

# Crible d'Ératosthène et modèle de Kubilius\*

*Gérald Tenenbaum*

**Abstract.** Let  $f$  be an additive arithmetic function. The Kubilius model furnishes an approximation of the distribution law of the truncated function  $f_y(n) := \sum_{p \leq y, p^\nu \parallel n} f(p^\nu)$  by that of an abstract sum of independent random variables  $Z_y := \sum_{p \leq y} \xi_p$  where  $\mathbb{P}(\xi_p = f(p^\nu)) = (1 - 1/p)p^{-\nu}$  ( $\nu = 0, 1, 2, \dots$ ). As noted by Ruzsa and others, Kubilius' proof actually provides an upper bound for the total variation distance

$$d_{TV}(f_y, Z_y) := \sup_{A \subset \mathbb{R}} |\nu_x(f_y \in A) - \mathbb{P}(Z_y \in A)|,$$

where  $\nu_x$  is the uniform measure over the set of integers not exceeding  $x$ . Thus, writing  $K(x, y) := \sup_f d_{TV}(f_y, Z_y)$ , Kubilius' historical result [K56], [K64], may be expressed as the bound  $K(x, y) \ll e^{-cu}$  ( $x \geq y \geq 2$ ), with  $u := (\log x)/\log y$ . A subsequent improvement by Barban and A.I. Vinogradov [BV64] has been described in complete detail by Elliott [E79]. Here, we obtain, for each  $\varepsilon > 0$ , the bound

$$K(x, y) \ll \varrho(u)2^{(1+\varepsilon)u} + x^{-1+\varepsilon} \quad (x \geq y \geq 2),$$

where  $\varrho$  denotes Dickman's function. This is optimal in the sense that  $\varepsilon$  can be replaced by zero in neither of its two occurrences. Moreover, we provide an effective version of a recent result of Arratia and Stark which further improves on the above bound when  $\exp\{(\log \log x)^{5/3+\varepsilon}\} \leq y \leq x$  and yields an asymptotic formula for  $K(x, y)$  in the range  $\exp\{(\log x)^{2/5+\varepsilon}\} \leq y \leq x$ .

These results are obtained as consequences of precise saddle-point estimates for the counting function of unsifted integers in the sieve of Eratosthenes. Various corollaries are deduced, including an asymptotic formula for the number of integers not exceeding  $x$  for which the product of the "small" prime factors is "large", and an average estimate, with fairly small error term, for the logarithm of the least prime factor of an integer.

1991 Mathematics Subject Classification : 11N25, 11N60, 11N36, 11N37.

---

\* This paper appeared in : K. Györy, H. Iwaniec, J. Urbanowicz (eds.), *Number Theory in Progress*, Proceedings of the conference in honor of Andrzej Schinzel, Zakopane, Poland 1997, 1099–1129, Walter de Gruyter, Berlin, New York, 1999. Some corrections with respect to the printed version are included here.

## 1. Introduction

Soit  $f$  une fonction arithmétique additive. Le lemme fondamental du modèle probabiliste de Kubilius, tel qu'il est notamment exposé par Elliott [E79], [E80], fournit une approximation de la loi de répartition de  $f_y(n) := \sum_{p \leq y, p^\nu \parallel n} f(p^\nu)$  par celle d'une variable aléatoire abstraite  $Z_y := \sum_{p \leq y} \xi_p$  où les  $\xi_p$  sont des variables aléatoires indépendantes de lois définies par

$$\mathbb{P}(\xi_p = f(p^\nu)) = (1 - 1/p)p^{-\nu} \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots).$$

Ainsi que l'a remarqué Ruzsa dès 1982 [R82], la preuve de Kubilius fournit en fait une majoration de la distance en variation totale

$$d_{TV}(f_y, Z_y) := \sup_{A \subset \mathbb{R}} |\nu_x(f_y \in A) - \mathbb{P}(Z_y \in A)|,$$

où  $\nu_x$  désigne la mesure uniforme sur l'ensemble des entiers n'excédant pas  $x$ . Il est classique, et d'ailleurs facile, de constater que, pour toutes variables aléatoires réelles discrètes  $X, Y$ , on a

$$d_{TV}(X, Y) := \sup_{A \subset \mathbb{R}} |\mathbb{P}(X \in A) - \mathbb{P}(Y \in A)| = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} |\mathrm{d}\{\mathbb{P}(X \leq z) - \mathbb{P}(Y \leq z)\}|.$$

Posons

$$K(x, y) := \sup_f d_{TV}(f_y, Z_y).$$

Kubilius ([K56], [K64]) a établi le résultat fondamental que  $K(x, y)$  tend vers 0 dès que

$$u := (\log x)/\log y \rightarrow \infty.$$

Il a même obtenu la validité de l'estimation effective  $K(x, y) \ll e^{-cu}$  ( $x \geq y \geq 2$ ), pour une constante positive convenable  $c$ . Barban & Vinogradov [BV64] (voir le chapitre 3 de [E79] pour les détails) ont fourni la majoration plus précise

$$(1.1) \quad K(x, y) \ll u^{-u/8} + x^{-1/15} \quad (x \geq y \geq 2).$$

Il est facile de voir que  $K(x, y)$  ne tend pas vers 0 lorsque  $u$  reste borné, et Arratia et Stark [AS97] ont établi que l'on a pour  $u$  fixé

$$(1.2) \quad \lim_{y \rightarrow \infty} K(y^u, y) = H(u)$$

où  $H$  est explicitement exprimée, en termes des fonctions  $\varrho$  de Dickman et  $\omega$  de Buchstab définies plus loin, par la formule

$$(1.3) \quad H(u) := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} |\omega(v) - e^{-\gamma}| \varrho(u-v) \mathrm{d}v + \frac{1}{2} \varrho(u).$$

La relation (1.2) confirme une conjecture d'Arratia [A96] fondée sur le principe de similarité entre la répartition uniforme des entiers n'excédant pas  $x$  et celle des permutations aléatoires de  $[x]$  lettres.

Nous nous proposons ici de donner une version effective de (1.2). Dans toute la suite, nous posons

$$(1.4) \quad L_\varepsilon(y) := e^{(\log y)^{3/5-\varepsilon}}, \quad Y_\varepsilon := e^{(\log y)^{3/2-\varepsilon}},$$

et nous désignons par  $\log_k$  la  $k$ -ème itérée de la fonction logarithme.

**Théorème 1.** Soient  $x, y$  tels que  $x \geq y \geq 2$ . On a

$$(1.5) \quad K(x, y) \ll_{\varepsilon} \varrho(u) 2^{(1+\varepsilon)u} + x^{-1+\varepsilon}$$

où l'on a posé  $u := (\log x)/\log y$ . De plus, pour chaque  $\varepsilon > 0$ , on a

$$(1.6) \quad K(x, y) = H(u) \left\{ 1 + O\left(\frac{\log(u+1) + 2^{-u} \log_2 y}{\log y}\right) \right\} + O\left(\frac{\varrho(u/2)^2}{Y_{\varepsilon}}\right)$$

uniformément dans le domaine

$$(H_{\varepsilon}) \quad x \geq 3, \quad \exp\{(\log_2 x)^{5/3+\varepsilon}\} \leq y \leq x.$$

Nous déduisons en particulier de (1.5) l'amélioration quasi-optimale de (1.1)

$$(1.7) \quad K(x, y) \ll_{\varepsilon} u^{-u} + x^{-1+\varepsilon} \quad (x \geq y \geq 2),$$

alors que (1.6) implique la validité, pour tout  $\varepsilon > 0$ , de la formule asymptotique

$$(1.8) \quad K(x, y) = H(u) \left\{ 1 + O\left(\frac{\log_2 y}{\log y}\right) \right\}$$

dans le domaine

$$(G_{\varepsilon}) \quad x \geq 3, \quad \exp\{(\log x)^{2/5+\varepsilon}\} \leq y \leq x.$$

Désignons par  $P^+(n)$  (resp.  $P^-(n)$ ) le plus grand (resp. le plus petit) facteur premier d'un entier  $n > 1$  et convenons que  $P^+(1) = 1$ ,  $P^-(1) = +\infty$ . Posons encore

$$\Psi(x, y) := |\{n \leq x : P^+(n) \leq y\}|, \quad \Phi(x, y) := |\{n \leq x : P^-(n) > y\}|$$

et

$$\zeta(s, y) := \prod_{p \leq y} (1 - p^{-s})^{-1} \quad (\Re s > 0).$$

Nous énonçons maintenant deux applications du Théorème 1. La première est un renforcement du théorème 12.5 d'Elliott [E80]. Nous rappelons que la distance de Lévy  $L(F, G)$  de deux fonctions de répartition  $F$  et  $G$  est définie par la formule

$$L(F, G) := \inf\{\delta > 0 : F(z - \delta) - \delta \leq G(z) \leq F(z + \delta) + \delta \ (\forall z \in \mathbb{R})\}.$$

**Corollaire 1.** Soit  $f$  une fonction additive réelle et soient  $A_x, B_x$  des quantités réelles définies pour tout  $x \geq 1$  avec  $B_x > 0$ . On pose

$$F_x(z) := \nu_x(f(n) \leq A_x + zB_x), \quad G_x(z) := \mathbb{P}(Z_x \leq A_x + zB_x).$$

Alors on a, pour tout  $\varepsilon > 0$  et uniformément pour  $0 < h < 1$ ,  $2 \leq y \leq x$ ,

$$(1.9) \quad L(F_x, G_x) \ll_{\varepsilon} \sum_{\substack{y < p \leq x \\ |f(p^{\nu})| > hB_x/u}} \sum_{\nu \geq 1} \frac{1}{p^{\nu}} + h + \varrho(u) 2^{(1+\varepsilon)u} + x^{-1+\varepsilon}.$$

La majoration d'Elliott, restreinte aux fonctions fortement additives, repose sur (1.1) et comporte par conséquent l'expression  $u^{-u/8} + x^{-1/15}$  à la place des deux derniers termes de (1.9). Elliott note cependant que la constante  $1/8$  « peut être légèrement améliorée si nécessaire ».

Notre seconde application concerne la fonction

$$\Theta(x, y, z) := |\{n \leq x : n_y > z\}|$$

où  $n_y$  est le plus grand diviseur de  $n$  satisfaisant à  $P^+(n_y) \leq y$ . Le principe d'Erdős de la croissance double exponentielle des facteurs premiers d'un entier normal (cf., par exemple, [T95], théorème III.3.9) laisse augurer que  $\Theta(x, y, z)$  est petit devant  $x$  dès que  $\log z$  est grand devant  $\log y$ . Les résultats de ce type se révèlent très utiles en pratique : la décomposition canonique  $n = n_y(n/n_y)$  est un des outils de base de la théorie analytique et élémentaire des nombres et le contrôle de la taille du premier facteur s'avère souvent d'une importance cruciale. Le résultat suivant fournit une formule asymptotique pour  $\Theta(x, y, z)$  dans un très large domaine.

**Corollaire 2.** *On a pour chaque  $\varepsilon > 0$  et uniformément pour  $x \geq 2$ ,  $y \geq 2$ ,  $z \geq 2$ ,*

$$(1.10) \quad \Theta(x, y, z) = \frac{x}{\zeta(1, y)} \sum_{\substack{m > z \\ P^+(m) \leq y}} \frac{1}{m} + O(x\varrho(u)2^{(1+\varepsilon)u} + x^\varepsilon).$$

*En particulier, si  $x \geq 2$ ,  $y \geq 2$ ,  $1 \leq z \leq \exp L_\varepsilon(y)$ , on a*

$$(1.11) \quad \Theta(x, y, z) = \left\{ 1 + O\left(\frac{\log(v+2)}{\log y}\right) \right\} x e^{-\gamma} \int_v^\infty \varrho(t) dt + O(x\varrho(u)2^{(1+\varepsilon)u} + x^\varepsilon)$$

*où l'on a posé  $v := (\log z)/\log y$ .*

Il est à noter que l'on ne peut remplacer le paramètre  $\varepsilon$  par 0 dans aucune de ses deux occurrences au membre de droite de (1.5). Cela résulte, en premier lieu, des évaluations (cf. les Lemmes 6 et 7 *infra*)

$$(1.12) \quad \begin{aligned} H(u) &= \varrho(u/2)^2 \exp \left\{ -\frac{\pi^2 u}{4\xi(u)^2} + O\left(\frac{u}{\xi(u)^3}\right) \right\} \\ &= \varrho(u)2^{u+u/\xi(u)+bu/\xi(u)^2+O(u/\xi(u)^3)}, \end{aligned}$$

avec  $b := \frac{1}{2} \log 2 - \frac{1}{4} \pi^2 / \log 2$  et où la fonction  $\xi(u)$ , définie précisément plus loin, satisfait à  $\xi(u) \sim \log u$  ( $u \rightarrow \infty$ ). Ensuite, la formule de de Bruijn (cf. [T95], théorème III.5.2)

$$\log \Psi(x, y) = \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{\log y} + \frac{1}{\log_2 x}\right) \right\} \left\{ u \log \left(1 + \frac{y}{\log x}\right) + \frac{y}{\log y} \log \left(1 + \frac{\log x}{y}\right) \right\},$$

valable uniformément pour  $x \geq y \geq 2$ , et l'estimation

$$\Psi(2x, y) - \Psi(x, y) \gg \frac{\log(1 + y/\log x)}{\log y} \Psi(x, y) \quad (y \gg \sqrt{\log x}),$$

qui découle du corollaire 4 de [HT86] et du théorème 3 de [H86], fournissent, grâce à (1.13) *infra*, pour  $y = \sqrt{\log x}$ ,

$$K(x, y) \gg \frac{1}{\log y} \sum_{\substack{m > x \\ P^+(m) \leq y}} \frac{1}{m} \gg \frac{\Psi(x, y)}{x\sqrt{\log x}(\log y)^2} \gg \frac{e^{\{1+o(1)\}\sqrt{\log x}}}{x},$$

alors que, pour cette même valeur de  $y$ , on a  $\varrho(u)3^u \ll x^{-2+o(1)}$ .

