SUR DEUX FONCTIONS DE DIVISEURS

GÉRALD TENENBAUM

1. *Introduction et énoncés des résultats*

Nous nous proposons dans cet article de donner quelques propriétés des deux fonctions arithmétiques suivantes;

$$\rho_1(n) = \max_{\substack{d \mid n \\ d^2 \leqslant n}} d$$

et

$$\rho_2(n) = \min_{\substack{d \mid n \\ d^2 \geqslant n}} d.$$

Ces fonctions interviennent en particulier dans des problèmes de décompositions en sommes de deux carrés (voir [3; Chapitre IV]) et, quoique très naturelles, elles ne semblent pas avoir déjà été étudiées.

Nous montrerons les trois résultats suivants:

THÉORÈME 1. *Pour tout* $\varepsilon > 0$ *il existe un réel* $x_0 = x_0(\varepsilon)$ *tel que pour* $x \geqslant x_0$ *on ait*

$$\frac{x^{\frac{3}{2}}}{(\log x)^{\alpha+\varepsilon}} < \sum_{n \leqslant x} \rho_1(n) < c\,\frac{x^{\frac{3}{2}}}{(\log x)^{\alpha}\sqrt{(\log\log x)}}$$

où c est une constante absolue effective et où l'on a

$$\alpha = 1 - \frac{\log(e\log 2)}{\log 2} = 0{\cdot}0860\ldots .$$

THÉORÈME 2. *On a la formule asymptotique*

$$\sum_{n \leqslant x} \rho_2(n) = \frac{\pi^2}{12}\,\frac{x^2}{\log x} + O\left(\frac{x^2}{\log^2 x}\right).$$

THÉORÈME 3. *La densité naturelle de l'ensemble des entiers n tels que*

$$(\rho_1(n), \rho_2(n)) = 1$$

est égale à 1.

Notations.

$f(x) \ll g(x)$ signifie $f(x) = O(g(x))$.

$[x]$ désigne la partie entière du nombre réel x.

(a, b) désigne le plus grand diviseur commun des nombres entiers a et b.

Received 16 June, 1976.

[J. LONDON MATH. SOC. (2), 14 (1976), 521–526]

$a \mid b$ signifie " a divise b ".

$\delta(n)$ désigne la quantité $(\rho_1(n), \rho_2(n))$.

$\Omega(n)$ (resp. $\omega(n)$) désigne le nombre de facteurs premiers de l'entier n comptés avec (resp. sans) leur ordre de multiplicité.

$\pi_i(x)$ désigne le nombre d'entiers n inférieurs à x tels que $\Omega(n) = i$ et on note $\pi(x)$ la quantité $\pi_1(x)$.

La lettre p dans une sommation désigne toujours un nombre premier.

Remarque. On peut aussi considérer les fonctions $\rho_1(n)$ et $\rho_2(n)$ comme les solutions du problème d'optimisation suivant: étant donné un rectangle de surface n comment doit-on choisir les diviseurs d_1 et d_2 (tels que $d_1 d_2 = n$) mesurant les longueurs des côtés pour que le périmètre soit minimal? Cette interprétation géométrique suggère la généralisation aux fonctions $\rho_{i,k}$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$ définies pour un entier k supérieur à 2 par:

(a) $\prod_{i=1}^{k} \rho_{i,k}(n) = n$

(b) $\rho_{1,k}(n) \leqslant \rho_{2,k}(n) \leqslant \dots \leqslant \rho_{k,k}(n)$

(c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\rho_{i,k}(n)} = \min_{d_1 \dots d_k = n} \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{d_i}$.

Nous ne donnerons pas ici de propriétés concernant ces généralisations.

2. *Démonstration du théorème* 1

Dans l'article [1] paru en 1960, P. Erdős donne une minoration asymptotique de la quantité

$$A(x) = \operatorname{card}\{n \leqslant x : n = uv;\, u, v \leqslant \sqrt{x}\}$$

soit

$$A(x) > \frac{x}{(\log x)^{\alpha+\varepsilon}} \quad \text{pour } x \geqslant x_0(\varepsilon)$$

où α a la valeur donnée dans l'énoncé du théorème 1.

