boldsymbol{r})\big) = 0 \qquad (1 \leqslant k \leqslant K).$$

Ainsi $\Psi(\boldsymbol{r}) = 0$ et

$$-\frac{1}{2r_k^{3/2}k(k+1)} + \frac{\lambda}{r_k^2}\log(1+1/k) = 0 \qquad (1 \leqslant k \leqslant K),$$

ce qui fournit

$$r_k = \{2\lambda k(k+1)\log(1+1/k)\}^2. \tag{4·7}$$

Nous choisissons alors $\lambda = 1/(4\log 2)$ de sorte que $r_1 = 1$. Il s'ensuit que $r_k \asymp k^2$, $K \asymp \log y$ et $C_2(K) = C_2 + O\big((\log_2 y)/(\log y)^2\big)$ avec $C_2 := \lim_{K\to+\infty} C_2(K)$.

De plus, compte-tenu de (4·5), nous avons $y = (\log N)\big\{\log_2 N + O(1)\big\}/C_2$. Il suit

$$\log \Gamma'(N) \leqslant \log\Big\{\frac{S(\mathcal{T}_D)}{\tau(D)}\Big\} \leqslant \frac{4C_1}{\sqrt{C_2}}\Big\{1 + O\Big(\frac{\log_3 N}{\log_2 N}\Big)\Big\}\sqrt{\frac{\log N}{\log_2 N}}.$$

Comme (4·7) implique $4C_1/\sqrt{C_2} = B$, nous obtenons bien la majoration contenue dans (1·9).

Le même choix des paramètres fournit alors la minoration correspondante. □

5. Valeurs extrêmes de la fonction zêta de Riemann

5·1. Méthode de Bondarenko–Seip et sous-sommes de Gál

Dans leurs travaux sur le sujet, Bondarenko et Seip minorent les valeurs extrêmes localisées de la fonction zêta de Riemann — et donc en particulier la quantité (1·11) — en évaluant les normes de formes quadratiques associées à certaines sous-sommes de Gál, soit

$$\mathfrak{S}_\alpha(\mathcal{M}) := \sum_{\substack{m,n\in\mathcal{M}\\ n\mid m}} \Big(\frac{n}{m}\Big)^\alpha \qquad (\alpha > 0). \tag{5·1}$$

Nous avons bien, pour tout ensemble fini $\mathcal{M}$ et tout $\alpha > 0$,

$$\mathfrak{S}_\alpha(\mathcal{M}) \leqslant S_\alpha(\mathcal{M}),$$

puisque $[m,n]/(m,n) = m/n$ lorsque $n \mid m$.

Les minorations issues, comme dans [6], de cette approche sont obtenues en construisant des ensembles $\mathcal{M}$ adéquats qui sont divisoriellement clos, une condition naturelle pour obtenir de grandes valeurs. Or, il est facile de constater que les sous-sommes de Gál $\mathfrak{S}(\mathcal{M}) = \mathfrak{S}_{1/2}(\mathcal{M})$ sont dans ce cas d'un ordre de grandeur très inférieur à celui des sommes de Gál maximales $S(\mathcal{M})$.

Lemme 5.1. *Pour tout ensemble d'entiers $\mathcal{M}$ divisoriellement clos et de cardinal N, nous avons*

$$\mathfrak{S}(\mathcal{M}) \leqslant N\exp\left\{\frac{2+o(1)}{\sqrt{\log 2}}\sqrt{\frac{\log N}{\log_2 N}}\right\} \qquad (N\to\infty).$$

Démonstration. Pour tout m, nous avons

$$\sum_{n\mid m} g_0\Big(\frac{m}{n}\Big) \leqslant \prod_{p\mid m}\frac{1}{1-1/\sqrt{p}}.$$

De plus, si $\mathcal{M}$ de cardinal N est divisoriellement clos nous avons vu que $\omega(m) \leqslant (\log N)/\log 2$ pour tout $m \in \mathcal{M}$, de sorte que

$$\prod_{p\mid m}\frac{1}{1-1/\sqrt{p}} \leqslant \exp\left\{\frac{2+o(1)}{\sqrt{\log 2}}\sqrt{\frac{\log N}{\log_2 N}}\right\}.$$

La majoration annoncée en découle immédiatement. □

Posons

$$\mathfrak{Q}(\mathcal{M}) := \sup_{\substack{\boldsymbol{c}\in\mathbb{C}^N\\ \|\boldsymbol{c}\|_2=1}} \Bigg| \sum_{\substack{m,n\in\mathcal{M}\\ n|m}} c_m\overline{c_n}\sqrt{\frac{n}{m}}\Bigg|.$$

Bondarenko et Seip établissent dans [6] l'existence d'un ensemble $\mathcal{M}$ divisoriellement clos et de cardinal $\leqslant N$ tel que

$$\mathfrak{Q}(\mathcal{M}) \gg \mathscr{L}(N)^{1+o(1)}. \tag{5·2}$$

Cela met en évidence que la propriété remarquable, mentionnée dans l'introduction, relative aux vecteurs propres des formes quadratiques associées aux sommes de Gál n'est plus valable pour les sous-sommes de type $\mathfrak{S}(\mathcal{M})$, du moins lorsque $\mathcal{M}$ est divisoriellement clos.

Nous avons vu plus haut qu'en vertu des lemmes 1 et 2 de [6], le supremum $\Gamma^*(N)$ est obtenu pour un ensemble strict. Nous savons également que tout ensemble strict vérifie

$$\sup_{m\in\mathcal{M}} P^+(m) \leqslant p_N \qquad (|\mathcal{M}| = N). \tag{5·3}$$

Notons $\mathcal{A}$ l'ensemble de toutes les parties finies de $\mathbb{N}_1$ satisfaisant (5·3). Ainsi $\mathcal{A}$ contient à la fois les ensembles considérés dans [7] et ceux qui ont permis d'établir la minoration du Théorème 1.1.

Le résultat suivant, relatif aux éléments de $\mathcal{A}$, laisse supposer que la taille maximale de $\mathfrak{Q}(\mathcal{M})$ lorsque $\mathcal{M}$ décrit les sous-ensemble de $\mathbb{N}_1$ de taille N vaut $\Gamma^*(N)^{1/2+o(1)}$. Cette question demeure ouverte en l'état. Rappelons la définition des normes $Q(\mathcal{M})$ en (1·6).