Pour toute fonction additive  $f$  et tout  $w \in f_y(\mathbb{N})$ , on a

$$\nu_x(f_y = w) = \sum_{\substack{P^+(m) \leq y \\ f_y(m) = w}} \frac{1}{[x]} \Phi\left(\frac{x}{m}, y\right)$$

alors que

$$\mathbb{P}(Z_y = w) = \sum_{\substack{P^+(m) \leq y \\ f_y(m) = w}} \frac{1}{m\zeta(1, y)}.$$

Il suit, lorsque  $x \in \mathbb{N}$ ,

$$(1.13) \quad 2K(x, y) = \sum_{P^+(m) \leq y} \left| \frac{1}{x} \Phi\left(\frac{x}{m}, y\right) - \frac{1}{m\zeta(1, y)} \right|.$$

De plus cette quantité varie au plus de  $4/N$  lorsque  $x$  varie de  $N$  à  $N + 1$  avec  $N \in \mathbb{N}$ .

Il apparaît ainsi que le problème de l'évaluation de  $K(x, y)$  est directement lié à celui de l'approximation de la fonction  $\Phi(x, y)$  du crible d'Ératosthène par son modèle probabiliste  $x/\zeta(1, y)$ . La méthode du col nous a permis d'obtenir dans [T95] (théorème III.6.7) un résultat de ce type, dont, pour prouver le Théorème 1, nous établissons, par la même méthode, un léger renforcement.

Nous différons l'énoncé de notre résultat afin d'introduire quelques notations, pour la plupart usuelles, et de rappeler certaines relations importantes dans le contexte.

Les fonctions  $\varrho$  de Dickman et  $\omega$  de Buchstab sont définies comme les solutions continues à droite des équations différentielles aux différences

$$u\varrho'(u) + \varrho(u-1) = 0 \quad (u > 1), \quad \{u\omega(u)\}' = \omega(u-1) \quad (u > 2)$$

avec les conditions initiales  $\varrho(u) = 1$  ( $0 \leq u \leq 1$ ),  $u\omega(u) = 1$  ( $1 \leq u \leq 2$ ). On prolonge ces fonctions à  $\mathbb{R}$  tout entier en posant  $\varrho(u) = 0$  ( $u < 0$ ),  $\omega(u) = 0$  ( $u < 1$ ).

Pour  $u > 1$ , nous désignons par  $\xi(u)$  l'unique solution non nulle de l'équation

$$(1.14) \quad e^\xi = 1 + u\xi$$

et posons  $\xi(1) = 0$ . La fonction  $\xi$  doit être regardée comme une fonction élémentaire de la théorie de l'équation satisfaite par  $\varrho$  (cf. [HT93]). On a

$$\xi(u) = \log(u \log u) + O\left(\frac{\log_2 u}{\log u}\right) \quad (u > 3)$$

et un développement asymptotique convergent est donné dans [HT93]. Le lien entre  $\xi$  et  $\varrho$  est fourni par la formule asymptotique de de Bruijn–Alladi — cf., par exemple, [T95], théorème III.5.8 —

$$(1.15) \quad \varrho(u) = \frac{\exp\{\gamma - u\xi(u) + I(\xi(u))\}}{\sqrt{2\pi u}\{1 - 1/\xi(u)\}} \left\{1 + O\left(\frac{1}{u}\right)\right\},$$

avec

$$(1.16) \quad I(s) := \int_0^s \frac{e^v - 1}{v} dv \quad (s \in \mathbb{C}).$$

Semblablement, le comportement asymptotique de  $\omega(u)$  est relié à l'équation

$$(1.17) \quad e^\zeta = 1 - u\zeta.$$

L'équation (1.17), comme (1.14), possède une infinité de solutions complexes, proches de la droite  $\Re e \zeta = \xi(u)$ . Cependant, alors que (1.14) possède, pour  $u > 1$ , une unique solution réelle non nulle, qui joue *ipso facto* un rôle fondamental, (1.17) n'a pas de solution réelle non triviale. Ce sont donc les deux solutions conjuguées les plus proches de l'axe réel qui permettent de décrire le comportement asymptotique de  $\omega(u)$ . Conformément aux notations employées dans [HT93], nous désignons ces solutions par  $\zeta_0(u)$  et  $\zeta_{-1}(u) = \overline{\zeta_0(u)}$ . Il est établi dans [HT93] que  $\zeta_0(u)$  est, pour  $u$  réel assez grand, l'unique solution de (1.17) satisfaisant à

$$|\zeta_0(u) - \xi(u) + i\pi| \leq \pi.$$

Le lemme 1 de [HT93] fournit en fait

$$\zeta_0(u) = \xi(u) + \frac{\pi^2}{2\xi(u)^2} - i \frac{\pi\xi(u)}{\xi(u) - 1} + O\left(\frac{1}{\xi(u)^3}\right) \quad (1.18)$$

$$u\zeta_0'(u) = \frac{-\zeta_0(u)}{\zeta_0(u) - 1} + O\left(\frac{1}{u\xi(u)}\right) = \frac{-\xi(u) + i\pi}{\xi(u) - 1 - i\pi} + O\left(\frac{1}{\xi(u)^3}\right). \quad (1.19)$$

On pose ensuite

$$(1.20) \quad \Phi(u) := \frac{\exp\{-u\zeta_0(u) - I(\zeta_0(u))\}}{\zeta_0(u)\sqrt{2\pi u}\{1 - 1/\zeta_0(u)\}}.$$

Hildebrand a montré dans [H90] que l'on a

$$\omega(u) - e^{-\gamma} = -2e^{-\gamma}R(u)\{\cos \vartheta(u) + O(1/u)\}$$

avec  $R(u) := |\Phi(u)|$ ,  $\vartheta(u) := \arg \Phi(u)$ . Nous montrons au Lemme 4 *infra* comment cette relation découle simplement de la théorie générale de [HT93] et explicitons quelques informations supplémentaires, notamment la formule

$$(1.21) \quad R(u) = \varrho(u) \exp\left\{\frac{-\pi^2 u}{2\xi(u)^2} + O\left(\frac{u}{\xi(u)^3}\right)\right\}.$$

Ces résultats permettent à leur tour d'évaluer asymptotiquement la fonction  $H(u)$  définie en (1.3), et notamment d'obtenir (1.12).

L'estimation de la distance  $K(x, y)$  nécessite clairement des approximations de  $\Psi(x, y)$  et  $\Phi(x, y)$ . La première est fournie par la formule de Hildebrand [H86]

$$(1.22) \quad \Psi(x, y) = x\varrho(u)\left\{1 + O\left(\frac{\log(u+1)}{\log y}\right)\right\}$$

valable pour chaque  $\varepsilon > 0$ , avec  $u := \log x / \log y$ , dans le domaine  $(H_\varepsilon)$ .<sup>(1)</sup> La seconde fait l'objet du résultat suivant, qui, comme nous l'avons mentionné plus haut, constitue un léger raffinement du théorème III.6.7 de [T95]. Nous rappelons les notations (1.4) et introduisons

$$(1.23) \quad \mu_y(u) := \int_0^{+\infty} \omega(u-v)y^{-v} dv, \quad W(x, y) := x\mu_y(u) \frac{e^\gamma \log y}{\zeta(1, y)},$$

---

1. Voir la définition dans l'énoncé du Théorème 1.

où  $\gamma$  désigne la constante d'Euler.

**Théorème 2.** *Soit  $\varepsilon > 0$ . On a uniformément pour  $x \geq y \geq 2$*

$$(1.24) \quad \Phi(x, y) = W(x, y) + O(E(x, y)),$$

avec

$$(1.25) \quad E(x, y) := \begin{cases} xR(u)/L_\varepsilon(y) + x\rho(u)/Y_\varepsilon, & \text{si } (x, y) \in (H_\varepsilon), \\ \Psi(x, y), & \text{dans le cas contraire.} \end{cases}$$

Xuan [X96] a annoncé, en correspondance privée à l'auteur, une preuve de (1.24) dans le sous-domaine  $\exp\{(\log x)^{2/5+\varepsilon}\} \leq y \leq \sqrt{x}$ . Compte tenu des résultats du chapitre III.6 de [T95], seul le domaine

$$\exp\{(\log x)^{2/5+\varepsilon}\} \leq y \leq \exp\{(\log x)^{5/8+\varepsilon}\}$$

est en réalité à considérer. Les détails fournis par Xuan étant relativement succincts, nous avons jugé opportun de présenter ici une preuve complète et autonome de (1.24) pour le sous-domaine  $(H_\varepsilon)$ . Cela nous permet en outre de mettre en place certains résultats intermédiaires, comme les Lemmes 8 et 9 *infra*, possédant un intérêt intrinsèque.

La relation (1.24) sera principalement utilisée sous la forme du corollaire suivant.

**Corollaire 3.** *Soit  $\varepsilon > 0$ . On a uniformément pour  $(x, y) \in (H_\varepsilon)$*

$$\Phi(x, y) = \frac{x}{\zeta(1, y)} + O\left(\frac{xR(u)}{\log y} + \frac{x\rho(u)}{Y_\varepsilon}\right), \quad (1.26)$$

$$\Phi(x, y) = \frac{e^\gamma\{x\omega(u) - y\}}{\zeta(1, y)} + O\left(\frac{xR(u)\log(u+1)}{(\log y)^2} + \frac{x\rho(u)}{Y_\varepsilon}\right). \quad (1.27)$$

La déduction de ce résultat à partir du Théorème 2 est semblable à celle des corollaires III.6.7.4 et III.6.7.5 à partir du théorème III.6.7 de [T95], aussi nous omettons les détails.

Nous saisissons l'occasion pour donner également un second corollaire du Théorème 2, relatif à la valeur moyenne de la fonction  $\log P^-(n)$ . Le résultat dual, concernant  $\log P^+(n)$ , précise une formule asymptotique de de Bruijn [dB51] et s'énonce d'ailleurs sous une forme très semblable ; il a été établi à l'exercice III.5.3 de [T95] — voir [TW96] pour la solution détaillée. L'intérêt essentiel du présent corollaire consiste à illustrer, sur un exemple concret, les diverses possibilités d'exploitation de la nature spécifique du terme principal  $W(x, y)$  de (1.24). Le lecteur n'aura aucune peine à adapter la technique afin d'obtenir, si nécessaire, des évaluations précises de valeurs moyennes pour une large classe de fonctions arithmétiques de la forme  $f(P^-(n))$ . Nous posons

$$A := e^{-\gamma}\{1 + \gamma\} + \int_1^\infty \{\omega(t) - e^{-\gamma}\} \frac{dt}{t} + \sum_p \left\{ \frac{\log p}{(p-1)\zeta(1, p)} + e^{-\gamma} \log\left(1 - \frac{1}{p}\right) \right\}.$$

**Corollaire 4.** Soit  $\varepsilon > 0$ . On a, uniformément pour  $x \geq 2$ ,

$$\sum_{1 < n \leq x} \log P^-(n) = e^{-\gamma} x \log_2 x + Ax + O(xe^{-(\log x)^{3/8-\varepsilon}}).$$

*Convention.* Dans toute la suite de ce travail, la lettre  $c$ , avec ou sans indice, désigne une constante absolue positive.

*Remerciements.* Ce travail trouve son origine dans une passionnante conversation électronique entretenue avec Richard Arratia pendant l'été 1996. Je tiens à lui exprimer ici une chaleureuse reconnaissance. Je souhaite également adresser des remerciements d'une part à Richard Arratia et Dudley Stark pour m'avoir donné accès à leur résultat (1.2) avant publication, et d'autre part à Xuan Ti Zuo pour m'avoir communiqué les versions initiales de son travail [X96].

