

Reprinted from

Catherine Goldstein
Editor

Séminaire de
Théorie des Nombres,
Paris 1988–1989

© 1990 Birkhäuser Boston Basel Berlin.
Printed in the United States of America.

1990



Birkhäuser
Boston • Basel • Berlin

Sur un problème d'Erdős et Alladi
Gérald Tenenbaum

1. Introduction

Désignons par $P(n)$ le plus grand facteur premier d'un entier générique n , avec la convention $P(1) = 1$. L'ensemble

$$S(x, y) := \{n \leq x : P(n) \leq y\}$$

fait l'objet d'une abondante littérature et a suscité ces dernières années un important regain d'intérêt. Nous renvoyons le lecteur à [2,3,5-7,9,10] pour une liste plus complète de références bibliographiques et nous nous contentons de mentionner ici deux résultats concernant la fonction de compte $\Psi(x, y) := |S(x, y)|$. Dans tout l'article nous employons systématiquement la notation

$$u := \frac{\log x}{\log y} \quad (x \geq y \geq 2).$$

(a) La formule asymptotique de Hildebrand [6]

$$(1.1) \quad \Psi(x, y) = x\rho(u) \left\{ 1 + O\left(\frac{\log(u+1)}{\log y}\right) \right\}$$

valable uniformément, pour chaque $\epsilon > 0$, dans le domaine

$$(H_\epsilon) \quad x \geq 3, \quad \exp\{(\log_2 x)^{\frac{5}{3}+\epsilon}\} \leq y \leq x.$$

Ici et dans la suite, \log_k désigne la k -ième itérée de la fonction logarithme, et $\rho(u)$ désigne la fonction de Dickman, solution continue pour $u > 0$ et dérivable pour $u > 1$ du problème différentiel aux différences

$$\begin{cases} \rho(u) = 0 & (-\infty < u < 0) \\ \rho(u) = 1 & (0 \leq u \leq 1) \\ u\rho'(u) + \rho(u-1) = 0 & (1 < u < +\infty) \end{cases}$$

(b) L'évaluation de Hildebrand et l'auteur [9]

$$(1.2) \quad \Psi(x, y) = \frac{x^\alpha \zeta(\alpha, y)}{\alpha \sqrt{2\pi} \phi_2(\alpha, y)} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{u} + \frac{\log y}{y}\right) \right\},$$

valable pour $x \geq y \geq 2$, avec les notations

$$\zeta(s, y) := \prod_{p \leq y} (1 - p^{-s})^{-1}, \quad \phi_2(s, y) := \frac{d^2}{ds^2} \log \zeta(s, y),$$

et où $\alpha = \alpha(x, y)$ désigne l'unique solution de l'équation

$$(1.3) \quad -\frac{\zeta'}{\zeta}(\alpha, y) = \sum_{p \leq y} \frac{\log p}{p^\alpha - 1} = \log x.$$

On peut considérer que $\Psi(x, y)$ est relativement bien connu. Toute amélioration significative du domaine de validité (H_ε) pour (1.1) est équivalente à une extension de la région sans zéro de Vinogradov pour la fonction zêta de Riemann $\zeta(s)$ [5]. Par ailleurs, Saias [10] a fourni dans le même domaine (H_ε) une formule considérablement plus précise. L'estimation (1.2), malgré son apparence inexplicite, permet une étude spécifique du comportement local de $\Psi(x, y)$ et fournit, entre autres, une nouvelle preuve de (1.1) — cf. [9, 11].

Le problème d'Erdős et Alladi qui nous intéresse ici consiste à évaluer la quantité

$$M(x, y) := \sum_{n \in S(x, y)} \mu(n)$$

(où μ désigne la fonction de Möbius) et en particulier à trouver une majoration non triviale pour le rapport $|M(x, y)|/\Psi(x, y)$. Erdős a conjecturé que cette expression tend vers 0, uniformément en y , lorsque $x \rightarrow \infty$. Alladi [1] et Hildebrand [4, 7] ont démontré cette conjecture sous la forme quantitative

$$(1.4) \quad M(x, y) \ll \Psi(x, y) / \log x \quad (x \geq y \geq 2).$$

Plus précisément, Alladi [1] a d'abord établi (1.4) dans le domaine

$$(1.5) \quad \exp\{(\log x)^{\frac{5}{8}+\varepsilon}\} \leq y \leq x$$

puis a annoncé la persistance du résultat dans le domaine (H_ε) . La démonstration de ce dernier point n'a pas été publiée. Dans [7], Hildebrand a obtenu la majoration

$$(1.6) \quad M(x, y) \ll \Psi(x, y) \exp\{-(\log y)^{\frac{3}{2}-\varepsilon}\}$$

pour chaque $\varepsilon > 0$, uniformément dans le domaine

$$x \geq 3, \quad 2 \leq y \leq \exp\{(\log x)^{\frac{1}{21}}\}.$$

Puisqu'il découle du théorème des nombres premiers et de la formule d'inversion de Möbius que $M(x, y) = 0$ dès que x est assez grand et $y \leq \frac{1}{2} \log x$, les évaluations de Alladi et Hildebrand impliquent bien (1.4).

Notre premier résultat est une estimation qui contient strictement les précédentes. Nous posons

$$L_\varepsilon(y) := \exp\{(\log y)^{\frac{3}{2}-\varepsilon}\}, \quad Y_\varepsilon := \exp\{(\log y)^{\frac{3}{2}-\varepsilon}\} \quad (y \geq 2)$$

et

$$H(u) := \exp\left\{\frac{u}{\log^2(u+2)}\right\} \quad (u \geq 0).$$

Dans tout l'article c_0, c_1, \dots désignent des constantes absolues positives.