Lemme 5.2. *Soit* $\mathcal{M}\in\mathcal{A}$, $|\mathcal{M}| = N$. *Alors*

$$\mathfrak{Q}(\mathcal{M})^2 \ll (\log N)Q(\mathcal{M}). \tag{5·4}$$

En particulier,

$$\sup_{\substack{\mathcal{M}\in\mathcal{A}\\ |\mathcal{M}|=N}} \mathfrak{Q}(\mathcal{M}) = \mathscr{L}(N)^{1+o(1)}. \tag{5·5}$$

Démonstration. Soit $\boldsymbol{c}\in\mathbb{C}^N$ tel que $\|\boldsymbol{c}\|_2 = 1$. Posant

$$s_d := \sum_{\substack{m\in\mathcal{M}\\ d|m}} c_m g_0\Big(\frac{m}{d}\Big),$$

de sorte que la quantité à majorer s'écrit $|\Lambda|^2$ avec $\Lambda := \sum_{d\in\mathcal{M}} c_d\overline{s_d}$, nous appliquons l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour obtenir

$$|\Lambda|^2 \leqslant \sum_{d\in\mathcal{M}} |s_d|^2 = \sum_{d\in\mathcal{M}} \sum_{\substack{m,n\in\mathcal{M}\\ d|m,d|n}} c_m\overline{c_n}\frac{g_0(m)g_0(n)}{g_0(d)^2} \leqslant \sum_{m,n\in\mathcal{M}} g_0(m)g_0(n)|c_mc_n| \sum_{d|(m,n)} \frac{1}{g_0(d)^2}.$$

Or, pour tout entier D tel que $P^+(D) \leqslant p_N$, nous avons

$$\sum_{d|D} \frac{1}{g_0(d)^2} \leqslant \frac{1}{g_0(D)^2} \prod_{p^\nu\|D} \frac{1-1/p^{-\nu-1}}{1-1/p} \ll \frac{\log N}{g_0(D)^2}.$$

Il suit

$$|\Lambda|^2 \ll (\log N)\sum_{m,n\in\mathcal{M}} g_0\Big(\frac{[m,n]}{(m,n)}\Big)|c_mc_n| \leqslant (\log N) \sup_{\substack{\boldsymbol{c}\in\mathbb{C}^N\\ \|\boldsymbol{c}\|_2=1}} \Bigg|\sum_{n,m\in\mathcal{M}} c_m\overline{c_n}\sqrt{\frac{(m,n)}{[m,n]}}\Bigg|. \tag{5·6}$$

Cela établit bien (5·4).

La variante du théorème 5 de [3][3] relative aux sous-ensembles de $\mathbb{N}_1$ permet, grâce à (1·5), de majorer le membre de droite de (5·6) par $\mathscr{L}(N)^{2+o(1)}$. La minoration contenue dans (5·5) a été établie dans [7]. □

5·2. Preuve du Théorème 1.4

Nous ferons appel à la variante suivante du lemme 1 de [9]. Signalons incidemment qu'une erreur de signe s'est glissée dans ce dernier énoncé : les deux membres du terme de droite de la formule (6) de [9] doivent être séparés par un signe $-$ et non $+$.

Nous notons z un nombre complexe générique et définissons implicitement ses parties réelle et imaginaire par $z = x + iy$. Lorsque $F \in L^1(\mathbb{R})$, nous définissons la transformée de Fourier par la formule

$$\widehat{F}(\xi) := \int_{\mathbb{R}} F(x)\mathrm{e}^{-ix\xi}\,\mathrm{d}x \qquad (\xi \in \mathbb{R}).$$

Lemme 5.3. *Soient $\sigma \in]-\infty, 1[$ et F une fonction holomorphe dans la bande horizontale $y = \Im m\, z \in [\sigma - 2, 0]$, satisfaisant à la condition de croissance*

$$\sup_{\sigma-2\leqslant y\leqslant 0} \big|F(z)\big| \ll \frac{1}{x^2+1}\cdot \tag{5·7}$$

Alors, pour tout $s = \sigma + it \in \mathbb{C}$, $t \neq 0$, nous avons

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} &\zeta(s+iu)\overline{\zeta(s-iu)}F(u)\,\mathrm{d}u \\ &= \sum_{k,\ell\geqslant 1} \frac{\widehat{F}(\log k\ell)}{k^s \ell^{\overline{s}}} - 2\pi\zeta(1-2it)F(is-i) - 2\pi\zeta(1+2it)F(i\overline{s}-i).\end{aligned}$$

Démonstration. La formule résulte d'une application standard du théorème des résidus à $w \mapsto \zeta(s+w)\zeta(\overline{s}+w)F(-iw)$, suivie d'un passage à la limite. Nous omettons les détails. □

Démonstration du Théorème 1.4. Soient $T > 1$, $\kappa = 1-\beta$, et $N := \lfloor T^\kappa \rfloor$. Étant donné un ensemble d'entiers $\mathcal{M}$ de cardinal N, posons

$$\mathcal{M}_j := \mathcal{M} \cap \,\big](1+1/T)^j, (1+1/T)^{j+1}\big] \qquad (j \geqslant 0), \tag{5·8}$$

notons $h_j := \min \mathcal{M}_j$ lorsque $\mathcal{M}_j \neq \varnothing$, et désignons par $\mathcal{H}$ l'ensemble des h_j. Définissons alors $r : \mathcal{H} \to \mathbb{R}^+$ par la formule $r(h_j)^2 := \sum_{m\in\mathcal{M}_j} 1$. Le facteur de résonance associé au problème est choisi sous la forme $|R(t)|^2$ avec

$$R(t) := \sum_{h\in\mathcal{H}} \frac{r(h)}{h^{it}}\cdot$$

Nous avons trivialement

$$R(0)^2 \leqslant N \sum_{h\in\mathcal{H}} r(h)^2 \leqslant N|\mathcal{M}| \leqslant N^2. \tag{5·9}$$

Considérons alors la densité de Gauss $\Phi(t) := \mathrm{e}^{-t^2/2}$, de sorte que $\widehat{\Phi}(\xi) = \sqrt{2\pi}\Phi(\xi)$. La méthode de résonance repose classiquement [7] sur une minoration du rapport $M_2(T)/M_1(T)$ où l'on a posé

$$M_1(T) := \int_{\mathbb{R}} |R(t)|^2 \Phi\Big(\frac{t}{T}\Big)\,\mathrm{d}t, \quad M_2(T) := \int_{T^\beta}^{T} |\zeta(\tfrac12 + it)|^2 |R(t)|^2 \Phi\Big(\frac{t}{T}\Big)\,\mathrm{d}t.$$

