Comment. Math. Helvetici 60 (1985) 411–428 0010-2571/85/030411-18$01.50 + 0.20/0
© 1985 Birkhäuser Verlag, Basel

Sur la concentration moyenne des diviseurs

GÉRALD TENENBAUM

1. Introduction

Dû à Paul Lévy, le concept de fonction de concentration date de 1937. Il s'est avéré, depuis lors, un outil fructueux de la Théorie des Probabilités [7]. La fonction de concentration Q_X d'une variable aléatoire X est définie par la relation

$$Q_X(l) = \sup_{u \in \mathbb{R}} \text{Prob}\,(u < X \leq u + l), \qquad (l > 0).$$

Nous nous intéressons ici à un cas particulier d'essence arithmétique qui apparaît naturellement dans le cadre de l'étude de la structure multiplicative des entiers. Soit D_n la variable aléatoire discrète qui prend, pour chaque entier n, les valeurs $\log d$, lorsque d parcourt l'ensemble des diviseurs de n, avec probabilité uniforme $1/\tau(n)$. Notons $\mathfrak{Q}(n)$ la valeur en $l = 1$ de la fonction de concentration de D_n et posons

$$\Delta(n) = \tau(n)\mathfrak{Q}(n) = \max_u \text{card}\,\{d : d \mid n, e^u < d \leq e^{u+1}\}.$$

L'étude arithmétique de $\Delta(n)$ est particulièrement riche et délicate.

La question de l'ordre normal de $\Delta(n)$ est sous-jacente dans la vieille conjecture d'Erdös affirmant que presque tout entier n possède au moins deux diviseurs d, d', tels que $d < d' \leq 2d$. Cette conjecture a été récemment résolue dans [9]. On connaît même un encadrement relativement précis de l'ordre normal de $\Delta(n)$: on a pour presque tout n [9, 10]

$$(\log \log n)^\gamma < \Delta(n) < \psi(n) \log \log n$$

pour toute constante $\gamma < -\log 2/\log(1 - 1/\log 3) = 0.28754\ldots$, et toute fonction $\psi(n)$ tendant vers l'infini.

Abordée dans [1, 11], l'étude de l'ordre moyen de $\Delta(n)$ a été éclairée sous un angle nouveau dans un important travail de Hooley [8], datant de 1979. L'auteur y montre que le comportement asymptotique de la quantité

$$S(x)=\sum_{n\leqslant x}\Delta(n)$$

intervient de manière cruciale dans plusieurs questions classiques, appartenant à des domaines variés de la Théorie des Nombres, comme le Problème de Waring ou l'Approximation Diophantienne.

Cependant, alors que l'étude analogue pour $\mathfrak{Q}(n)=\Delta(n)/\tau(n)$ est susceptible d'un traitement satisfaisant par une méthode élémentaire simple [5] conduisant à l'évaluation

$$\sum_{n\leqslant x}\mathfrak{Q}(n)=x(\log x)^{-(1/2)+o(1)},$$

la détermination du véritable ordre grandeur de $S(x)$ se révèle particulièrement ardue.

Dans [8], Hooley établit, par une méthode de transformation de Fourier, la majoration

$$S(x)\ll x(\log x)^{(4/\pi)-1}$$

et l'exposant de $\log x$ a été successivement amélioré dans [5], [6], jusqu'à la valeur 0.21969 (pour mémoire, $(4/\pi)-1=0.27323\ldots$). Ces majorations sont très éloignées de la meilleure minoration connue pour $S(x)$,

$$S(x)\gg x\log\log x,$$

établie dans [5].

A défaut d'apporter une réponse optimale au problème, nous nous proposons ici de montrer que $S(x)/x$ est effectivement de l'ordre d'une fonction à croissance lente de $\log x$.

THÉORÈME. *On a pour* $x\geqslant 16$

$$S(x)<x\mathcal{L}(\log x)$$

où $\mathcal{L}$ *désigne la fonction à croissance lente définie par*

$$\mathcal{L}(u)=\exp\{c_0\sqrt{\log u\cdot\log\log u}\}$$

pour une constante absolue positive convenable c_0.

La plupart des applications développées par Hooley dans [8] subissent *ipso facto* une amélioration de même qualité. Définissant pour u assez grand

$$\mathscr{L}'(u)=\exp\{c_0'\sqrt{\log u\cdot\log\log u}\}$$

où $c_0'>c_0$, on obtient ainsi que l'inégalité

$$\|n^2\theta-\gamma\|\leqslant(\mathscr{L}'(\log n)/n)^{1/2}$$

possède, pour tout irrationnel θ et tout réel γ, une infinité de solutions entières n ($\|x\|$ désignant, comme c'est l'usage, la distance de x à l'ensemble des entiers). Une autre conséquence porte sur l'estimation du nombre $\nu(x)$ des entiers $\leqslant x$ représentables comme somme d'un carré et de deux bicarrés. On obtient l'encadrement

$$x/\mathscr{L}'(\log x)<\nu(x)<cx, \qquad (x>x_0).$$

Pour certaines applications, toutefois, Hooley a introduit les généralisations

$$\Delta_r(n)=\max_{u_1,u_2,\ldots,u_{r-1}}\operatorname{card}\{d_1,\ldots,d_{r-1}:d_1\cdots d_{r-1}\mid n,\ e^{u_i}<d_i\leqslant e^{u_i+1},\ (1\leqslant i\leqslant r)\}.$$