## 2. Lemmes

Nous rassemblons dans ce paragraphe l'ensemble des résultats préliminaires nécessaires aux preuves des théorèmes 1 et 2.

**Lemme 1.** Soit  $\varepsilon \in ]0, 1[$ . On a

$$(2.1) \quad \Psi(x, y) \ll_{\varepsilon} x \varrho(u) e^{\varepsilon u} + x^{\varepsilon} \quad (x \geq y \geq 2).$$

*Démonstration.* On peut manifestement supposer  $x > x_0(\varepsilon)$ . La majoration annoncée découle alors de la formule (III.5.94) de [T95] — qui n'est autre qu'une reformulation commode d'un résultat de [HT86] — lorsque  $y \geq (\log x)^{1+\varepsilon/2}$  et de l'estimation (III.5.9) de [T95] dans le cas contraire : les détails sont exposés dans [TW96], solution III.5.6.

Pour  $\varepsilon > 0$ , nous posons

$$(2.2) \quad S_y(u; \varepsilon) := \varrho(u) e^{\varepsilon u} + y^{-(1-\varepsilon)u},$$

de sorte que la majoration du Lemme 1 s'énonce encore

$$\Psi(y^u, y) \ll_{\varepsilon} y^u S_y(u; \varepsilon) \quad (y \geq 2, u \geq 1).$$

**Lemme 2.** Soit  $\varepsilon > 0$ . On a uniformément pour  $u \geq 1, y \geq 2$ ,

$$(2.3) \quad y^{-u} \int_0^u \varrho(t) y^t dt \ll_{\varepsilon} S_y(u; \varepsilon).$$

*Démonstration.* On peut supposer  $y \geq y_0(\varepsilon)$ , car le membre de gauche de (2.3) est trivialement  $\ll_\varepsilon y^{-u}$  dans le cas contraire.

Désignons par

$$\widehat{\varrho}(w) = \int_0^\infty \varrho(t) e^{-wt} dt = e^{\gamma+I(-w)}$$

transformée de Laplace de  $\varrho$ . Cette formule est établie, par exemple, au théorème III.5.7 de [T95]. On a pour toute valeur du paramètre  $\lambda \geq 1$

$$(2.4) \quad y^{-u} \int_0^u \varrho(t) y^t dt \leq y^{-u} \int_0^\infty \varrho(t) y^t \lambda^{u-t} dt = (y/\lambda)^{-u} \widehat{\varrho}(-\log(y/\lambda)),$$

Lorsque  $y \geq e^{\xi(u)}$ , on peut choisir  $\lambda = ye^{-\xi(u)}$ . On obtient que le membre de gauche de (2.4) est

$$\ll e^{-u\xi(u)} \widehat{\varrho}(-\xi(u)) \ll \varrho(u) \sqrt{u},$$

d'après (1.15).

Lorsque  $y < e^{\xi(u)}$ , on choisit  $\lambda = 1$ . En remarquant que l'on a alors

$$\widehat{\varrho}(-\log y) < \widehat{\varrho}(-\xi(u)) = e^{(1+o(1))u},$$

on voit que le membre de gauche de (2.4) est  $\ll y^{-u} 3^u$ .

Le résultat annoncé découle immédiatement de ces estimations.

Le résultat suivant est le théorème III.6.1 de [T95]. Au vu de (1.26), (1.21) et (1.22), il ne sera utile qu'en dehors du domaine  $(H_\varepsilon)$ .

**Lemme 3.** *On a pour  $x \geq y \geq 2$*

$$\Phi(x, y) = \frac{x}{\zeta(1, y)} + O(\Psi(x, y)).$$

**Lemme 4.** *On a*

$$(2.5) \quad \omega(u) - e^{-\gamma} = -2e^{-\gamma} R(u) \{ \cos \vartheta(u) + O(1/u) \}$$

avec  $R(u) := |\Phi(u)|$ ,  $\vartheta(u) := \arg \Phi(u)$ , où  $\Phi(u)$  est définie par (1.20). En particulier,  $R(u)$  et  $\vartheta(u)$  sont dérivables,  $R(u)$  est décroissante pour  $u$  assez grand et l'on a

$$R(u) = \varrho(u) \exp \left\{ \frac{-\pi^2 u}{2\xi(u)^2} + O\left(\frac{u}{\xi(u)^3}\right) \right\}, \quad (2.6)$$

$$R'(u) = -R(u) \{ \xi_0(u) + O(1/u) \}, \quad (2.7)$$

$$\vartheta'(u) = \frac{\pi \xi(u)}{\xi(u) - 1} + O\left(\frac{1}{\xi(u)^3}\right), \quad (2.8)$$

avec  $\xi_0(u) := \Re \zeta_0(u)$ .

*Démonstration.* La relation (2.5) a été établie par Hildebrand dans [H90]. Nous indiquons ci-dessous comment on peut la déduire simplement de la théorie générale

des équations différentielles aux différences développée dans [HT93]. Des calculs similaires avec un degré supplémentaire de précision pourraient être poursuivis, si nécessaire, pour obtenir un raffinement de (2.5) correspondant au résultat principal de [HT93].

Le théorème 1 de [HT93]<sup>(2)</sup> permet d'écrire, pour des constantes convenables  $\alpha, \alpha_0$ ,

$$\omega(u) = \alpha F(u) + 2\Re \alpha_0 F_0(u) + O(F_0(u)e^{-4\pi^2 u/\xi(u)^2 + O(u/\xi(u)^3)}) \quad (u \geq 1)$$

où  $F$  est la solution exceptionnelle, et  $F_0$  la solution fondamentale d'ordre zéro, de l'équation différentielle aux différences

$$(2.9) \quad u f'(u) + f(u) - f(u-1) = 0 \quad (u > 2).$$

D'après le théorème 1 de [HT93], on a en fait  $F(u) \equiv 1$ , d'où (cf., par exemple, [T95], théorème III.6.6)

$$\alpha = \lim_{u \rightarrow \infty} \omega(u) = e^{-\gamma}.$$

Le théorème 1 de [HT93] implique également  $F_0(u) = \Phi(u)\{1 + O(1/u)\}$ . On voit donc que (2.5) équivaut à

$$\alpha_0 = -e^{-\gamma}.$$

Considérons

$$(2.10) \quad G_0(u) := \int_{-\infty+i\pi}^{+\infty+i\pi} e^{-us+I(-s)} ds = - \int_{-\infty-i\pi}^{+\infty-i\pi} e^{us+I(s)} ds \quad (u > 0),$$

la solution fondamentale d'ordre 0, définie dans [HT93], de l'équation adjointe de (2.9), soit

$$(2.11) \quad u g'(u) + g(u+1) = 0.$$

Ainsi qu'il est mentionné dans [HT93], les intégrales de (2.10) sont absolument convergentes. On a alors, d'après le théorème 2 de [HT93],

$$\alpha_0 = 2\omega(2)G_0(2) + \int_1^2 \omega(u)G_0(u+1) du.$$

En remarquant que  $u\omega(u) = 1$  pour  $1 \leq u \leq 2$  et en utilisant (2.11), il suit

$$(2.12) \quad \alpha_0 = G_0(1) = - \lim_{u \rightarrow 0+} u G_0'(u).$$

Maintenant, on peut écrire, par dérivation sous le signe d'intégration,

$$-u G_0'(u) = u \int_{-\infty-i\pi}^{+\infty-i\pi} s e^{us+I(s)} ds \quad (u > 0).$$

D'après le lemme 2 de [HT93], on a  $I(\sigma - i\pi) \sim -e^\sigma/\sigma$  ( $\sigma \rightarrow \infty$ ), donc

$$(2.13) \quad \begin{aligned} -u G_0'(u) &= u \int_{-\infty-i\pi}^0 s e^{us+I(s)} ds + O(u) \\ &= -u \int_0^{+\infty+i\pi} s e^{-us+I(-s)} ds + O(u) \quad (u \rightarrow 0+). \end{aligned}$$

---

2. Sous la forme de la formule (3.4'') de [HT93].

Cependant, le lemme III.5.7.1 de [T95] implique

$$se^{I(-s)} = e^{-\gamma + O(e^{-\sigma})} \quad (s = \sigma + i\tau, \sigma > 1).$$

Cette estimation permet donc, grâce au théorème de Lebesgue, de déduire de (2.13) que le membre de droite de (2.12) vaut  $-e^{-\gamma}$ .

Cela achève la preuve de (2.5) avec les définitions données dans l'énoncé pour  $R(u)$  et  $\vartheta(u)$ .

La formule (2.6) découle de l'évaluation asymptotique suivante, prouvée dans [HT93] — cf. formule (2.22) —,

$$\Phi(u) = \exp \left\{ -u\xi(u) - \frac{\pi^2 u}{2\xi(u)^2} + (1 + i\pi)I(\xi(u)) + O\left(\frac{u}{\xi(u)^3}\right) \right\}$$

et de (1.15). Enfin, en remarquant que  $I'(\zeta_0(u)) = -u$  par définition de  $\zeta_0(u)$ , on peut écrire

$$\frac{R'(u)}{R(u)} + i\vartheta'(u) = \frac{\Phi'(u)}{\Phi(u)} = -\zeta_0(u) - \frac{1}{2u} - \frac{\zeta_0'(u)(2\zeta_0(u) - 1)}{2\zeta_0(u)(\zeta_0(u) - 1)}$$

d'où résultent (2.7) et (2.8), d'après (1.18) et (1.19).

**Lemme 5.** *Posons  $r(u) := -\varrho'(u)/\varrho(u) = \varrho(u-1)/u\varrho(u)$  ( $u \geq 1$ ). Alors  $r(u)$  est une fonction non décroissante de  $u$  sur  $[1, \infty[$  et l'on a*

$$(2.14) \quad r'(u) = \frac{\xi(u)}{u\{\xi(u) - 1\}} + O\left(\frac{\xi(u)^2}{u^2}\right) \quad (u \geq 2).$$

*Démonstration.* La croissance de  $r(u)$  a été établie par Hildebrand dans [H86].

On vérifie par le calcul que

$$(2.15) \quad r'(u) = r(u)\{r(u) - r(u-1) - 1/u\}.$$

Par ailleurs, ainsi qu'il a été établi dans [FT96],<sup>(3)</sup> on a

$$(2.16) \quad r(u) = \xi(u) \left\{ 1 - \frac{1}{2}\xi'(u) - \frac{\xi''(u)}{2\xi'(u)} \right\} + \frac{1}{u} + O\left(\frac{1}{u^2}\right) \quad (u \geq 2).$$

Compte tenu de l'estimation

$$\xi^{(j)}(u) = (-1)^{j-1} \frac{(j-1)!}{u^j} \left\{ 1 + O_j\left(\frac{1}{\log u}\right) \right\} \quad (j \geq 1, u \geq 2),$$

on déduit de (2.16) que

$$r(t) = \xi(t) \left\{ 1 - \frac{1}{2}\xi'(u) - \frac{\xi''(u)}{2\xi'(u)} \right\} + \frac{1}{u} + O\left(\frac{\log u}{u^2}\right) \quad (u \geq 2, u-1 \leq t \leq u),$$

et donc

$$\begin{aligned} r(u) - r(u-1) - \frac{1}{u} &= \xi(u) - \xi(u-1) - \frac{1}{u} + O\left(\frac{\log u}{u^2}\right) \\ &= \int_{u-1}^u \left( \xi'(t) - \frac{1}{t} \right) dt + O\left(\frac{\log u}{u^2}\right). \end{aligned} \quad (u \geq 2)$$

---

3. Voir la démonstration du lemme 6.1 de ce travail.

Or, l'équation de définition de  $\xi(u)$  fournit par dérivation

$$(2.17) \quad \xi'(u) = \frac{\xi(u)}{1 + u\{\xi(u) - 1\}} = \frac{1}{u} + \frac{1}{u\{\xi(u) - 1\}} + O\left(\frac{1}{u^2\xi(u)}\right).$$

Cela implique

$$r(u) - r(u-1) - \frac{1}{u} = \frac{1}{u\{\xi(u) - 1\}} + O\left(\frac{\log u}{u^2}\right)$$

et donc, compte tenu de (2.15) et (2.16), l'estimation requise (2.14).