La technique de [9], consistant, une fois adaptée à notre situation, à remplacer, dans $M_2(T)$, le terme $|\zeta(\frac12 + it)|^2$ par un produit de convolution, permet un gain de précision lorsque $\beta \leqslant \frac12$. D'après le lemme 5 de [9], nous avons

$$\int_{\mathbb{R}} |R(t)|^2 \Phi\Big(\frac{t\log T}{T}\Big)\,\mathrm{d}t \ll \frac{T|\mathcal{M}|}{\log T}\cdot \tag{5·10}$$

3. Voir (1·7).

Soit $\varepsilon \in]0,1[$. Posons

$$K(u) := \frac{\sin^2(\varepsilon u \log T)}{\pi u^2 \varepsilon \log T} \qquad (u \in \mathbb{R})$$

de sorte que

$$\widehat{K}(\xi) = \Big\{1 - \frac{|\xi|}{2\varepsilon \log T}\Big\}^+.$$

Notons également, à fins d'utilisation ultérieure, que K est prolongeable en une fonction entière et satisfait (5·7).

Considérons

$$\begin{aligned}\mathfrak{Z}(t,u) &:= \zeta(\tfrac12 + it + iu)\zeta(\tfrac12 - it + iu)K(u),\\ I(T) &:= \int_{\mathbb{R}} |R(t)|^2 \Phi\Big(\frac{t\log T}{T}\Big)\int_{\mathbb{R}} \mathfrak{Z}(t,u)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Nous allons montrer dans un premier temps que les contributions à $I(T)$ des domaines $|t| \leqslant 2T^\beta$ et $\{|t| > T/2,\ |u| > |t|/2\}$ sont négligeables. Il s'ensuivra que seules des valeurs de $\zeta(\frac12 + iv)$ avec $v \in [T^\beta, T]$ interviendront dans la contribution principale, ce qui permettra de majorer $I(T)$ en fonction de $Z_\beta(T)$. Dans un second temps, nous relierons $I(T)$ aux sommes de Gál.

La majoration

$$|\zeta(\tfrac12 + iv)| \ll (1+|v|)^{1/6} \qquad (v \in \mathbb{R}) \tag{5·11}$$

fournit

$$\int_{|t|\leqslant 2T^\beta}\int_{|u|>T^\beta} \mathfrak{Z}(t,u)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}t \ll \int_{|t|\leqslant 2T^\beta}\int_{|u|>T^\beta} \frac{|\zeta(\frac12+it+iu)|}{|t|+|u|}\frac{|\zeta(\frac12-it+iu)|}{|t|+|u|}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}t \ll T^\beta.$$

En appliquant l'inégalité $2|ab| \leqslant |a|^2 + |b|^2$ et en majorant classiquement le moment d'ordre 2 sur $[-H,H]$ de $|\zeta(\frac12 + it)|$ par $\ll H\log H$, il vient

$$\begin{aligned}\int_{|t|\leqslant 2T^\beta}\int_{\mathbb{R}} \mathfrak{Z}(t,u)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}t &\ll T^\beta + \int_{|t|\leqslant 2T^\beta}\int_{|u|\leqslant T^\beta} |\zeta(\tfrac12+it+iu)|^2 K(u)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}t\\ &\ll T^\beta + \int_{|t|\leqslant 3T^\beta} |\zeta(\tfrac12+it)|^2\,\mathrm{d}t \ll T^\beta \log T.\end{aligned}$$

Il suit, trivialement,

$$\int_{|t|\leqslant 2T^\beta} |R(t)|^2\Phi\Big(\frac{t\log T}{T}\Big)\int_{\mathbb{R}}\mathfrak{Z}(t,u)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}t \ll R(0)^2 T^\beta \log T \ll |\mathcal{M}|T^{\beta+\kappa}\log T.$$

De plus, la décroissance rapide de Φ permet d'écrire

$$\int_{|t|>T/2} |R(t)|^2\Phi\Big(\frac{t\log T}{T}\Big)\int_{\mathbb{R}}\mathfrak{Z}(t,u)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}t \ll R(0)^2.$$

Nous obtenons donc

$$I(T) + O\big(|\mathcal{M}|T\log T\big) = \int_{2T^\beta\leqslant|t|\leqslant T/2} |R(t)|^2\Phi\Big(\frac{t\log T}{T}\Big)\int_{\mathbb{R}}\mathfrak{Z}(t,u)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}t. \tag{5·12}$$

Comme, en vertu de (5·11), nous avons $\int_{|u|>|t|/2}\mathfrak{Z}(t,u)\,\mathrm{d}u \ll 1$, la contribution du domaine $|u| > |t|/2$ au membre de droite de (5·12) peut être englobée par le terme d'erreur.

Ainsi l'intégrale intérieure peut être restreinte au domaine $T^\beta \leqslant |t \pm u| \leqslant T$. Compte tenu de (5·10), cela implique

$$\frac{T|\mathcal{M}|}{\log T} Z_\beta(T)^2 \gg I(T) + O\big(|\mathcal{M}|T\log T\big). \tag{5·13}$$

À ce stade, considérons la fonction

$$G(z) := \sum_{k,\ell\geqslant 1}\frac{\widehat{K}(\log k\ell)}{\sqrt{k\ell}(k/\ell)^{iz}}.$$

L'application du Lemme 5.3 avec $F = K$ fournit

$$I(T) = I_1(T) + I_2(T) + I_3(T), \tag{5·14}$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned} I_1(T) &:= \int_{\mathbb{R}} G(t)|R(t)|^2 \Phi\Big(\frac{t\log T}{T}\Big)\,\mathrm{d}t, \\ I_2(T) &:= -2\pi \int_{\mathbb{R}} \zeta(1-2it)K(-t-\tfrac12 i)|R(t)|^2 \Phi\Big(\frac{t\log T}{T}\Big)\,\mathrm{d}t, \\ I_3(T) &:= -2\pi \int_{\mathbb{R}} \zeta(1+2it)K(t-\tfrac12 i)|R(t)|^2 \Phi\Big(\frac{t\log T}{T}\Big)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

En reportant dans (5·13) l'estimation $|I_2(T)| + |I_3(T)| \ll T|\mathcal{M}|/\log T$, qui résulte des majorations (5·11) et (5·10), nous obtenons

$$\frac{T|\mathcal{M}|}{\log T} Z_\beta(T)^2 \gg I_1(T) + O\big(|\mathcal{M}|T\log T\big). \tag{5·15}$$

Cette estimation constitue la première étape annoncée de la preuve.