(On a donc $\Delta=\Delta_2$. La valeur moyenne de $\Delta_r(n)$, $r\geqslant 3$, a été considérée, outre l'article initial de Hooley, dans [4, 5, 6].) En particulier, c'est le résultat concernant $\Delta_3(n)$ qui est utilisé par Hooley pour améliorer la majoration de la fonction $r_8(n)$ égale au nombre de représentations de n comme somme de 8 cubes. Il est probable que la méthode du présent article soit également pertinente dans le cas des fonctions Δ_r. Toutefois, certaines difficultés nouvelles apparaissent lorsque $r\geqslant 3$, et nous avons préféré reporter cette étude à un travail ultérieur.

La technique développée ici est assez semblable à celle de [10]. Elle procède d'un double principe. Un premier aspect, contingent, réside dans le fait d'approcher $\Delta(n)$ par les normes-L^q successives de la fonction $\Delta(n,u)=\operatorname{card}\{d:d\mid n,\ e^u<d\leqslant e^{u+1}\}$. Un second, fondamental, consiste à réduire la question initiale à l'étude, par récurrence sur l'entier $k\geqslant 1$, du sous-problème obtenu en remplaçant n par le produit de ses k plus petits facteurs premiers.

L'auteur tient à exprimer ici ses remerciements à Richard R. Hall pour son aide lors de la préparation de cet article.

2. Notations et conventions

La lettre p dénote exclusivement un nombre premier. Pour chaque entier n, on note $\tau(n)$ le nombre de ses diviseurs et $\omega(n)$ le nombre de ses facteurs premiers distincts, dont la suite ordonnée est désignée par

$$p_1(n) < p_2(n) < \cdots < p_\omega(n).$$

On pose $P^-(n) = p_1(n)$, $P^+(n) = p_\omega(n)$, $(n > 1)$. Par convention, $P^-(1) = +\infty$, $P^+(1) = 1$.

Pour $x \geqslant 10$, $1 \leqslant n \leqslant x$, on pose

$$x_1 = \exp\left\{\frac{\log x}{(\log\log x)^2}\right\}$$

et l'on définit la quantité

$$K = K(n, x) = \max\{k : 1 \leqslant k \leqslant \omega(n), p_k(n) \leqslant x_1\}.$$

On note alors

$$n_k = \begin{cases} \prod_{1 \leqslant j \leqslant k} p_j(n), & (\text{si } k \leqslant K) \\ n_K, & (\text{si } k > K). \end{cases}$$

Pour chaque n, le nombre n_k est donc un entier sans facteur carré (i.e. $\mu(n_k)^2 = 1$ où μ est la fonction de Möbius) ayant au plus k facteurs premiers, tous $\leqslant x_1$.

On désigne par A_k l'ensemble des entiers a satisfaisant à

$$(A_k) \begin{cases} \mu(a)^2 = 1, \\ P^+(a) \leqslant x_1, \\ \omega(a) = k. \end{cases}$$

Posant

$$L = L(x) = [5 \log\log x], \qquad (x \geqslant 10),$$

nous convenons que le symbole $\sum'$ désigne une sommation portant sur tous les entiers n satisfaisant à

$$(\textstyle\sum')\begin{cases} n \leqslant x, \\ \mu(n)^2 = 1, \\ K(n, x) \leqslant 2L. \end{cases}$$

Pour la variable entière $n \geqslant 1$, on définit les fonctions arithmétiques

$$\Delta(n, u) = \operatorname{card}\{d : d \mid n, e^u < d \leqslant e^{u+1}\}, \qquad (u \in \mathbb{R}),$$

$$\Delta(n) = \max_{u \in \mathbb{R}} \Delta(n, u)$$

$$M_q(n) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta(n, u)^q \, du, \qquad (q \geqslant 1),$$

$$M_q^*(n) = \operatorname{card}\left\{d_1, \ldots, d_q \mid n : \log\left(\frac{\max d_i}{\min d_i}\right) \leqslant 1\right\}, \qquad (q \geqslant 1),$$

$$N_{q,j}(n, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta(n, u)^j \Delta(n, u - v)^{q-j} \, du, \qquad (1 \leqslant j \leqslant q, v \in \mathbb{R}),$$