**Lemme 6.** *Posons  $a = \frac{1}{2} \log 2$ . On a pour  $u \geq 1$*

$$(2.18) \quad \varrho(u/2)^2 = \varrho(u)2^{u+u/\{\xi(u)-a\}+O(u/\xi(u)^3)}.$$

*Démonstration.* Nous utilisons la formule asymptotique (1.15) en remarquant que

$$u\xi(u) - I(\xi(u)) = \int_1^u \xi(t) dt \quad (u \geq 1).$$

Il suit immédiatement

$$(2.19) \quad \log \{\varrho(u/2)^2 / \varrho(u)\} = \varphi(u) + O(\xi(u))$$

avec  $\varphi(u) := \int_1^u \xi(t) dt - 2 \int_1^{u/2} \xi(t) dt$ . Posant

$$\psi(u) := \int_{u/2}^u \frac{dt}{t\{\xi(t) - 1\}} \quad (u > 2),$$

on a

$$\begin{aligned} \varphi'(u) &= \xi(u) - \xi(u/2) = \int_{u/2}^u \xi'(t) dt \\ &= \log 2 + \psi(u) + O\left(\frac{1}{u\xi(u)}\right), \end{aligned}$$

d'après (2.17). En remarquant que

$$\frac{d}{du} \left( u\psi(u) - \frac{u \log 2}{\xi(u)^2} \right) = \psi(u) + O\left(\frac{1}{\xi(u)^3}\right),$$

il vient

$$\varphi(u) = u \log 2 + u\psi(u) - \frac{u \log 2}{\xi(u)^2} + O\left(\frac{u}{\xi(u)^3}\right).$$

Maintenant on peut écrire, grâce à (2.17),

$$\begin{aligned} \psi(u) &= \frac{\log 2}{\xi(u) - 1} + \int_{u/2}^u \frac{\{\xi(u) - \xi(t)\} dt}{t\{\xi(u) - 1\}\{\xi(t) - 1\}} \\ &= \frac{\log 2}{\xi(u) - 1} + \int_{u/2}^u \frac{\log(u/t) dt}{t\{\xi(u) - 1\}^2} + O\left(\frac{1}{\xi(u)^3}\right) \\ &= \frac{\log 2}{\xi(u) - 1} + \frac{(\log 2)^2}{2\{\xi(u) - 1\}^2} + O\left(\frac{1}{\xi(u)^3}\right). \end{aligned}$$

Il suit

$$\begin{aligned}\varphi(u) &= u \log 2 + \frac{u \log 2}{\xi(u)} + \frac{u(\log 2)^2}{2\xi(u)^2} + O\left(\frac{u}{\xi(u)^3}\right) \\ &= u \log 2 + \frac{u \log 2}{\xi(u) - a} + O\left(\frac{u}{\xi(u)^3}\right).\end{aligned}$$

Cela fournit le résultat souhaité en reportant dans (2.19).

**Lemme 7.** *On a pour  $u > 1$*

$$(2.20) \quad H(u) = \varrho(u/2)^2 \exp \left\{ -\frac{\pi^2 u}{4\xi(u)^2} + O\left(\frac{u}{\xi(u)^3}\right) \right\}.$$

*Démonstration.* Compte tenu de (2.18), il suffit d'établir le résultat pour

$$H_1(u) := \int_0^u |\omega(v) - e^\gamma| \varrho(u-v) dv.$$

On a d'une part, avec les notations du Lemme 4,

$$\begin{aligned}H_1(u) &\geq 2e^{-\gamma} \int_{(u-1)/2}^{(u+1)/2} R(v) \varrho(u-v) \{ |\cos \vartheta(v)| + O(1/u) \} dv \\ &\gg \varrho(u/2)^2 e^{-\pi^2 u/4\xi(u)^2 + O(u/\xi(u)^3)} \left\{ \int_{(u-1)/2}^{(u+1)/2} |\cos \vartheta(v)| \vartheta'(v) dv + O(1/u) \right\},\end{aligned}$$

où l'on utilisé (2.8) sous la forme  $\vartheta'(v) \ll 1$  ( $|v-u| \leq \frac{1}{2}$ ). La dernière intégrale est  $\gg 1$ . Cela montre que  $H_1(u)$  satisfait à la minoration contenue dans (2.20).

Pour établir la majoration, nous faisons appel au Lemme 5. On a pour  $0 \leq t \leq u/2$  et  $u$  assez grand

$$\frac{\varrho(\frac{1}{2}u+t)\varrho(\frac{1}{2}u-t)}{\varrho(u/2)^2} = \exp \left\{ -\int_0^t \{ r(\frac{1}{2}u+v) - r(\frac{1}{2}u-v) \} dv \right\} \leq e^{-t^2/3u}$$

puisque l'intégrale en  $v$  est alors

$$\geq \int_0^{2t/3} \int_{-v}^v r'(\frac{1}{2}u+z) dz dv \geq \int_0^{2t/3} \frac{4}{5u} 2v dv \geq \frac{t^2}{3u}.$$

On déduit de ce qui précède et de (2.6) que, pour  $u$  assez grand,

$$H_1(u) \ll \varrho(u/2)^2 \int_2^u \exp \left\{ -\frac{(v-u/2)^2}{3u} - \frac{\pi^2 v}{2\xi(v)^2} \right\} dv.$$

Le maximum de l'expression entre accolades est atteint pour  $v = \frac{1}{2}u + O(u/\xi(u)^2)$  et vaut  $\pi^2 u/4\xi(u)^2 + O(u/\xi(u)^3)$ . Cela fournit bien la majoration requise en accord avec (2.20) et achève ainsi la preuve du Lemme 7.

**Lemme 8.** *Pour  $u \geq 1$ ,  $s = -\xi_0(u) + i\tau$ , on a, uniformément pour  $\tau \in \mathbb{R}$ ,*

$$(2.21) \quad |\zeta_0(u)\widehat{\varrho}(-\zeta_0(u))| \ll |s\widehat{\varrho}(s)|.$$

*Démonstration.* Nous pouvons supposer que  $s \notin \mathbb{R}^-$ . La relation (2.21) équivaut à

$$(2.22) \quad \Re I(\zeta_0(u)) + \log \xi_0(u) - \Re I(-s) - \log |s| \leq O(1).$$

Nous pouvons donc supposer que  $u$  est assez grand. De plus, comme  $I(\bar{s}) = \overline{I(s)}$ , on a pour tout  $\tau \in \mathbb{R}$ , notant  $\zeta_0(u) = \xi_0(u) + i\eta_0(u)$ ,

$$\Re I(\zeta_0(u)) - \Re I(\zeta_0(u) - i\tau) = \Re I(\zeta_0(u)) - \Re I(\zeta_0(u) - 2i\eta_0(u) + i\tau).$$

Cela nous permet de restreindre l'étude au cas  $s = \zeta_0(u) - i\tau$  avec  $\tau \geq \eta_0(u)$ .

On sait d'après [HT93] (lemme 2) que, lorsque  $s \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$

$$(2.23) \quad \begin{aligned} I(\zeta_0(u)) &= -uT(\zeta_0(u)) + O\left(\frac{u}{\xi(u)^3}\right), \\ I(s) + \log s &= \frac{e^s - 1}{s}T(s) + O\left(\frac{u}{\xi(u)^3}\right), \end{aligned}$$

avec  $T(s) := 1 + 1/s + 2/s^2$ . D'après (1.18), on a

$$|e^s| \leq e^{\xi(u)} \{1 + O(1/\xi(u)^2)\} \leq u\xi(u) + O(u/\xi(u)).$$

La relation (2.22) est donc certainement réalisée dès que  $|s| > |\xi(u)| + c/\xi(u)$  avec une constante positive adéquate  $c$ . Nous pouvons donc supposer que  $\tau$  est borné et, partant, nous limiter à établir que

$$\Re I(s) - \Re I(\zeta_0(u)) > 0$$

pour  $u$  assez grand.

On peut écrire, pour  $s := \zeta_0(u) - i\tau$ ,

$$\begin{aligned} &\frac{e^s - 1}{s}T(s) \\ &= \left( \frac{e^{\zeta_0(u)} - 1}{\zeta_0(u)} e^{-i\tau} + \frac{e^{-i\tau} - 1}{\zeta_0(u)} \right) \frac{\zeta_0(u)}{\zeta_0(u) - i\tau} \left\{ 1 + \frac{1}{\zeta_0(u) - i\tau} + \frac{2}{(\zeta_0(u) - i\tau)^2} \right\} \\ &= -u e^{-i\tau} \left\{ 1 + \frac{1 + i\tau}{\zeta_0(u) - i\tau} + \frac{2 + i\tau}{(\zeta_0(u) - i\tau)^2} + O\left(\frac{1}{\xi(u)^3}\right) \right\}. \end{aligned}$$

Compte tenu des estimations (2.23), nous obtenons, en effectuant un développement limité à l'ordre 2 en  $1/\xi_0(u)$ ,

$$I(s) - I(\zeta_0(u)) = u \left\{ 1 - e^{-i\tau} + \frac{a}{\xi_0(u)} + \frac{b}{\xi_0(u)^2} + O\left(\frac{1}{\xi(u)^3}\right) \right\}$$

avec

$$a := 1 - e^{-i\tau}(1 + i\tau), \quad b := 2 - i\eta_0(u) + e^{-i\tau} \{ \tau^2 - 2 - \eta_0(u)\tau + i(\eta_0(u) - 2\tau) \}.$$

La relation (1.18) permet de remplacer  $\xi_0(u)$  par  $\xi(u)$  et  $\eta_0(u)$  par  $-\pi$  sans altérer la précision. Il suit

$$(2.24) \quad \Re I(s) - \Re I(\zeta_0(u)) = u \left\{ 1 - \cos \tau + \frac{A(\tau)}{\xi(u)} + \frac{B(\tau)}{\xi(u)^2} + O\left(\frac{1}{\xi(u)^3}\right) \right\},$$

avec

$$A(\tau) := 1 - \cos \tau - \tau \sin \tau, \quad B(\tau) := 2(1 - \cos \tau) + \tau(\tau + \pi) \cos \tau - (2\tau + \pi) \sin \tau.$$

Soit  $\varepsilon > 0$ . Lorsque  $u > u_0(\varepsilon)$ , le membre de droite de (2.24) est certainement positif si  $\inf_{n \in \mathbb{N}} |\tau - 2\pi n| > \varepsilon$ . Dans le cas contraire, posons  $\tau = 2\pi n + h$  avec  $n \geq 0$ ,  $n = O(1)$  et  $|h| \leq \varepsilon$ . Désignons par  $D(\tau, u)$  l'expression entre accolades dans (2.24). On a

$$D(\tau, u) \geq 2h^2/\pi^2 - (2\pi n|h| + h^2)/\xi(u) + O(1/\xi(u)^2).$$

Donc  $D(\tau, u) > 0$  si  $|h| \geq c_0/\xi(u)$ . Lorsque  $h \ll 1/\xi(u)$ , on peut écrire, posant  $h = \alpha/\xi(u)$ ,

$$D(\tau, u) = \frac{E(\alpha)}{\xi(u)^2} + O\left(\frac{1}{\xi(u)^3}\right),$$

avec  $E(\alpha) := \frac{1}{2}\alpha^2 - 2\pi n\alpha + 2\pi^2 n(2n + 1) = \frac{1}{2}(\alpha - 2\pi n)^2 + 2\pi^2 n(n + 1)$ . Cela implique que  $D(\tau, u) > 0$  dès que  $n \geq 1$ .

Nous avons ainsi établi la positivité du membre de gauche de (2.24) sauf peut-être lorsque  $|\tau| \leq c_1/\xi(u)$ .

Maintenant, on peut écrire, toujours avec  $s = \zeta_0(u) - i\tau$ ,

$$I(s) - I(\zeta_0(u)) = -i\tau u - \tau^2 \int_0^1 I''(\zeta_0(u) + ih\tau)(1 - h) dh.$$

En observant que, pour  $|s - \zeta_0(u)| \ll 1/\xi(u)$ , on a

$$I''(s) = I''(\zeta_0(u)) + O(u/\xi(u)) = -u + O(u/\xi(u)),$$

on déduit de ce qui précède que, pour  $|\tau| \ll 1/\xi(u)$  et  $u$  assez grand,

$$\Re I(\zeta_0(u) - i\tau) - \Re I(\zeta_0(u)) > \frac{1}{3}u\tau^2 > 0.$$

Cela complète la preuve du Lemme 8.

**Lemme 9.** *On a, uniformément dans  $(H_\varepsilon)$ ,*

$$(2.25) \quad \frac{x^s \zeta(s)}{\zeta(s, y)} \ll xR(u)\sqrt{u} \quad \left( s = 1 - \frac{\xi_0(u)}{\log y} + i\tau, |\tau| \leq L_\varepsilon(y) \right).$$

*Démonstration.* On fait de nouveau appel au lemme III.5.9.1 de [T95] qui fournit pour  $s = 1 - \xi_0(u)/\log y + i\tau$

$$\frac{x^s \zeta(s)}{\zeta(s, y)} = \frac{x^{1+i\tau} e^{-u\xi_0(u)} \{1 + O(1/L_\varepsilon(y))\}}{(-\xi_0(u) + i\tau \log y) \widehat{\rho}(-\xi_0(u) + i\tau \log y)}.$$

Le résultat requis est donc une conséquence du Lemme 8 et de (1.20) sous la forme

$$(2.26) \quad R(u) = |\Phi(u)| \asymp \frac{e^{-u\xi_0(u) - \Re I(\zeta_0(u))}}{\sqrt{u} \log u}.$$

**Lemme 10.** *Soit  $\alpha_1 := 1 - \xi_0(u)/\log y$ . On a, uniformément dans  $(H_\varepsilon)$ ,*

$$(2.27) \quad x^{\alpha_1} \zeta(\alpha_1, y) \ll x\varrho(u) e^{O(u/\xi(u)^4)} \log y.$$

*Démonstration.* Le lemme III.5.9.1 de [T95] fournit

$$\begin{aligned} \zeta(\alpha_1, y) &= x\xi_0(u)\zeta(\alpha_1)e^{\gamma-u\xi_0(u)+I(\xi_0(u))} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{L_\varepsilon(y)}\right) \right\} \\ &\ll x(\log y)e^{-u\xi_0(u)+I(\xi_0(u))}. \end{aligned}$$

Grâce à (1.15) et (1.18), on obtient (2.27) par un calcul d'accroissements finis.

