

SUR L'ÉQUIREPARTITION MODULO 1 DE CERTAINES FONCTIONS DE DIVISEURS

Y. DUPAIN, R. R. HALL ET G. TENENBAUM

1. Introduction

Soit n un nombre entier et $\tau(n)$ le nombre de ses diviseurs; on dit qu'une fonction arithmétique réelle f est équirépartie modulo 1 sur les diviseurs (*erd* en abrégé) s'il existe une suite d'entiers \mathcal{L} de densité asymptotique 1 satisfaisant à

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n \in \mathcal{L}}} \Delta(n; f) = 0$$

où l'on a posé

$$\Delta(n; f) := \sup_{0 \leq u < v \leq 1} |\tau(n)^{-1} \text{card} \{d : d|n, f(d) \in [u, v) \pmod{1}\} - (v - u)|.$$

La notion d'équirépartition sur les diviseurs est liée à celle de densité divisorielle, introduite par Hall dans [12]. En utilisant ce lien, Tenenbaum a établi le critère suivant [19].

THEOREME A. *Soit f une fonction arithmétique réelle. Alors f est *erd* si, et seulement si, on a pour tout entier relatif non nul v et pour x infini*

$$\sum_{k < x} \left| \sum_{\substack{n < x \\ k|n}} \frac{e(vf(n))}{n^{4\Omega(n)}} \right| = o(\sqrt{\log x})$$

où $e(u)$ signifie $e^{2\pi i u}$ et où $\Omega(n)$ désigne le nombre des facteurs premiers de l'entier n comptés avec leur ordre de multiplicité.

En particulier, lorsque f est prolongée en une fonction dérivable définie sur \mathbb{R}^+ , une condition suffisante pour que f soit *erd* consiste en la conjonction des deux propriétés suivantes [19]:

(i) $\lim_{x \rightarrow \infty} |x f'(x) \log x| = \infty,$

(ii) *il existe un réel $\alpha > -1$ tel que la fonction $x \mapsto x f'(x) (\log x)^{-\alpha}$ soit monotone et bornée à l'infini.*

Ainsi les fonctions $d \mapsto (\log d)^\alpha$ et $d \mapsto (\log \log d)^\beta$ sont *erd* pour $\alpha > 0$ et $\beta > 1$ respectivement. Comme l'a montré Hall dans [11], la condition concernant β est aussi nécessaire.

Parmi les fonctions qui ne satisfont pas à la condition suffisante énoncée ci-dessus, la plus naturelle est sans doute l'application linéaire $d \mapsto \theta d$, avec θ

Received 18 August, 1981; revised 13 January, 1982.

irrationnel. Alors que la solution du problème d'équirépartition correspondant est aisée dans le cas classique, elle nécessite ici une estimation non triviale de sommes d'exponentielles du type

$$\sum_{n < x} y^{\Omega(n)} e(\theta n)$$

avec $0 < y < 1$ (cf. Théorème 2 et la remarque à la fin de la Section 3). A cette fin nous établissons un développement asymptotique selon les puissances de $1/\log x$ de l'expression

$$\sum_{\substack{n < x \\ n \equiv h \pmod{q}}} z^{\Omega(n)}$$

valable pour tout nombre complexe z de module < 2 et pour $q = (\log x)^{o(1)}$ (cf. Théorème 3). Ce résultat est susceptible de nombreuses applications. Nous nous sommes limités à une généralisation du théorème de Vinogradov sur l'équirépartition modulo 1 de la suite $\{\theta p : p \text{ premier}\}$ (Théorème 4). Enfin, la Section 4 est consacrée à des résultats du type 'presque partout' qui sont l'équivalent de ceux exposés par Kuipers et Niederreiter [15] dans le cas classique.

Notations et Conventions. Les lettres $a, b, d, h, j, k, m, n, q, r, t$ désignent des entiers non négatifs alors que la lettre v désigne un entier relatif et que la lettre p est réservée pour dénoter un nombre premier. Sauf mention contraire, les variables entières sont toujours supposées non nulles dans une sommation.

Les lettres $u, v, w, x, y, \alpha, \beta, \delta, \varepsilon, \eta, \rho, \sigma, \theta, \tau$ désignent des réels positifs et les lettres s et z des nombres complexes; σ et τ sont souvent implicitement définis par $s = \sigma + i\tau$. La constante d'Euler est désigné par γ .

On note $[x]$ la partie entière de x et $\|x\|$ la distance de x à l'ensemble des entiers; $a|b$ signifie a divise b ; le plus grand diviseur commun à a et b est noté (a, b) ; $\Omega(n)$ (respectivement $\omega(n)$) désigne le nombre des facteurs premiers de n comptés avec (respectivement sans) leur ordre de multiplicité. On note ϕ la fonction indicatrice d'Euler, Λ la fonction de von Mangoldt et, sauf dans la Section 4, μ la fonction de Moebius.

Les constantes impliquées par l'utilisation des symboles \ll de Vinogradov et O de Landau sont absolues; une dépendance éventuelle en fonction des paramètres α, β, \dots est indiquée sous la forme $\ll_{\alpha, \beta, \dots}$ ou $O_{\alpha, \beta, \dots}$.

Enfin, le symbole $\log x$ doit être interprété comme $\max(1, \log x)$.

2. Le cas où $f(d) = \theta d$

THEOREME 1. *Soit θ un nombre réel. Alors la fonction $d \mapsto \theta d$ est erd si, et seulement si, θ est irrationnel.*

D'après le Théorème A, la propriété de l'énoncé équivaut à

$$(1) \quad \sum_{k < x} \left| \sum_{\substack{n < x \\ k|n}} \frac{e(\theta n)}{n 4^{\Omega(n)}} \right| = o(\sqrt{\log x})$$

lorsque $x \rightarrow \infty$. Comme $d \mapsto \theta d$ est trivialement non-erd lorsque θ est rationnel il suffit d'établir que la relation asymptotique (1) a lieu pour tout irrationnel θ .