THÉORÈME 1. — Soit $\varepsilon > 0$. On a uniformément pour $x \geq y \geq 2$

$$(1.7) \quad M(x, y) \ll \Psi(x, y) \left\{ \frac{H(u)^{-c_0}}{\log y} + Y_\varepsilon^{-1} \right\}.$$

Lorsque u n'est pas trop grand, on peut approcher $M(x, y)$ par une fonction à variations régulières. Désignons par $\omega(u)$ la fonction de Buchstab, solution continue pour $u > 1$ et dérivable pour $u > 2$ du problème différentiel aux différences

$$\begin{cases} \omega(u) = 0 & (-\infty < u < 1) \\ u\omega(u) = 1 & (1 \leq u \leq 2) \\ (u\omega(u))' = \omega(u-1) & (2 < u < +\infty). \end{cases}$$

Posons encore

$$M(x) := \sum_{n \leq x} \mu(n)$$

et

$$A(x, y) := x \int_0^{+\infty} \omega(u-v) M(y^v) y^{-v} dv.$$

Alladi a montré dans [1] que l'on a uniformément pour $x \geq y \geq 2$

$$(1.8) \quad M(x, y) = A(x, y) + O(xu^2 L_\varepsilon(y)^{-1}).$$

Cette évaluation est utile dans le domaine (1.5), où le terme d'erreur est $o(\Psi(x, y))$. En restreignant davantage l'intervalle de variation de y , on peut obtenir une formule asymptotique pour le terme principal $A(x, y)$. Alladi a ainsi prouvé [1] que l'on a

$$(1.9) \quad A(x, y) = \frac{x\omega'(u)}{\log^2 y} + O\left(\frac{x}{\log^2 y} L_\varepsilon\left(\frac{x}{y^2}\right)^{-1} + \frac{xu^2}{(\log y)^3}\right)$$

uniformément pour $2 \leq y \leq \sqrt{x}$, et

$$(1.10) \quad A(x, y) = x \int_0^{u-1} M(y^v) y^{-v} dv - \frac{x}{\log^2 y} \left\{ 1 + O(L_\varepsilon\left(\frac{x}{y}\right)^{-1}) \right\} + O\left(\frac{x}{\log^3 y}\right)$$

uniformément pour $\sqrt{x} \leq y \leq x$. Ces formules, utiles dans un domaine du type

$$(1.11) \quad x^{c_1 \log_2 x / \log_2 x} \leq y \leq x,$$

sont prouvées dans [1] par une sommation d'Abel adéquate. Ainsi que le signale Alladi, on peut itérer le procédé pour obtenir un développement asymptotique, fini mais arbitrairement long, selon les puissances de $1/\log y$. Le champ d'utilité est ainsi étendu mais seule la valeur de la constante c_1 de (1.11) est affectée. Nous verrons que l'on peut considérablement améliorer la dépendance en u du terme résiduel de ce développement — et partant l'applicabilité du résultat — si l'on dispose de l'information supplémentaire que u n'est pas trop proche d'un entier $\leq k+1$ par valeur supérieure. Pour quantifier ce type d'hypothèse, nous introduisons les ensembles

$$\mathcal{D}_k(z) := \left\{ u \geq 1 : \min_{\substack{1 \leq j \leq k+1 \\ j \leq u}} (u-j) \geq \frac{\log^2 z}{z} \right\} \quad (z \geq 2).$$

L'énoncé de notre résultat fait intervenir les dérivées successives de $\omega(u)$. Il est facile de vérifier à partir de la définition que ω est de classe C^k sur $\mathbb{R} \setminus \{1, 2, \dots, k + 1\}$. Aux points exceptionnels, $\omega^{(k)}$ possède des discontinuités de première espèce. Nous pouvons donc prolonger $\omega^{(k)}$ par continuité à droite, en une fonction définie sur \mathbb{R} — ce qui sera supposé dorénavant.

Avec ces notations et conventions, nous obtenons l'évaluation suivante pour $A(x, y)$.

THÉORÈME 2. — Désignons par $\{a_j : j \geq 1\}$ la suite des coefficients de Taylor à l'origine de $\{(s + 1)\zeta(s + 1)\}^{-1}$. Pour tous $\varepsilon > 0$, $0 < \delta < \frac{1}{2}\pi^2$, et chaque entier $k \geq 0$, on a

$$(1.12) \quad A(x, y) = x \sum_{j=1}^k a_j \frac{\omega^{(j)}(u)}{(\log y)^{j+1}} + O\left(x\rho(u) \frac{H(u)^{-\delta}}{(\log y)^{k+2}}\right),$$

uniformément sous les conditions

$$(G_\varepsilon) \quad x \geq 3, \quad \exp\{(\log x)^{\frac{2}{5}+\varepsilon}\} \leq y \leq x,$$

et

$$u \in \mathcal{D}_k(\log y).$$

Il est à noter, dans ce contexte, que l'on a pour tout entier $j \geq 1$ fixé (cf. Lemme 5 *infra*)

$$(1.13) \quad \omega^{(j)}(u) \ll \rho(u)H(u)^{-\delta},$$

et que cette majoration est pratiquement optimale. Les deux assertions découlent de l'évaluation récente de Hildebrand [8]

$$(1.14) \quad \max_{v \geq u} \frac{|\omega'(v)|}{\rho(v)} = H(u)^{-\frac{1}{2}\pi^2 + o(1)} \quad (u \rightarrow \infty).$$

Pour compléter notre étude de la quantité $M(x, y)$, nous donnons un résultat qui précise la formule (1.8) de Alladi.