Afin de relier l'intégrale $I_1(T)$, aux sommes de Gál, nous procédons comme dans [7] — cf. équation (25). Nous avons

$$\begin{aligned} I_1(T) &= \frac{T\sqrt{2\pi}}{\log T} \sum_{h,g\in\mathcal{H}} r(h)r(g) \sum_{k,\ell\geqslant 1} \frac{\widehat{K}(\log k\ell)}{\sqrt{k\ell}} \Phi\Big(\frac{T}{\log T}\log\frac{hk}{g\ell}\Big) \\ &\gg \frac{T}{\log T} \sum_{1\leqslant k\ell\leqslant T^\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{k\ell}} \sum_{h,g\in\mathcal{H}} r(h)r(g)\Phi\Big(\frac{T}{\log T}\log\frac{hk}{g\ell}\Big), \end{aligned}$$

puisque le terme général de la série quadruple initiale est positif ou nul et $\widehat{K}(\log k\ell) \geqslant 1/2$ si $k\ell \leqslant T^\varepsilon$.

Selon la méthode développée dans [7], nous observons que, lorsque k et ℓ sont fixés et si $h \in \mathcal{M}_i$, $g \in \mathcal{M}_j$, nous avons

$$\sum_{\substack{m\in\mathcal{M}_i,\, n\in\mathcal{M}_j \\ mk=n\ell}} 1 \leqslant \min\{r(h)^2, r(g)^2\} \leqslant r(h)r(g),$$

et donc

$$\sum_{\substack{m\in\mathcal{M}_i,\, n\in\mathcal{M}_j \\ mk=n\ell}} \Phi\Big(\frac{T}{\log T}\log\frac{hn}{gm}\Big) \leqslant r(h)r(g)\Phi\Big(\frac{T}{\log T}\log\frac{hk}{g\ell}\Big).$$

Dans le membre de gauche, l'argument de Φ est $\ll 1/\log T$. Il suit, par sommation sur i et j,

$$I_1(T) \gg \frac{T}{\log T} \sum_{m,n\in\mathcal{M}} \sum_{\substack{1\leqslant k\ell\leqslant T^\varepsilon \\ mk=n\ell}} \frac{1}{\sqrt{k\ell}}.$$

En restreignant la somme intérieure aux couples (k,ℓ) tels que

$$k = m/(n,m), \quad \ell = n/(n,m), \quad k\ell = [mn]/(m,n) \leqslant T^\varepsilon,$$

nous obtenons

$$I_1(T) \gg \frac{T}{\log T} \sum_{\substack{m,n\in\mathcal{M} \\ [m,n]/(m,n)\leqslant T^\varepsilon}} \sqrt{\frac{(m,n)}{[m,n]}} \gg \frac{T}{\log T}\Big(S_{1/2}(\mathcal{M}) - \frac{S_{1/3}(\mathcal{M})}{T^{\varepsilon/6}}\Big).$$

Reportons dans (5·15). Il vient

$$Z_\beta(T)^2 \gg \frac{S_{1/2}(\mathcal{M})}{|\mathcal{M}|} - \frac{S_{1/3}(\mathcal{M})}{|\mathcal{M}|T^{\varepsilon/6}} + O\big((\log T)^2\big). \tag{5·16}$$

Posant $y_{\mathcal{M}} := \max_{m\in\mathcal{M}} P^+(m)$, nous avons pour tout $m\in\mathcal{M}$

$$\sum_{n\in\mathcal{M}}\frac{(m,n)^{1/3}}{[m,n]^{1/3}}\leqslant\prod_{p\leqslant y_{\mathcal{M}}}\Big(1+\frac{2}{p^{1/3}-1}\Big)\ll\exp\{y_{\mathcal{M}}^{2/3}\}$$

de sorte que

$$\frac{S_{1/3}(\mathcal{M})}{|\mathcal{M}|}\ll\exp\big\{y_{\mathcal{M}}^{2/3}\big\}.$$

Spécialisons alors $\mathcal{M}$ en choisissant l'ensemble défini par (2·3) avec $N=\lfloor T^{1-\beta}\rfloor$, de sorte que

$$\frac{S_{1/2}(\mathcal{M})}{|\mathcal{M}|}\gg\mathscr{L}(T)^{2\sqrt{2(1-\beta)}+o(1)}.$$

Nous avons alors $y_{\mathcal{M}}\ll(\log T)^{6/5}$ ce qui implique que le terme négatif de (5·16) est négligeable. Il s'ensuit que

$$Z_\beta(T)\gg\mathscr{L}(T)^{\sqrt{2(1-\beta)}+o(1)},$$

ce qui achève la démonstration du Théorème 1.4. □

Remarque. Un aspect essentiel de l'approche mise en œuvre dans la démonstration précédente repose sur l'introduction d'une intégrale relative à un produit de deux facteurs zêta, alors qu'un seul terme $|\zeta(\frac12+it)|$ intervenait dans les travaux précédents [7], [9]. Cela permet, via une majoration standard, de relier directement $Z_\beta(T)$ aux sommes de Gál $S(\mathcal{M})$ sans nécessiter l'introduction des formes quadratiques associées aux sous-sommes $\mathfrak{S}(\mathcal{M})$. Les coefficients $r(h)$ apparaissant dans [7] et [9] sont définis sous la forme $r(h_j)^2 := \sum_{m\in\mathcal{M}_j} f(m)^2$ où f est une fonction multiplicative qui ne peut être remplacée par 1. L'introduction du carré du module de zêta permet de choisir $f=\mathbf{1}$ et ainsi de minorer directement l'intégrale en fonction des $S(\mathcal{M})$, sans appel aux normes $\mathfrak{Q}(\mathcal{M})$.

