

Sur le biais d'une loi de probabilité relative aux entiers friables

Gérald Tenenbaum

Abstract. The standard probability law on the set $S(x, y)$ of y -friable integers not exceeding x assigns to each friable integer n a probability proportional to $1/n^\alpha$, where $\alpha = \alpha(x, y)$ is the saddle-point of the inverse Laplace integral for $\Psi(x, y) := |S(x, y)|$. This law presents a structural bias inasmuch it weights integers $> x$. We propose a quantitative measure of this bias and exhibit a related Gaussian distribution.

Keywords : Friable integers, integers without small prime factors, smooth numbers, saddle-point method, delay-differential equations, probabilistic models.

Mots-clefs : entiers friables, entiers sans grand facteur premier, méthode du col, équations différentielles aux différences, modèles probabilistes.

2020 Mathematics Subject Classification : 11N25, 11N37.

1. Introduction

On dit qu'un entier naturel n est y -friable si son plus grand facteur premier $P^+(n)$, avec la convention $P^+(1) = 1$, n'excède pas y . Désignons par $S(x, y)$ l'ensemble des entiers y -friables n'excédant pas x et par $\Psi(x, y)$ son cardinal. Posons

$$\zeta(s, y) := \prod_{p \leq y} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}, \quad \varphi_y(s) := -\frac{\zeta'(s, y)}{\zeta(s, y)} = \sum_{p \leq y} \frac{\log p}{p^s - 1} \quad (y \geq 2, \Re s > 0),$$

où, ici et dans la suite, la lettre p désigne un nombre premier. Le point-selle $\alpha = \alpha(x, y)$ apparaissant dans la formule asymptotique de Hildebrand–Tenenbaum [10]

$$(1.1) \quad \Psi(x, y) = \frac{x^\alpha \zeta(\alpha, y)}{\alpha \sqrt{2\pi |\varphi'_y(\alpha)|}} \left\{1 + O\left(\frac{1}{u} + \frac{\log y}{y}\right)\right\} \quad (x = y^u \geq y \geq 2)$$

est l'unique solution réelle positive de l'équation $\varphi_y(\alpha) = \log x$. On a [10; (2.4)]

$$(1.2) \quad \alpha \log y = \left\{1 + O\left(\frac{\log_2 2y}{\log y}\right)\right\} \log\left(1 + \frac{y}{\log x}\right) \quad (x \geq y \geq 2).$$

Ici et dans la suite, nous notons \log_k la k -ième itérée de la fonction logarithme.

La loi de probabilité définie par

$$(1.3) \quad \mathbb{P}_{x,y}(\{n\}) := 1/\{n^\alpha \zeta(\alpha, y)\} \quad (P^+(n) \leq y)$$

apparaît naturellement dans la théorie des entiers friables, notamment dans la modélisation des fonctions additives sur $S(x, y)$: voir [3], [4], [12], [2]. La nature multiplicative de la dépendance en n de (1.3) est particulièrement utile en pratique, mais implique que la probabilité $\mathbb{P}_{x,y}$ charge des entiers y -friables excédant x — un biais génériquement compensé par la décroissance rapide de $\mathbb{P}_{x,y}(\{n > t\})$ lorsque $t/x \rightarrow \infty$. Une description de certaines conséquences de ce biais et une proposition de redressement partiel apparaissent dans [5]. Posant

$$D(x, y, z) := \sum_{n \in S(z, y)} \frac{1}{n^{\alpha(x, y)}} \quad (x \geq y \geq 2, z \geq 2),$$

nous avons ainsi

$$P(x, y, z) := \mathbb{P}_{x,y}(\{n \leq z\}) = D(x, y, z)/\zeta(\alpha, y) < 1,$$

de sorte que le comportement asymptotique de cette quantité, notamment lorsque z est, en un sens à préciser, voisin de x , fournit une mesure quantitative du biais.

Notre premier résultat consiste en une évaluation de $P(x, y, z)$ lorsque $\log(z/x)$ est convenablement dominé. L'énoncé nécessite quelques notations supplémentaires. Désignons par

$$\Phi(h) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^h e^{-t^2/2} dt$$

la fonction de répartition de la loi normale, notons traditionnellement

$$u := (\log x)/\log y, \quad \bar{u} := \min(y, \log x)/\log y,$$

et posons

$$(1.4) \quad \Theta^2 = \Theta(x, y)^2 := \frac{|\varphi'_y(\alpha)|}{(\log y)^2} \\ = u \left(1 + \frac{\log x}{y}\right) \left\{1 + O\left(\frac{1}{\log(u+1)} + \frac{1}{\log y}\right)\right\} \quad (x \geq y \geq 2),$$

où l'estimation provient de [10; (2.5)]. Désignons ensuite par $\xi(t)$ la solution réelle positive de l'équation $e^\xi = 1 + t\xi$ lorsque $t > 1$ et convenons que $\xi(1) := 0$. La fonction ξ vérifie classiquement⁽¹⁾

$$\xi(t) = \log t + \log_2 t + O\left(\frac{\log_2 t}{\log t}\right), \quad \xi'(t) = \frac{1}{t} + \frac{1}{t \log t} + O\left(\frac{1}{t(\log t)^2}\right) \quad (t \rightarrow \infty).$$