THÉOREME 3. — Soit $\varepsilon > 0$. On a uniformément dans le domaine (G_ε)

$$(1.15) \quad M(x, y) = A(x, y) + O(\Psi(x, y)L_\varepsilon(y)^{-1}).$$

Nous terminons cette introduction par quelques commentaires méthodologiques. Deux techniques sont essentiellement disponibles pour aborder un problème comme celui de l'évaluation de $\Psi(x, y)$ ou $M(x, y)$: la méthode élémentaire d'équation fonctionnelle et la méthode d'intégration complexe.

La première comporte elle-même deux variantes, selon la nature de l'équation fonctionnelle utilisée. On peut avoir recours à l'identité de Buchstab — cf. [1, 2] — ou procéder, comme le fit Wirsing [13], en introduisant le coefficient pondéral $\log n$ et en égalant les expressions obtenues par sommation d'Abel d'une part, et par insertion de la relation de convolution $\log n = \sum_{d|n} \Lambda(d)$ d'autre part. Cette voie a été inaugurée par Hildebrand dans [6] et a permis l'extension du domaine de validité (1.5) de la majoration initiale de Alladi.

La technique analytique est subordonnée à l'emploi de la méthode du col et de ses avatars — cf. [11]. Elle a permis l'obtention des résultats (1.2) et (1.6). Elle est encore à la base des démonstrations des théorèmes 1 et 3 du présent travail — encore que, comme on le verra, l'abscisse d'intégration ne soit pas ici choisie exactement optimale. Nous obtenons ainsi un traitement unifié de la somme $M(x, y)$. Les détails sont semblables à ceux de [3] (théorèmes 4 et 5), où il s'agissait d'étudier la répartition des entiers de $S(x, y)$ dans les progressions arithmétiques. En fait, l'étude de $M(x, y)$ est analogue à celle de

$$\sum_{n \in S(x, y)} \chi(n)$$

où χ est un caractère de Dirichlet. Le zéro de $\zeta(s)^{-1}$ en $s = 1$ joue le rôle de l'éventuel zéro de Siegel de $L(s, \chi)$, mais certaines complications supplémentaires sont dues au fait que, contrairement à la série L , la fonction $\zeta(s)^{-1}$ n'est pas holomorphe dans la bande critique $0 < \sigma < 1$.

L'exposé oral tenu à ce Séminaire avait pour but de présenter les principaux résultats de l'article [3] écrit en collaboration avec Fouvry. A l'heure de rédiger un compte rendu, nous avons préféré éviter les redondances et illustrer la méthode en développant une application nouvelle.

2. Lemmes

Rappelons la notation $\zeta(s, y) = \prod_{p \leq y} (1 - p^{-s})^{-1}$ et la définition (1.3) de $\alpha = \alpha(x, y)$. Des évaluations assez précises de cette quantité ont été fournies dans [9]. Nous nous contentons de rappeler ici (cf. [9], *Lemma 3*) que l'on a uniformément pour $x \geq y \geq 2$

$$(2.1) \quad \frac{y^{1-\alpha} - 1}{(1-\alpha)\log y} \asymp \bar{u} := \min\left(u, \frac{y}{\log y}\right)$$

d'où l'on déduit aisément que

$$(2.2) \quad \alpha = 1 - \frac{\log(1 + \bar{u} \log \bar{u}) + O(1)}{\log y}.$$

La fonction $M(x, y)$ a pour transformée de Mellin $\zeta(s, y)^{-1}$ et nous commençons par évaluer cette fonction sur la droite $\sigma = \alpha$. Ici et dans toute la suite, les nombres réels σ et τ sont implicitement définis par

$$s = \sigma + i\tau.$$

LEMME 1. — Pour $x \geq y \geq 2$, $\sigma = \alpha(x, y)$, on a

$$(2.3) \quad |\zeta(s, y)\zeta(\alpha, y)|^{-1} \ll \begin{cases} \exp\{-c_2\bar{u}\} & (|\tau| \leq \frac{1}{\log y}) \\ \exp\left\{-\frac{c_2\bar{u}\tau^2}{(1-\alpha)^2 + \tau^2}\right\} & (\frac{1}{\log y} < |\tau| \leq Y_\varepsilon) \end{cases}$$

Démonstration :

Nous pouvons manifestement supposer u et y assez grands. On a pour chaque $p \leq y$

$$\begin{aligned} |(1 - p^{-s})(1 - p^{-\alpha})|^2 &= (1 - p^{-\alpha})^2 \left(1 - \frac{2\cos(\tau \log p)}{p^\alpha} + p^{-2\alpha}\right) \\ &= (1 - p^{-2\alpha})^2 \left(1 - \frac{2(1 + \cos(\tau \log p))}{p^\alpha(1 + p^{-\alpha})^2}\right) \\ &\leq \exp\left\{-\frac{1 + \cos(\tau \log p)}{2p^\alpha}\right\}. \end{aligned}$$