6. Valeurs maximales de $|L(\frac12,\chi)|$

Nous nous proposons ici de démontrer le Théorème 1.5. Nous verrons à cette occasion comment utiliser efficacement les minorations de sommes de Gál dans ce problème. Soit χ un caractère primitif modulo q. Alors $\chi(-1)=(-1)^\nu$ où $\nu=\nu(\chi)\in\{0,1\}$. Ainsi χ est pair ou impair selon que $\nu(\chi)$ vaut 0 ou 1, et, posant

$$W_\nu(x) := \frac{1}{2\pi i}\int_{(2)}\frac{\Gamma(\frac14+\frac12 s+\frac12\nu)^2}{\Gamma(\frac14+\frac12\nu)^2 s x^s}\,\mathrm{d}s,$$

où, ici et dans la suite nous notons (σ) la droite verticale d'abscisse σ, nous avons

$$\big|L(\tfrac12,\chi)\big|^2=2\sum_{k,\ell\geqslant1}\frac{\chi(k)\overline{\chi}(\ell)}{\sqrt{k\ell}}W_\nu\Big(\frac{\pi k\ell}{q}\Big)\qquad(\nu(\chi)=\nu).\tag{6·1}$$

Ce résultat classique (cf. [22], lemme 2) résulte de l'équation fonctionnelle satisfaite par la fonction $L(s,\chi)$ via un calcul standard de somme de Gauss associée à un caractère primitif.

La formule d'inversion de Mellin fournit l'expression suivante pour les fonctions W_ν.

Lemme 6.1. *Pour $x>0$ et $\nu\in\{0,1\}$, nous avons*

$$W_\nu(x)=4\int_x^\infty t^{\nu-1/2}\int_0^\infty\frac{\mathrm{e}^{-v^2-(t/v)^2}}{v\Gamma(\frac14+\frac12\nu)^2}\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}t\qquad(\sigma>0).\tag{6·2}$$

En particulier pour tout $x\geqslant0$, nous avons $0\leqslant W_\nu(x)\leqslant1$.

Démonstration. Nous avons classiquement (voir par exemple le corollaire II.0.14 de [24])

$$\mathrm{e}^{-t^2}=\frac{1}{2\pi i}\int_{(\sigma)}\Gamma(s)\frac{\mathrm{d}s}{t^{2s}}\qquad(\sigma>0,\,t>0),$$

d'où, par changement de variables,

$$\mathrm{e}^{-t^2}t^{\nu+1/2}=\frac{1}{4\pi i}\int_{(\sigma)}\Gamma(\tfrac12 s+\tfrac12\nu+\tfrac14)\frac{\mathrm{d}s}{t^s}$$

puis, en vertu de la formule de convolution adaptée à la transformée de Mellin,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{(\sigma)}\Gamma(\tfrac12 s+\tfrac12\nu+\tfrac14)^2\frac{\mathrm{d}s}{t^s}&=4\int_0^\infty \mathrm{e}^{-v^2}v^{\nu+1/2}\mathrm{e}^{-(t/v)^2}(t/v)^{\nu+1/2}\frac{\mathrm{d}v}{v}\\&=4t^{\nu+1/2}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-v^2-(t/v)^2}\frac{\mathrm{d}v}{v}\cdot\end{aligned}$$

Cela implique bien (6·2), après division par t et intégration sur $[x,\infty[$.

La positivité de $W_\nu(x)$ est évidente ainsi que sa décroissance par rapport à x. D'après [22] — formule (1.3a) — nous avons $W_\nu(0)=1$: cela implique immédiatement l'encadrement énoncé. □

Rappelons à présent une variante, relative aux caractères primitifs, de la relation d'orthogonalité des caractères de parité donnée. D'après le lemme 1 de [22] (voir aussi le lemme 3 de [11]), lorsque $(mn,q)=1$, nous avons

$$\sideset{}{^*}\sum_{\substack{\chi \bmod q\\ \nu(\chi)=\nu}}\chi(m)\overline{\chi}(n)=\tfrac12\sum_{d\mid(q,|m-n|)}\varphi(d)\mu(q/d)+\tfrac12(-1)^\nu\sum_{d\mid(q,m+n)}\varphi(d)\mu(q/d),\tag{6·3}$$

où, ici et dans la suite, l'astérisque indique que la sommation est restreinte aux caractères primitifs.

Supposons dorénavant que q est un nombre premier, de sorte que tout caractère non principal de module q est primitif. Soit $\mathcal{M}=\mathcal{M}_q$ un ensemble de cardinal N maximisant $S(\mathcal{M})$ sous la contrainte que tous les éléments de $\mathcal{M}$ soient premiers à q. Telle que mise en œuvre par Soundararajan dans [23], la méthode de résonance consiste à comparer les quantités

$$V_1^+(q):=\sideset{}{^*}\sum_{\chi\in X_q^+}|R_\chi|^2,\qquad V_2^+(q):=\sideset{}{^*}\sum_{\chi\in X_q^+}|R_\chi|^2|L(\tfrac12,\chi)|^2.$$

Étant donné un ensemble $\mathcal{H}$ de représentants des classes de $\mathcal{M}$ modulo q, nous posons

$$r(h)^2:=\sum_{\substack{m\in\mathcal{M}\\ m\equiv h\,(\mathrm{mod}\,q)}}1\qquad(h\in\mathcal{H}),\qquad R_\chi:=\sum_{h\in\mathcal{H}}r(h)\chi(h).\tag{6·4}$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz fournit, pour tout caractère χ de module q,

$$|R_\chi|^2\leqslant|R_{\chi_0}|^2\leqslant|\mathcal{H}|\sum_{h\in\mathcal{H}}r(h)^2\leqslant\min\{q-1,N\}N.\tag{6·5}$$

La relation (6·1) implique donc

$$V_2^+(q)=\sum_{j,h\in\mathcal{H}}r(j)r(h)\sum_{\substack{k,\ell\geqslant1\\(k\ell,q)=1}}\frac{1}{\sqrt{k\ell}}W_0\Big(\frac{\pi k\ell}{q}\Big)\sigma_q,\tag{6·6}$$

avec, en vertu de (6·3),

$$\sigma_q:=2\sideset{}{^*}\sum_{\chi\in X_q^+}\chi(jk)\overline{\chi}(h\ell)=\sum_{d\mid(q,jk+h\ell)}\varphi(d)\mu(q/d)+\sum_{d\mid(q,|jk-h\ell|)}\varphi(d)\mu(q/d).$$

Comme q est un nombre premier, nous avons

$$\sigma_q=\begin{cases}-2&\text{si } q\nmid(jk-h\ell)(jk+h\ell),\\ q-3&\text{si } q\nmid jk-h\ell\text{ et } q\mid jk+h\ell,\\ q-3&\text{si } q\mid jk-h\ell\text{ et } q\nmid jk+h\ell,\\ 2(q-2)&\text{si } q\mid jk-h\ell\text{ et } q\mid jk+h\ell.\end{cases}$$