Notons alors que, pour tout $\varepsilon > 0$ fixé, nous avons d'après (1.4) et [10; (7.19)]

$$(1.5) \quad \Theta \asymp \frac{u}{\sqrt{\bar{u}}} \quad (x \geq y \geq 2), \quad \Theta = \frac{1 + O(1/\log y)}{\sqrt{\xi'(u)}} \quad ((\log x)^{1+\varepsilon} < y \leq x).$$

Théorème 1.1. *Nous avons*

$$(1.6) \quad P(x, y, z) \asymp 1 - P(x, y, z) \asymp 1 \quad (x \geq y \geq 2, \log z \gg \log x, \log(z/x) \ll \sqrt{\bar{u}} \log y),$$

$$(1.7) \quad P(x, y, z) = \Phi(h) + O\left(\frac{1}{\bar{u}^{1/3}}\right) \quad (x \geq y \geq 2, z = xy^{\Theta h}),$$

En particulier, $P(x, y, x) = \frac{1}{2} + O(1/\bar{u}^{1/3}) \quad (x \geq y \geq 2)$.

Nous verrons que ces résultats découlent assez facilement des renseignements spécifiques issus de la méthode du col pour le comportement local de $\Psi(x, y)$. Nous n'avons pas cherché à affiner le terme d'erreur de (1.7).⁽²⁾ Cependant, la relation $\lim P(x, y, x) = \frac{1}{2}$ nécessite bien $\bar{u} \rightarrow \infty$. En effet, les estimations

$$\alpha(x, x) = 1 + O\left(\frac{1}{(\log x)^2}\right), \quad \alpha(x, 2) = \frac{1}{\log x} + O\left(\frac{1}{(\log x)^2}\right), \\ \zeta(\alpha, x) = e^\gamma \log x + O(1), \quad \zeta(\alpha, 2) = \frac{\log x}{\log 2} + O(1), \\ D(x, x, x) = \log x + O(1), \quad D(x, 2, x) = \left(1 - \frac{1}{e}\right) \frac{\log x}{\log 2} + O(1),$$

où γ désigne la constante d'Euler, impliquent, lorsque $x \rightarrow \infty$,

$$P(x, x, x) = e^{-\gamma} + o(1), \quad P(x, 2, x) = 1 - \frac{1}{e} + o(1).$$

Les évaluations du Théorème 1.1 permettent une mesure en moyenne de la pertinence de l'approximation

$$\frac{\Psi(x/d, y)}{\Psi(x, y)} \approx \frac{1}{d^\alpha} = \mathbb{P}_{x, y}(\{n \equiv 0 \pmod{d}\}) \quad (P^+(d) \leq y),$$

qui s'est révélée cruciale dans nombre de problèmes, comme l'estimation de la constante de Turán-Kubilius friable — voir notamment [2], [3], [12], [8] — ou encore l'évaluation asymptotique des valeurs moyennes friables de certaines fonctions arithmétiques — cf., entre autres, [15], [9], [16], [17].

1. Voir par exemple [14; lemme III.5.11] et la remarque qui suit l'énoncé de [14; th. III.5.13].

2. La démonstration fournit d'ailleurs une estimation légèrement plus précise et l'on pourrait, au prix de quelques complications techniques, obtenir une décroissance en e^{-ch^2} du terme d'erreur.

Posons

$$R_d(x, y) := \frac{\Psi(x, y)}{d^\alpha} - \Psi\left(\frac{x}{d}, y\right), \quad \sum_{d \in S(x, y)} R_d(x, y) =: \Psi(x, y)D(x, y, x) \{1 - \Delta(x, y)\}.$$

Notant $\tau(n)$ le nombre total des diviseurs d'un entier n , nous avons alors

$$\Psi_\tau(x, y) := \sum_{n \in S(x, y)} \tau(n) = \sum_{d \in S(x, y)} \Psi\left(\frac{x}{d}, y\right), \quad \Delta(x, y) = \frac{\Psi_\tau(x, y)}{\Psi(x, y)D(x, y, x)}.$$

Les estimations de Drappeau [6] pour $\Psi_\tau(x, y)$, elles-mêmes obtenues par la méthode du col, permettent une estimation de $\Delta(x, y)$ valable uniformément pour $x \geq y \geq 2$.

Nous considérons le domaine

$$(H_\varepsilon) \quad x \geq 3, \quad e^{(\log_2 x)^{5/3+\varepsilon}} \leq y \leq x,$$

notons ϱ la fonction de Dickman (cf. [14; ch. III.5]) et ϱ_2 son carré de convolution.