et les fonctions sommatoires

$$S(x) = \sum_{n \leqslant x} \Delta(n)$$

$$S_1(x) = \sum_{n \leqslant x} \mu(n)^2 \Delta(n)$$

$$S_k'(x) = \textstyle\sum' \Delta(n_k), \qquad (k \geqslant 1)$$

$$T_{k,q}(x) = \textstyle\sum' M_q(n_k)^{1/q}, \qquad (k, q \geqslant 1).$$

La lettre c, avec ou sans indice, désigne une constante absolue positive. Sauf indication contraire explicite, les constantes impliquées par l'utilisation des symboles $\ll$ de Vinogradov et O de Landau sont absolues. L'écriture

$$X \asymp Y$$

signifie: $X \ll Y$ et $Y \ll X$.

Enfin, nous convenons, comme c'est l'usage, qu'une somme (resp. un produit) vide est nulle (resp. égal à 1).

3. Lemmes

Dans cette section, nous nous proposons d'établir, ou de rappeler, les principales assertions auxiliaires qui nous serons utiles dans la suite.

Nous commençons par deux résultats classiques de Théorie Analytique des Nombres. Le premier est une forme faible, susceptible d'une preuve élémentaire simple, d'un résultat de Halberstam et Richert [2]. Le second est un outil fondamental de la Théorie du Crible (cf. par exemple [3] p. 201).

LEMME 1. *Soit f une fonction multiplicative réelle satisfaisant à*

$$0 \leqslant f(p^\nu) \leqslant \lambda_1 \lambda_2^\nu, \qquad (\nu = 1, 2, \ldots),$$

avec $\lambda_1 > 0$, $0 < \lambda_2 < 2$. *Alors on a pour* $x \geqslant 1$

$$\sum_{n \leqslant x} f(n) \ll_{\lambda_1, \lambda_2} x \prod_{p \leqslant x} (1 - p^{-1}) \sum_{\nu=0}^{\infty} f(p^\nu) p^{-\nu}$$

LEMME 2. *Pour* $2 \leqslant y \leqslant c_1 x$, *on a*

$$\operatorname{card}\{n \leqslant x : \mu(n)^2 = 1, P^-(n) > y\} \frac{x}{\log y}$$

LEMME 3. *Pour* $1 \leqslant k \leqslant L$, $a \in A_k$, *on a*

$$\sum_{n_k = a}{}' 1 \asymp \frac{x}{a \log P^+(a)}. \tag{1}$$

Démonstration. Le membre de gauche de (1) est égal à

$$\operatorname{card}\left\{b \leqslant \frac{x}{a} : \mu(b)^2 = 1, P^-(b) > P^+(a), K(b, x) \leqslant 2L - k\right\}. \tag{2}$$

Comme $P^+(a) \leqslant x_1$, on a pour x assez grand

$$a \leqslant x_1^L < c_1 x / x_1.$$

D'après le Lemme 2, on obtient donc, en notant χ la fonction caractéristique des entiers b tels que $\mu(b)^2 = 1$, $P^-(b) > P^+(a)$,

$$\sum_{b \leqslant x/a} \chi(b) \asymp \frac{x}{a \log P^+(a)}. \tag{3}$$

Cela implique la majoration contenue dans (1). Pour établir la minoration, il suffit de remarquer que le cardinal (2) est au moins égal à

$$\sum_{b\leqslant x/a} \chi(b) - \sum_{\substack{b\leqslant x/a\\ \omega(b)\geqslant L}} \chi(b).$$

La seconde somme est majorée pour tout $y\geqslant 1$ par

$$\sum_{b\leqslant x/a} \chi(b) y^{\omega(b)-L} \ll_y \frac{x}{a(\log P^+(a))^y} (\log x)^{y-1-5\log y},$$

d'après le Lemme 1. Le choix optimal $y=5$ rend négatif l'exposant de $\log x$ et fournit donc une estimation d'ordre inférieur au membre de droite de (3). Cela implique le résultat annoncé.

LEMME 4. *On a uniformément pour* $t\geqslant 0$, $x\geqslant 2$, *et* $k\leqslant L$

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ K(n,x)\geqslant k}} \mu(n)^2(\log p_k(n))^{-t} \leqslant c_2 x e^{c_3 t}(1+t)^{-k}. \tag{4}$$

Démonstration. Le membre de gauche de (4) est égal à la somme triple

$$\sum_p (\log p)^{-t} \sum_m \sum_h 1$$

avec les conditions de sommation

$$\begin{cases} mph\leqslant x, & \mu(m)^2=\mu(h)^2=1,\\ \omega(m)=k-1, & p\leqslant x_1,\\ P^+(m)<p<P^-(h). \end{cases} \tag{5}$$