De plus, la relation $W_0(x)\ll1/(x+1)^2$, valable pour $x\geqslant0$, fournit

$$\sum_{\substack{k,\ell\geqslant1\\(k\ell,q)=1}}\frac{1}{\sqrt{k\ell}}W_0\Big(\frac{\pi k\ell}{q}\Big)\ll\sqrt{q}\log q.$$

Nous en déduisons

$$\begin{aligned}V_2^+(q)+2\,|R_{\chi_0}|^2\sum_{\substack{k,\ell\geqslant 1\\(k\ell,q)=1}}\frac{1}{\sqrt{k\ell}}W_0\Big(\frac{\pi k\ell}{q}\Big)&=\sum_{j,h\in\mathcal{H}}r(j)r(h)\sum_{\substack{k,\ell\geqslant 1\\(k\ell,q)=1}}\frac{1}{\sqrt{k\ell}}W_0\Big(\frac{\pi k\ell}{q}\Big)\big(\sigma_q+2\big)\\&\geqslant(q-1)\sum_{\substack{k,\ell\geqslant 1\\(k\ell,q)=1}}\frac{1}{\sqrt{k\ell}}W_0\Big(\frac{\pi k\ell}{q}\Big)\sum_{\substack{j,h\in\mathcal{H}\\q\,|\,|jk-h\ell|}}r(j)r(h),\end{aligned}$$

où nous avons utilisé, de manière cruciale, la positivité de W_0 établie au Lemme 6.1. Il s'ensuit que

$$V_2^+(q)\geqslant(q-1)\sum_{\substack{k,\ell\geqslant 1\\(k\ell,q)=1}}\frac{1}{\sqrt{k\ell}}W_0\Big(\frac{\pi k\ell}{q}\Big)\sum_{\substack{j,h\in\mathcal{H}\\q\,|\,|jk-h\ell|}}r(j)r(h)+O\Big(\min\{q,N\}N\sqrt{q}\log q\Big).$$

Lorsque $kj\equiv\ell h\,(\mathrm{mod}\,q)$, nous avons

$$r(j)r(h)\geqslant\min\{r(j)^2,r(h)^2\}\geqslant\sum_{\substack{m,n\in\mathcal{M},\,km=\ell n\\m\equiv j\,(\mathrm{mod}\,q),\,n\equiv h\,(\mathrm{mod}\,q)}}1,\tag{6·7}$$

de sorte que

$$\begin{aligned}V_2^+(q)&\gg q\sum_{\substack{k,\ell\leqslant\sqrt{q}\\(k\ell,q)=1}}\frac{1}{\sqrt{k\ell}}\sum_{\substack{m,n\in\mathcal{M}\\km=\ell n}}1+O\Big(\min\{q,N\}N\sqrt{q}\log q\Big)\\&\gg q\sum_{\substack{m,n\in\mathcal{M}\\m/(m,n),n/(m,n)\leqslant\sqrt{q}\\(mn,q)=1}}\sqrt{\frac{(m,n)}{[m,n]}}+O\Big(\min\{q,N\}N\sqrt{q}\log q\Big),\end{aligned}$$

où nous avons utilisé la minoration $W_0(x)\gg 1$, valable pour $x\in[0,\pi]$.

Choisissons alors $N=\lfloor\sqrt{q}\rfloor$. Nous avons construit dans la démonstration du Théorème 1.1 un ensemble $\mathcal{M}=\mathcal{M}_N$ de cardinal N et tel que $S(\mathcal{M}_N)\geqslant N\mathscr{L}(N)^{2\sqrt{2}+o(1)}$. Or, tous les facteurs premiers p des éléments de $\mathcal{M}_N$ vérifient $\log N<p\leqslant(\log N)^2\leqslant N$ pour N suffisamment grand. Il s'ensuit que, si $m\in\mathcal{M}_N$ et $N=\lfloor\sqrt{q}\rfloor$, nous avons nécessairement $(m,q)=1$. Il suit

$$\sum_{\substack{m,n\in\mathcal{M}_N\\m/(m,n),n/(m,n)\leqslant\sqrt{q}\\(mn,q)=1}}\sqrt{\frac{(m,n)}{[m,n]}}\geqslant S_{1/2}(\mathcal{M}_N)-\frac{1}{N^{1/6}}S_{1/3}(\mathcal{M}_N)\gg S_{1/2}(\mathcal{M}_N)\gg q^{1/2}\mathscr{L}(q)^{2+o(1)}$$

où l'avant-dernière minoration résulte d'une manipulation semblable à celle qui a permis de minorer le membre de droite de (5·16). Pour ce choix de l'ensemble $\mathcal{M}$, nous avons donc

$$V_2^+(q)\gg q^{3/2}\mathscr{L}(q)^{2+o(1)}.$$

De plus,

$$V_1^+(q)\leqslant\sum_{\chi\,(\mathrm{mod}\,q)}|R_\chi|^2\leqslant q\sum_{m\in\mathcal{M}}r(m)^2\leqslant qN\leqslant q^{3/2}.$$

Nous obtenons donc la minoration

$$L_q^+\geqslant\sqrt{V_2^+(q)/V_1^+(q)}\geqslant\mathscr{L}(q)^{1+o(1)}.$$

Cela achève la démonstration du Théorème 1.5.

7. Sommes de caractères

7·1. Un lemme de localisation et coprimalité

Le résultat suivant est une conséquence facile de la construction employée pour établir le Théorème 1.1.

Corollaire 7.1. *Soient $q \geqslant 1$ et $N \geqslant 3$ tels que $\pi(\log N \log_2 N) \geqslant \omega(q)$. Il existe alors un ensemble d'entiers $\mathcal{M}_q$ vérifiant*

$$(7{\cdot}1) \qquad |\mathcal{M}_q| \leqslant N, \quad \max \mathcal{M}_q \leqslant 2 \min \mathcal{M}_q, \quad \Big(\prod_{m\in\mathcal{M}_q} m, q\Big) = 1, \quad S(\mathcal{M}_q) \geqslant |\mathcal{M}_q| \mathscr{L}(N)^{2\sqrt{2}+o(1)}.$$

Démonstration. Considérons l'ensemble $\mathcal{M}$ de cardinal $\leqslant N$ construit dans la démonstration du Théorème 1.1. En faisant tendre β vers $2\sqrt{2}$ dans (2·14), nous avons donc

$$(7{\cdot}2) \qquad S(\mathcal{M}) \geqslant |\mathcal{M}| \mathscr{L}(N)^{2\sqrt{2}+o(1)}.$$