On pose:

$$T(x; y, \theta) := \sum_{n < x} e(\theta n) y^{\Omega(n)},$$

et

$$S(x; y, \theta) := \sum_{k < x} y^{\Omega(k)} \left| T\left(\frac{x}{k}; y, k\theta\right) \right|.$$

Une intégration par parties montre que le membre de gauche de (1) ne dépasse pas

$$\frac{1}{x} S(x; \frac{1}{4}, \theta) + \int_1^x S(u; \frac{1}{4}, \theta) \frac{du}{u^2};$$

le Théorème 1 découle donc du résultat suivant.

THEOREME 2. *Soit θ un nombre irrationnel et y un nombre réel, $0 \leq y \leq 1$. Alors on a, pour x infini,*

$$S(x; y, \theta) = o(x(\log x)^{2y-1}).$$

Considérons le nombre irrationnel θ . D'après le théorème de Dirichlet, il existe un rationnel irréductible a/q satisfaisant à $q \leq x(\log x)^{-10}$ et $|\theta - (a/q)| \leq (qx)^{-1}(\log x)^{10}$. La majoration de $S(x; y, \theta)$ sera effectuée par des techniques différentes selon la possibilité ou non de choisir q assez grand: dans le premier cas, une utilisation adéquate de l'inégalité de Cauchy-Schwarz permet, par un procédé classique, d'aboutir au résultat; dans le second, la conclusion souhaitée découle d'une étude directe des sommes $T\left(\frac{x}{k}; y, k\theta\right)$ fondée sur l'estimation des quantités

$$\sum_{\substack{n < x \\ n \equiv h \pmod{q}}} y^{\Omega(n)}.$$

Nous montrons la proposition suivante, dont le Théorème 2 est une conséquence évidente.

PROPOSITION 1. *Supposons $|\theta - (a/q)| \leq (qx)^{-1}(\log x)^{10}$, $(a, q) = 1$, $q \leq x(\log x)^{-10}$ et $0 \leq y \leq 1$. Alors on a*

(i) *si $q > (\log x)^{11}$, $S(x; y, \theta) \ll x(\log x)^{y-1}(\log \log x)^y$,*

(ii) *si $q \leq (\log x)^{11}$, $S(x; y, \theta) \ll x(\log x)^{2y-1} \left\{ \frac{\tau(q)^2}{\phi(q)} (\log \log q)^2 + (\log x)^{-y/2} \right\}$.*

Etablissons le point (i). Dans un premier temps, nous décomposons

$$S\left(x; y, \frac{a}{q}\right) = \sum_{k < x} y^{\Omega(k)} \left| \sum_{n < x/k} y^{\Omega(n)} e\left(\frac{akn}{q}\right) \right|$$

en une somme $S_1 + S_2 + S_3$, disons, où les trois termes correspondent respectivement aux trois intervalles de sommation $1 \leq k < (\log x)^{10}$, $(\log x)^{10} \leq k < x(\log x)^{-10}$ et $x(\log x)^{-10} \leq k < x$. La formule classique

$$(2) \quad \sum_{n < x} y^{\Omega(n)} = \left\{ C(y) + O\left(\frac{1}{\log x}\right) \right\} x(\log x)^{y-1},$$

valable uniformément pour $x > 1$ et $0 \leq y \leq y_0 < 2$, permet de majorer, dans S_1 et S_3 , la somme intérieure par $O\left(\frac{x}{k} \left(\log \frac{x}{k}\right)^{y-1}\right)$. En utilisant à nouveau (2), une sommation d'Abel permet finalement d'obtenir

$$(3) \quad S_1 + S_3 \ll x(\log x)^{y-1} (\log \log x)^y.$$

Pour majorer S_2 , nous appliquons le lemme suivant, qui est une version affaiblie d'un résultat de Davenport [1, Lemma 8], et, dont la démonstration, très simple, utilise essentiellement l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

LEMME 1 (Davenport). *Supposons $1 < x_0 < x_1 < x$, $1 \leq q \leq x$, $(a, q) = 1$. Si $(n, x) \mapsto \lambda(n, x)$ est une fonction bornée, on a*

$$\sum_{x_0 \leq k < x_1} \left| \sum_{n < x/k} \lambda(n, x) e\left(\frac{akn}{q}\right) \right| \ll x(\log x)^2 \left(\frac{1}{x_0} + \frac{x_1}{x} + \frac{1}{q} + \frac{q}{x}\right)^{1/2}.$$

Choisissons $\lambda(n, x) = y^{\Omega(n)} \leq 1$, $x_0 = (\log x)^{10}$, $x_1 = x(\log x)^{-10}$. Il vient

$$S_2 \ll x(\log x)^2 \left(\frac{1}{(\log x)^{10}} + \frac{1}{q} + \frac{q}{x}\right)^{1/2} \ll x(\log x)^{-3},$$

d'où, compte tenu de (3),

$$(4) \quad S\left(x; y, \frac{a}{q}\right) \ll x(\log x)^{y-1} (\log \log x)^y.$$

Une intégration par parties permet d'établir l'inégalité

$$S(x; y, \theta) \leq S\left(x; y, \frac{a}{q}\right) + 2\pi \left| \theta - \frac{a}{q} \right| \int_1^x S\left(u; y, \frac{a}{q}\right) du.$$

En utilisant la majoration triviale $S\left(u; y, \frac{a}{q}\right) \ll u(\log u)^{2y-1}$ et l'hypothèse $|\theta - (a/q)| \leq (qx)^{-1}(\log x)^{10} < (x \log x)^{-1}$, on obtient finalement que l'estimation (4) reste valable lorsqu'on y remplace a/q par θ .