On en déduit

$$|\zeta(s, y)\zeta(\alpha, y)|^{-1} \leq e^{-\frac{1}{4}W}$$

avec

$$W := \sum_{p \leq y} \frac{1 + \cos(\tau \log p)}{p^\alpha}.$$

Lorsque $|\tau| \log y \leq 1$, on a

$$W \geq \frac{(1 + \cos 1)}{\log y} \sum_{p \leq y} \frac{\log p}{p^\alpha} \gg \frac{y^{1-\alpha} - 1}{(1 - \alpha) \log y} \gg \bar{u}.$$

Lorsque $1/\log y < |\tau| \leq Y_\varepsilon$, on peut raisonner comme au *Lemma 8* de [9] où l'on minore $\sum_{p \leq y} (1 - \cos(\tau \log p)) p^{-\alpha}$. Les calculs sont inchangés, et l'on obtient

$$W \gg \frac{\bar{u} \tau^2}{(1 - \alpha)^2 + \tau^2}.$$

Cela implique bien (2.3).

COROLLAIRE. — Pour $x \geq y \geq 2$, $\sigma = \alpha(x, y)$, on a

$$(2.4) \quad \zeta(s, y)^{-1} \ll \zeta(\alpha, y) H(\bar{u})^{-c_3} \quad (|\tau| \leq Y_\varepsilon).$$

Cela découle immédiatement de (2.2) et (2.3).

LEMME 2. — Posons

$$(2.5) \quad L := L_{\frac{1}{2}\varepsilon}(y), \quad E(x, y) := L_\varepsilon(y)^{-1} e^{-c_4 u} + Y_\varepsilon^{-1}.$$

Pour un choix convenable de c_4 , on a pour chaque $\varepsilon > 0$ et uniformément pour $x \geq y \geq 2$

$$(2.6) \quad M(x, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-iL}^{\alpha+iL} \zeta(s, y)^{-1} x^s \frac{ds}{s} + O(\Psi(x, y) E(x, y)).$$

Démonstration : Soit $h(z)$ la fonction caractéristique de l'intervalle $[1, +\infty[$. Pour tous $z > 0$, $T > 0$, on a la formule de Perron

$$(2.7) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-iT}^{\alpha+iT} z^s \frac{ds}{s} = h(z) + O\left(\frac{z^\alpha}{1 + T|\log z|}\right).$$

Choisissons

$$T := \begin{cases} L & (1 \leq u \leq (\log y)^{\frac{3}{5}(1-\varepsilon)}) \\ Le^{c_s u} & ((\log y)^{\frac{3}{5}(1-\varepsilon)} < u \leq (\log y)^{\frac{3-\varepsilon}{2}}) \\ Y_{\frac{1}{2}\varepsilon} & (u > (\log y)^{\frac{3-\varepsilon}{2}}). \end{cases}$$

On déduit immédiatement de (2.7) que l'on a

$$(2.8) \quad M(x, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-iT}^{\alpha+iT} \zeta(s, y)^{-1} x^s \frac{ds}{s} + O(R_1 + R_2),$$

avec $R_1 := x^\alpha \zeta(\alpha, y) T^{-\frac{1}{2}}$, $R_2 := \Psi(x + xT^{-\frac{1}{2}}, y) - \Psi(x - xT^{-\frac{1}{2}}, y)$. Compte tenu de l'estimation

$$(2.9) \quad x^\alpha \zeta(\alpha, y) \ll \Psi(x, y) \min(\sqrt{u} \log y, \sqrt{y/\log y})$$

qui découle du Theorem 2 de [9], on voit que

$$R_1 \ll \Psi(x, y) T^{-\frac{1}{3}} \ll \Psi(x, y) E(x, y).$$

Pour estimer R_2 , nous distinguons deux cas. Si $u \leq (\log y)^{\frac{3}{5}(1-\varepsilon)}$, on utilise la majoration triviale

$$R_2 \ll x T^{-\frac{1}{2}}.$$

Or on déduit de (1.1) que l'on a dans ce domaine

$$\Psi(x, y) \gg x \rho(u) \gg x u^{-2u} \gg x T^{-\frac{1}{3}}.$$

Il suit

$$R_2 \ll \Psi(x, y) T^{-\frac{1}{6}} \ll \Psi(x, y) E(x, y).$$

Si $u > (\log y)^{\frac{3}{5}(1-\varepsilon)}$, nous avons recours au procédé général, décrit dans la démonstration du théorème 1 de [11], et qui repose sur le calcul de la transformée de Fourier de

$$w(t) := \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{\sin(\frac{1}{2}t\sqrt{T})}{\frac{1}{2}t\sqrt{T}} \right\}^2,$$

soit

$$\widehat{w}(\tau) := \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\tau} w(t) dt = \frac{1}{\sqrt{T}} \max(1 - \frac{|\tau|}{\sqrt{T}}, 0).$$

On a

$$\begin{aligned}
 R_2 &\ll \sum_{\substack{n=1 \\ P(n) \leq y}}^{\infty} \left(\frac{x}{n}\right)^{\alpha} w\left(\log \frac{x}{n}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\sqrt{T}}^{\sqrt{T}} x^{\alpha+i\tau} \zeta(\alpha+i\tau, y) \widehat{w}(\tau) d\tau \\
 &\ll \frac{x^{\alpha}}{\sqrt{T}} \int_0^{\sqrt{T}} |\zeta(\alpha+i\tau, y)| d\tau \\
 &\ll x^{\alpha} \zeta(\alpha, y) \left\{ \frac{1}{\sqrt{T}} + \max_{1 \leq \tau \leq \sqrt{T}} \left| \frac{\zeta(\alpha+i\tau, y)}{\zeta(\alpha, y)} \right| \right\} \\
 &\ll x^{\alpha} \zeta(\alpha, y) \left\{ \frac{1}{\sqrt{T}} + e^{-c_6 \bar{u}} \right\}
 \end{aligned}$$

d'après le *Lemma 8* de [9]. Compte tenu de (2.9), cette majoration est $\ll \Psi(x, y)E(x, y)$.