Notons que l'on a pour x assez grand

$pm\leqslant x_1^k \leqslant x_1^L < c_1 x/x_1.$

On peut donc estimer la somme en h par le Lemme 2, soit

$$\sum_h 1 \ll \frac{x}{mp\log p}.$$

De plus, on a, à p fixé,

$$\sum_m \frac{1}{m} \leqslant \frac{1}{(k-1)!} \Big(\sum_{p' \leqslant p} \frac{1}{p'}\Big)^{k-1} \leqslant \frac{(\log\log p + c_3)^{k-1}}{(k-1)!}$$

On peut donc majorer la somme triple par

$$O\Big(\frac{x}{(k-1)!} \sum_p \frac{(\log\log p + c_3)^{k-1}}{p(\log p)^{t+1}}\Big)$$
$$\ll \frac{x}{(k-1)!} \int_e^\infty \frac{(\log\log v + c_3)^{k-1}}{v(\log v)^{t+2}}\, dv = \frac{x}{(k-1)!} \int_0^\infty (w+c_3)^{k-1} e^{-(1+t)w}\, dw,$$

avec le changement de variables $w = \log\log v$. Posons maintenant $z = (1+t)(w+c_3)$. La dernière majoration ne dépasse pas

$$\frac{x}{(k-1)!}(1+t)^{-k} \int_0^\infty z^{k-1} e^{c_3(1+t)-z}\, dz = x e^{c_3(1+t)}(1+t)^{-k}.$$

Cela complète la démonstration.

Notre méthode de majoration de $S(x)$ repose essentiellement sur l'étude en moyenne des normes-L^q de $\Delta(n_k, u)$ par le biais d'une double récurrence, en k et q. Les trois énoncés qui suivent constituent les inégalités fondamentales qui nous permettront d'entreprendre la réalisation de ce programme.

Le résultat suivant a été établi dans [10] (*Lemma* 6).

LEMME 5. *Pour n, $q \geqslant 1$, on a*

$$\Delta(n) \leqslant 2^{1+1/q} M_q(n)^{1/q} \tag{6}$$

$$M_q^*(n) \leqslant 2^q M_q(n). \tag{7}$$

COROLLAIRE. *Pour $n \geqslant 1$, $1 \leqslant q \leqslant r$, on a*

$$M_r(n)^{1/r} \leqslant 2^{1+1/q} M_q(n)^{1/q}. \tag{8}$$

Démonstration. On a

$$M_r(n) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta(n, u)^r\, du \leqslant \Delta(n)^{r-q} M_q(n)$$

d'oú par (6)

$$\begin{aligned} M_r(n) &\leq 2^{(r-q)(1+1/q)} M_q(n)^{1+(r-q)/q} \\ &\leq 2^{r(1+1/q)} M_q(n)^{r/q}, \end{aligned}$$

ce qui équivaut au résultat annoncé.

LEMME 6. *Pour* $n \geq 1$, $q \geq 2$, *et* $1 \leq j \leq q-1$, *on a*

$$M_j(n) \leq M_q(n)^{(j-1)/(q-1)} \tau(n)^{(q-j)/(q-1)}. \tag{9}$$

Démonstration. On a

$$M_1(n) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta(n, u)\, du = \tau(n). \tag{10}$$

Le résultat est donc vrai pour $j=1$. Si $j \geq 2$, il découle encore de (10) en appliquant à l'intégrale $M_j(n)$ l'inégalité de Hölder, avec exposants $(q-1)/(j-1)$, $(q-1)/(q-j)$, pour la décomposition

$$\Delta(n, u)^j = \Delta(n, u)^{q(j-1)/(q-1)} \Delta(n, u)^{(q-j)/(q-1)}.$$

L'énoncé suivant est une évaluation technique qui permettra d'établir, au Lemme 8, l'inégalité de récurrence constituant le principe de base de la méthode.

LEMME 7. *Pour* $a \geq 1$, $q, z \geq 2$, $1 \leq j \leq q-1$, *on a*

$$\sum_{p>z} \frac{1}{p} N_{q,j}(a, \log p)^{1/q} \ll q(M_j(a) M_{q-j}(a)/\log z)^{1/q}. \tag{11}$$

Démonstration. Appliquons l'inégalité de Hölder avec exposants q, $q/(q-1)$, en décomposant le sommant de (11) sous la forme

$$\left(\frac{\log p}{p} N_{q,j}(a, \log p)\right)^{1/q} (p^{-1}(\log p)^{-1/(q-1)})^{(q-1)/q}.$$

On obtient que le membre de gauche de (11) ne dépasse pas

$$\left(\sum_p \frac{\log p}{p} N_{q,j}(a, \log p)\right)^{1/q} \left(\sum_{p>z} p^{-1}(\log p)^{-1/(q-1)}\right)^{(q-1)/q}.$$