**Lemme 11.** *Pour  $(x, y)$  dans  $(H_\varepsilon)$ ,  $s = \alpha_1 + i\tau$ , posons  $\tau_y := 1 + |\tau| \log y$ . Il existe une constante positive absolue  $c$  telle que l'on ait, uniformément dans le domaine  $(H_\varepsilon)$ ,*

$$(2.28) \quad \zeta(s, y)^{-1} \ll \zeta(\alpha_1, y) \exp \left\{ -\frac{c\tau_y^2 u}{\xi(u)^2 + \tau_y^2} \right\} \quad (|\tau| \leq Y_\varepsilon).$$

*Démonstration.* Cette estimation a été établie au Lemme 1 de [T90] dans le cas où  $\Re s = \alpha = \alpha(x, y)$  avec

$$\sum_{p \leq y} \frac{\log p}{p^\alpha - 1} = \log x.$$

La démonstration est en fait valable sous la seule hypothèse que

$$(y^{1-\alpha} - 1)/(1 - \alpha) \log y \gg u.$$

Par (1.18), cette dernière relation est également satisfaite pour  $\alpha = \alpha_1$ . Cela établit donc le Lemme 11.

**Lemme 12.** *Soit  $\varepsilon > 0$ . On a uniformément pour  $(x, y)$  dans  $(H_\varepsilon)$  et  $1 \leq z \leq Y_\varepsilon$*

$$(2.29) \quad \Psi(x + x/z, y) - \Psi(x, y) \ll \Psi(x, y) \sqrt{u} \log y \{1/z + e^{-c_2 u}\}.$$

*Démonstration.* C'est le lemme III.6.7.3 de [T95].

### 3. Approximations de $\Phi(x, y)$ : preuve du Théorème 2

Nous pouvons restreindre l'étude au cas où  $(x, y) \in (H_\varepsilon)$  : dans le cas complémentaire, l'estimation requise est essentiellement équivalente à celle du Lemme 3 et a été établie au cours la démonstration du théorème III.6.7 de [T95].

La fonction  $R(u)$  est définie au Lemme 4. On rappelle en particulier (2.6) et (2.26).

Par la formule de Perron, on a pour tout réel  $\kappa > 1$

$$(3.1) \quad \Phi(x, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa-i\infty}^{\kappa+i\infty} \frac{\zeta(s)x^s}{\zeta(s, y)s} ds \quad (x \notin \mathbb{Z}^+).$$

Le résidu en  $s = 1$  vaut  $x/\zeta(1, y)$ . L'intégrande est une fonction holomorphe de  $s$  pour  $s \neq 0$  ou  $1$ , et tend vers 0 lorsque  $|\tau| \rightarrow +\infty$  dans toute bande  $0 < \sigma_0 \leq \sigma \leq 1$ . On peut donc déplacer l'abscisse d'intégration vers la gauche jusqu'à

$$\sigma = \alpha_1 := 1 - \frac{\xi_0(u)}{\log y}.$$

On obtient

$$(3.2) \quad \Phi(x, y) = \frac{x}{\zeta(1, y)} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha_1 - i\infty}^{\alpha_1 + i\infty} \frac{\zeta(s)x^s}{\zeta(s, y)s} ds.$$

Le lemme III.5.9.1 de [T95] fournit ensuite, pour  $|\tau| \leq L_\varepsilon(y)$ , l'approximation

$$(3.3) \quad \frac{\zeta(s)x^s}{\zeta(s, y)s} = \frac{xe^{uz}\{1 + \widehat{\omega}(z)\}}{1 + z/\log y} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{L_\varepsilon(y)}\right) \right\} \quad (z := (s-1)\log y).$$

En négligeant momentanément l'influence du domaine  $|\tau| > L_\varepsilon(y)$  sur l'intégrale de (3.2), nous obtenons l'approximation heuristique de  $\Phi(x, y)$

$$(3.4) \quad W_1(x, y) := \frac{x}{\zeta(1, y)} + \frac{x}{2\pi i} \int_{-\xi_0(u)-i\infty}^{-\xi_0(u)+i\infty} \frac{1 + \widehat{\omega}(s)}{s + \log y} e^{us} ds.$$

Nous verrons plus loin que cette intégrale est effectivement convergente. La fonction  $\widehat{\omega}(s)$  possède un pôle simple en  $s = 0$ , de résidu  $e^{-\gamma}$  — cf., par exemple (3.9), *infra*. En déplaçant maintenant l'abscisse d'intégration de (3.4) vers la droite jusqu'à  $\sigma = \kappa > 0$ , il vient

$$W_1(x, y) = \frac{x}{\zeta(1, y)} - \frac{xe^{-\gamma}}{\log y} + \frac{x}{2\pi i} \int_{\kappa - i\infty}^{\kappa + i\infty} \frac{1 + \widehat{\omega}(s)}{s + \log y} e^{us} ds.$$

Or,  $(1 + \widehat{\omega}(s))/(s + \log y)$  est la transformée de Laplace de la fonction

$$t \mapsto y^{-t} + \int_0^{+\infty} \omega(t-v)y^{-v} dv$$

qui est continue et à variation bornée sur tout intervalle borné. Le théorème d'inversion de Laplace — cf., par exemple, [W46], théorème II.7.3 — fournit donc la formule explicite

$$W_1(x, y) = 1 + x \left\{ \frac{1}{\zeta(1, y)} - \frac{e^{-\gamma}}{\log y} + \mu_y(u) \right\}.$$

Maintenant, l'estimation

$$(3.5) \quad \omega'(u) \ll \{1 + \xi(u)\}R(u),$$

qui découle du théorème 1 de [HT93], permet, grâce à une simple intégration par parties, d'obtenir, dans le domaine  $(H_\varepsilon)$ ,

$$\begin{aligned} W_1(x, y) - W(x, y) &= 1 + x \left( \frac{1}{\zeta(1, y)} - \frac{e^{-\gamma}}{\log y} \right) (1 - \mu_y(u)e^\gamma \log y) \\ &\ll xR(u)/L_\varepsilon(y). \end{aligned}$$

Nous omettons ici les détails, qui sont identiques à ceux du lemme III.6.7.1 de [T95]. Nous avons ainsi établi que la différence  $W_1(x, y) - W(x, y)$  est de l'ordre du terme d'erreur annoncé dans (1.24).

Il reste à mettre en place rigoureusement le raisonnement ébauché ci-dessus.

Posons  $L := L_{\varepsilon/2}(y)$ . Nous allons établir les trois estimations suivantes

$$(3.6) \quad \int_{\substack{\sigma=\alpha_1 \\ |\tau|>L}} \frac{\zeta(s)x^s}{\zeta(s, y)s} ds \ll E(x, y),$$

$$(3.7) \quad \frac{1}{L} \int_{\substack{\sigma=\alpha_1 \\ |\tau|\leq L}} \left| \frac{\zeta(s)x^s}{\zeta(s, y)s} \right| ds \ll \frac{xR(u)}{L_\varepsilon(y)},$$

$$(3.8) \quad \int_{\substack{\sigma=-\xi_0(u) \\ |\tau|>L}} \frac{1 + \widehat{\omega}(s)}{s + \log y} e^{us} ds \ll \frac{R(u)}{L_\varepsilon(y)}.$$

Cela suffit pleinement à établir (1.24) : la majoration (3.6) permet de tronquer l'intégrale (3.1), la majoration (3.7) permet de négliger le terme d'erreur créé en utilisant (3.3), et la majoration (3.8) permet d'étendre jusqu'à l'infini l'intégrale obtenue en remplaçant  $\zeta(s, y)$  par son approximation régulière.

Le point le plus difficile est l'estimation (3.6), aussi nous commençons par établir les deux autres majorations.

*Preuve de (3.7).* En employant (2.25), on peut majorer le membre de gauche de (3.7) par

$$\ll \frac{xR(u)\sqrt{u}}{L} \int_0^L \frac{d\tau}{1+\tau} \ll \frac{xR(u)}{L_\varepsilon(y)}.$$

*Preuve de (3.8).* On a (cf., par exemple, le théorème III.6.5 de [T95])

$$(3.9) \quad 1 + \widehat{\omega}(s) = \frac{1}{s\widehat{\varrho}(s)} = \exp \int_0^\infty \frac{e^{-t-s}}{t+s} dt.$$

Pour  $s = -\xi_0(u) + i\tau$ , la dernière intégrale est trivialement  $\ll e^{\xi_0(u)}/|\tau|$ , donc

$$1 + \widehat{\omega}(s) = 1 + O\left(\frac{1 + u\xi(u)}{s}\right) \quad (|\tau| > L).$$

Cela montre la semi-convergence de l'intégrale de (3.8). La seconde formule de la moyenne nous permet d'écrire

$$\begin{aligned} \int_{\substack{\sigma=-\xi_0(u) \\ |\tau|>L}} \frac{1 + \widehat{\omega}(s)}{s + \log y} e^{us} ds &= \int_{\substack{\sigma=-\xi_0(u) \\ |\tau|>L}} \frac{e^{us}}{s} \left\{ 1 + O\left(\frac{u\xi_0(u) + \log y}{s}\right) \right\} ds \\ &\ll e^{-u\xi_0(u)} L^{-1}. \end{aligned}$$

Comme on a, d'après (2.6) et (1.15),  $R(u) = \exp\{-u\xi_0(u) + u + O(u/\xi(u))\}$ , nous obtenons bien l'estimation requise (3.8).

*Preuve de (3.6).* Posons

$$(3.10) \quad T := \begin{cases} L & \text{si } 1 \leq u \leq (\log y)^{3(1-\varepsilon)/5}, \\ Le^{c_3 u} & \text{si } (\log y)^{3(1-\varepsilon)/5} < u \leq (\log y)^{(3-\varepsilon)/2}, \\ Y_{\varepsilon/3} & \text{si } (\log y)^{(3-\varepsilon)/2} < u \leq L_{\varepsilon}(y). \end{cases}$$

Lorsque  $T \neq L$  (i.e. lorsque  $u > (\log y)^{3(1-\varepsilon)/5}$ ), on majore l'intégrande de (3.6) en utilisant (2.28) et l'estimation classique<sup>(4)</sup>

$$\zeta(s) \ll \frac{|\tau|^{1-\sigma}}{\sigma(1-\sigma)} \quad (|\tau| \geq 1, 0 < \sigma < 1).$$

Nous obtenons d'après le Lemme 11, (2.27) et (2.6), pour une constante convenable  $c_4 > 0$ ,

$$\int_{\substack{\sigma=\alpha_1 \\ L < |\tau| \leq T}} \frac{\zeta(s)x^s}{\zeta(s,y)s} ds \ll xR(u)e^{-c_4 u}(\log y) \frac{T^{1-\alpha_1}}{(1-\alpha_1)^2} \ll \frac{xR(u)}{L_{\varepsilon}(y)}.$$

Il nous reste donc à établir que l'intégrale

$$J := \int_{\substack{\sigma=\alpha_1 \\ |\tau| > T}} \frac{\zeta(s)x^s}{\zeta(s,y)s} ds$$

est également de l'ordre de grandeur de  $E(x, y)$ .

La forme rudimentaire de l'équation fonctionnelle approchée de la fonction zêta<sup>(5)</sup> s'écrit, pour  $s = \alpha_1 + i\tau$ ,

$$(3.11) \quad \zeta(s) = \sum_{n \leq |\tau|} n^{-s} + O(|\tau|^{-\alpha_1}).$$

Il suit

$$(3.12) \quad \frac{\zeta(s)}{\zeta(s,y)} = \sum_{n \leq |\tau|} \sum_{P^+(m) \leq y} \frac{\mu(m)}{(mn)^s} + O\left(\frac{\zeta(\alpha_1, y)}{|\tau|^{\alpha_1}}\right).$$

La contribution à  $J$  du terme résiduel de (3.12) est

$$\ll x^{\alpha_1} \zeta(\alpha_1, y) \int_T^{+\infty} \frac{d\tau}{\tau^{1+\alpha_1}} \ll \frac{x^{\alpha_1} \zeta(\alpha_1, y)}{\sqrt{T}} \ll E(x, y),$$

où nous avons de nouveau fait appel à (2.6) et (2.27).