Il nous reste à montrer que, lorsque $T \neq L$, c'est-à-dire $u > (\log y)^{\frac{3}{8}(1-\varepsilon)}$, la partie R_3 de l'intégrale de (2.8) correspondant au domaine d'intégration $L < |\tau| \leq T$ peut être englobée par le terme d'erreur de (2.6). Cela découle aisément du lemme 1, qui fournit, pour ces valeurs de τ ,

$$\zeta(s, y)^{-1} \ll \zeta(\alpha, y) e^{-c_2 \bar{u}} \ll \zeta(\alpha, y) E(x, y)^2.$$

Il suffit alors de reporter cette estimation dans l'intégrale et d'appliquer (2.9).

Le lemme suivant permet de relier, pour σ assez proche de 1 et $|\tau| \leq L_{\varepsilon}(y)$, la quantité $\zeta(s, y)^{-1}$ à la valeur en $(s-1) \log y$ de la transformée de Laplace de la fonction de Buchstab. Rappelons (cf. par exemple [3], éq. (6.7)) que si l'on pose

$$\widehat{\omega}(s) := \int_0^{\infty} e^{-ts} \omega(t) dt \quad (\sigma > 0),$$

alors on a

$$(2.10) \quad 1 + \widehat{\omega}(s) = e^{J(s)}$$

avec

$$J(s) := \int_0^{+\infty} \frac{e^{-s-t}}{s+t} dt.$$

On peut montrer (cf. [3], lemme 6.1) que si s n'est pas réel négatif ou nul, on a

$$(2.11) \quad J(s) + \gamma + \log s = -I(-s) := - \int_0^{-s} \frac{e^v - 1}{v} dv.$$

Il découle donc de (2.10) et (2.11) que

$$(2.12) \quad 1 + \widehat{\omega}(s) = s^{-1} \exp\{-\gamma - I(-s)\}.$$

Cela définit un prolongement analytique de $\widehat{\omega}(s)$ en une fonction méromorphe sur \mathbb{C} ayant pour seule singularité un pôle simple en $s = 0$.

On peut encore remarquer, mais nous n'en aurons pas besoin, que le calcul classique de $\widehat{\rho}(s)$ permet de réécrire (2.12) sous la forme

$$s\widehat{\rho}(s)\{1 + \widehat{\omega}(s)\} = 1.$$

LEMME 3. — Soit $\varepsilon > 0$. On a uniformément pour $y \geq 2$, $\sigma \geq 1 - (\log y)^{-\frac{2+\varepsilon}{5}}$, et $|\tau| \leq L_\varepsilon(y)$,

$$(2.13) \quad \zeta(s, y)^{-1} = \zeta(s)^{-1} \{1 + \widehat{\omega}((s-1) \log y)\} (1 + O(L_\varepsilon(y)^{-1})).$$

Remarques : Le terme $\zeta(s)^{-1}$ a bien un sens car les hypothèses impliquent que s est situé dans la région sans zéro de Vinogradov. Lorsque $s = \sigma \leq 1$ le terme entre accolades de (2.13) doit être interprété en faisant appel à (2.12), le pôle en $s = 1$ étant compensé par le zéro de $\zeta(s)^{-1}$.

Démonstration : D'après la proposition 1 de [10], on a

$$\zeta(s, y) = \zeta(s)(s-1) \log y \exp\{\gamma + I((1-s) \log y)\} (1 + O(L_\varepsilon(y)^{-1}))$$

uniformément pour $1 - (\log y)^{-\frac{2+\varepsilon}{5}} \leq \sigma \leq 2$, $|\tau| \leq L_\varepsilon(y)$. On vérifie facilement que la restriction $\sigma \leq 2$ est superflue. On obtient alors le résultat souhaité en appliquant (2.12).

LEMME 4. — Dans les hypothèses du lemme 3, on a

$$(2.14) \quad \zeta(s)^{-1} = \sum_{n \leq \frac{1}{2}y} \mu(n)n^{-s} + O(L_\varepsilon(y)^{-1}).$$

On obtient ce résultat par la méthode usuelle d'intégration complexe utilisant la formule de Perron – cf. [12], Lemma 3.19 – et la région sans zéro de Vinogradov. Nous omettons les détails.

Nous aurons également besoin de certaines propriétés analytiques et asymptotiques de la fonction de Buchstab.