Le Théorème des Nombres Premiers permet de majorer le second facteur par

$$O(q(\log z)^{-1/q}).$$

Il suffit donc de montrer

$$\sum_p \frac{\log p}{p} N_{q,j}(a, \log p) \ll 2^q M_j(a) M_{q-j}(a). \tag{12}$$

Le membre de gauche de (12) s'écrit encore

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Delta(a, u)^j \left(\sum_p \Delta(a, u - \log p)^{q-j} \frac{\log p}{p}\right) du. \tag{13}$$

En développant $\Delta(a, u - \log p)^{q-j}$ comme une somme multiple et en intervertissant les sommations, on constate que la somme intérieure en p dans (13) vaut

$$\sum_{d_1,\ldots,d_{q-j} \mid a}^{*} \sum \left\{\frac{\log p}{p} : u - \log(\min d_i) < \log p \leq u - \log(\max d_i) + 1\right\} \tag{14}$$

où l'étoile signifie que la sommation porte sur les $(q-j)$-uples de diviseurs de a tels que $\log(\max d_i/\min d_i) \leq 1$. (On a donc

$$\sum_{d_1,\ldots,d_{q-j} \mid a} 1 = M_{q-j}^*(a) \leq 2^{q-j} M_{q-j}(a) \tag{15}$$

d'après (7)).

Le Théorème des Nombres Premiers, sous la forme faible

$$\sum_{p \leq x} \frac{\log p}{p} = \log x + O(1)$$

montre que l'expression (14) est

$$O(M_{q-j}^*(a)).$$

En reportant dans (13) et en faisant appel à (15), on obtient bien la majoration souhaitée (12).

LEMME 8. *Pour $x, q \geq 2$ et $1 \leq k \leq L$, on a*

$$T_{k+1,q}(x) \leq 2^{1/q} T_{k,q}(x) + c_4 q \sum_{j=1}^{q-1} \sum_{K(n,x)\geq k}{}' \left(\frac{M_j(n_k) M_{q-j}(n_k)}{\log p_k(n)} \right)^{1/q} \tag{16}$$

Démonstration. Si $K(n, x) > k$, on a

$$\Delta(n_{k+1}, u) = \Delta(n_k, u) + \Delta(n_k, u - \log p_{k+1}(n)), \qquad (u \in \mathbb{R}).$$

En élevant cette identité à la puissance q et en intégrant relativement à u, on obtient

$$M_q(n_{k+1}) = 2M_q(n_k) + \sum_{j=1}^{q-1} \binom{q}{j} N_{q,j}(n_k, \log p_{k+1}(n)). \tag{17}$$

D'où, par l'inégalité de Minkowski

$$M_q(n_{k+1})^{1/q} \leq 2^{1/q} M_q(n_k)^{1/q} + 2 \sum_{j=1}^{q-1} N_{q,j}(n_k, \log p_{k+1}(n))^{1/q}. \tag{18}$$

Sommons l'inégalité (18) pour tous les entiers n satisfaisant ($\sum'$) et tels que $n_k = a \in A_k$, en omettant le second terme de la majoration si $K(n, x) = k$ – ce qui est licite puisqu'alors $n_{k+1} = n_k$. Il vient

$$\sum_{n_k = a}{}' M_q(n_{k+1})^{1/q} \leq (2M_q(a))^{1/q} \sum_{n_k=a}{}' 1 + 2 \sum_{j=1}^{q-1} \sum_{\substack{n_k = a \\ K(n,x)>k}}{}' N_{q,j}(a, \log p_{k+1}(n))^{1/q}. \tag{19}$$

La somme intérieure s'écrit encore

$$\sum_{P^+(a) < p \leq x_1} N_{q,j}(a, \log p)^{1/q} \sum_{n_{k+1} = ap}{}' 1 \ll \frac{x}{a \log P^+(a)} \sum_{p > P^+(a)} \frac{1}{p} N_{q,j}(a, \log p)^{1/q},$$

d'après le Lemme 3. On notera que la condition $K(n, x) > k$ est impliquée par $n_{k+1} = ap$. Appliquons le Lemme 7, pour majorer la somme en p, et le Lemme 3 sous la forme

$$\frac{x}{a \log P^+(a)} \ll \sum_{n_k = a}{}' 1.$$

On obtient que la somme intérieure du second terme du membre de droite de

(19) ne dépasse pas

$$\tfrac{1}{2}c_4q(M_j(a)M_{q-j}(a)/\log P^+(a))^{1/q} \sum_{n_k=a}' 1.$$

En reportant dans (19) et en sommant pour $a \in A_k$, il vient

$$\sum_{K(n,x)\geq k}' M_q(n_{k+1})^{1/q} \leq 2^{1/q} \sum_{K(n,x)\geq k}' M_q(n_k)^{1/q} + c_4q\sum_{j=1}^{q-1} \sum_{K(n,x)\geq k}' \left(\frac{M_j(n_k)M_{q-j}(n_k)}{\log p_k(n)}\right)^{1/q}.$$