Le comportement asymptotique de $\varrho(t)$ est intimement lié à celui de la fonction $\xi(t)$ définie précédemment. Notant $I(s) := \int_0^s (e^v - 1) dv/v$, de sorte que (cf. [14; th. III.5.10])

$$\widehat{\varrho}(-s) := \int_0^\infty \varrho(v) e^{vs} dv = e^{\gamma + I(s)},$$

nous avons (cf. [14; th. III.5.13])

$$(1.8) \quad \begin{aligned} \varrho(t) &= \left\{1 + O\left(\frac{1}{t}\right)\right\} \sqrt{\frac{\xi'(t)}{2\pi}} e^{-t\xi(t)} \widehat{\varrho}(-\xi(t)) \\ &= \left\{1 + O\left(\frac{1}{t}\right)\right\} \sqrt{\frac{\xi'(t)}{2\pi}} \exp\left\{\gamma - \int_1^t \xi(s) ds\right\} \end{aligned} \quad (t \rightarrow \infty),$$

une formule due à Alladi [1], et, d'après [13; th.1 & (3.10)] ou [11; th. 2]⁽³⁾,

$$(1.9) \quad \varrho_2(t) = \left\{1 + O\left(\frac{1}{t}\right)\right\} \sqrt{\frac{\xi'(t/2)}{4\pi}} \exp\left\{2\gamma - 2 \int_1^{t/2} \xi(s) ds\right\} = \varrho(t) 2^{t+O(t/\log t)} \quad (t \rightarrow \infty).$$

Définissons

$$\lambda(s, t) := \int_0^s \varrho(v) e^{v\xi(t)} dv \quad (s \geq 0, t \geq 1).$$

Nous verrons au §3 que

$$(1.10) \quad \lambda(s, t) = \left\{\Phi\left(\sqrt{\xi'(t)}(s-t)\right) + O\left(\frac{1}{t}\right)\right\} \widehat{\varrho}(-\xi(t)) \quad (s \geq 0, t \rightarrow \infty).$$

Posons encore

$$\begin{aligned} g(v) &:= v \log 4 - (1+2v) \log\left(\frac{1+2v}{1+v}\right) \quad (v \geq 0), \\ \vartheta(x, y) &:= \begin{cases} 2 \int_{u/2}^u \{\xi(u) - \xi(t)\} dt & \text{si } (x, y) \in (H_\varepsilon), \\ ug\left(\frac{y}{\log x}\right) & \text{dans le cas contraire,} \end{cases} \end{aligned}$$

et notons que

$$\begin{aligned} \vartheta(x, y) &\asymp \bar{u} \quad (x \geq y \geq 2), \\ \vartheta(x, y) &= (1 - \log 2)u + O(u/\log u) \quad (u \rightarrow \infty, y/\log x \rightarrow \infty), \\ \vartheta(x, y) &= (\log 4 - 1)\bar{u} + O(\bar{u}^2/u) \quad (y/\log x \rightarrow 0). \end{aligned}$$

3. En observant que ϱ_2 est solution de l'équation différentielle aux différences $t\varrho_2'(t) - \varrho_2(t) + 2\varrho_2(t-1) = 0$ ($t > 1$) avec la condition initiale $\varrho_2(t) = t$ ($0 \leq t \leq 1$).

Enfin, définissons

$$\nu(t) := \frac{\varrho_2(t)}{\varrho(t)\lambda(t,t)} = \left\{1 + O\left(\frac{1}{t}\right)\right\} \sqrt{\frac{2\xi'(t/2)}{\xi'(t)}} \exp\left\{-\int_{t/2}^t \xi'(s)(2s-t) ds\right\} \quad (t \geq 1),$$

où la formule asymptotique résulte de (1.8), (1.9) et (1.10).

Théorème 1.2. *Posons $\varepsilon_y := 1/\sqrt{\log y}$. Nous avons uniformément*

$$(1.11) \quad \Delta(x, y) \asymp e^{-\vartheta(x,y)+O(\varepsilon_y \bar{u})} \quad (x \geq y \geq 2).$$

De plus, dans le domaine (H_ε) , le terme $O(\varepsilon_y \bar{u})$ dans (1.11) peut être omis et nous avons

$$(1.12) \quad \Delta(x, y) = \nu(u) \left\{1 + O\left(\frac{\log(u+1)}{\log y}\right)\right\}.$$

La technique du présent travail pourrait être adaptée à l'étude de moyennes pondérées des restes $R_d(x, y)$.

2. Preuve du Théorème 1.1

Lorsque \bar{u} est borné, la relation (1.7) est triviale. Lorsque u est borné, (1.6) découle de l'estimation⁽⁴⁾ $\alpha(x, y) = 1 + O(1/\log x)$ et du fait que $\Psi(x, y) \asymp x$, qui découle par exemple de (3.2) *infra*. Lorsque y est borné, nous avons $\alpha \sim \pi(y)/\log x$ et, posant $\nu_p := 1 + \lfloor (\log z)/\log p \rfloor$, $\mu_p := 1 + \lfloor (\log z)/(\pi(y) \log p) \rfloor$

$$\prod_{p \leq y} \frac{1 - p^{-\mu_p \alpha}}{1 - p^{-\alpha}} \leq D(x, y, z) \leq \prod_{p \leq y} \frac{1 - p^{-\nu_p \alpha}}{1 - p^{-\alpha}} \quad (\log(z/x) \ll 1),$$

ce qui implique bien (1.6).