Une formule classique d'inversion de Laplace effective<sup>(6)</sup> permet d'écrire, uniformément pour  $z > 0$ ,

$$\int_{\substack{\sigma=\alpha_1 \\ |\tau| > T}} \frac{z^s}{s} ds \ll \frac{z^{\alpha_1}}{1 + T|\log z|}.$$

4. Voir par exemple [T95], théorème II.3.7.

5. Voir par exemple [THB], Théorème 4.11.

6. Utilisée en particulier pour établir la forme effective de la formule de Perron : voir par exemple [T95], majoration (II.2.7).

La contribution à  $J$  du terme principal de (3.12) peut donc être estimée comme suit :

$$(3.13) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{P^+(m) \leq y} \mu(m) \int_{\substack{\sigma=\alpha_1 \\ |\tau| \geq \max(T, n)}} \left(\frac{x}{mn}\right)^s \frac{ds}{s} \\ \ll \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{P^+(m) \leq y} \frac{(x/mn)^{\alpha_1}}{1 + (T+n)|\log(x/mn)|}.$$

La contribution à (3.13) des couples  $(m, n)$  tels que  $|\log(x/mn)| > 1$  est

$$\ll x^{\alpha_1} \zeta(\alpha_1, y) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha_1}(T+n)} \ll \frac{x^{\alpha_1} \zeta(\alpha_1, y)}{\sqrt{T}} \ll E(x, y).$$

Pour traiter l'ensemble complémentaire, constitué des couples  $(m, n)$  satisfaisant à  $|\log(x/mn)| \leq 1$ , il est utile de garder à l'esprit que  $T \leq x^\varepsilon$  dès que  $x$ , et donc  $y$ , est assez grand. Nous désignons par  $S_1, S_2$  les contributions respectives correspondant aux conditions supplémentaires  $m \leq x/T$ ,  $m > x/T$ . On a d'une part

$$S_1 \leq \sum_{\substack{m \leq x/T \\ P^+(m) \leq y}} \sum_{x/em < n \leq ex/m} \frac{1}{1 + |n - x/m|} \\ \ll \sum_{\substack{m \leq x/T \\ P^+(m) \leq y}} \log\left(\frac{ex}{m}\right) \ll \Psi\left(\frac{x}{T}, y\right) \log x \leq \left(\frac{x}{T}\right)^{\alpha_1} \zeta(\alpha_1, y) \log x \\ \ll E(x, y)$$

où l'avant dernière inégalité n'est autre que la majoration de Rankin pour  $\Psi(x/T, y)$ .

Lorsque  $(m, n)$  est compté dans  $S_2$ , on a certainement  $n \leq eT$ . D'où

$$S_2 \ll \sum_{n \leq eT} \sum_{\substack{x/en < m \leq ex/n \\ P^+(m) \leq y}} \frac{1}{1 + T|x/mn - 1|} \\ \ll \sum_{n \leq eT} \left\{ \frac{\Psi(x/n, y)}{\sqrt{T}} + \sum_{\substack{|m-x/n| \leq x/(n\sqrt{T}) \\ P^+(m) \leq y}} 1 \right\}.$$

La dernière somme en  $m$  peut être estimée grâce au Lemme 12, qui fournit la majoration  $\ll \Psi(x/n, y)\varepsilon(x, y, T)$  avec  $\varepsilon(x, y, T) := \sqrt{u} \log y \{1/\sqrt{T} + e^{-c_2 u}\}$ .

Lorsque  $u > (\log y)^{3(1-\varepsilon)/5}$ , on a

$$\varepsilon(x, y, T) \ll \varepsilon^*(y, u) := \left\{ \frac{e^{-cu}}{L_\varepsilon(y)^2} + \frac{1}{Y_{\varepsilon/2}} \right\}.$$

Dans le cas contraire, nous avons recours à la majoration triviale

$$\sum_{\substack{|m-x/n| \leq x/(n\sqrt{T}) \\ P^+(m) \leq y}} 1 \ll \frac{x}{n\sqrt{T}} \ll \frac{x}{nT^{1/3}u^{2u}} \ll \Psi\left(\frac{x}{n}, y\right) \varepsilon^*(y, u).$$

Finalement, il suit dans tous les cas

$$\begin{aligned} S_2 &\ll \varepsilon^*(y, u) \sum_{n \leq eT} \Psi(x/n, y) \leq \varepsilon^*(y, u) x^{\alpha_1} \zeta(\alpha_1, y) \sum_{n \leq eT} \frac{1}{n^{\alpha_1}} \\ &\ll \varepsilon^*(y, u) \frac{x^{\alpha_1} \zeta(\alpha_1, y) T^{1-\alpha_1}}{1-\alpha_1} \ll \frac{xR(u)}{L_\varepsilon(y)} + \frac{x\rho(u)}{Y_\varepsilon} = E(x, y). \end{aligned}$$

Cela achève la preuve de la majoration (3.6), et donc de (1.24).

## 4. Démonstration du Théorème 1

Bien que (1.5) soit une conséquence immédiate de (1.6) dans le domaine  $(H_\varepsilon)$ , nous présentons des preuves disjointes de ces estimations. En effet, alors que la preuve de (1.6) fait appel aux propriétés asymptotiques fines de la fonction de Buchstab, on peut établir (1.5) assez simplement, en n'utilisant que des renseignements plus basiques concernant les fonctions de crible  $\Psi(x, y)$  et  $\Phi(x, y)$ . Ainsi, un lecteur qui n'aurait l'usage que de (1.5), voire de (1.7), pourrait-il se contenter de la version moins élaborée de l'analyse, que nous présentons donc, à son intention, sous forme autonome.

*Preuve de (1.5).*

Nous pouvons manifestement supposer  $\varepsilon < \frac{1}{2}$  et  $x$  entier. On a

$$2K(x, y) = K_1 + K_2 + K_3 + K_4$$

avec

$$\begin{aligned} K_1 &:= \sum_{\substack{P^+(m) \leq y \\ m \leq x/y}} \left| \frac{1}{x} \Phi\left(\frac{x}{m}, y\right) - \frac{1}{m\zeta(1, y)} \right|, \\ K_2 &:= \frac{1}{\zeta(1, y)} \sum_{\substack{P^+(m) \leq y \\ x/y < m \leq x/\zeta(1, y)}} \frac{1}{m} - \frac{1}{x} \left\{ \Psi\left(\frac{x}{\zeta(1, y)}, y\right) - \Psi\left(\frac{x}{y}, y\right) \right\}, \\ K_3 &:= \frac{1}{x} \left\{ \Psi(x, y) - \Psi\left(\frac{x}{\zeta(1, y)}, y\right) \right\} - \frac{1}{\zeta(1, y)} \sum_{\substack{P^+(m) \leq y \\ x/\zeta(1, y) < m \leq x}} \frac{1}{m} \\ K_4 &= \frac{1}{\zeta(1, y)} \sum_{\substack{P^+(m) \leq y \\ m > x}} \frac{1}{m}. \end{aligned}$$

Le Lemme 1 fournit immédiatement, par intégrations par parties, que  $K_2$  et  $K_3$  sont majorés par le membre de droite de (1.5). Nous omettons les détails, qui sont faciles. De plus

$$\begin{aligned} K_4 &\ll \frac{1}{\log y} \int_u^\infty y^{-t} d\Psi(y^t, y) = \frac{\Psi(x, y)}{x \log y} + \int_u^\infty \Psi(y^t, y) y^{-t} dt \\ &\ll_\varepsilon \frac{\varrho(u) e^{\varepsilon u} + x^{-1-\varepsilon}}{\log y} + \int_u^\infty \{\varrho(t) e^{\varepsilon t} + y^{-(1-\varepsilon)t}\} dt \\ &\ll_\varepsilon \varrho(u) e^{\varepsilon u} + x^{-1+\varepsilon} + \int_u^\infty \varrho(t) e^{\varepsilon t} dt. \end{aligned}$$

À ce stade, nous observons que l'on a, pour  $t \geq 1$ ,

$$e^{\varepsilon t} \varrho(t) \ll_\varepsilon (1 - \varepsilon) e^{\varepsilon t} \varrho(t) \leq e^{\varepsilon t} \{\varrho(t-1)/t - \varepsilon \varrho(t)\} = -d\{\varrho(t) e^{\varepsilon t}\}/dt,$$

ce qui découle de la majoration  $t\varrho(t) \leq \varrho(t-1)$ , valable pour  $t \geq 1$ . On en déduit que la dernière intégrale est  $\ll \varrho(u-1) e^{\varepsilon u} \ll \varrho(u) e^{\varepsilon u}$ , d'où

$$(4.1) \quad K_4 \ll_\varepsilon \varrho(u) e^{\varepsilon u} + x^{-1+\varepsilon}.$$

Il reste à majorer  $K_1$ . Nous utiliserons (1.26) sous la forme « faible »

$$\Phi(x, y) - \frac{x}{\zeta(1, y)} \ll \frac{x\varrho(u)}{\log y} \asymp \frac{\Psi(x, y)}{\log y} \quad (y \leq x \leq z := \exp \exp \sqrt{\log y}).$$

Nous scindons alors la sommation sous la forme  $K_1 = K_{11} + K_{12}$ , où  $K_{11}$  correspond aux indices  $m \leq x/z$ . Grâce au Lemme 3, il suit

$$K_{11} \ll \frac{1}{x} \sum_{\substack{P^+(m) \leq y \\ m \leq x/z}} \Psi(x/m, y), \quad (4.2)$$

$$K_{12} \ll \frac{1}{x \log y} \sum_{\substack{P^+(m) \leq y \\ x/z < m \leq x/y}} \Psi(x/m, y). \quad (4.3)$$

Nous supposons dorénavant que  $y > y_0(\varepsilon)$  : dans le cas contraire la majoration triviale  $\Psi(x/m, y) \ll (x/m)^\varepsilon$  suffit à impliquer l'estimation  $K_{11} + K_{12} \ll x^\varepsilon$ .

Nous posons enfin, pour la concision,

$$w := \frac{\log z}{\log y} = \frac{e^{\sqrt{\log y}}}{\log y}.$$

*Majoration de  $K_{11}$ .* On a  $K_{11} = 0$  si  $u \leq w$ . Dans le cas contraire, on peut écrire

$$(4.4) \quad \begin{aligned} K_{11} &\ll \int_0^{u-w} y^{-t} S_y(u-t; \varepsilon) d\Psi(y^t, y) \\ &\ll \left[ S_y(t; \varepsilon) S_y(u-t; \varepsilon) \right]_0^{u-w} + (\log y)(\log u) \int_0^{u-w} S_y(t; \varepsilon) S_y(u-t; \varepsilon) dt, \end{aligned}$$

puisque l'on a

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{S_y(u-t; \varepsilon)}{y^t} \right\} \ll (\log y)(\log u) \frac{S_y(u-t; \varepsilon)}{y^t} \quad (0 \leq t \leq u, u \geq 2),$$

ainsi qu'on peut facilement le vérifier à l'aide de la relation

$$(4.5) \quad -\varrho'(u) \asymp \varrho(u) \log u \quad (u \geq 2)$$

qui découle de (2.16), ou, plus simplement, du corollaire III.5.8.3 de [T95].

On a  $S_y(w; \varepsilon) \ll \varrho(w)e^{\varepsilon w}$  puisque  $w \leq y^{o(1)}$  lorsque  $y \rightarrow \infty$ . Donc

$$(4.6) \quad S_y(w; \varepsilon)S_y(u-w; \varepsilon) \ll \varrho(w)\varrho(u-w)e^{\varepsilon u} + \varrho(w)y^{-(1-\varepsilon)(u-w)}e^{\varepsilon w}.$$

Maintenant

$$(4.7) \quad \sup_{0 \leq w \leq u} \varrho(u-w)\varrho(w) = \varrho(u/2)^2 = \varrho(u)2^{(1+o(1))u}.$$

La première égalité découle du fait que la fonction  $r(t) = -\varrho'(t)/\varrho(t)$  du Lemme 5 est non décroissante pour  $t \geq 0$ . La seconde est une conséquence simple de (1.15) — et dont (2.18) constitue bien entendu une version plus précise.