Cela implique la majoration annoncée, en considérant la relation

$$\sum_{K(n,x)<k}' M_q(n_{k+1})^{1/q} = \sum_{K(n,x)<k}' M_q(n_k)^{1/q} < 2^{1/q} \sum_{K(n,x)<k}' M_q(n_k)^{1/q}.$$

4. Première réduction du problème

Pour des raisons purement techniques, il est agréable de remplacer $S(x)$ par une somme portant sur des nombres sans facteur carré, dans laquelle les arguments de la fonction Δ ont au plus L facteurs premiers, tous $\leq x_1$. Le résultat suivant, auquel nous consacrons cette section, montre qu'une telle substitution peut s'opérer au prix d'un facteur multiplicatif $O((\log\log x)^2)$.

PROPOSITION 1. *On a pour* $x \geq 2$

$$S(x) \ll x \max_{1\leq z\leq x} \left(\frac{S_1(z)}{z}\right) \tag{20}$$

et

$$S_1(x) \ll (\log\log x)^2 S_L'(x). \tag{21}$$

Preuve de (20). Dans un premier temps, nous établissons, par souci de complétude, la majoration

$$S(x) \ll \frac{x}{\log x} \sum_{n\leq x} \frac{\mu(n)^2\Delta(n)}{n} \tag{22}$$

qui est implicitement contenue dans [8] (pp. 119 et 126).

Pour $m, n \geq 1$, on a

$$\Delta(mn) \leq \tau(m)\Delta(n). \tag{23}$$

Cela découle de l'inégalité fonctionnelle

$$\Delta(mn, u) \le \sum_{d \mid m} \Delta(n, u - \log d), \qquad (m, n \ge 1, u \in \mathbb{R}), \tag{24}$$

(qui devient une égalité lorsque $(m, n) = 1$). Pour établir (24), il suffit de remarquer que chaque diviseur de mn s'écrit au moins une fois comme produit d'un diviseur de m par un diviseur de n.

Gardant (23) à l'esprit, on peut écrire

$$\sum_{n \le x} (\log n)\Delta(n) = \sum_{md \le x} \Lambda(d)\Delta(md) \le \sum_{m \le x} \Delta(m) \sum_{d \le x/m} \Lambda(d)\tau(d) \ll x \sum_{m \le x} \frac{\Delta(m)}{m}.$$

Comme on a également

$$\sum_{n \le x} \log\left(\frac{x}{n}\right)\Delta(n) \le x \sum_{n \le x} \frac{\Delta(n)}{n},$$

il vient

$$S(x) \ll \frac{x}{\log x} \sum_{n \le x} \frac{\Delta(n)}{n}. \tag{25}$$

Utilisant la décomposition canonique de chaque entier m sous la forme $n = md^2$, $\mu(m)^2 = 1$, on peut écrire

$$\sum_{n \le x} \frac{\Delta(n)}{n} = \sum_{md^2 \le x} \frac{\mu(m)^2\Delta(md^2)}{md^2} \le \sum_{m \le x} \frac{\mu(m)^2\Delta(m)}{m} \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\tau(d^2)}{d^2}.$$

En reportant dans (25), on obtient

$$S(x) \ll \frac{x}{\log x} \int_1^x \frac{dS_1(z)}{z} = \frac{S_1(x)}{\log x} + \frac{x}{\log x} \int_1^x \left(\frac{S_1(z)}{z}\right) \frac{dz}{z}$$

d'où l'on déduit aisément (20).

Preuve de (21). Il est clair que presque tous les entiers sans facteur carré $\le x$ satisfont la troisième des conditions ($\sum'$). D'où

$$\sum{}' \, 1 \gg x. \tag{26}$$

Cela étant, on a

$$S_1(x) \le \sum{}' \Delta(n) + \sum_{\substack{n \le x \\ \omega(n) > 2L}} \mu(n)^2 \tau(n).$$

La seconde somme est majorée, pour tout $y \ge 1$, par

$$\sum_{n \le x} (2y)^{\omega(n)} y^{-2L} \ll_y x(\log x)^{2y-1-10\log y}$$

d'après le Lemme 1. Pour $y = 5$, l'exposant de $\log x$ est négatif. Compte tenu de (26), on obtient donc

$$S_1(x) \ll \sum{}' \Delta(n). \tag{27}$$

Désignons par a (resp. b) un entier générique satisfaisant à

$$a \in \bigcup_{1 \le k \le 2L} A_k, \qquad (\text{resp. } \mu(b)^2 = 1, P^-(b) > x_1).$$