Nous pouvons donc nous placer dans la circonstance où la quantité \bar{u} est arbitrairement grande.

Notant $(\log z)/\log y = u + \Theta h$, l'hypothèse relative à (1.6) est $\Theta h \ll \sqrt{\bar{u}}$. Puisque $\Theta \asymp u/\sqrt{\bar{u}}$ par (1.4), on voit que (1.6) est une conséquence de (1.7).

Prouvons à présent (1.7).

Posons $f(\sigma) := \sigma \log x + \log \zeta(\sigma, y)$, $\sigma_j := (-1)^j f^{(j)}(\alpha)$. Nous avons alors $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = (\Theta \log y)^2$, et (voir [10]), pour chaque $j \geq 2$ fixé,

$$(2.1) \quad \sigma_j \asymp \bar{u}^{1-j} (\log x)^j.$$

Notons $\alpha_v := \alpha(y^v, y)$ et $\sigma_{j,v} = (-1)^j f^{(j)}(\alpha_v)$. La dérivée de α_v en fonction de v vérifie (voir par exemple [10; (6.6)])

$$(2.2) \quad -\alpha'_v = \frac{\log y}{\sigma_{2,v}} \asymp \frac{\bar{v}}{v^2 \log y}.$$

Compte tenu de cette estimation, nous déduisons de [14; cor. III.5.23] et [3; th. 2.4] que

$$(2.3) \quad \Psi(t, y)/t^\alpha \ll \Psi(x, y)/x^\alpha \quad (t \geq x),$$

$$(2.4) \quad \Psi(t, y)/t^\alpha \asymp \Psi(x, y)/x^\alpha \quad (x^{1-1/\sqrt{\bar{u}}} \leq t \leq x^{1+1/\sqrt{\bar{u}}}),$$

$$(2.5) \quad \frac{\Psi(t, y)}{t^\alpha} \ll \frac{\Psi(x, y)}{x^\alpha} e^{-b(1-v)^2 \bar{u}} \quad (1 \leq t = x^v \leq x^{1-1/\sqrt{\bar{u}}}),$$

où b est une constante absolue positive.

Nous pouvons clairement supposer $|h|\Theta \leq u/\bar{u}^{1/3}$. Il découle de (2.3), (2.4), (2.5) et (1.1) que

$$\begin{aligned} D(x, y, z) &= \int_{1-}^z \frac{d\Psi(t, y)}{t^\alpha} = \frac{\Psi(z, y)}{z^\alpha} + \alpha \int_1^z \frac{\Psi(t, y)}{t^{\alpha+1}} dt \\ &= \alpha \int_{x^{1-1/\bar{u}^{1/3}}}^z \frac{\Psi(t, y)}{t^{\alpha+1}} dt + O\left(\frac{\Psi(x, y)}{x^\alpha} + \frac{\alpha \Psi(x, y) \log x}{x^\alpha} \int_0^{1-1/\bar{u}^{1/3}} e^{-b(1-v)^2 \bar{u}} dv\right) \\ &= \alpha \int_{x^{1-1/\bar{u}^{1/3}}}^z \frac{\Psi(t, y)}{t^{\alpha+1}} dt + O\left(\frac{\zeta(\alpha, y)}{\sqrt{\bar{u}}}\right), \end{aligned}$$

où nous avons utilisé l'estimation $\alpha \gg \bar{u}/(u \log y)$, qui équivaut à $\alpha \sqrt{\sigma_2} \gg \sqrt{\bar{u}}$.

4. Voir (3.1) *infra*.

Par (1.1), il suit

$$(2.6) \quad D(x, y, z) = \frac{\zeta(\alpha_u, y) \log y}{\sqrt{2\pi\sigma_{2,u}}} \int_{u-u/\bar{u}^{1/3}}^{u+\Theta h} e^{r(u,v)} dv + O\left(\frac{\zeta(\alpha, y)}{\sqrt{u}}\right),$$

avec

$$\begin{aligned} r(u, v) &:= \log\left(\frac{\zeta(\alpha_v, y)}{\zeta(\alpha_u, y)}\right) + v(\alpha_v - \alpha_u) \log y - \frac{1}{2} \log\left(\frac{\sigma_{2,v}}{\sigma_{2,u}}\right) + \log\left(\frac{\alpha_u}{\alpha_v}\right) \\ &= \frac{1}{2}(\alpha_u - \alpha_v)^2 \sigma_{2,t} + (v - u)(\alpha_v - \alpha_u) \log y + \frac{1}{2} \log\left(\frac{\sigma_{2,v}}{\sigma_{2,u}}\right) + \log\left(\frac{\alpha_u}{\alpha_v}\right) \\ &= \frac{1}{2}(\alpha_u - \alpha_v)^2 \sigma_{2,t} - (\alpha_u - \alpha_v)^2 \sigma_{2,\tau} + \frac{1}{2} \log\left(\frac{\sigma_{2,v}}{\sigma_{2,u}}\right) + \log\left(\frac{\alpha_u}{\alpha_v}\right), \end{aligned}$$