Le résultat suivant nous sera utile pour établir le point (ii) de la Proposition 1. En vue d'applications ultérieures, nous avons remplacé, dans ses hypothèses, la variable réelle y de $[0, 1]$ par une variable complexe z de module < 2 .

THEOREME 3. Posons $\rho(s; z, q) := \prod_{p|q} \left(1 - \frac{z}{p^s}\right)$. Il existe une suite $\{z \mapsto A_r(z) : r = 1, 2, \dots\}$ de fonctions holomorphes dans le disque ouvert $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\}$ telle que, notant pour $j \geq 1$,

$$(5) \quad \lambda_j(z, q) := \sum_{r=1}^j \binom{z-r}{j-r} A_r(z) \rho^{(j-r)}(1; z, q),$$

on ait pour $|z| \leq 2 - \delta$, $x \geq 1$, $1 \leq q \leq (\log x)^b$, $(h, q) = 1$ et $t \geq 1$

$$(6) \quad \sum_{\substack{n < x \\ n \equiv h \pmod{q}}} z^{\Omega(n)} = \frac{x}{\phi(q)} \sum_{j=1}^t \lambda_j(z, q) (\log x)^{z-j} + O_{\delta, t, b} \left(\frac{x}{\phi(q)} (\log x)^{z-t-1} (\log \log q)^{t+2} \right).$$

De plus, on a la majoration

$$(7) \quad |\lambda_j(z, q)| \ll_{\delta, j} (\log \log q)^{j+1}.$$

La formule (6) est une conséquence immédiate des deux prochains lemmes. La majoration (7) provient de (5) et (10).

LEMME 2. Il existe une constante absolue positive c telle que l'on ait, pour tout caractère de Dirichlet χ modulo q non principal et pour $|z| \leq 2 - \delta$, $q \leq (\log x)^b$, et, $x \geq 1$,

$$\left| \sum_{n < x} \chi(n) z^{\Omega(n)} \right| \ll_{\delta, b} x \exp \{ -c \sqrt{\log x} \}.$$

Démonstration. Définissons les deux fonctions arithmétiques d_z et b_z par les identités

$$\zeta(s)^z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_z(n)}{n^s} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{\Omega(n)}}{n^s} = \zeta(s)^z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_z(n)}{n^s}.$$

On vérifie facilement l'existence d'un $\eta > 0$, dépendant de δ , tel que la série $\sum_{n=1}^{\infty} |b_z(n)| n^{\eta-1}$ soit convergente. D'après Rieger [17, Hilfssatz 5] on a pour χ non principal modulo q

$$\left| \sum_{n < u} \chi(n) d_z(n) \right| \ll u^{\beta(q)} (\log q)^A + u \exp \{ -2c \sqrt{\log u} \}$$

uniformément pour $u \geq u_0$, $|z| < 2$, $q < \exp \sqrt{\log u}$, où A et c sont des constantes positives et où la fonction $\beta(q)$ satisfait à $\beta(q) \leq 1 - c(\varepsilon)q^{-\varepsilon}$ pour tout $\varepsilon > 0$. On en déduit, pour $q \leq (2 \log u)^b$,

$$(8) \quad \left| \sum_{n < u} \chi(n) d_z(n) \right| \ll_b u \exp \{ -2c \sqrt{\log u} \}.$$

Maintenant, on a

$$\sum_{n < x} \chi(n) z^{\Omega(n)} = \sum_{m < x} b_z(m) \chi(m) \sum_{n < x/m} \chi(n) d_z(n).$$

Pour $m < \sqrt{x}$ et $x \geq x_0(b)$, on peut appliquer (8) à la somme intérieure. Il vient

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n < x} \chi(n) z^{\Omega(n)} \right| &\ll_b x \sum_{m < \sqrt{x}} \frac{|b_z(m)|}{m} \exp \left\{ -2c \sqrt{\log \frac{x}{m}} \right\} + x \log x \sum_{m \geq \sqrt{x}} \frac{|b_z(m)|}{m} \\ &\ll_{\delta, b} x \exp \left\{ -c \sqrt{\log x} \right\} + x (\log x) x^{-\eta/2}, \end{aligned}$$

d'où le résultat annoncé.

LEMME 3. Avec les notations du Théorème 3, on a pour $|z| \leq 2 - \delta$, $q \geq 1$, $t \geq 1$, $x \geq 1$, $\log \log q = o(\log x / \log \log x)$,

$$(9) \quad \sum_{\substack{n < x \\ (n, q) = 1}} z^{\Omega(n)} = x \sum_{j=1}^t \lambda_j(z, q) (\log x)^{z-j} + O_{\delta, t} (x (\log x)^{z-t-1} (\log \log q)^{t+2})$$

Démonstration. On peut écrire

$$\sum_{\substack{n < x \\ (n, q) = 1}} z^{\Omega(n)} = \sum_{d|q} \mu(d) z^{\Omega(d)} \sum_{m \leq x/d} z^{\Omega(m)} = S_1 + S_2, \quad \text{disons,}$$

où S_1 correspond aux diviseurs d de q tels que $d \leq \sqrt{x}$. La somme intérieure étant estimée grâce à un théorème de Delange [2], on obtient