LEMME 5. — Soit δ , $0 < \delta < \frac{1}{2}\pi^2$. Pour chaque entier $j \geq 1$ fixé, on a

$$(2.15) \quad \omega^{(j)}(u) \ll \rho(u)H(u)^{-\delta} \quad (u > 0).$$

Démonstration : Lorsque $j = 1$, l'estimation (2.15) découle de (1.14) — voir aussi le lemme 6.2 de [3] pour une preuve simple d'une majoration légèrement moins précise. On obtient le résultat général par récurrence sur j en utilisant l'équation fonctionnelle de ω sous la forme

$$u\omega^{(j+1)}(u) = -\omega^{(j)}(u-1) - j\omega^{(j)}(u).$$

et l'évaluation de de Bruijn (cf. par exemple [10], lemme 3)

$$\rho(u-1) = -u\rho'(u) \ll u\rho(u) \log(u+1).$$

Le résultat suivant est dévolu à l'écriture explicite de la formule de Taylor-Lagrange pour la fonction ω . Rappelons que nous avons adopté la convention de prolonger ω et toutes ses dérivées par continuité à droite sur \mathbb{R} . Nous posons

$$\omega_{mj} := \omega^{(j)}(m) - \omega^{(j)}(m-0) \quad (1 \leq m \leq j+1).$$

LEMME 6. — Pour chaque entier $k \geq 0$ et tous réels $u \geq 0$, $v \geq 0$, on a

$$(2.16) \quad \begin{aligned} \omega(u-v) &= \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^j}{j!} \omega^{(j)}(u)v^j \\ &+ \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^{j+1}}{j!} \sum_{\substack{1 \leq m \leq j+1 \\ u-v < m \leq u}} \omega_{mj}(v+m-u)^j \\ &+ \frac{(-1)^{k+1}}{k!} \int_0^v (v-t)^k \omega^{(k+1)}(u-t) dt. \end{aligned}$$

Nous omettons la démonstration qui est identique, *mutatis mutandis*, à celle du lemme 4.2 de [3].

3. Preuve du Théorème 3

Appliquons d'abord le lemme 2, soit

$$(3.1) \quad M(x, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-iL}^{\alpha+iL} \zeta(s, y)^{-1} x^s \frac{ds}{s} + O(\Psi(x, y)L_\epsilon(y)^{-1})$$

avec $L = L_{\frac{1}{2}\epsilon}(y)$. Sous la condition (G_ϵ) , on a d'après (2.2)

$$\alpha \geq 1 - O\left(\frac{\log_2 y}{\log y}\right).$$

On peut donc faire appel au lemme 3 pour évaluer $\zeta(s, y)^{-1}$ dans (3.1). Il vient pour $s = \alpha + i\tau$, $|\tau| \leq L$,

$$(3.2) \quad \zeta(s, y)^{-1} = \zeta(s)^{-1} \{1 + \widehat{\omega}((s-1) \log y)\} + O(\zeta(s, y)^{-1} L^{-1}).$$

Le terme d'erreur ci-dessus fournit à l'intégrale de (3.1) une contribution

$$\ll L^{-1} x^\alpha \int_0^L |\zeta(s, y)|^{-1} \frac{d\tau}{1 + \tau} \ll x^\alpha \zeta(\alpha, y) L^{-\frac{1}{2}}.$$

Grâce à (2.9), on voit que cette quantité peut être englobée par le terme d'erreur de (3.1).

On écrit la contribution à l'intégrale de (3.1) du terme principal de (3.2) sous la forme $P_1 + P_2$, avec

$$P_1 := \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-iL}^{\alpha+iL} \zeta(s)^{-1} x^s \frac{ds}{s},$$

$$P_2 := \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-iL}^{\alpha+iL} \zeta(s)^{-1} \widehat{\omega}((s-1) \log y) x^s \frac{ds}{s}.$$

Nous traitons P_1 comme un terme d'erreur. En appliquant le lemme 4 et en utilisant (2.7), il vient

$$P_1 = \sum_{n \leq \frac{1}{2}y} \mu(n) \left\{ 1 + O\left(\frac{(x/n)^\alpha}{1 + L \log(x/n)}\right) \right\} + O(x^\alpha L^{-\frac{1}{2}})$$

$$= M\left(\frac{1}{2}y\right) + O(x^\alpha \zeta(\alpha, y) L^{-\frac{1}{2}})$$

$$\ll y L_\epsilon(y)^{-1} + \Psi(x, y) L_\epsilon(y)^{-1} \ll \Psi(x, y) L_\epsilon(y)^{-1}$$

où l'avant dernière estimation provient de (2.9).

Nous évaluons P_2 en remarquant que, puisque

$$(3.3) \quad \{s\zeta(s)\}^{-1} = \int_0^\infty M(e^v)e^{-sv} dv \quad (\sigma \geq 1),$$

le théorème de convolution implique

$$\{s\zeta(s)\}^{-1}\widehat{\omega}((s-1)\log y) = \widehat{B}(s) \quad (\sigma > 1)$$

avec

$$(3.4) \quad B(t) := e^t \int_0^{+\infty} \omega\left(\frac{t}{\log y} - v\right) M(y^v)y^{-v} dv.$$

On a trivialement $B(t) \ll e^t$, donc l'intégrale de Laplace inverse

$$(3.5) \quad B(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa-i\infty}^{\kappa+i\infty} \widehat{B}(s)e^{ts} ds$$

est certainement convergente pour $\kappa > 1$. De plus, il découle immédiatement de (2.12) que $\widehat{B}(s)$ est holomorphe dans toute région sans zéro de la fonction ζ . En utilisant l'estimation triviale

$$\Re eJ(s) \leq e^{-\sigma} |\tau|^{-1} \quad (\tau \neq 0)$$

on obtient grâce à (2.10)

$$\begin{aligned} 1 + \widehat{\omega}((s-1)\log y) &= e^{J((s-1)\log y)} \\ &= 1 + O\left(\frac{y^{1-\sigma}}{|\tau|}\right) \quad (|\tau| > y^{1-\sigma}) \end{aligned}$$

d'où

$$(3.6) \quad \widehat{B}(s) \ll y^{1-\sigma} \frac{\log |\tau|}{\tau^2} \quad \left(|\tau| > y^{1-\sigma}, \sigma \geq 1 - (\log |\tau|)^{-\frac{2+\epsilon}{3}}\right).$$