où t et τ sont convenablement choisis sur le segment $\mathfrak{S}(u, v) := \{\vartheta u + (1 - \vartheta)v : 0 \leq \vartheta \leq 1\}$. Comme nous avons également

$$\begin{aligned} \max_{t \in \mathfrak{S}(u,v)} |\sigma_{2,t} - \sigma_{2,u}| &\ll \frac{(u-v)\bar{u}\sigma_{3,u}}{u^2 \log y} \ll \frac{(u-v)\sigma_{2,u}}{u}, \\ \alpha_v - \alpha_u &= \frac{(u-v) \log y}{\sigma_{2,s}} = \frac{(u-v) \log y}{\sigma_{2,u}} \left\{1 + O\left(\frac{u-v}{u}\right)\right\}, \end{aligned}$$

pour une valeur adéquate $s \in \mathfrak{S}(u, v)$, il vient

$$\begin{aligned} r(u, v) &= -\frac{(u-v)^2 (\log y)^2}{2\sigma_{2,u}} \left\{1 + O\left(\frac{1}{\bar{u}^{1/3}}\right)\right\} + O\left(\frac{1}{\bar{u}^{1/3}}\right) \\ &= -\frac{(u-v)^2}{2\Theta^2} \left\{1 + O\left(\frac{1}{\bar{u}^{1/3}}\right)\right\} + O\left(\frac{1}{\bar{u}^{1/3}}\right), \end{aligned}$$

où nous avons à nouveau utilisé la minoration $\alpha_u \gg \bar{u}/(u \log y)$. En reportant dans (2.6), nous obtenons

$$D(x, y, z) = \left\{1 + O\left(\frac{1}{\bar{u}^{1/3}}\right)\right\} \zeta(\alpha_u, y) \Phi(h) + O\left(\frac{\zeta(\alpha, y)}{\sqrt{u}}\right) = \zeta(\alpha_u, y) \left\{\Phi(h) + O\left(\frac{1}{\bar{u}^{1/3}}\right)\right\}.$$

3. Précisions pour les grandes valeurs de y

La formule (1.7) peut être affinée lorsque le paramètre y est assez grand en fonction de x . Soit $\varepsilon > 0$. Dans le domaine (H_ε) , nous avons

$$(3.1) \quad \alpha = 1 - \xi(u)/\log y + O(1/(\log x \log y)),$$

Compte tenu de l'évaluation de Hildebrand (cf. [14; cor. III.5.19])

$$(3.2) \quad \Psi(y^v, y) = y^v \varrho(v) \left\{1 + O\left(\frac{\log(v+1)}{\log y}\right)\right\} \quad ((y^v, y) \in (H_\varepsilon)),$$

et de [14; lemme III.5.16]⁽⁵⁾, il suit, dans le domaine (H_ε) pour $\log(z/x) \ll (\log x)/u^{1/3}$,

$$\begin{aligned} D(x, y, z) &= \alpha \int_1^z \frac{\Psi(t, y)}{t^{\alpha+1}} dt + O\left(\frac{\Psi(x, y)}{x^\alpha}\right) \\ &= \left\{1 + O\left(\frac{\log(u+1)}{\log y}\right)\right\} (\log y) \int_0^w e^{(1-\alpha)v \log y} \varrho(v) dv + O\left(\frac{\zeta(\alpha, y)}{\sqrt{u} \log y}\right) \\ (3.3) \quad &= \kappa(u, w) (\log y) \widehat{\varrho}(-\xi(u)) + O\left(\frac{\zeta(\alpha, y) \log(u+1)}{\log y}\right) \\ &= \zeta(\alpha, y) \left\{\kappa(u, w) + O\left(\frac{\log(u+1)}{\log y}\right)\right\}, \end{aligned}$$

avec toujours $w = (\log z)/\log y$ et

$$(3.4) \quad \kappa(u, w) := \frac{1}{\widehat{\varrho}(-\xi(u))} \int_0^w e^{v\xi(u)} \varrho(v) dv.$$

Pour $u = w = 1$, on retrouve bien $\kappa(1, 1) = e^{-\gamma}$ puisque $\xi(1) = 0$.