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{\substack{d|q \\ d \leq \sqrt{x}}} \mu(d) z^{\Omega(d)} \frac{x}{d} \left\{ \sum_{r=1}^t A_r(z) \left(\log \frac{x}{d} \right)^{z-r} + O_{\delta, t} ((\log x)^{z-t-1}) \right\} \\ &= \sum_{\substack{d|q \\ d \leq \sqrt{x}}} \mu(d) z^{\Omega(d)} \frac{x}{d} \left\{ \sum_{r=1}^t A_r(z) (\log x)^{z-r} \sum_{h=0}^{t-r} \binom{z-r}{h} \left(-\frac{\log d}{\log x} \right)^h \right. \\ &\quad \left. + O_{\delta, t} ((\log d)^t (\log x)^{z-t-1}) \right\} \\ &= x \sum_{r=1}^t A_r(z) (\log x)^{z-r} \sum_{h=0}^{t-r} \binom{z-r}{h} \left\{ \rho^{(h)}(1; z, q) (\log x)^{-h} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{\substack{d|q \\ d > \sqrt{x}}} \frac{\mu(d) z^{\Omega(d)}}{d} \left(-\frac{\log d}{\log x} \right)^h \right\} \\ &\quad + O_{\delta, t} \left(x (\log x)^{z-t-1} \sum_{d|q} \frac{|\mu(d)| |z|^{\Omega(d)} (\log d)^t}{d} \right). \end{aligned}$$

Comme, de plus,

$$S_2 = \sum_{\substack{d|q \\ d > \sqrt{x}}} \mu(d) z^{\Omega(d)} \sum_{m < x/d} z^{\Omega(m)} \ll_{\delta} \sum_{\substack{d|q \\ d > \sqrt{x}}} |\mu(d)| |z|^{\Omega(d)} \frac{x \log x}{d},$$

on peut majorer la différence D entre $S_1 + S_2$ et le terme principal de (9):

$$D \ll_{\delta, t} x \sum_{j=1}^t (\log x)^{\operatorname{Re} z - j} \sum_{\substack{d|q \\ d > \sqrt{x}}} \frac{|\mu(d)| |z|^{\Omega(d)} (\log d)^{j-1}}{d} \\ + x (\log x)^{\operatorname{Re} z - t - 1} \sum_{d|q} \frac{|\mu(d)| |z|^{\Omega(d)} (\log d)^t}{d} + x \log x \sum_{\substack{d|q \\ d > \sqrt{x}}} \frac{|\mu(d)| |z|^{\Omega(d)}}{d}.$$

Désignons par m le plus petit entier pour lequel on a $\prod_{p \leq m} p \geq q$. Alors $m \ll \log q$. Soit η un réel de $(0, 1/2)$ et \mathcal{C} le cercle de centre 1 et de rayon 2η . Pour $j \geq 1$, on a

$$U_j := \sum_{\substack{d|q \\ d > \sqrt{x}}} \frac{|\mu(d)| |z|^{\Omega(d)} (\log d)^j}{d} \leq x^{-\eta/2} |\rho^{(j)}(1 - \eta; -|z|, q)| \\ \leq (2\pi)^{-1} x^{-\eta/2} j! \int_{\mathcal{C}} \frac{|\rho(s; -|z|, q)|}{|s - 1 + \eta|^{j+1}} |ds| \ll_j x^{-\eta/2} \eta^{-j} \prod_{p|q} (1 + |z| p^{2\eta-1}) \\ \ll x^{-\eta/2} \eta^{-j} \exp \left\{ |z| m^{2\eta} \sum_{p \leq m} \frac{1}{p} \right\}.$$

Choissant $\eta = 2\varepsilon(\log \log q)^{-1}$ où ε est fixé assez petit pour que l'on ait $|z| m^{2\eta} \leq 2$, il vient

$$U_j \ll_{\delta, j} x^{-\varepsilon/\log \log q} (\log \log q)^{j+2}.$$

En prenant $x = 1$, on obtient aussi la majoration

$$(10) \quad \sum_{d|q} \frac{|\mu(d)| |z|^{\Omega(d)} (\log d)^t}{d} \ll_{\delta, t} (\log \log q)^{t+2},$$

d'où finalement

$$D \ll x (\log x)^{\operatorname{Re} z - t - 1} (\log \log q)^{t+2} + x (\log x) x^{-\varepsilon/\log \log q} (\log \log q)^{t+2}.$$

La conclusion en découle.

LEMME 4. Avec les notations du Théorème 3, on a pour $|z| \leq 2 - \delta$, $x \geq 1$, $1 \leq q \leq (\log x)^b$, $(a, q) = 1$, $t \geq 1$, $k \geq 1$,

$$(11) \quad T\left(x; z, \frac{ka}{q}\right) = x \sum_{j=1}^t \tau_j(z, q, k) (\log x)^{z-j} + O_{\delta, t, b}(x(\log x)^{z-t-1}(\log \log q)^{t+4})$$

où l'on a posé

$$(12) \quad \tau_j(z, q, k) := \sum_{\substack{dm=q \\ 1 \leq r \leq j}} \binom{z-r}{j-r} \frac{z^{\Omega(d)} (-\log d)^{j-r} c_m(k) \lambda_r(z, m)}{d \phi(m)},$$

et

$$c_m(k) := \sum_{\substack{0 \leq h \leq m-1 \\ (h, m) = 1}} e\left(\frac{hk}{m}\right) = \sum_{d|(k, m)} d \mu\left(\frac{m}{d}\right).$$

En particulier, on a la majoration

$$(13) \quad |\tau_j(z, q, k)| \ll_{\delta, j} (\log \log q)^{j+3}.$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} T\left(x; z, \frac{ka}{q}\right) &= \sum_{r=0}^{q-1} e\left(\frac{akr}{q}\right) \sum_{\substack{n < x \\ n \equiv r \pmod{q}}} z^{\Omega(n)} \\ &= \sum_{d|q} z^{\Omega(d)} \sum_{\substack{0 \leq h \leq (q/d)-1 \\ (h, q/d) = 1}} e\left(\frac{akh d}{q}\right) \sum_{\substack{m < x/d \\ m \equiv h \pmod{q/d}}} z^{\Omega(m)}. \end{aligned}$$

Pour $q \leq (\log x)^b$, on peut utiliser le Lemme 4 pour estimer la somme intérieure. On obtient

$$\begin{aligned} T\left(x; z, \frac{ka}{q}\right) &= x \sum_{j=1}^t \sum_{dm=q} \frac{z^{\Omega(d)} c_m(k) \lambda_j(z, m)}{d \phi(m)} \left(\log \frac{x}{d}\right)^{z-j} \\ &\quad + O_{\delta, t, b}(x(\log x)^{z-t-1}(\log \log q)^{t+4}) \end{aligned}$$

d'où l'on déduit (11) en développant $\left(1 - \frac{\log d}{\log x}\right)^{z-j}$ en série. La majoration (13) provient de (7) et de la majoration analogue à (10) obtenue en remplaçant $|\mu(d)|$ par 1.