Par (1.15), on a certainement  $\varrho(u) = u^{-(1+o(1))u}$  lorsque  $u \rightarrow \infty$ . Il s'ensuit que  $y^{-(1-\varepsilon)(u-w)} \ll \varrho(u-w)$  lorsque  $u-w \leq \sqrt{y}$ . Dans le cas contraire, on a  $u > u-w > \sqrt{y}$ , donc  $w \leq \exp \sqrt{\log y} \ll \sqrt{u}$ , et  $y^w \ll_{\varepsilon} y^{\varepsilon u}$ . On en déduit que l'on a en toute circonstance

$$(4.8) \quad y^{-(1-\varepsilon)(u-w)} \ll_{\varepsilon} \varrho(u-w) + y^{-(1-2\varepsilon)u}.$$

En reportant (4.7) et (4.8) dans (4.6), on obtient

$$(4.9) \quad S_y(w; \varepsilon)S_y(u-w; \varepsilon) \ll_{\varepsilon} \varrho(u)2^{(1+2\varepsilon)u} + y^{-(1-2\varepsilon)u}.$$

Estimons maintenant l'intégrale du membre de droite de (4.4). Elle n'excède pas

$$(4.10) \quad \int_0^u S_y(t; \varepsilon)S_y(u-t; \varepsilon) dt \\ = \varrho_2(u)e^{\varepsilon u} + uy^{-(1-\varepsilon)u} + 2y^{-(1-\varepsilon)u} \int_0^u \varrho(t)e^{\varepsilon t}y^{(1-\varepsilon)t} dt,$$

où  $\varrho_2$  désigne le carré de convolution de  $\varrho$ .

On sait d'abord, d'après l'étude spécifique de [S91] ou les résultats généraux de [HT93], que l'on a

$$\varrho_2(u) \sim \varrho(u/2)^2 \sqrt{\pi u/2} = \varrho(u)2^{(1+o(1))u} \quad (u \rightarrow \infty).$$

Ensuite, en appliquant le Lemme 2 à  $y_{\varepsilon} := y^{1-\varepsilon}$ , on voit que le dernier terme du membre de droite de (4.10) (où l'on majore trivialement  $e^{\varepsilon t}$  par  $e^{\varepsilon u}$ ) est  $\ll_{\varepsilon} S_y(u; 3\varepsilon)$ .

En reportant les estimations précédentes dans (4.10), puis (4.4), tout en tenant compte de (4.9), on obtient finalement, quitte à altérer la valeur de  $\varepsilon$ ,

$$(4.11) \quad K_{11} \ll_{\varepsilon} \varrho(u)2^{(1+\varepsilon)u} + y^{-(1-\varepsilon)u}.$$

Majoration de  $K_{12}$ . D'après (1.22), on a

$$\Psi\left(\frac{x}{m}, y\right) \ll \frac{x}{m} \varrho\left(u - \frac{\log m}{\log y}\right)$$

pour tous les entiers  $m$  apparaissant dans la sommation de (4.3). Il suit, par un calcul analogue à (4.4),

$$(4.12) \quad \begin{aligned} K_{12} &\ll \frac{1}{\log y} \int_0^u y^{-t} \varrho(u-t) d\Psi(y^t, y) \\ &\ll \left[ \frac{S_y(t; \varepsilon) \varrho(u-t)}{\log y} \right]_0^u + (\log u) \int_0^u S_y(t; \varepsilon) \varrho(u-t) dt. \end{aligned}$$

La dernière intégrale n'excède pas

$$e^{\varepsilon u} \varrho_2(u) + y^{-(1-\varepsilon)u} \int_0^u \varrho(t) y^{(1-\varepsilon)t} dt \ll \varrho(u) 2^{(1+2\varepsilon)u} + y^{-(1-2\varepsilon)u},$$

d'après le Lemme 2. Quitte à changer  $\varepsilon$  en  $\frac{1}{2}\varepsilon$ , cela implique que la majoration (4.11) est également valable pour  $K_{12}$ .

La démonstration de (1.5) est ainsi complète.

*Preuve de (1.6).*

Nous réemployons la décomposition  $2K(x, y) = \sum_{j=1}^4 K_j$ . Nous estimons les  $K_j$  dans l'ordre inverse des indices, ce qui correspond essentiellement à un ordre croissant de difficulté.

Une intégration par parties fournit d'abord

$$K_4 = \frac{\Psi(x, y)}{x\zeta(1, y)} + \frac{\log y}{\zeta(1, y)} \int_u^\infty \Psi(y^v, y) \frac{dv}{y^v}.$$

En employant (1.22), la formule de Mertens sous forme forte

$$(4.13) \quad \zeta(1, y) = e^\gamma (\log y) \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{L_\varepsilon(y)}\right) \right\},$$

et la majoration du Lemme 1 pour  $\Psi(x, y)$ , on obtient facilement

$$(4.14) \quad \begin{aligned} K_4 &= e^{-\gamma} \int_u^\infty \varrho(v) dv \left\{ 1 + O\left(\frac{\log(u+1)}{\log y}\right) \right\} \\ &= \int_u^\infty |\omega(u-v) - e^{-\gamma}| \varrho(v) dv + O\left(\frac{\varrho(u)}{\log y}\right). \end{aligned}$$

Tournons notre attention vers l'expression  $K_3$ . Une intégration par parties permet d'écrire

$$(4.15) \quad K_3 = \left(1 - \frac{1}{\zeta(1, y)}\right) \frac{\Psi(x, y)}{x} + \frac{\log y}{\zeta(1, y)} \int_{u-h}^u \Psi(y^v, y) \frac{dv}{y^v},$$

avec  $h := \{\log \zeta(1, y)\} / \log y$ . Pour  $u-h \leq v \leq u$ , on a  $\Psi(y^v, y) \ll y^v \varrho(v) \ll y^v \varrho(u)$  en vertu de la majoration

$$\varrho(u-t) \ll \varrho(u) e^{t\xi(u)} \quad (0 \leq t \leq u)$$

établie, par exemple, au corollaire III.5.8.4 de [T95]. Il s'ensuit que le second terme du membre de gauche de (4.15) est  $\ll h\rho(u)$ . En faisant appel à (1.22) pour évaluer le premier, il vient

$$(4.16) \quad K_3 = \rho(u) \left\{ 1 + O\left(\frac{\log_2 x}{\log y}\right) \right\}.$$

On procède similairement pour traiter  $K_2$ . Une intégration par parties fournit

$$K_2 = -\frac{y\Psi(x/y, y)}{x\zeta(1, y)} \left(1 - \frac{\zeta(1, y)}{y}\right) + \frac{\log y}{\zeta(1, y)} \int_{u-1}^{u-h} \Psi(y^v, y) \frac{dv}{y^v}.$$

Étendons l'intégrale jusqu'à  $v = u$ , avec une erreur n'excédant pas celle de (4.16), et employons de nouveau (1.22). Nous obtenons

$$(4.17) \quad \begin{aligned} K_2 &= e^{-\gamma} \int_{u-1}^u \rho(v) dv + O\left(\frac{\rho(u-1) + \rho(u) \log_2 x}{\log y}\right) \\ &= \int_{u-1}^u |\omega(u-v) - e^{-\gamma}| \rho(v) dv + O\left(\frac{\rho(u-1) + \rho(u) \log_2 x}{\log y}\right). \end{aligned}$$

Il reste à évaluer  $K_1$ . Posons  $v_m := (\log m)/\log y$ ,  $u_m := u - v_m$  et employons (1.27) sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} \Phi\left(\frac{x}{m}, y\right) - \frac{1}{m\zeta(1, y)} \\ = \frac{e^\gamma \{\omega(u_m) - e^{-\gamma}\}}{m\zeta(1, y)} + O\left(\frac{y}{x \log y} + \frac{R(u_m) \log(u+1)}{m(\log y)^2} + \frac{\rho(u_m)}{mY_\varepsilon}\right), \end{aligned}$$

valable uniformément pour  $1 \leq m \leq x/y$ . Nous obtenons

$$(4.18) \quad K_1 = \frac{e^\gamma}{\zeta(1, y)} \int_{-\infty}^{u-1} |\omega(u-v) - e^{-\gamma}| \frac{d\Psi(y^v, y)}{y^v} + O(E_1 + E_2 + E_3)$$

avec

$$\begin{aligned} E_1 &:= \frac{y\Psi(x/y, y)}{x \log y} \ll \frac{\rho(u-1)}{\log y}, \\ E_2 &:= \frac{\log(u+1)}{(\log y)^2} \int_0^{u-1} R(u-v) \frac{d\Psi(y^v, y)}{y^v}, \\ E_3 &:= \frac{1}{Y_\varepsilon} \int_0^{u-1} \rho(u-v) \frac{d\Psi(y^v, y)}{y^v}. \end{aligned}$$

On estime  $E_2$  et  $E_3$  par intégration par parties en faisant appel à (1.22), (2.7) et (4.5). Il suit

$$\begin{aligned} E_2 &\ll \frac{\rho(u-1) \log(u+1)}{(\log y)^2} + \frac{\log(u+1)}{\log y} \int_0^{u-1} R(u-v) \rho(v) dv \\ &\ll H(u) \frac{\log(u+1)}{\log y}, \end{aligned}$$

et semblablement

$$E_3 \ll \frac{\rho_2(u)}{Y_\varepsilon} \ll \frac{\rho(u/2)^2}{Y_{2\varepsilon}}.$$

Désignons par  $J_1$  le terme principal de (4.18). Nous estimons  $\Psi(y^v, y)$  à l'aide de (1.22) et traitons le terme d'erreur par intégration par parties en utilisant les relations entre mesures

$$|d\{\omega(v) - e^{-\gamma}\}| \leq |\omega'(v)| dv \ll R(v) \log(v+1) dv,$$

où la seconde majoration résulte de (3.5). Il suit

$$J_1 = \frac{e^\gamma \log y}{\zeta(1, y)} \left\{ 1 + O\left(\frac{\log(u+1)}{\log y}\right) \right\} \int_{-\infty}^{u-1} |\omega(u-v) - e^{-\gamma}| \varrho(v) dv + E_4$$

avec

$$\begin{aligned} E_4 &= \frac{1}{\log y} \int_{-\infty}^{u-1} \frac{|\omega(u-v) - e^{-\gamma}|}{y^v} dO\left(\frac{y^v \varrho(v) \log(v+1)}{\log y}\right) \\ &\ll \frac{\varrho(u-1) \log(u+1)}{(\log y)^2} + \int_0^{u-1} \frac{\varrho(v) R(u-v) \log(v+1)}{\log y} dv \\ &\ll \frac{H(u) \log(u+1)}{\log y}. \end{aligned}$$

En rassemblant les estimations précédentes, nous obtenons finalement

$$(4.19) \quad K_1 = \int_{-\infty}^{u-1} |\omega(u-v) - e^{-\gamma}| \varrho(v) dv + O_\varepsilon\left(\frac{H(u) \log(u+1)}{\log y} + \frac{\varrho(u/2)^2}{Y_\varepsilon}\right).$$

Associée à (4.14), (4.16), et (4.17), et en utilisant (1.12) sous la forme

$$\varrho(u) \ll H(u)/u^2 2^u,$$

la formule (4.19) implique bien (1.6).

## 5. Preuves des Corollaires 1 et 2

*Preuve du Corollaire 1.* L'argument est très proche de celui qui est utilisé par Elliott dans [E80] mais certains détails techniques sont modifiés. Posons

$$F_{x,y}(z) := \nu_x(f_y(n) \leq A_x + zB_x), \quad G_{x,y}(z) := \mathbb{P}(Z_y \leq A_x + zB_x).$$

On a clairement

$$\sup_{z \in \mathbb{R}} |F_{x,y}(z) - G_{x,y}(z)| \leq K(x, y),$$

et donc

$$F_x(z) \leq G_x(z + 3h) + K(x, y) + R_1 + R_2$$

avec

$$R_1 := \nu_x(|f(n) - f_y(n)| > hB_x), \quad R_2 := \mathbb{P}(|Z_x - Z_y| > 2hB_x).$$

Comme un entier  $n \leq x$  possède au plus  $u$  facteurs premiers  $p > y$ , on voit que l'inégalité  $|f(n) - f_y(n)| > hB_x$  ne peut avoir lieu que s'il existe une puissance de

nombre premier  $p^\nu$  divisant  $n$  avec  $p > y$  et  $|f(p^\nu)| > hB_x/u$ . D'où

$$R_1 \ll \frac{1}{x} \sum_{\substack{y < p \leq x \\ |f(p^\nu)| > hB_x/u}} \sum_{\nu \geq 1} \left[ \frac{x}{p^\nu} \right] \leq \sum_{\substack{y < p \leq x \\ |f(p^\nu)| > hB_x/u}} \sum_{\nu \geq 1} \frac{1}{p^\nu}.$$

Cette borne est bien compatible avec (1.9). Pour estimer  $R_2$ , nous définissons, à l'instar d'Elliott, de nouvelles variables aléatoires  $\eta_p$  par

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\eta_p = f(p^\nu)) &= (1 - 1/p)p^{-\nu} \quad \text{si } \nu \geq 1 \quad \text{et } 0 < |f(p^\nu)| \leq h/uB_x \\ \mathbb{P}(\eta_p = 0) &= \left(1 - \frac{1}{p}\right) \left\{ 1 + \sum_{\substack{\nu \geq 1 \\ f(p^\nu)=0}} p^{-\nu} + \sum_{\substack{\nu \geq 1 \\ |f(p^\nu)| > hB_x/u}} p^{-\nu} \right\}. \end{aligned}$$

On a alors  $R_2 \leq R_{21} + R_{22}$ , avec

$$R_{21} := \mathbb{P}(\exists p \in [y, x] : \eta_p \neq \xi_p) \leq \sum_{\substack{y < p \leq x \\ |f(p^\nu)| > hB_x/u}} \sum_{\nu \geq 1} \frac{1}{p^\nu}$$

et  $R_{22} := \mathbb{P}(|\sum_{y < p \leq x} \eta_p| > 2hB_x)$ . On a

$$R_{22} \leq \inf_{v > 0} \mathbb{E} \left( \exp \left\{ v \sum_{y < p \leq x} |\eta_p| - 2hvB_x \right\} \right).$$

L'indépendance des  $\eta_p$  permet donc d'écrire, pour tout  $v > 0$ ,

$$R_{22} \leq e^{-2hvB_x} \prod_{y < p \leq x} \left\{ 1 + \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{|f(p^\nu)| \leq hB_x/u} \frac{e^{v|f(p^\nu)|} - 1}{p^\nu} \right\}.$$

Posons  $v = tu/hB_x$  et utilisons la croissance de la fonction  $z \mapsto e^z - 1$ . Il vient

$$R_{22} \leq \exp \left\{ -2tu + (e^t - 1) \sum_{y < p \leq x} \frac{1}{p} \right\} \ll u^{-3u/2} \ll \varrho(u)$$

pour le choix  $t = \frac{4}{5} \log u$ . Nous obtenons bien (1.9) en regroupant nos estimations.