5. Sous la forme $\widehat{\varrho}(-\xi(u)) \ll \zeta(\alpha, y)/\log y$.

Nous pouvons également montrer que

$$(3.5) \quad \kappa\left(u, u + \frac{s}{\sqrt{\xi'(u)}}\right) = \Phi(s) + O\left(\frac{1}{u}\right) \quad (u \geq 1, u + s/\sqrt{\xi'(u)} \geq 0).$$

Comme le terme d'erreur de (3.3) est plus précis que celui de (1.7) dès que $y > e^{(\log x)^{1/4}(\log_2 x)^{3/4}}$, nous obtenons dans ce domaine un renforcement de (1.7) : nous verrons que, sous cette condition, la relation (3.5) implique en effet

$$(3.6) \quad \kappa(u, u + \Theta h) = \Phi(h) + O\left(\frac{|h|e^{-h^2/2}}{\log y} + \frac{1}{u}\right).$$

Pour établir (3.5), on peut supposer $s \ll \sqrt{\log 2u}$. La première étape consiste à majorer

$$E(u) := \int_0^{u-u^{2/3}} e^{v\xi(u)} \varrho(v) dv = \int_{u^{2/3}}^u \varrho(u-v) e^{(u-v)\xi(u)} dv \ll \int_{u^{2/3}}^u \frac{e^{I(\xi(u))-H(u,v)}}{\sqrt{u-v+1}} dv,$$

avec

$$\begin{aligned} H(u, v) &:= I(\xi(u)) - I(\xi(u-v)) - (u-v)\{\xi(u) - \xi(u-v)\} \\ &= \int_{u-v}^u (t-u+v)\xi'(t) dt \geq \frac{1}{2}v \log\left(\frac{1}{1-v/2u}\right) \geq \frac{v^2}{4u}, \end{aligned}$$

puisque $I(\xi(t))' = t\xi'(t) \geq 1$. Il suit

$$E(u) \ll e^{I(\xi(u))} \int_{u^{2/3}}^u e^{-v^2/4u} dv \ll \widehat{\varrho}(-\xi(u)) e^{-\frac{1}{5}u^{1/3}}.$$

Pour compléter la preuve de (3.5), il reste à évaluer

$$\begin{aligned} F(u, s) &:= \int_{-s/\sqrt{\xi'(u)}}^{u^{2/3}} e^{(u-v)\xi(u)} \varrho(u-v) dv \\ &= e^{\gamma+I(\xi(u))} \sqrt{\frac{\xi'(u)}{2\pi}} \int_{-s/\sqrt{\xi'(u)}}^{u^{2/3}} e^{-H(u,v)} \left\{1 + O\left(\frac{|v|+1}{u}\right)\right\} dv, \end{aligned}$$

puisque $\xi''(t) \ll 1/t^2$. Or

$$H(u, v) = \int_0^v w\xi'(w+u-v) dw = \frac{1}{2}v^2\xi'(u) + O(v^2/u^2).$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} F(u, s) &= e^{\gamma+I(\xi(u))} \sqrt{\frac{\xi'(u)}{2\pi}} \int_{-s/\sqrt{\xi'(u)}}^{u^{2/3}} e^{-\frac{1}{2}v^2\xi'(u)} \left\{1 + O\left(\frac{|v|+1}{u}\right)\right\} dv \\ &= e^{\gamma+I(\xi(u))} \left\{1 - \Phi(-s) + O\left(\frac{1}{u}\right)\right\} = \widehat{\varrho}(-\xi(u)) \left\{\Phi(s) + O\left(\frac{1}{u}\right)\right\}. \end{aligned}$$

Cela achève la preuve de (3.5).

La relation (3.6) résulte alors de (1.5). On notera que $\log y \gg u^{1/3} \log(2u)$ dans le domaine considéré et qu'on peut supposer $h \ll \sqrt{\log 2u}$.

4. Preuve du Théorème 1.2

D'après [6; th.1], nous avons

$$\Psi_\tau(x, y) = \beta\sqrt{\pi\mathfrak{s}_2}\Psi(\sqrt{x}, y)^2 \left\{1 + O\left(\frac{1}{u}\right)\right\} \quad (x \geq y \geq 2)$$

où l'on a posé $\beta := \alpha(\sqrt{x}, y)$, $\mathfrak{s}_2 := |\varphi'_y(\beta)|$. Compte tenu de (1.1) et (1.6), il suit

$$\Delta(x, y) \asymp \frac{x^{\beta-\alpha}\zeta(\beta, y)^2}{\zeta(\alpha, y)^2},$$

où nous avons fait usage de l'estimation $\alpha\sqrt{\sigma_2} \asymp \beta\sqrt{\mathfrak{s}_2}$, qui découle de [10; th. 2].

Posons

$$\begin{aligned} \vartheta_1(x, y) &:= \begin{cases} \xi(u) - \xi(u/2), & \text{si } (x, y) \in (H_\varepsilon), \\ \log\left(1 + \frac{y}{y + \log x}\right), & \text{dans le cas contraire,} \end{cases} \\ \vartheta_2(x, y) &:= \begin{cases} 2 \int_{u/2}^u t \xi'(t) dt, & \text{si } x \geq y > (\log x)(\log_2 2x)^3, \\ \frac{2y}{\log y} \log\left(1 + \frac{\log x}{2y + \log x}\right), & \text{dans le cas contraire,} \end{cases} \\ \vartheta_0(x, y) &:= \vartheta_2(x, y) - u\vartheta_1(x, y). \end{aligned}$$

Nous avons alors, avec la notation ε_y de l'énoncé,

$$\vartheta_0(x, y) = \begin{cases} \vartheta(x, y) & \text{si } (x, y) \in (H_\varepsilon) \text{ ou } y \leq (\log x)(\log_2 x)^3, \\ \vartheta(x, y) + O(u\varepsilon_y) & \text{dans le cas contraire.} \end{cases}$$

La première étape de la preuve de (1.11) consiste à montrer que

$$(4.1) \quad (\beta - \alpha) \log x = u\vartheta_1(x, y) + O(1 + \varepsilon_y \bar{u}) \quad (x \geq y \geq 2),$$

où le terme $O(\varepsilon_y \bar{u})$ peut être omis si $(x, y) \in (H_\varepsilon)$.