Nous sommes maintenant en mesure d'achever la preuve de la Proposition 1. Posons $x_1 := \exp \sqrt{\log x}$ et $x_2 := x \exp \{-2\sqrt{\log x}\}$; on a

$$(14) \quad S(x; y, \theta) = \sum_{k < x_2} y^{\Omega(k)} \left| \int_{x_1}^{x/k} e\left(\left(\theta - \frac{a}{q}\right)ku\right) dT\left(u; y, \frac{ka}{q}\right) \right| + O(x(\log x)^{(3/2)y-1})$$

où le terme reste résulte, après majoration triviale des quantités $\left|T\left(\frac{x}{k}; y, k\theta\right)\right|$, d'une intégration par parties. Pour $u \geq x_1$, on a $q \leq (\log x)^{11} \leq (\log u)^{22}$ et l'on peut

utiliser le Lemme 5 pour évaluer $T\left(u; y, \frac{ka}{q}\right)$; il vient, pour $k < x_2$,

$$(15) \quad \int_{x_1}^{x/k} e\left(\left(\theta - \frac{a}{q}\right)ku\right) dT\left(u; y, \frac{ka}{q}\right) \\ = \sum_{j=1}^t \tau_j(y; q, k) \int_{x_1}^{x/k} e\left(\left(\theta - \frac{a}{q}\right)ku\right) d\{u(\log u)^{y-j}\} + \int_{x_1}^{x/k} e\left(\left(\theta - \frac{a}{q}\right)ku\right) dR_q(u)$$

avec $R_q(u) = O_t(u(\log u)^{y-t-1}(\log \log q)^{t+4})$.

Une sommation par parties suffit à majorer le dernier terme: il ne dépasse pas

$$\left| R_q\left(\frac{x}{k}\right) \right| + |R_q(x_1)| + 2\pi \left| \theta - \frac{a}{q} \right| k \int_{x_1}^{x/k} |R_q(u)| du \\ \ll_t (\log \log q)^{t+4} \frac{x}{k} (\log x)^{(1/2)(y-t-1)} \left(1 + x \left| \theta - \frac{a}{q} \right| \right) \ll_t x k^{-1} (\log x)^{-2},$$

quitte à choisir $t \geq 25$. De plus, comme les fonctions $u \mapsto u(\log u)^{y-j}$ sont croissantes à l'infini, on a, pour $k < x_2$,

$$\left| \int_{x_1}^{x/k} e\left(\left(\theta - \frac{a}{q}\right)ku\right) d\{u(\log u)^{y-j}\} \right| \ll \frac{x}{k} \left(\log \frac{x}{k}\right)^{y-j}$$

d'où, en reportant dans (15) puis dans (14) et en utilisant ensuite (13) pour $j \geq 2$,

$$(16) \quad S(x; y, \theta) \ll x \sum_{j=1}^t \sum_{k < x_2} |\tau_j(y, q, k)| \frac{y^{\Omega(k)}}{k} \left(\log \frac{x}{k}\right)^{y-j} + x(\log x)^{(3/2)y-1} \\ \ll x \sum_{k < x_2} |\tau_1(y, q, k)| \frac{y^{\Omega(k)}}{k} \left(\log \frac{x}{k}\right)^{y-1} + x(\log x)^{(3/2)y-1}.$$

En remarquant que

$$|\tau_1(y, q, k)| \ll \frac{(\log \log q)^2}{\phi(q)} \sum_{m|q} |c_m(k)|$$

et en utilisant l'inégalité

$$\sum_{m|q} |c_m(k)| \leq (k, q) 2^{\omega(q)},$$

qui est due à Delange [3], on déduit facilement de (16) la conclusion annoncée.

3. *Extension du théorème de Vinogradov*

Notons $\pi_k(x)$ le nombre des entiers $< x$ ayant exactement k facteurs premiers, comptés avec leur ordre de multiplicité. On sait d'après Sathe, puis Selberg [18], que l'on a, uniformément pour $k \leq (2 - \delta) \log \log x$,

$$(17) \quad \pi_k(x) = \left\{ F \left(\frac{k-1}{\log \log x} \right) + O \left(\frac{1}{\log \log x} \right) \right\} \frac{x}{\log x} \frac{(\log \log x)^{k-1}}{(k-1)!}$$

où F est la fonction holomorphe définie dans le disque $|z| < 2$ par la formule

$$F(z) = \frac{1}{\Gamma(1+z)} \prod_p \left(1 - \frac{z}{p} \right)^{-1} \left(1 - \frac{1}{p} \right)^z.$$

La méthode utilisée par Selberg pour prouver (17) consiste à interpréter $\pi_k(x)$ comme le coefficient de z^k dans le polynôme $\sum_{n < x} z^{\Omega(n)}$ et à appliquer la formule de Cauchy. Or, les calculs menés dans la section précédente permettent une évaluation de

$$T(x; z, \theta) = \sum_{n < x} e(\theta n) z^{\Omega(n)},$$

valable pour $|z| < 2$, lorsque θ est suffisamment proche d'un rationnel à petit dénominateur. Cela nous a conduit au résultat suivant généralisant le théorème de Vinogradov [24] sur l'équirépartition de la suite $\{\theta p\}$ lorsque θ est irrationnel.