En fait cette minoration est obtenue en minorant le nombre d'entiers qui sont produits de deux entiers de l'intervalle $[\frac{1}{2}\sqrt{x}, \sqrt{x}]$. Comme ces entiers n vérifient $\rho_1(n) \geqslant \frac{1}{2}\sqrt{x}$ on obtient immédiatement la minoration du théorème 1, soit

$$\sum_{n \leqslant x} \rho_1(n) > \frac{\sqrt{x}}{2} \frac{x}{(\log x)^{\alpha+\varepsilon}} \quad \text{pour } x \geqslant x_0(\varepsilon).$$

La majoration utilisera le lemme suivant dont la démonstration peut être trouvée par exemple dans [3; Lemme 1.3.2].

LEMME 1. *Pour* $0 < b < 1 < a$ *on a lorsque* x *tend vers l'infini*

(i) $\displaystyle\sum_{n \geqslant ax} \frac{x^n}{n!} = O(e^{ax} a^{-ax} x^{-\frac{1}{2}})$

(ii) $\displaystyle\sum_{n \leqslant bx} \frac{x^n}{n!} = O(e^{bx} b^{-bx} x^{-\frac{1}{2}})$.

Posons alors pour tout entier k tel que $k \leqslant \log\log x/\log 2$

$$u_x(k) = \operatorname{card}\left\{n \leqslant x : \exists\, d \mid n\ \frac{\sqrt{x}}{2^{k+1}} \leqslant d \leqslant \frac{\sqrt{x}}{2^k}\right\}.$$

Pour évaluer $u_x(k)$ nous décomposons

$$u_x(k) = u_x{}^1(k) + u_x{}^2(k)$$

où les entiers n comptés dans $u_x{}^1(k)$ $\big($resp. $u_x{}^2(k)\big)$ sont les entiers n comptés dans $u_x(k)$ avec la condition supplémentaire

$$\Omega(n) < \frac{\log\log x}{\log 2} \qquad \left(\text{resp. } \Omega(n) \geqslant \frac{\log\log x}{\log 2}\right).$$

La majoration suivante est due à Hardy et Ramanujan (voir [**2**]).

Pour $i \leqslant c \log\log x$ on a

$$\pi_i(x) \leqslant c' \frac{x}{\log x} \frac{(\log\log x)^{i-1}}{(i-1)!} \tag{1}$$

où c est une constante quelconque et c' ne dépend que de c.

Ceci nous permet, grâce au Lemme 1, de majorer $u_x{}^1(k)$: en effet, on a, en posant $v = \log\log x/\log 2$

$$\begin{aligned}
u_x{}^1(k) &\leqslant \sum_{i+j \leqslant v} \pi_i(\sqrt{x}/2^k)\, \pi_j(2^{k+1}\sqrt{x}) \\
&\leqslant \sum_{i+j \leqslant v} \frac{x}{\log^2 x} \frac{(\log\log x)^{i+j-2}}{(i-1)!\,(j-1)!} \\
&= \frac{x}{\log^2 x} \sum_{i \leqslant v-2} \frac{(2\log\log x)^i}{i!} \\
&\leqslant \frac{x}{\log^2 x} \cdot e^{\log\log x/\log 2} \cdot (2\log 2)^{\log\log x/\log 2} (\log\log x)^{-\frac{1}{2}} \\
&= \frac{x}{\log^\alpha x} \frac{1}{\sqrt{(\log\log x)}}.
\end{aligned} \tag{2}$$

Majorons maintenant $u_x{}^2(k)$.

En prenant $c = 4/\log 2$ dans (1) on a

$$u_x^2(k) \ll \sum_{v \leqslant i \leqslant 4v} \frac{x}{\log x} \frac{(\log\log x)^{i-1}}{(i-1)!} + R_2(x) \tag{3}$$

avec

$$R_2(x) = \operatorname{card}\{n \leqslant x : \Omega(n) > 4v\}.$$

Le terme principal de la majoration (3) est, d'après le lemme 1,

$$O\left(\frac{x}{\log^\alpha x \sqrt{(\log\log x)}}\right).$$

De plus, si n est compté dans $R_2(x)$ ou bien $\omega(n) \geqslant 2v$, ou bien $\omega(n) < 2v$.