La première étape consiste, sans changer $|\mathcal{M}|$ et sans diminuer $S(\mathcal{M})$, à altérer $\mathcal{M}$ de manière à rendre tous ses éléments premiers à q. À cette fin, observons que $P^-(m) > \log N \log_2 N$ pour tout m de $\mathcal{M}$, désignons par p_j le j-ième nombre premier ne divisant pas q, décomposons $q = q_1 q_2$ avec $P^+(q_1) \leqslant \log N \log_2 N$, $P^-(q_2) > \log N \log_2 N$, et posons $r = \omega(q_2)$. Ainsi $p_j \nmid \prod_{m\in\mathcal{M}} m$ $(1 \leqslant j \leqslant r)$ alors que, par hypothèse, $r = \omega(q_2) \leqslant \pi(\log N \log_2 N) - \omega(q_1)$. Désignons par $\ell_1, \dots, \ell_r$ les facteurs premiers de q_2, et associons à chaque élément m de $\mathcal{M}$ l'entier

$$m^\dagger := m \prod_{1\leqslant j\leqslant r} \Big(\frac{p_j}{\ell_j}\Big)^{v_{\ell_j}(m)}$$

L'ensemble $\mathcal{M}^\dagger := \{m^\dagger : m \in \mathcal{M}\}$ vérifie clairement $|\mathcal{M}^\dagger| = |\mathcal{M}|$. De plus, $S(\mathcal{M}^\dagger) \geqslant S(\mathcal{M})$ puisque $(m^\dagger, n^\dagger)/[m^\dagger, n^\dagger] \geqslant (m,n)/[m,n]$ pour tous m, n de $\mathcal{M}$.

Dans une seconde étape, montrons que, sans diminuer significativement $S(\mathcal{M}^\dagger)/|\mathcal{M}^\dagger|$, on peut imposer que $\mathcal{M}^\dagger$ soit inclus dans un intervalle dyadique. Tout élément m de $\mathcal{M}^\dagger$ est de la forme $m = (d/b)\prod_{1\leqslant k\leqslant(\log_2 N)^\gamma} N_k^\dagger$ où l'on a posé

$$N_k^\dagger := \prod_{\substack{p\in I_k\\ p\nmid q}} p \prod_{\substack{\ell_j\in I_k\\ 1\leqslant j\leqslant r}} p_j$$

et

$$\log(db) \leqslant \sum_{1\leqslant k\leqslant(\log_2 N)^\gamma} \frac{au^{k+1}(\log N)^2 \log_2 N}{k^2 \log_3 N} \ll (\log N)^3.$$

Nous pouvons donc scinder $\mathcal{M}^\dagger$ en au plus $J \ll (\log N)^3$ sous-ensembles $\mathcal{M}_j$ inclus dans un intervalle dyadique $]M_j, 2M_j]$. Or

$$\begin{aligned} S(\mathcal{M}^\dagger) &= \sum_d \varphi(d)\Bigg(\sum_{\substack{m\in\mathcal{M}^\dagger\\ d\mid m}} \frac{1}{\sqrt{m}}\Bigg)^2 \leqslant J\sum_d \varphi(d) \sum_{1\leqslant j\leqslant J} \Bigg(\sum_{\substack{m\in\mathcal{M}_j\\ d\mid m}} \frac{1}{\sqrt{m}}\Bigg)^2 \\ &\leqslant J \sum_{1\leqslant j\leqslant J} S(\mathcal{M}_j) \leqslant J^2 \max_{1\leqslant j\leqslant J} S(\mathcal{M}_j). \end{aligned}$$

Cela implique immédiatement le résultat annoncé. □

7·2. Démonstration du Théorème 1.6

Soit N un entier tel que $\pi(\log N \log_2 N) \geqslant \omega(q)$. Nous appliquons la méthode de résonance en considérant

$$W_1(q) := \sum_{\substack{\chi \bmod q\\ \chi\neq\chi_0}} |R_\chi|^2, \qquad W_2(q) := \sum_{\substack{\chi \bmod q\\ \chi\neq\chi_0}} |R_\chi|^2 \, |S(x,\chi)|^2,$$

où R_χ est défini comme en (6·4) pour l'ensemble $\mathcal{M}$ de cardinal $\leqslant N$ construit au Corollaire 7.1.

L'orthogonalité des caractères fournit d'abord

$$(7{\cdot}3) \qquad W_1(q) \leqslant \varphi(q)|\mathcal{M}|.$$

Pour minorer $W_2(q)$, nous observons d'une part que, d'après (6·5),

$$W_2(q)+|R_{\chi_0}|^2\,|S(x,\chi_0)|^2\leqslant W_2(q)+O(|\mathcal{M}|^2x^2),\tag{7·4}$$

et, d'autre part, que l'orthogonalité des caractères et l'inégalité (6·7) permettent d'écrire

$$\begin{aligned}W_2(q)+|R_{\chi_0}|^2\,|S(x,\chi_0)|^2&=\varphi(q)\sum_{\substack{1\leqslant k,\ell\leqslant x\\(k\ell,q)=1}}\sum_{\substack{j,h\in\mathcal{H}\\q\,|\,|jk-h\ell|}}r(j)r(h)\\&\geqslant\varphi(q)\sum_{m,n\in\mathcal{M}}\sum_{\substack{1\leqslant k,\ell\leqslant x\\(k\ell,q)=1\\mk=n\ell}}1.\end{aligned}\tag{7·5}$$

Restreignons la somme intérieure, disons $\sigma(m,n)$ aux couples $(k,\ell)=(sn/(m,n),sm/(m,n))$ tels que $(s,q)=1$. Sous l'hypothèse $\max\{m,n\}\leqslant\sqrt{2mn}\leqslant x(m,n)/(\log q)^A$, où A est une constante absolue convenablement choisie, nous avons donc, en vertu, par exemple, du lemme 3.9 de [10],

$$\sigma(m,n)\gg\frac{\varphi(q)x(m,n)}{q\sqrt{mn}}=\frac{\varphi(q)x}{q}\sqrt{\frac{(m,n)}{[m,n]}}.$$

Il résulte alors de (7·3), (7·4) et (7·5) que

$$\begin{aligned}\Delta(x,q)^2\geqslant\frac{W_2(q)}{W_1(q)}&\gg\frac{\varphi(q)x}{q|\mathcal{M}|}\sum_{\substack{m,n\in\mathcal{M}\\ [m,n]/(m,n)\leqslant x^2/2}}\sqrt{\frac{(m,n)}{[m,n]}}+O\Big(\frac{x^2|\mathcal{M}|}{\varphi(q)}\Big)\\&\gg\frac{\varphi(q)x}{q|\mathcal{M}|}\Big\{S(\mathcal{M})-\frac{2S_{1/2-\eta}(\mathcal{M})}{x^{2\eta}}\Big\}+O\Big(\frac{x^2N}{\varphi(q)}\Big),\end{aligned}\tag{7·6}$$

pour tout $\eta>0$.