THEOREME 4. *Posons $\pi_k(x, \theta) := \sum_{\substack{n < x \\ \Omega(n) = k}} e(\theta n)$. Alors, si θ est irrationnel, on a, uniformément pour $k \leq (2 - \delta) \log \log x$,*

$$(18) \quad \pi_k(x, \theta) = o(\pi_k(x)).$$

Plus précisément, il existe une constante c telle que l'on ait pour $\left| \theta - \frac{a}{q} \right| \leq (qx)^{-1} (\log x)^{10}$, $(a, q) = 1$, $q \leq x (\log x)^{-10}$, et $k \leq (2 - \delta) \log \log x$,

$$(19) \quad |\pi_k(x, \theta)| \ll_{\delta} \pi_k(x) \left\{ \frac{(k-1)!}{(\log \log x)^{k-1}} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{j!} (\log \log \log x + c)^j + \frac{(2-\delta)^{\Omega(q) - \omega(q)} (3-\delta)^{\omega(q)}}{\phi(q)} \right\}.$$

On notera que, pour tout $\delta > 0$, il existe un $\eta = \eta(\delta) > 0$ tel que $(2 - \delta)^{\Omega(q) - \omega(q)} (3 - \delta)^{\omega(q)} \phi(q)^{-1} \leq q^{-\eta}$.

REMARQUE (i). Désignons par $\sigma_k(x)$ et $\sigma_k(x, \theta)$ les quantités analogues à $\pi_k(x)$ et $\pi_k(x, \theta)$ obtenues en considérant la fonction ω au lieu de Ω . Les formules (17), (18) et (19) sont encore valables dans ce contexte, quitte à y remplacer π_k par σ_k , F par G ,

avec $G(z) := \frac{1}{\Gamma(1+z)} \prod_p \left(1 + \frac{z}{p-1}\right) \left(1 - \frac{1}{p}\right)^z$, l'hypothèse $k \leq (2-\delta) \log \log x$ par $k \leq A \log \log x$, où A est une constante arbitraire, et le terme dépendant de q dans (19) par $(\log \log q)^{2A} (A+1)^{\omega(q)} / \phi(q)$.

REMARQUE (ii). La formule (19) est triviale pour $k = 1$. Cela est dû à la méthode de démonstration adoptée, utilisant la décomposition $\log n = \sum_{d|n} \Lambda(d)$ pour transformer $\pi_k(x, \theta)$ en une somme double, qui est inefficace pour $k = 1$. Pour traiter ce cas, il faut faire appel à la méthode de Vinogradov [24], ou à celle de Vaughan [22, 23], qui sont fondées sur des identités nécessitant un traitement plus sophistiqué que celui employé ici. On trouvera dans [5] une application de la méthode de Vaughan au cas où k est borné indépendamment de x .

Démonstration du Théorème 4. La formule (18) étant connue pour $k = 1$, nous pouvons nous restreindre au cas $k \geq 2$.

Dans un premier temps, faisons l'hypothèse supplémentaire

$$(20) \quad q > (\log x)^{11}$$

et considérons l'expression

$$\hat{\pi}_k(x, \theta) := \sum_{\substack{n \leq x \\ \Omega(n) = k}} e(\theta n) \log n.$$

On a pour u dans $(x(\log x)^{-2}, x)$

$$\begin{aligned} \left| \hat{\pi}_k \left(u, \frac{a}{q} \right) \right| &= \left| \sum_{\substack{md \leq u \\ \Omega(md) = k}} e \left(\frac{amd}{q} \right) \Lambda(d) \right| \\ &\ll \sum_{u_0 \leq m < u_1} \left| \sum_{p \leq u/m} \log p e \left(\frac{amp}{q} \right) \right| + \sum_{u_0 \leq m < u_1} \sqrt{\frac{u}{m}} + \sum_{\substack{m < u_0 \\ \Omega(m) \leq k-1}} \frac{u}{m} + \sum_{\substack{u_1 \leq m < u \\ \Omega(m) \leq k-1}} \frac{u}{m} \end{aligned}$$

où l'on a posé $u_0 := (\log x)^{10}$ et $u_1 := u(\log x)^{-10}$.

Le premier terme de cette majoration peut être estimé à l'aide du Lemme 1 en choisissant $\lambda(p, u) = (\log p) / (\log u)$; le second est traité trivialement et le quatrième par sommation d'Abel en utilisant (17); pour le troisième, on utilise la majoration

$$\sum_{\substack{n < v \\ \omega(n) = j}} \frac{|\mu(n)|}{n} \leq \frac{1}{j!} \left(\sum_{p < v} \frac{1}{p} \right)^j \leq \frac{1}{j!} (\log \log v + c_0)^j$$

dont on tire

$$\sum_{\substack{m < u_0 \\ \Omega(m) \leq k-1}} \frac{1}{m} = \sum_{\substack{nh^2 < u_0 \\ \Omega(nh^2) \leq k-1}} \frac{|\mu(n)|}{nh^2} \leq \frac{\pi^2}{6} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{j!} (\log \log \log x + c)^j$$

avec $c = c_0 + 3$. On obtient finalement

$$(21) \quad \left| \hat{\pi} \left(u, \frac{a}{q} \right) \right| \ll \frac{u}{(\log x)^2} + \sqrt{uu_1} + u \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{j!} (\log \log \log x + c)^j$$

$$+ \frac{u}{\log x} \sum_{j=1}^{k-2} \frac{1}{j!} (\log \log x)^{j+1}$$

$$\ll u \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{j!} (\log \log \log x + c)^j.$$

De la relation

$$\pi_k \left(x, \frac{a}{q} \right) = \frac{\hat{\pi}_k(x, (a/q))}{\log x} + \int_1^x \frac{\hat{\pi}_k(u, (a/q))}{u(\log u)^2} du$$

on déduit alors, grâce à (21), que (19) est satisfaite pour $\theta = a/q$.