Dans la première éventualité, on a:

$$d(n) = \operatorname{card}\{d : d \mid n\} \geqslant 2^{\omega(n)} \geqslant 2^{2v} = \log^2 x$$

donc le nombre correspondant d'entiers n est majoré par

$$\frac{1}{\log^2 x} \sum_{n \leqslant x} d(n) \leqslant \frac{2x}{\log x}.$$

Dans la seconde éventualité n est multiple de l^2 avec $\Omega(l^2) > 2v$. Des inégalités

$$l^2 \geqslant 2^{\Omega(l^2)} \geqslant 2^{2v} = \log^2 x$$

on déduit donc que le nombre correspondant d'entiers n est majoré par

$$\sum_{l \geqslant \log x} \left[\frac{x}{l^2}\right] \ll \frac{x}{\log x}.$$

On a donc finalement

$$R_2(x) \ll \frac{x}{\log x}. \tag{4}$$

Les inégalités (2), (3) et (4) montrent donc que l'on a

$$u_x(k) \ll \frac{x}{\log^\alpha x} \frac{1}{\sqrt{(\log\log x)}}. \tag{5}$$

On déduit alors la majoration du théorème 1 en remarquant que pour $k_0 = [v]$ on a l'inégalité

$$\sum_{n \leqslant x} \rho_1(n) \leqslant \sqrt{(x)}\, u_x(0) + \ldots + \frac{\sqrt{x}}{2^{k_0-1}} u_x(k_0) + \frac{x^{\frac{3}{4}}}{2^{k_0}}.$$

3. *Démonstration des théorèmes* 2 *et* 3

La démonstration du théorème 2 repose sur les deux lemmes suivants.

LEMME 2. *Si n est un entier inférieur ou égal à x et si pour un entier k positif on a $\rho_2(n) > x^{(k+1)/(2k+1)}$, alors $\Omega(\rho_2(n)) \leqslant k$.*

Démonstration. Posons $\rho_2(n) = a_1 \ldots a_{k+1}$ avec $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_{k+1}$ on a $a_1 \leqslant \rho_2(n)^{1/(k+1)}$, donc $a_2 a_3 \ldots a_{k+1} \geqslant \rho_2(n)^{k/(k+1)} > x^{k/(2k+1)} > \rho_1(n)$. Le produit $a_2 \ldots a_{k+1}$ est donc un diviseur de n strictement supérieur à $\rho_1(n)$, il est donc supérieur ou égal à $\rho_2(n)$, ce qui montre que $a_2 \ldots a_{k+1} = \rho_2(n)$ et que $a_1 = 1$.

LEMME 3. *Soit p un nombre premier $p > x^{\frac{1}{2}}$ et k un entier positif. On a l'implication*

$$kp \leqslant x \Rightarrow \rho_2(kp) = p.$$

C'est clair puisque les seuls diviseurs de kp supérieurs à sa racine sont les $k'p$ avec $k' \mid k$.

Soit alors

$$S(x) = \sum_{n \leqslant x} \rho_2(n) = \sum_{\substack{n \leqslant x \\ \rho_2(n) \geqslant x^{2/3}}} \rho_2(n) + O(x^{\frac{5}{3}}),$$

d'après le lemme 2, pour $k = 1$. On a donc:

$$S(x) = \sum_{x^{2/3} \leqslant p \leqslant x} pa(p) + O(x^{\frac{5}{3}})$$

où $a(p) = \operatorname{card}\{n \leqslant x : \rho_2(n) = p\}$.

Le lemme 3 montre alors que $a(p) = [x/p]$, on a donc

$$S(x) = \sum_{p \leqslant x} p[x/p] + O(x^{\frac{5}{3}}).$$

Les estimations classiques de $\pi(x)$ permettent alors d'en déduire le théorème 2 (voir [3; Chapitre I]).

La démonstration du théorème 3 repose sur le lemme suivant.

LEMME 4. *Soit m un nombre entier plus grand que 1 et p un nombre premier; on a l'implication*

$$p \mid \delta(mp^2) \Rightarrow \rho_1(m) \geqslant \sqrt{(m/p)}.$$

Démonstration. Si $p \mid \delta(mp^2)$ posons

$$\rho_1(mp^2) = pm_1$$

$$\rho_2(mp^2) = pm_2.$$

On voit immédiatement que $m_1 = \rho_1(m)$ et $m_2 = \rho_2(m)$, ce qu'on peut encore exprimer par l'implication

$$d \mid mp^2 \Rightarrow d + mp^2/d \geqslant p\rho_1(m) + mp/\rho_1(m).$$

Supposons $\rho_1(m) < \sqrt{(m/p)}$: on vérifie alors que l'on a

$$\rho_2(m) > p\rho_1(m)$$

et

$$\rho_2(m) + mp^2/\rho_2(m) < p\rho_1(m) + mp/\rho_1(m)$$

ce qui apporte la contradiction souhaitée.