*Preuve du Corollaire 2.* La formule (1.10) est immédiate puisque le terme principal est exactement  $\mathbb{P}(Z_y > z)$ .

Sous l'hypothèse  $1 \leq z \leq \exp L_\varepsilon(y)$ , on peut écrire, posant  $T := L_{\varepsilon/2}(y)/\log y$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{m > z \\ P^+(m) \leq y}} \frac{1}{m} &= \int_v^T y^{-t} d\Psi(y^t, y) + \sum_{\substack{m > y^T \\ P^+(m) \leq y}} \frac{1}{m} \\ &= \int_v^T \{ \log y + O(\log(t+2)) \} \varrho(t) dt + O_\varepsilon(\varrho(v) + \varrho(T)e^{\varepsilon T} + y^{-(1-\varepsilon)T}). \end{aligned}$$

d'après (1.22), et où l'estimation de la seconde somme en  $m$  résulte de (4.1). La relation (4.5) permet d'estimer l'intégrale en  $t$ . Elle vaut

$$\{ \log y + O(\log(v+2)) \} \int_v^\infty \varrho(t) dt + O(\varrho(T) \log y).$$

Comme  $T \gg v^2 \log y$ , on a en fait  $\varrho(T) \log y + \varrho(T)e^{\varepsilon T} \ll \varrho(v)$ . De plus,

$$y^{-T/2} \ll e^{-v^2} \ll \varrho(v).$$

Il suit

$$\sum_{\substack{m > z \\ P^+(m) \leq y}} \frac{1}{m} = \{ \log y + O(\log(v+2)) \} \int_v^\infty \varrho(t) dt,$$

ce qui, au vu de (4.13), complète la preuve de (1.11).

## 6. Preuve du Corollaire 4

On a

$$(6.1) \quad \sum_{1 < n \leq x} \log P^-(n) = \int_1^x \frac{\Phi(x, y) - 1}{y} dy = [x] \log 2 + \int_2^x \frac{\Phi(x, y)}{y} dy - \log x.$$

Désignons par  $J(x)$  la dernière intégrale. On peut écrire  $J(x) = J_1(x) + O(J_2(x))$  avec

$$J_1(x) := \int_2^x \frac{e^\gamma \log y}{\zeta(1, y)} \int_0^{u-1} \omega(u-v) y^{u-v-1} dv dy, \quad J_2(x) := \int_2^x E(x, y) \frac{dy}{y},$$

et, d'après (1.24), (1.25) et (2.1),

$$E(x, y) \ll_\varepsilon \begin{cases} x e^{-u}/L_\varepsilon(y), & \text{si } y > X := \exp\{(\log_2 x)^{5/3+\varepsilon}\}, \\ x e^{-u/2}, & \text{dans le cas contraire} \end{cases}$$

pour tout  $\varepsilon > 0$ . On en déduit, pour  $\varepsilon > 0$  assez petit,

$$J_2(x) \ll_\varepsilon \int_2^X e^{-u/2} \frac{dy}{y} + \int_X^x \exp\left\{-\frac{\log x}{\log y} - (\log y)^{3/5-\varepsilon/2}\right\} \frac{dy}{y} \ll x e^{-(\log x)^{3/8-\varepsilon}}.$$

Posons maintenant  $\delta(t) := \omega(t) - e^{-\gamma}$ , de sorte que  $\delta(t) \ll R(t) \ll e^{-t}$ , par (2.5) et (2.6). Il suit

$$\begin{aligned} J_1(x) &= \int_2^x \frac{e^\gamma \log y}{\zeta(1, y)} dy \int_1^u \omega(t) y^{t-1} dt \\ &= \int_2^x \frac{\log y}{y \zeta(1, y)} dy \int_1^u y^t dt + \int_1^{(\log x)/\log 2} \delta(t) dt \int_2^{x^{1/t}} \frac{e^\gamma \log y}{\zeta(1, y)} y^{t-1} dy \\ &= (x-1)J_{11}(x) + J_{12}(x), \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} J_{11}(x) &:= \int_2^x \frac{dy}{y \zeta(1, y)}, \\ J_{12}(x) &:= \int_1^{(\log x)/\log 2} \delta(t) dt \int_2^{x^{1/t}} \left\{1 + O\left(\frac{1}{L_{\varepsilon/4}(y)}\right)\right\} y^{t-1} dy. \end{aligned}$$

Nous estimons  $J_{11}(x)$  en représentant  $1/\zeta(1, y)$  par une série de Dirichlet et en intervertissant les sommations. Il vient

$$\begin{aligned} J_{11}(x) &= \int_2^x \sum_{P^+(n) \leq y} \frac{\mu(n)}{n} \frac{dy}{y} = \sum_{P^+(n) \leq x} \frac{\mu(n)}{n} \log \left( \frac{x}{P^+(n)} \right) - \log 2 \\ &= \frac{\log x}{\zeta(1, x)} + \sum_{p \leq x} \frac{\log p}{(p-1)\zeta(1, p)} - \log 2 \\ &= e^{-\gamma} \sum_{p \leq x} \frac{1}{p-1} + B + O\left(\frac{1}{L_\varepsilon(x)}\right), \end{aligned}$$

avec

$$B := e^{-\gamma} + \sum_p \frac{1}{p-1} \left( \frac{\log p}{\zeta(1, p)} - e^{-\gamma} \right) - \log 2.$$

En estimant la somme en  $p$  à l'aide de la formule classique (cf., par exemple, [T95], théorème I.1.9, pour l'identification de la constante)

$$\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} = \log_2 x + \gamma + \sum_p \left\{ \frac{1}{p} + \log \left( 1 - \frac{1}{p} \right) \right\} + O\left(\frac{1}{L_\varepsilon(x)}\right),$$

nous obtenons finalement

$$J_{11}(x) = e^{-\gamma} \log_2 x + C + O\left(\frac{1}{L_\varepsilon(x)}\right)$$

avec

$$\begin{aligned} C &:= B + \gamma e^{-\gamma} + e^{-\gamma} \sum_p \left\{ \frac{1}{p-1} + \log \left( 1 - \frac{1}{p} \right) \right\} \\ &= e^{-\gamma} \{1 + \gamma\} - \log 2 + \sum_p \left\{ \frac{\log p}{(p-1)\zeta(1, p)} + e^{-\gamma} \log \left( 1 - \frac{1}{p} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Pour estimer  $J_{12}(x)$ , nous remarquons d'abord que la croissance, pour  $y$  assez grand et  $t \geq 1$ , de  $y \mapsto y^{t/2}/L_{\varepsilon/4}(y)$  implique

$$\int_2^{x^{1/t}} \frac{y^{t-1}}{L_{\varepsilon/4}(y)} dy \ll \frac{x}{L_{\varepsilon/4}(x^{1/2t})} \ll \frac{x}{L_{\varepsilon/2}(x^{1/t})}.$$

D'où

$$\begin{aligned} J_{12}(x) &= \int_1^{(\log x)/\log 2} \delta(t) \frac{x - 2^t}{t} dt + O\left(x \int_2^x \exp \left\{ -t - \left( \frac{\log x}{t} \right)^{3/5-\varepsilon/2} \right\} dt\right) \\ &= x \int_1^\infty \frac{\delta(t)}{t} dt + O\left(x e^{-(\log x)^{3/8-\varepsilon}}\right). \end{aligned}$$

Nous obtenons donc

$$(x-1)J_{11}(x) + J_{12}(x) = e^{-\gamma} x \log_2 x + Dx + O\left(x e^{-(\log x)^{3/8-\varepsilon}}\right),$$

avec  $D := C + \int_1^\infty \delta(t) dt/t$ . Compte tenu de (6.1), cela complète la preuve du Corollaire 4.

## Bibliographie

- [A96] Arratia, R., Independence of small prime factors of a uniformly distributed integer : total variation and Wasserstein metrics. Manuscrit, 1996.
- [AS97] Arratia, R., Stark, D., A total variation distance invariance principle for primes, permutations and Poisson-Dirichlet. Manuscrit, 1997.
- [BV62] Barban, M.B., Vinogradov, A.I., On the number theoretic basis of probabilistic number theory. Dokl. Akad. Nauk SSSR 154 (1964), 495-496 ; = Soviet Math. Doklady 5 (1964), 96-98.
- [dB51] N.G. de Bruijn, On the number of positive integers  $\leq x$  and free of prime factors  $> y$ . Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 54 (1951), 50-60.
- [E79] Elliott, P.D.T.A., Probabilistic number theory : mean value theorems (Grundlehren der Math. Wiss. 239). Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg 1979.
- [E80] — Probabilistic number theory : central limit theorems (Grundlehren der Math. Wiss. 240). Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg 1980.
- [FT96] Fouvry, E., Tenenbaum, G., Répartition statistique des entiers sans grand facteur premier dans les progressions arithmétiques. Proc. London Math. Soc. (3) 72 (1996) 481-514.
- [H86] Hildebrand, A., On the number of positive integers  $\leq x$  and free of prime factors  $> y$ . J. Number Theory 22 (1986), 289-307.
- [H90] — The asymptotic behavior of the solutions of a class of differential-difference equations. J. London math. Soc. (2) 42, no. 1 (1990), 11-31.
- [HT86] Hildebrand, A., Tenenbaum, G., On integers free of large prime factors. Trans. Amer. Math. Soc. 296 (1986), 265-290.
- [HT93] — On a class of difference differential equations arising in number theory. J. d'Analyse 61 (1993), 145-179.
- [K56] Kubilius, J., Probabilistic methods in the theory of numbers. Uspehi Mat. Nauk (N.S.) 11 (1956), 2(68), 31-66 ; = Amer. Math. Soc. Translations, vol. 19 (1962), 47-85.
- [K64] — Probabilistic methods in the theory of numbers (Amer. Math. Soc. Monographs 11) Providence 1964.
- [R82] Ruzsa, I.Z., Effective results in probabilistic number theory. In : Théorie élémentaire et analytique des nombres (éd. par J. Coquet), 107-130. Dép. Math. Univ. Valenciennes 1982.
- [S91] Smida, H., Sur les puissances de convolution de la fonction de Dickman. Acta Arithmetica 59 (1991), 124-143.
- [T90] Tenenbaum, G., Sur un problème d'Erdős et Alladi. In : Prog. Math. 91, Séminaire de Théorie des Nombres, Paris 1988-89 (éd. par C. Goldstein), 221-239. Birkhäuser 1990.
- [T95] — Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres (Cours spécialisés 1). Société Mathématique de France 1995.

- [TW96] —, en collaboration avec Wu, J., Exercices corrigés de théorie analytique et probabiliste des nombres (Cours spécialisés 2), Société Mathématique de France 1996.
- [THB] Titchmarsh, E.C., The theory of the Riemann zeta-function, révisé par D.R. Heath-Brown. Oxford University Press 1986.
- [W46] Widder, D.V., The Laplace transform. Princeton University Press, Princeton, New Jersey 1946.
- [X96] Xuan, T.Z., The oscillatory behavior of sifting functions. Manuscrit, 1996.