Conservons la notation $\alpha_v := \alpha(y^v, y)$, de sorte que $\alpha = \alpha_u$, $\beta = \alpha_{u/2}$. Dans le domaine (H_ε) , il résulte de (3.1) que

$$\beta - \alpha = \frac{\xi(u) - \xi(u/2)}{\log y} + O\left(\frac{1}{\log x}\right).$$

Lorsque, disons, $\log y \leq (\log_2 x)^2$, l'évaluation

$$\sigma_{2,v} = \left(1 + \frac{v \log y}{y}\right) v (\log y)^2 \left\{1 + O\left(\frac{1}{\log(v+1)}\right)\right\}$$

établie en [10; th. 2] fournit, compte tenu de (2.2),

$$\begin{aligned} (\beta - \alpha) \log y &= \int_{u/2}^u \frac{(\log y)^2}{\sigma_{2,v}} dv = \{1 + O(\varepsilon_y)\} y \int_{u/2}^u \frac{dv}{v(y + v \log y)} \\ &= \{1 + O(\varepsilon_y)\} \log\left(1 + \frac{y}{y + \log x}\right). \end{aligned}$$

Cela implique bien (4.1).

Il reste à établir l'estimation

$$(4.2) \quad Z(x, y) := \log\left(\frac{\zeta(\alpha, y)}{\zeta(\beta, y)}\right) = \frac{1}{2} \vartheta_2(x, y) + O(1 + \varepsilon_y \bar{u}) \quad (x \geq y \geq 2),$$

avec la même convention que pour (4.1) concernant le terme d'erreur $O(\varepsilon_y \bar{u})$.

Dans le domaine (H_ε) , l'estimation (4.2) résulte du calcul effectué dans [10; p. 289]. Dans le domaine complémentaire, l'évaluation de $\varphi'_y(\sigma)$ apparaissant au lemme 13 de [10] permet d'écrire

$$(4.3) \quad Z(x, y) = \left\{1 + O\left(\frac{1}{\log y}\right)\right\} \int_\alpha^\beta \frac{y^{1-\sigma} - 1}{(1-\sigma)(1-y^{-\sigma})} d\sigma.$$

La preuve donnée dans [10] de l'évaluation (3.1) pour $\alpha = \alpha_u$ fournit en fait (cf. [10; pp. 285-7]), pour une constante C assez grande,

$$(4.4) \quad \alpha(x, y) = 1 - \frac{\xi(u)}{\log y} + O\left(\frac{1}{(\log y)^2}\right) \quad (C(\log x)(\log_2 x)^3 < y \leq x).$$

Cela implique dans le même domaine $y^\alpha \gg ye^{-\xi(u)} \gg \log y$, de sorte que le terme $1 - y^{-\sigma}$ peut être englobé par le terme d'erreur. Le changement de variables $(1 - \sigma) \log y = \xi(t)$ et l'évaluation (4.4) fournissent alors (4.2).

Lorsque $y \leq C(\log x)(\log_2 2x)^3$, nous effectuons le changement de variables $t = y^\sigma$ dans l'intégrale de (4.3). Il vient

$$Z(x, y) = \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{\log y}\right) \right\} \int_{y^\alpha}^{y^\beta} \frac{y-t}{t(t-1)\log(y/t)} dt.$$

Or l'évaluation (1.2) implique $\beta \log y \ll \log_2 2y$, d'où

$$Z(x, y) = \left\{ 1 + O\left(\frac{\log_2 2y}{\log y}\right) \right\} \frac{y}{\log y} \int_{y^\alpha}^{y^\beta} \frac{dt}{t(t-1)} = \left\{ 1 + O\left(\frac{\log_2 2y}{\log y}\right) \right\} \frac{y}{\log y} \log\left(\frac{1-y^{-\beta}}{1-y^{-\alpha}}\right).$$

Comme nous avons [10; (7.8)]

$$\frac{1}{1-y^{-\alpha v}} = \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{\log y}\right) \right\} \frac{y+v\log y}{y} \quad (v \geq 1, y \geq 2),$$

cela fournit à nouveau (4.2).

Pour achever la preuve du Théorème 1.2, observons que l'évaluation (1.12) résulte de l'avant-dernière formule (3.3) avec $w = u$, de (3.5) avec $s = 0$, de la formule de Hildebrand (3.2), et de la formule analogue pour $\Psi_\tau(x, y)$, telle qu'elle découle de [15; cor. 2.3].