Les techniques de la démonstration du théorème 1 permettent d'autre part de montrer le résultat suivant.

LEMME 5. *Il existe une constante absolue c telle que pour tout $a > 1$ et tout $y \geqslant 3$ on ait*

$$\operatorname{card}\left\{n \leqslant y : \rho_1(n) > \frac{\sqrt{n}}{a}\right\} \leqslant ca \frac{y}{\log^\alpha y \sqrt{(\log\log y)}}.$$

Posons alors, pour tout $x \geqslant 3$, et tout nombre premier p

$$T_p(x) = \sum_{\substack{n \leqslant x \\ p \mid \delta(n)}} 1 = \sum_{\substack{m \leqslant x/p^2 \\ p \mid \delta(mp^2)}} 1$$

il nous suffit de montrer que

$$\sum_{p \leqslant x} T_p(x) = o(x)$$

or on a

$$T_p(x) \leqslant \sum_{\substack{m \leqslant x/p^2 \\ \rho_1(m) > \sqrt{(m/p)}}} 1$$

d'où les majorations (l'exposant $\frac{1}{3}$ n'est pas fondamental ici)

$$p \leqslant x^{\frac{1}{3}} \Rightarrow T_p(x) \leqslant c \frac{x}{p^{\frac{3}{2}} \log^\alpha \sqrt{(\log\log x)}}$$

$$p \geqslant x^{\frac{1}{3}} \Rightarrow T_p(x) \leqslant x/p^2$$

ce qui montre finalement:

$$\sum_{p \leqslant x} T_p(x) = O\left(\frac{x}{\log^\alpha x \sqrt{(\log\log x)}}\right) + O(x^{5/6}) = o(x).$$

References

1. P. Erdős, " Sur une inégalité asymptotique en théorie des nombres ", *Vestnik Leningrad Univ.*, 13 (1960), 41–49 (en russe).
2. G. H. Hardy and S. Ramanujan, " The normal number of prime factors of a number *n* ", *Quart. J. Math.*, XLVIII (1917), 76–92.
3. G. Tenenbaum, *Estimations asymptotiques de fonctions arithmétiques liées aux diviseurs*, thèse de 3e cycle, Bordeaux (1976).

Laboratoire de Mathématiques et d'Informatique dépendant de l'Université de Bordeaux I associé au C.N.R.S.
351, cours de la Libération
33405 Talence (France)

CORRIGENDUM A MON ARTICLE "SUR DEUX FONCTIONS DE DIVISEURS"

GÉRALD TENENBAUM

Je tiens à remercier ici K. Norton de m'avoir signalé une erreur dans l'article [3] et de m'avoir indiqué comment rétablir la démonstration.

La formule (1), page 523, n'est pas valable pour toute constante c mais seulement pour $c < 2$ [1]. Elle est en fait fausse pour $c > 2$, comme le montre le résultat de Selberg [2]: pour tout $\delta > 0$ et

$$(2+\delta)\log\log x \leqslant i \leqslant c\log\log x,$$

on a

$$\pi_i(x) \sim c_1(x\log x)\,2^{-i}.$$

La démonstration de la majoration

$$u_x^{\,2}(k) \ll \frac{x}{\log^\alpha x\sqrt{(\log\log x)}}$$

doit être modifiée comme suit:

Dans la formule (3) et la définition de $R_2(x)$ on remplace 4 par 1,3. Cela permet d'appliquer le lemme 1 avec $c = 1{,}3/\log 2 < 1{,}9$; on obtient la même majoration pour le terme principal. Pour le terme complémentaire, on montre la majoration

$$R_2(x) \ll x(\log x)^{-0{,}1}$$

en appliquant le même dichotomie mais par rapport à la valeur $1{,}1\nu$ au lieu de 2ν.

Références

1. L. G. Sathe, " On a problem of Hardy on the distributions of integers having a given number of prime factors, I, II, III, IV ", *J. Indian Math Soc.* (*N. S.*), 17 (1953), 63–141 et 18 (1954), 27–81.
2. A. Selberg, " Note on a paper by L. G. Sathe ", *J. Indian Math. Soc.* (*N. S.*), 18 (1954), 83–87.
3. G. Tenenbaum, " Sur deux fonctions de diviseurs ", *J. London Math. Soc.* (2), 14 (1976), 521–526.

U.E.R. de Mathématiques et d'Informatique,
Université de Bordeaux 1,
351, Cours de la Libération,
Bordeaux, France.

Received 20 July, 1977