Pour x assez grand, on a

$$a \le x_1^{2L} \le c_1 x / x_1$$

Maintenant, on a d'une part

$$\sum{}' \Delta(n_K) = \sum_a \Delta(a) \sum_{b \le x/a} 1 \gg \sum_a \frac{x\Delta(a)}{a \log x_1}, \tag{28}$$

d'après le Lemme 2. D'autre part, en utilisant (23),

$$\begin{aligned} \sum{}' \Delta(n) \le \sum{}' \Delta(n_K) \tau\left(\frac{n}{n_K}\right) &= \sum_a \Delta(a) \sum_{b \le x/a} \tau(b) \\ &\ll \sum_a \Delta(a) \frac{x \log x}{a(\log x_1)^2} = (\log\log x)^2 \sum_a \frac{x\Delta(a)}{a \log x_1} \end{aligned} \tag{29}$$

où la seconde majoration provient du Lemme 1. Il découle de (28) et (29)

$$\sum{}' \Delta(n) \ll (\log\log x)^2 \sum{}' \Delta(n_K). \tag{30}$$

Enfin, on peut écrire, puisque $n_L = n_K$ si $K \le L$,

$$S'_L(x) = \sum{}' \Delta(n_L) = \sum{}' \Delta(n_K) - \sum_{K(n,x)>L(x)}{}' (\Delta(n_K) - \Delta(n_L)).$$

Le dernière somme ne dépasse pas

$$\sum_{\omega(n)>L(x)}{}' 2^{\omega(n)} \le \sum_{n\le x} (2y)^{\omega(n)} y^{-L} \ll_y x(\log x)^{2y-1-5\log y},$$

pour tout $y \ge 1$. Comme le choix optimal $y = \frac{5}{2}$ fournit encore un exposant négatif, on obtient grâce à (26)

$$S'_L(x) \asymp \sum{}' \Delta(n_K). \tag{31}$$

Le résultat annoncé découle alors de (30).

5. Fin de la démonstration du Théorème

Posons

$$T^*_{k,q}(x) = \sum{}' (M_q(n_k)^{1/q} + 2^{k/q}).$$

Le Théorème découle de l'estimation suivante.

LEMME 9. *Pour $x, q \ge 2$, et $1 \le k \le L$, on a*

$$T^*_{k+1,q}(x) \le T^*_{k,q}(x)\{2^{1/q} + c_5 q^2 (\tfrac{9}{8})^{-k/q(q-1)}\}. \tag{32}$$

Avant de prouver ce résultat, montrons comment on peut en déduire la majoration annoncée pour $S(x)$.

D'après le Lemme 5 et la Proposition 1, on a

$$S_1(x) \ll (\log\log x)^2 T^*_{L,q}(x) \tag{33}$$

pour tout $q \ge 1$. Nous allons majorer $T^*_{L,q}(x)$ pour la plus grande valeur possible de q en utilisant d'une part (32) et d'autre part l'inégalité

$$T^*_{k,r}(x) \le 3T^*_{k,q}(x), \qquad (2 \le q \le r,\ k \ge 1), \tag{34}$$

qui découle trivialement du Corollaire au Lemme 5.

La relation (32) implique l'existence d'une constante absolue c telle que l'on ait pour $k_0 \leq k \leq L$ et $q \leq (ck/\log k)^{1/2}$

$$T^*_{k+1,q}(x) \leq e^{1/q} T^*_{k,q}(x). \tag{35}$$

Posons

$$k_j = 2^j, \qquad q_j = [(ck_j/\log k_j)^{1/2}], \qquad (j \geq 1),$$

et définissons I, J par

$$I = 1 + \left[\frac{\log k_0}{\log 2}\right], \qquad J = \left[\frac{\log L}{\log 2}\right].$$

On a

$$T^*_{k_I,q_I}(x) \leq \sum{}' (4.2^{k_I} + 2^{k_I/q_I}) \leq c_6 x$$

et, pour $I \leq j < J$, d'après (35) et (34),

$$T^*_{k_{j+1},q_j}(x) \leq \exp\{k_j/q_j\} T^*_{k_j,q_j}(x),$$
$$T^*_{k_{j+1},q_{j+1}}(x) \leq 3 T^*_{k_{j+1},q_j}(x).$$

Cela implique

$$\begin{aligned} T^*_{k_J,q_J}(x) &\leq c_6 x \exp\left\{J \log 3 + \sum_{j=I}^{J-1} (k_j/q_j)\right\} \\ &\leq x \exp\{c_7 (L \log L)^{1/2}\} \end{aligned}$$

En appliquant alors $(L - k_J)$ fois (35), il vient

$$\begin{aligned} T^*_{L,q_J}(x) &\leq \exp\{(L - k_J)/q_J\} T^*_{k_J,q_J}(x) \\ &\leq x \exp\{c_8 (L \log L)^{1/2}\} \end{aligned}$$

En reportant dans (33), on obtient donc

$$S_1(x) \leq x \exp\{c_9 (\log\log x \cdot \log\log\log x)^{1/2}\}$$

d'où le Théorème, d'après la première partie de la Proposition 1.