5. Remarque finale

Il résulte de (1.6), (3.3) et (3.5) que, pour une constante absolue convenable $c > 0$,

$$c \leq \kappa(u, u) \leq 1 - c \quad (u \geq 1).$$

On peut établir cela directement, sans invoquer (3.5). En effet, d'après [7; lemme 6.1] et [14; (III.5.63)], nous avons, pour une constante absolue convenable c_0 ,

$$\varrho(u-v) \asymp \varrho(u)e^{v\xi(u)} \quad (1 \leq v \leq c_0\sqrt{u}).$$

Cela implique d'une part

$$\int_0^u e^{v\xi(u)} dv \gg e^{u\xi(u)} \int_0^{c_0\sqrt{u}} e^{-v\xi(u)} \varrho(u-v) dv \asymp \varrho(u)e^{u\xi(u)}\sqrt{u} \asymp \widehat{\varrho}(-\xi(u))$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} \int_u^\infty \varrho(v)e^{v\xi(u)} dv &= e^{u\xi(u)} \int_0^\infty \varrho(u+v)e^{v\xi(u)} dv \\ &\gg \varrho(u)e^{u\xi(u)} \int_0^{c_0\sqrt{u}} e^{v\xi(u)-v\xi(u+v)} dv \gg \varrho(u)e^{u\xi(u)}\sqrt{u} \asymp \widehat{\varrho}(-\xi(u)). \end{aligned}$$

Remerciements. L'auteur tient ici à exprimer sa plus plus chaleureuse gratitude envers l'arbitre pour sa relecture attentive et ses suggestions pertinentes.

Bibliographie

- [1] K. Alladi, The Turán–Kubilius inequality for integers without large prime factor, *J. reine angew. Math.* **335** (1982), 180–196.
- [2] R. de la Bretèche, Y. Lamzouri & G. Tenenbaum, Inégalité de Turán–Kubilius friable et indépendance asymptotique, *Acta Arith.* **183**, n° 2 (2018), 191–199.
- [3] R. de la Bretèche & G. Tenenbaum, Propriétés statistiques des entiers friables, *Ramanujan J.* **9** (2005), 139–202.
- [4] R. de la Bretèche & G. Tenenbaum, Entiers friables : inégalité de Turán–Kubilius et applications (avec R. de la Bretèche), *Invent. Math.* **159** (2005), 531–588.
- [5] R. de la Bretèche & G. Tenenbaum, Sur l'inégalité de Turán–Kubilius friable, *J. London Math. Soc.* (2) **93**, n° 1 (2016), 175–193.
- [6] S. Drapeau, Remarques sur les moyennes des fonctions de Piltz sur les entiers friables; *Quart. J. Math. (Oxford)*, **67**, n° 4 (2016), 507–517.
- [7] É. Fouvry & G. Tenenbaum, Répartition statistique des entiers sans grand facteur premier dans les progressions arithmétiques, *Proc. London Math. Soc.*, (3) **72** (1996) 481–514.
- [8] G. Hanrot, B. Martin & G. Tenenbaum, Constantes de Turán–Kubilius friables : étude numérique, *Exp. Math. Experiment. Math.* **19**, n° 3 (2010), 345–361.

- [9] G. Hanrot, G. Tenenbaum & J. Wu, Moyennes de certaines fonctions multiplicatives sur les entiers friables, 2, *Proc. London Math. Soc.* (3) **96** (2008) 107–135.
- [10] A. Hildebrand & G. Tenenbaum, On integers free of large prime factors, *Trans. Amer. Math. Soc.* **296** (1986), 265–290.
- [11] A. Hildebrand & G. Tenenbaum, On a class of difference differential equations arising in number theory, *J. d'Analyse* **61** (1993), 145–179.
- [12] B. Martin & G. Tenenbaum, Sur l'inégalité de Turán-Kubilius friable, *J. reine angew. Math.* **647** (2010), 175–234.
- [13] H. Smida, Sur les puissances de convolution de la fonction de Dickman, *Acta Arith.* **59**, n° 2 (1991), 124–143.
- [14] G. Tenenbaum, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, 5ème éd., Dunod, 2022.
- [15] G. Tenenbaum & J. Wu, Moyennes de certaines fonctions multiplicatives sur les entiers friables, *J. reine angew. Math.* **564** (2003), 119–166.
- [16] G. Tenenbaum & J. Wu, Moyennes de certaines fonctions multiplicatives sur les entiers friables, 3, *Compositio Math.* **144** n° 2 (2008), 339–376.
- [17] G. Tenenbaum & J. Wu, Moyennes de certaines fonctions multiplicatives sur les entiers friables, 4, *Actes du colloque de Montréal, 2006*, Centre de Recherches Mathématiques, CRM Proceedings and Lecture Notes 46 (2008), 129–141.

Gérald Tenenbaum
Institut Élie Cartan
Université de Lorraine
BP 70239
54506 Vandœuvre-lès-Nancy Cedex
France
gerald.tenenbaum@univ-lorraine.fr