Le résultat souhaité en découle en remarquant que

$$|\pi_k(x, \theta)| \ll \left| \pi_k \left(x, \frac{a}{q} \right) \right| + 2\pi \left| \theta - \frac{a}{q} \right| \int_1^x \left| \pi_k \left(u, \frac{a}{q} \right) \right| du$$

$$\ll \left| \pi_k \left(x, \frac{a}{q} \right) \right| + 2\pi x \left| \theta - \frac{a}{q} \right| \pi_k(x)$$

et en utilisant (20).

Supposons maintenant que (20) n'est pas satisfaite. D'après la formule (11) avec $k = 1$, on peut écrire

$$T \left(x ; z, \frac{a}{q} \right) = \sum_{n < x} e \left(\frac{an}{q} \right) z^{\Omega(n)}$$

$$= x \sum_{j=1}^t \tau_j(z, q, 1) (\log x)^{z-j} + O_{\delta, t} (x (\log x)^{z-t-1} (\log \log q)^{t+4})$$

d'où l'on tire, comme dans la preuve de la Proposition 1,

$$|T(x ; z, \theta)| \ll_{\delta} |\tau_1(z, q, 1)| x (\log x)^{\operatorname{Re} z - 1} + x (\log x)^{\operatorname{Re} z - 2} (\log \log \log x)^5.$$

De plus, d'après (12), on a

$$\tau_1(z, q, 1) = \sum_{dm=q} \frac{z^{\Omega(d)}}{d} \frac{\mu(m)}{\phi(m)} \lambda_1(z, m),$$

et, par (5),

$$\lambda_1(z, m) = \prod_{p|m} \left(1 - \frac{z}{p} \right) A_1(z)$$

avec (cf [18])

$$A_1(z) = \frac{1}{\Gamma(z)} \prod_p \left(1 - \frac{z}{p}\right)^{-1} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^z = zF(z);$$

cela permet d'expliciter

$$\tau_1(z, q, 1) = zF(z)z^{\Omega(q)-\omega(q)}(z-1)^{\omega(q)}\phi(q)^{-1}.$$

Maintenant, si l'on désigne par \mathcal{C} le cercle de rayon $\rho := (k-1)/\log \log x$ centré à l'origine, on a

$$\begin{aligned} |\pi_k(x, \theta)| &= \left| \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}} T(x; z, \theta) \frac{dz}{z^{k+1}} \right| \\ &\ll_{\delta} \frac{x}{\log x} \rho^{-(k-1)} \left\{ \rho^{\Omega(q)-\omega(q)}(\rho+1)^{\omega(q)}\phi(q)^{-1} + \frac{(\log \log \log x)^5}{\rho \log x} \right\} \int_{-\pi}^{\pi} e^{(k-1)\cos \alpha} d\alpha \\ &\ll \frac{x}{\log x} \frac{(\log \log x)^{k-1}}{(k-1)!} \left\{ (2-\delta)^{\Omega(q)-\omega(q)}(3-\delta)^{\omega(q)}\phi(q)^{-1} + \frac{\log \log x (\log \log \log x)^5}{k \log x} \right\}, \end{aligned}$$

quitte à remarquer que

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} e^{(k-1)\cos \alpha} d\alpha &= e^{(k-1)} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-2(k-1)\sin^2 \alpha/2} d\alpha \\ &\leq e^{(k-1)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2(k-1)a^2/\pi^2} da \leq \frac{\pi^2}{\sqrt{2}} \frac{e^{k-1}}{\sqrt{k-1}}. \end{aligned}$$

Cela achève la démonstration.

REMARQUE. Les méthodes employées dans cette section permettent d'établir que, pour $y < 2$ et θ irrationnel, on a

$$(22) \quad T(x; y, \theta) := \sum_{n < x} e(\theta n) y^{\Omega(n)} = o(x(\log x)^{y-1}).$$

Ce résultat est à rapprocher du théorème de Daboussi affirmant que, pour toute fonction multiplicative f de module ≤ 1 et θ irrationnel, on a, uniformément en f ,

$$(23) \quad \sum_{n < x} e(\theta n) f(n) = o(x).$$

Dans [16], Montgomery et Vaughan ont prouvé que le membre de gauche de (23) est $\ll \frac{x}{\log x} + \frac{x(\log R)^{3/2}}{\sqrt{R}}$, uniformément en f , dès que $|\theta - (a/q)| \leq 1/q^2$ avec $2 \leq R \leq q \leq x/R$. La formule (22) suggère une autre direction de recherche: à

quelle condition une fonction multiplicative f satisfait-elle à la relation asymptotique

$$(24) \quad \sum_{n < x} e(\theta n) f(n) = o\left(\sum_{n < x} f(n)\right).$$

pour tout irrationnel θ ? Même en restreignant f , la réponse à cette question est sans doute délicate: Vaughan (communication personnelle) a fourni un contre-exemple à (24) à l'aide d'une fonction positive et pour laquelle $\sum_{n < x} f(n) = \Omega\left(\frac{x}{\log x}\right)$.

4. Résultats métriques

Dans cette section, nous désignons par μ la mesure de Haar sur le groupe compact $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^{\mathbb{N}}$. Nous pouvons établir le résultat suivant.

THEOREME 5. (i) μ -presque toute fonction $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est *erd*.

(ii) Etant donné un réel $\theta > 1$, la fonction $d \mapsto \lambda \theta^d$ est *erd* pour presque tout réel λ .

(iii) La fonction $d \mapsto \theta^d$ est *erd* pour presque tout réel θ de $(1, +\infty)$.

La démonstration des trois assertions étant analogue, nous nous bornons à prouver le point (i).