On peut donc remplacer dans (3.5) la droite d'intégration $\sigma = \kappa > 1$ par une courbe quelconque joignant $1 - i\infty$ à $1 + i\infty$ en restant dans le domaine

$$\mathcal{V} := \{s : \sigma \geq 1 - c_7(\log(3 + |\tau|))^{-\frac{2+\epsilon}{3}}\}.$$

Désignons par $\alpha \pm iT_0$ les points d'intersection de la frontière de \mathcal{V} et de la droite $\sigma = \alpha$, et considérons le chemin \mathcal{Z} , symétrique par rapport à l'axe réel, dont la partie supérieure est constituée du segment vertical $[\alpha + iL, \alpha + iT_0]$ et de la partie $\tau \geq T_0$ de la frontière de \mathcal{V} . On déduit de ce qui précède que l'on a

$$(3.7) \quad P_2 = B(\log x) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{Z}} \widehat{B}(s)x^s ds$$

et la majoration (3.6) implique que la dernière intégrale est

$$\ll xL_{\frac{1}{2}\varepsilon}(x)^{-1} \ll \Psi(x, y)L_\varepsilon(y)^{-1}$$

dans (G_ε) . Par (3.4), on a $B(\log x) = A(x, y)$. La démonstration du théorème 3 est ainsi complétée.

4. Preuve du Théorème 2.

Nous pouvons supposer sans perte de généralité que y est assez grand. Remarquons d'abord que la représentation intégrale (3.3) implique

$$(4.1) \quad a_j = \frac{(-1)^j}{j!} \int_0^\infty M(e^v)e^{-v}v^j dv \quad (j = 0, 1, \dots).$$

Bien entendu, $a_0 = 0$. Nous appliquons ensuite le lemme 6 et intégrons l'identité (2.12) sur \mathbb{R} relativement à la mesure $M(y^v)y^{-v} dv$. Compte tenu de (4.1), nous obtenons

$$A(x, y) = x \sum_{j=1}^k a_j \frac{\omega^{(j)}(u)}{(\log y)^j} + S_1 + S_2$$

avec

$$S_1 := x \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^{j+1}}{j!} \sum_{\substack{1 \leq m \leq j+1 \\ m \leq u}} \omega_{mj} \int_{u-m}^{+\infty} (v+m-u)^j M(y^v)y^{-v} dv,$$

$$S_2 := \frac{(-1)^k}{k!} x \int_0^{+\infty} \omega^{(k+1)}(u-t) \int_t^{+\infty} (v-t)^k M(y^v)y^{-v} dv dt.$$

Majorons S_1 . On a

$$(4.2) \quad S_1 \ll x \sum_{j=0}^k \sum_{\substack{1 \leq m \leq j+1 \\ m \leq u}} \int_{u-m}^{+\infty} v^j L_{\frac{1}{3}\varepsilon}(y^v)^{-1} dv$$

$$\ll x(\log y)^{-\ell-1} L_{\frac{1}{2}\varepsilon}(y^{u-\ell}),$$

où l'on a posé $\ell := \min(k+1, [u])$. Lorsque x, y satisfont (G_ε), on a

$$(4.3) \quad \log y > u^{\frac{2+5\varepsilon}{3-5\varepsilon}} > u^{\frac{2}{3}+3\varepsilon}.$$

Nous majorons (4.2) en distinguant deux cas. Si $u \geq k+2$, alors $\ell = k+1$. En notant que $(u-k-1) \geq u/(k+2)$, on obtient

$$\begin{aligned} S_1 &\ll x(\log y)^{-k-2} \exp\{-[(u-k-1)\log y]^{\frac{3}{5}-\frac{\varepsilon}{2}}\} \\ &\ll x(\log y)^{-k-2} \exp\{-\frac{1}{k+2}u^{1+\varepsilon/2}\} \ll x\rho(u)e^{-u}(\log y)^{-k-2}. \end{aligned}$$

Si $1 \leq u \leq k+2$, l'hypothèse $u \in \mathcal{D}_k(\log y)$ implique successivement

$$(u-\ell)\log y \geq (\log_2 y)^2, \quad L_{\frac{1}{2}\varepsilon}(y^{u-\ell}) \ll (\log y)^{-k-2}.$$

La majoration précédente pour S_1 est donc encore valable.

Pour estimer S_2 , nous faisons appel au lemme 5. On a

$$\begin{aligned} (4.4) \quad S_2 &\ll \frac{x}{(\log y)^{k+1}} \int_0^{+\infty} |\omega^{(k+1)}(u-t)| \int_{t \log y}^{+\infty} z^k L_{\frac{1}{3}\varepsilon}(e^z)^{-1} dz \\ &\ll \frac{x}{(\log y)^{k+1}} \int_0^u |\omega^{(k+1)}(u-t)| L_{\frac{1}{2}\varepsilon}(y^t)^{-1} dt. \\ &\ll x \left\{ \frac{\log(u+1)}{\log y} \right\}^{k+1} \int_0^u \rho(u-t) H(u-t)^{-c_8} L_{\frac{1}{2}\varepsilon}(y^t)^{-1} dt \end{aligned}$$

où c_8 est une constante absolue telle que $\delta < c_8 < \frac{1}{2}\pi^2$.