Preuve du Lemme 9. Si $K(n, x) \geq k$, on a $\tau(n_k) = 2^k$, d'où par (9), pour

$1 \leq j \leq q-1$,

$$M_j(n_k)M_{q-j}(n_k) \leq M_q(n_k)^{(q-2)/(q-1)} 2^{kq/(q-1)}$$

En reportant dans (16), il vient

$$\sum{}' M_q(n_{k+1})^{1/q} \leq 2^{1/q} \sum{}' M_q(n_k)^{1/q} + c_4 q^2 2^{k/(q-1)} \sum_{K(n,x) \geq k}{}' M_q(n_k)^{(q-2)/q(q-1)} (\log p_k(n))^{-1/q}$$

d'où en ajoutant $\sum' 2^{(k+1)/q}$ aux deux membres

$$T^*_{k+1,q}(x) \leq 2^{1/q} T^*_{k,q}(x) + c_4 q^2 2^{k/(q-1)} \sum_{K(n,x) \geq k}{}' (M_q(n_k)^{1/q} + 2^{k/q})^{(q-2)/(q-1)} (\log p_k(n))^{-1/q}.$$

Si $q \geq 3$, appliquons l'inégalité de Hölder à la dernière somme avec exposants $(q-1)/(q-2)$, $q-1$. En utilisant le Lemme 4 pour estimer le second facteur, on obtient

$$\sum_{K(n,x) \geq k}{}' (M_q(n_k)^{1/q} + 2^{k/q})^{(q-2)/(q-1)} (\log p_k(n))^{-1/q} \ll T^*_{k,q}(x)^{(q-2)/(q-1)} \left(x \left(2 - \frac{1}{q}\right)^{-k} \right)^{1/(q-1)}$$

De plus, cette inégalité est également vraie pour $q = 2$, toujours d'après le Lemme 4. On peut donc finalement écrire, pour $1 \leq k \leq L$, $q \geq 2$, $x \geq 2$,

$$T^*_{k+1,q}(x) \leq 2^{1/q} T^*_{k,q}(x) + c_{10} q^2 \left(1 - \frac{1}{2q}\right)^{-k/(q-1)} x^{1/(q-1)} T^*_{k,q}(x)^{(q-2)/(q-1)}. \tag{36}$$

Cette majoration serait également valable pour les fonctions $T_{k,q}(x)$ au lieu de $T^*_{k,q}(x)$. A ce stade, cependant, nous utilisons la minoration

$$T^*_{k,q}(x) \geq 2^{k/q} \sum{}' 1 \gg 2^{k/q} x \tag{37}$$

qui n'est pas immédiate pour $T_{k,q}(x)$ car les n_k n'ont pas nécessairement k facteurs premiers.

De (36) et (37), on déduit

$$T^*_{k+1,q}(x) \leq T^*_{k,q}(x)\left\{2^{1/q} + c_{11}q^2\left(1-\frac{1}{2q}\right)^{-k/(q-1)} 2^{-k/q(q-1)}\right\}.$$

L'inégalité souhaitée (32) découle de cette majoration puisqu'on a pour $q \geq 2$

$$2\left(1-\frac{1}{2q}\right)^q \geq \frac{9}{8}.$$

Cela achève la démonstration.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Erdős, P., *Problem* 218 *and solution*, Can. math. Bull *17* (1974), 621–622.

[2] Halberstam, H. and Richert, H. E., *On a result of R. R. Hall*, J. Number Theory (1) *11* (1979), 76–89.

[3] Halberstam, H. and Roth, K. F., *Sequences*, Oxford at the Clarendon Press (1966).

[4] Hall, R. R., *Hooley's Δ_r-functions when r is large*, Michigan J. Math., à paraître.

[5] Hall, R. R. and Tenenbaum, G., *On The average and normal orders of Hooley's Δ-function*, J. London Math Soc (2) *25* (1982), 392–406.

[6] Hall, R. R. and Tenenbaum, G., The average orders of Hooley's Δ_r-functions, *Mathematika, 31* (1984), 98–109.

[7] Hengartner, W., Theodorescu, R., *Concentration functions*, Academic Press (1973).

[8] Hooley, C., *On a new technique and its application to the theory of numbers*, Proc. London Math. Soc. (3) *38* (1979), 115–151.

[9] Maier, H., and Tenenbaum, G., *On the set of divisors of an integer*, Invent. Math. *76* (1984), 121–128.

[10] Maier, H. and Tenenbaum, G., *On the normal concentration of divisors*, J. London Math. Soc., à paraître.

[11] Nicolas, J. L., *Quelques méthodes élémentaires en théorie des nombres*, Sém. Bordeaux no. 13 (1974/75).

Universite de Nancy I
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
B.P. no 239
54506 – Vandoeuvre lès Nancy Cedex

Reçu le 8 octobre 1984