Posons, pour $0 \leq y \leq 1$,

$$\mathcal{F}(f; x, y) := \sum_{k < x} \left| \sum_{\substack{n < x \\ k|n}} y^{\Omega(n)} e(f(n)) \right|;$$

nous allons montrer que la relation asymptotique

$$\mathcal{F}(f; x, y) = o(x(\log x)^{2y-1})$$

a lieu pour μ -presque toute f . En notant, pour tout ε de $(0, 1)$, $\mathcal{F}_\varepsilon(f; x, y)$ la quantité obtenue en imposant, dans $\mathcal{F}(f; x, y)$, la restriction $k < x^{1-\varepsilon}$, on a, d'une part,

$$\mathcal{F}(f; x, y) \ll_y \mathcal{F}_\varepsilon(f; x, y) + \varepsilon^y x(\log x)^{2y-1}$$

et, d'autre part,

$$\begin{aligned} \int |\mathcal{F}_\varepsilon(f; x, y)|^2 d\mu(f) &\leq \int \left(\sum_{k < x^{1-\varepsilon}} k^{-1} \right) \\ &\quad \left(\sum_{k < x^{1-\varepsilon}} k \sum_{m, m' < x/k} y^{\Omega(mm')} e(f(km) - f(km')) \right) d\mu(f) \\ &\ll (\log x) \sum_{k < x^{1-\varepsilon}} k \cdot \frac{x}{k} \ll x^{2-\varepsilon} \log x. \end{aligned}$$

D'après le lemme de Borel–Cantelli, on a donc pour j infini, et, pour μ -presque toute f ,

$$\mathcal{F}_\varepsilon(f; x_j, y) \ll x_j^{1-\varepsilon/3}$$

pour toute suite $\{x_j\}$ telle que la série $\sum_{j=1}^{\infty} (\log x_j)x_j^{-\epsilon/3}$ converge. L'existence de la majoration triviale

$$|\mathcal{F}(f; x, y) - \mathcal{F}(f; u, y)| \ll (x - u + 1) \log x,$$

valable pour $u < x$, permet alors de conclure aisément.

Références

1. H. DAVENPORT, 'On some infinite series involving arithmetical functions, II', *Quart. J. Math.*, 8 (1937), 313–320.
2. H. DELANGE, 'Sur des formules de Atle Selberg', *Acta Arith.*, 19 (1971), 105–146.
3. H. DELANGE, 'On Ramanujan expansions of certain arithmetical functions', *Acta Arith.*, 31 (1976), 259–270.
4. P. D. T. A. ELLIOTT, *Probabilistic number theory*, Vols. I and II (Springer, Berlin, 1979).
5. O. M. FOMENKO, 'The distribution of numbers with a fixed number of different primes (Studies in number theory 5)', *Zap. Naučn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI)*, 82 (1979), 158–164, 168 (Russian).
6. G. HALÁSZ, 'Über die Mittelwerte multiplikativer zahlentheoretischer Funktionen', *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, 19 (1968), 365–403.
7. G. HALÁSZ, 'On the distribution of additive and the mean values of multiplicative arithmetic functions', *Studia Sci. Math. Hungar.*, 6 (1971), 211–233.
8. R. R. HALL, 'On the distribution of divisors of integers in residue classes (mod k) I', *J. Number Theory* (2), 2 (1970), 168–188.
9. R. R. HALL, 'On the distribution of divisors of integers in residue classes (mod k) II', *J. Number Theory* (2), 3 (1971), 204–209.
10. R. R. HALL, 'On the distribution of divisors of integers in residue classes (mod k) III', *J. Number Theory* (2), 3 (1971), 278–287.
11. R. R. HALL, 'The distribution of $f(d) \pmod{1}$ ', *Acta Arith.*, 31 (1976), 91–97.
12. R. R. HALL, 'A new definition of the density of an integer sequence', *J. Austral. Math. Soc. Ser. A*, 26 (1978), 487–500.
13. R. R. HALL, 'The divisor density of integer sequences', *J. London Math. Soc.* (2), 24 (1981), 41–53.
14. I. KÁTAI, 'Distribution mod 1 of additive functions on the set of divisors', *Acta Arith.*, 30 (1976), 209–212.
15. L. KUIPERS and H. NIEDERREITER, *Uniform distribution of sequences* (Wiley, New York, 1974).
16. H. L. MONTGOMERY and R. C. VAUGHAN, 'Exponential sums with multiplicative coefficients', *Invent. Math.*, 43 (1977), 69–82.
17. G. J. RIEGER, 'Zum Teilerproblem von Atle Selberg', *Math. Nachr.*, 30 (1965), 181–192.
18. A. SELBERG, 'Note on a paper by L. G. Sathe', *J. Indian Math. Soc.*, 18 (1954), 83–87.
19. G. TENENBAUM, 'Sur la densité divisorielle d'une suite d'entiers', *J. Number Theory*, to appear.
20. N. M. TIMOFEEV, 'Application of the analytic method to the summation of multiplicative functions', *Vladimir. Gos. Ped. Inst. Učen. Zap.*, 38 (1971), 204–249 (Russian).
21. J. G. VAN DER CORPUT, 'Neue zahlentheoretische Abschätzungen, II', *Math. Z.*, 29 (1929), 397–426.
22. R. C. VAUGHAN, 'Sommes trigonométriques sur les nombres premiers', *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A*, 285 (1977), 981–983.
23. R. C. VAUGHAN, 'On the distribution of αp modulo 1', *Mathematika*, 24 (1977), 135–141.
24. I. M. VINOGRADOV, *The method of trigonometrical sums in theory of numbers* (Interscience, New York, 1954).
25. E. WIRSING, 'Das asymptotische Verhalten von Summen über multiplikative Funktionen II', *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, 18 (1967), 411–467.

Y. Dupain et G. Tenenbaum,
U.E.R. de Mathématiques et
d'Informatique,
Université de Bordeaux I,
F 33405 Talence Cedex,
France.

R. R. Hall
Department of Mathematics,
University of York,
York YO1 5DD.