Choisissons par exemple $\eta=\varepsilon/3$, où, par hypothèse, $\varepsilon>0$ est tel que $\log x>(\log q)^{1/2+\varepsilon}$. Notant à nouveau $y_{\mathcal{M}}:=\max_{m\in\mathcal{M}}P(m)\leqslant(\log N)^{1+o(1)}$, nous avons, pour chaque m de $\mathcal{M}$,

$$\sum_{n\in\mathcal{M}}\Big(\frac{(m,n)}{[m,n]}\Big)^{1/2-\eta}\leqslant\prod_{p\leqslant y_{\mathcal{M}}}\Big(1+\frac{2}{p^{1/2-\eta}-1}\Big)\ll\exp\{y_{\mathcal{M}}^{1/2+\eta}\}\ll\exp\big\{(\log N)^{1/2+2\varepsilon/3}\big\}$$

de sorte que

$$\frac{S_{1/2-\eta}(\mathcal{M})}{|\mathcal{M}|}\ll\exp\big\{(\log N)^{1/2+2\varepsilon/3}\big\}.$$

Pour le choix $N:=K\lfloor q/x\rfloor$, où K est une constante absolue assez grande. En vertu de l'hypothèse $x\leqslant q/\mathrm{e}^{(1+\varepsilon)\omega(q)}$, la condition $\pi(\log N\log_2N)>\omega(q)$ du Corollaire 7.1 est bien satisfaite. Nous déduisons donc (1·13) de (7·6) en y reportant la minoration (7·1).

Remerciements. Le premier auteur prend plaisir à remercier Marc Munsch pour d'intéressantes discussions concernant les valeurs extrémales des fonctions L.

Bibliographie

[1] C. Aistleitner, Lower bounds for the maximum of the Riemann zeta function along vertical lines, *Math. Ann.* **365** (2016), n$^{\text{os}}$ 1-2, 473–496.

[2] C. Aistleitner, K. Mahatab, M. Munsch & A. Peyrot, On large values of $L(\sigma,\chi)$, *Quart. J. Math.*, à paraître.

[3] C. Aistleitner, I. Berkes & K. Seip, GCD sums from Poisson integrals and systems of dilated functions, *J. Eur. Math. Soc.* **17** (2015), n$^{\text{o}}$ 6, 1517–1546.

[4] R. Balasubramanian & K. Ramachandra, On the frequency of Titchmarsh's phenomenon for $\zeta(s)$, III, *Proc. Indian Acad. Sci.* Sect. A **86** (1977), 341–351.

[5] A. Bondarenko, T. Hilberdink & K. Seip, Gál-type GCD sums beyond the critical line, *J. Number Theory* **166** (2016), 93–104.

[6] A. Bondarenko, K. Seip, GCD sums and complete sets of square-free numbers, *Bull. Lond. Math. Soc.* **47** (2015), n$^{\text{o}}$ 1, 29–41.

[7] A. Bondarenko, K. Seip, Large greatest common divisor sums and extreme values of the Riemann zeta function, *Duke Math. J.* **166** (2017), n$^{\text{o}}$ 9, 1685–1701.

[8] A. Bondarenko & K. Seip, Note on the resonance method for the Riemann zeta function, in : "Operator Theory : Advances and Applications" 261 (2018), 121–140, Birkhäuser Verlag.
[9] A. Bondarenko & K. Seip, Extreme values of the Riemann zeta function and its argument, *Math. Ann.* (2018), à paraître.
[10] R. de la Bretèche & G. Tenenbaum, Propriétés statistiques des entiers friables, *Ramanujan J.* **9** (2005), 139–202.
[11] H.M. Bui & D.R. Heath-Brown, A note on the fourth moment of Dirichlet L-functions, *Acta arith.* **141**, n° 4 (2010), 335–344.
[12] I.S. Gál, A theorem concerning Diophantine approximations, *Nieuw Arch. Wiskunde* **23** (1949), 13–38.
[13] A. Granville & K. Soundararajan, Large character sums, *J. Amer. Math. Soc.* **14** (2) (2001), 365–397.
[14] T. Hilberdink, An arithmetical mapping and applications to Ω-results for the Riemann zeta function, *Acta Arith.* **139** (2009), 341–367.
[15] B. Hough, The resonance method for large character sums, disponible sur https ://arxiv.org/abs/1109.1786, (2011).
[16] B. Hough, The resonance method for large character sums, *Mathematika* **59** (2013), no. 1, 87–118.
[17] B. Hough, The angle of large values of L-functions. *J. Number Theory* **167** (2016), 353–393.
[18] Y. Lamzouri, On the distribution of extreme values of zeta and L-functions in the strip $\frac{1}{2} < \sigma < 1$. *Int. Math. Res. Not.* 2011, no. 23, 5449–5503.
[19] M. Lewko & M. Radziwiłł, Refinements of Gál's theorem and applications, *Adv. Math.* **305** (2017), 280–297.
[20] H. L. Montgomery, Extreme values of the Riemann zeta function, *Comment. Math. Helv.* **52** (1977), 511–518
[21] E. Saksman, K. Seip, Some open questions in analysis for Dirichlet series, in : *Recent progress on operator theory and approximation in spaces of analytic functions*, 179–191, Contemp. Math. **679**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2016.
[22] K. Soundararajan, The fourth moment of Dirichlet L-functions, in : Analytic Number Theory : A Tribute to Gauss and Dirichlet, Clay Math. Proc. 7, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007, 239–246.
[23] K. Soundararajan, Extreme values of zeta and L-functions, *Math. Ann.* **342** (2008), 467–486.
[24] G. Tenenbaum, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, quatrième édition, coll. Échelles, Belin, 2015.

Régis de la Bretèche
Institut de Mathématiques de Jussieu
UMR 7586
Université Paris Diderot-Paris 7
Sorbonne Paris Cité,
Case 7012, F-75013 Paris
France

Gérald Tenenbaum
Institut Élie Cartan
Université de Lorraine
BP 70239
54506 Vandœuvre-lès-Nancy Cedex
France