On a pour $0 \leq t \leq u$ (cf. par exemple [1], lemma 1)

$$\rho(u-t) \ll \rho(u)u^{3t}.$$

De plus, on peut écrire sous les mêmes conditions

$$\frac{H(u-t)}{H(u)} \leq \exp\left(\frac{t}{\log^2 2}\right) \leq e^{3t}.$$

Enfin, la condition (G_ε) implique, compte tenu de (4.3),

$$(t \log y)^{\frac{3}{5}-\frac{1}{2}\varepsilon} \geq t u^{-\frac{2}{5}-\frac{1}{2}\varepsilon} \cdot u^{\frac{2+5\varepsilon}{3-5\varepsilon}(\frac{3}{5}-\frac{1}{2}\varepsilon)} \geq t u^{\frac{1}{2}\varepsilon}.$$

Il suit que l'intégrale de (4.4) est

$$\begin{aligned} &\ll \rho(u)H(u)^{-c_8} \int_0^u \exp\{-t(3c_8 + 3 \log u - u^{\frac{1}{2}\epsilon})\} dt \\ &\ll \rho(u)H(u)^{-c_8}. \end{aligned}$$

Cela implique bien l'estimation

$$S_2 \ll x\rho(u) \frac{H(u)^{-\delta}}{(\log y)^{k+2}}$$

et achève la démonstration du Théorème 2.

5. Preuve du Théorème 1.

Nous distinguons deux cas, selon la taille de u . Observons d'abord qu'en appliquant le théorème 2 avec $k = 0$, on obtient, sous l'hypothèse $(G_{\frac{1}{2}\epsilon})$ et pour $u \geq \frac{3}{2}$,

$$A(x, y) \ll x\rho(u) \frac{H(u)^{-\delta}}{(\log y)^2}.$$

Lorsque $1 \leq u \leq \frac{3}{2}$, on peut écrire

$$A(x, y) \ll x \int_0^\infty L_\epsilon(y^v)^{-1} dv \ll \frac{x}{\log y}.$$

On a donc uniformément pour x, y dans $(G_{\frac{1}{2}\epsilon})$

$$A(x, y) \ll x\rho(u) \frac{H(u)^{-\delta}}{\log y} \ll \Psi(x, y) \frac{H(u)^{-\delta}}{\log y},$$

et l'on infère, compte tenu du théorème 3, que la même majoration est valable pour $M(x, y)$ lorsque $u \leq (\log y)^{\frac{3}{5} - \frac{1}{2}\epsilon}$.

Lorsque $u > (\log y)^{\frac{3}{5} - \frac{1}{2}\epsilon}$, nous faisons appel au lemme 2. Le terme d'erreur de (2.6) est clairement acceptable, et nous estimons le terme principal grâce au lemme 1. Par (2.4), on a

$$\begin{aligned} \int_{\alpha-iL}^{\alpha+iL} \zeta(s, y)^{-1} x^s \frac{ds}{s} &\ll x^\alpha \zeta(\alpha, y) H(\bar{u})^{-c_3} \log L \\ &\ll \Psi(x, y) \{H(u)^{-c_0} L_\epsilon(y)^{-1} + Y_\epsilon^{-1}\} \end{aligned}$$

où nous avons utilisé (2.9). Cela achève la démonstration.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] K. Alladi. — Asymptotic estimates for sums involving the Moebius function II, *Trans. Amer. Math. Soc.* **272**, (1982), 87-105.
- [2] N.G. De Bruijn. — On the number of positive integers $\leq x$ and free of prime factors $> y$, *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. A* **54**, (1951), 50-60.
- [3] E. Fouvry et G. Tenenbaum. — Entiers sans grand facteur premier en progressions arithmétiques, prépublication.
- [4] A. Hildebrand. — On a problem of Erdős and Alladi, *Monat. Math.* **97**, (1984), 119-124.
- [5] A. Hildebrand. — Integers free of large prime factors and the Riemann Hypothesis, *Mathematika* **31**, (1984), 258-271.
- [6] A. Hildebrand. — On the number of positive integers $\leq x$ and free of prime factors $> y$, *J. Number Theory* **22**, (1986), 289-307.
- [7] A. Hildebrand. — On the number of prime factors of integers without large prime divisors, *J. Number Theory* **25**, (1987), 81-106.
- [8] A. Hildebrand. — The asymptotic behaviour of the solutions of a class of differential equations, *J. London Math. Soc.*, à paraître.
- [9] A. Hildebrand and G. Tenenbaum. — On integers free of large prime factors, *Trans. Amer. Math. Soc.* **296**, (1986), 265-290.
- [10] E. Saias. — Sur le nombre des entiers sans grand facteur premier, *J. Number Theory* **32**, (1989), 78-99.
- [11] G. Tenenbaum. — La méthode du col en théorie analytique des nombres, *Séminaire de Théorie des nombres, Paris 1986-87, Prog. Math.* Birkhäuser, **75**, (1989), 411-441.
- [12] E.C. Titchmarsh. — *The theory of the Riemann zeta function*, 2nd edition, revised by D.R. Heath-Brown, Oxford, (1986).

- [13] E. Wirsing. — Das asymptotische Verhalten von Summen über multiplikative Funktionen II, *Acta Math. Acad. Scient. Hungar.* **18**, (1967), 411-467.

G. TENENBAUM

Université de Nancy I

BP 239

54506 VANDŒUVRE Cedex